Matematica Discreta - lezione 2

Appunti di Davide Vella 2024/2025

Professori :
Yu Chen
yu.chen@unito.it
Link moodle :
https://informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3002

20/09/2024

Calcolo degli insiemi

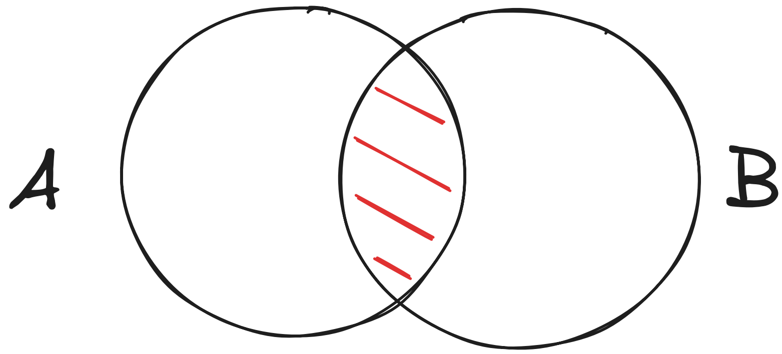
Esistono 2 piani :

- Calcolo degli insiemi
- Calcolo degli elementi

Intersezione

Def : Sia A un insieme, si dice : insieme delle parti di A. È l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A. P(A) : = {x | x $\subseteq$ A}

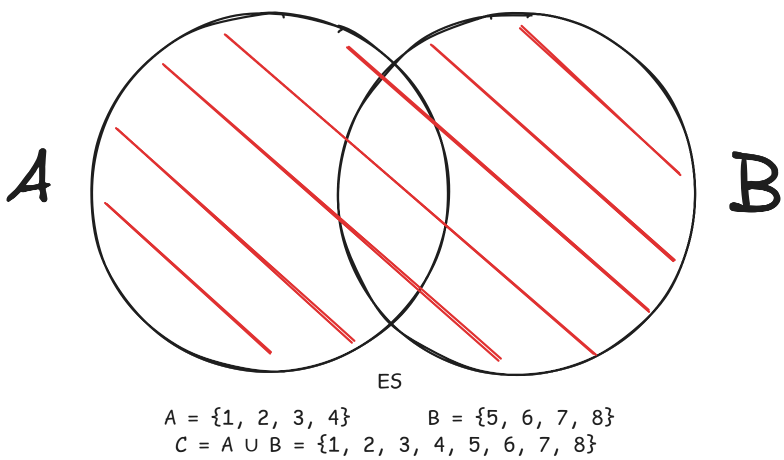
- ES : A = {a, b}, P(A) = {$\emptyset$, {a}, {b}, {a, b}}
  P sono tutti i sottoinsiemi di un insieme.
  Def : se |A| = n, allora |P(A)| = 2^n.
  - ES : dati A e B, allora A = B $\iff$ P(A) = P(B).
    Def : Siano A e B insiemi. Si dice insieme intersezione di A e B l'insieme A $\cap$ B : = {x | x $\in$ A e x $\in$ B}



- ES : A = {1,2,3} B = {3,4,5} C = {4,5}, $A \cap B$ = {3} , $A \cap C$ = {$\emptyset$}
  A e B si dicono disgiunti se $A \subseteq B = \emptyset$

Unione

Unione di A e B è un insieme $A \cup B$: = {x | $x \in A$ oppure $x \in B$}



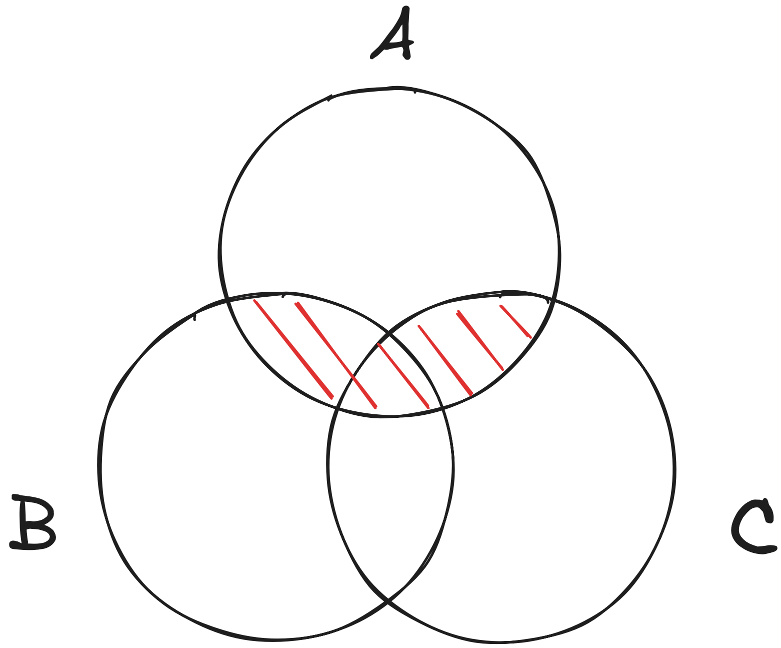
- ES *guarda casi sopra* : $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5} (non si scrivono le ripetizioni, in questo caso il 5), $A \cup C$ = {1, 2, 3, 4, 5}.
  Siano A_1, A_2, ..., A_n insiemi : $^n\cup_i$ A = A1 $\subseteq$ A2 $\subseteq$ A...

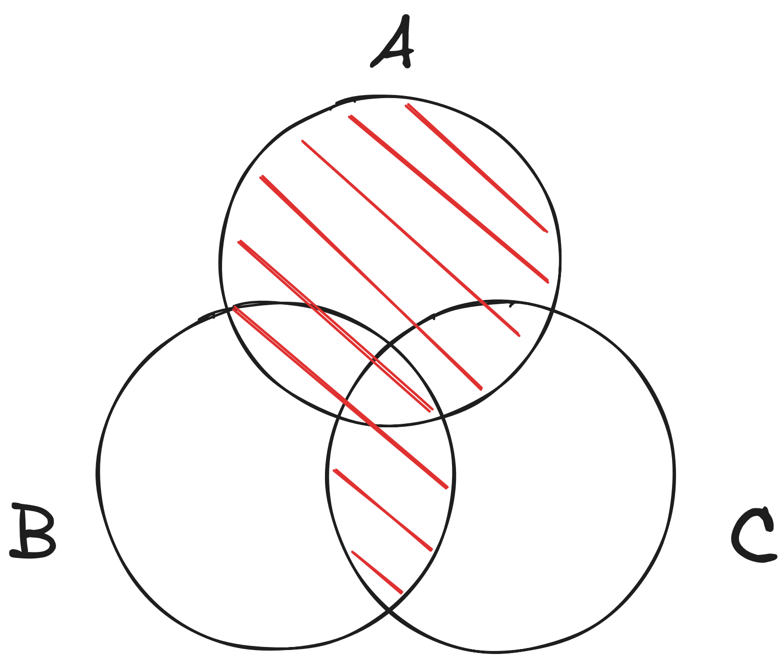
Operazione sugli insiemi

Proprietà :

1. Associatività : A, B, C. *$(A \subseteq B) \subseteq C$* vuol dire che si calcola prima l'intersezione tra A e B e poi l'intersezione tra il risultato e C. *$(A \subseteq B) \subseteq C = A \subseteq (B \subseteq C)$*. Vale lo stesso per le unione.
2. Idempotente : $A \subseteq A = A$, $A \subseteq \emptyset = \emptyset$. Vale lo stesso per le unioni
3. distributiva : Siano A, B, C tre insiemi. Allora valgono le uguaglianze :

- A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C).
  Vale anche :
- A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C).

1. 

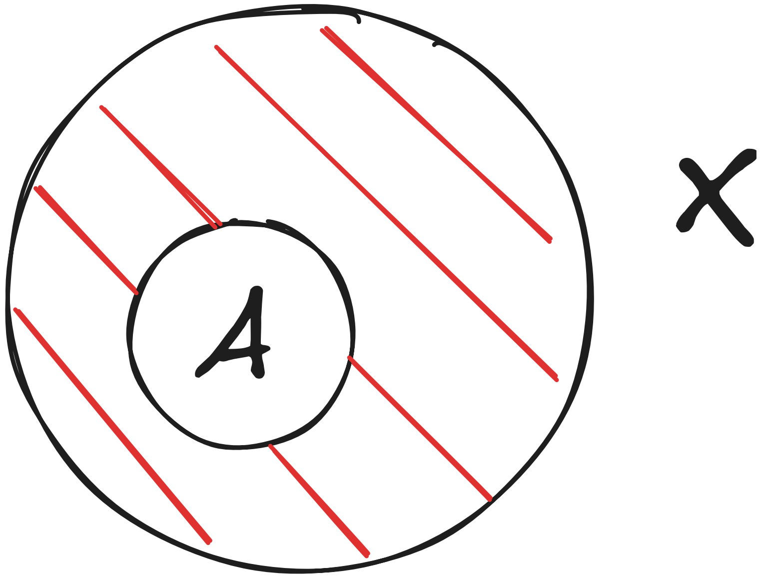
   *A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
2. 

   A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C).

Complementi

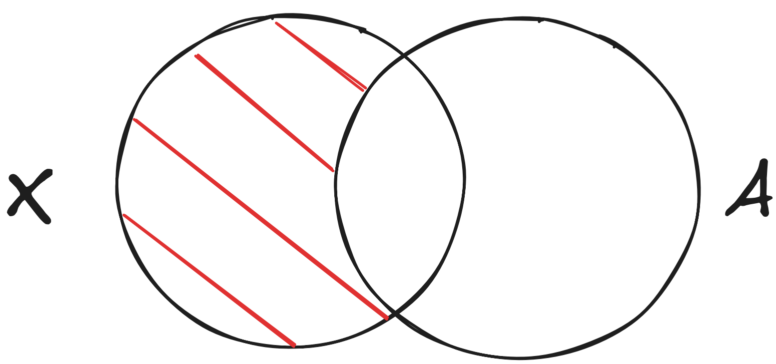
Def : Sia A un sottoinsieme di X (sia A che X sono insiemi quindi). Si dice complementare (o complemento) di A in X e si denota il sottoinsieme degli elementi di X non in A, precisamente :

- C_X (A) : = {x $\in$ X | x $\notin$ A}



Se A $\subseteq$ X, si scrive C_X(A) = $\overline{A}$

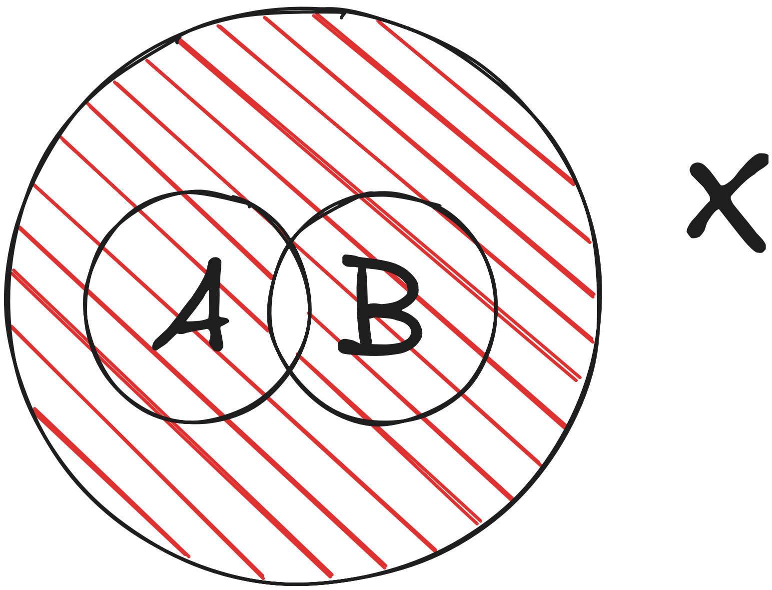
Def' : dati insiemi A e X, la differenza di X ed A è un sottoinsieme di X, X - A : = {x $\in$ X | x $\notin$ A}



Teorema (De Morgen) :

Siano A, B, X insiemi e A $\subseteq$ X, B $\subseteq$ X, allora :

- C_X (A $\cap$ B) = C_X (A) $\cup$ C_X (B), $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- C_X (A $\cup$ B) = C_X (A) $\cap$ C_X (B). $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.



Partizioni e quozienti

Def : Siano A_1, A_2, ..., A_n sottoinsiemi di un insieme A, allora lo scrivo $\{A_i\}_{i=1}^n$:= {A1, A2, ..., An} è un ricoprimento di A se $\cup_{i=1}^n$ Ai (= A1 ∪ A2 ∪ ... ∪ An) = N

- ES : A = $\mathbb{Z}$: A1 = {numeri pari interi}, A2 = {numeri dispari interi}. A = A1 ∪ A2. {A1, A2} ricoprimento di A.
  Def 2) : $\{A_i\}_{i=1}^n$ è una partizione di A se :

1. $\{A_i\}_{i=1}^n$ è un riempimento
2. $A_i \neq \emptyset$, i=1, 2, 3, 4, ..., n
3. A_i intersezione A; = ∅ per tutti 1<= i <= n, e ... *guarda appunti prof

- ES : A_1 = {numeri interi pari} A_2 = {numeri interi dispari}

Note :
Dire X-A è uguale a dire X\A
: =, definiamo un insieme
$\iff$ = se e solo se.
∅ = Insieme vuoto, senza elementi.
∪ = unione
⊆ = è un sottoinsieme di, è incluso in.
⊄ = non è un sottoinsieme di.