Algebra Lineare - lezione 3

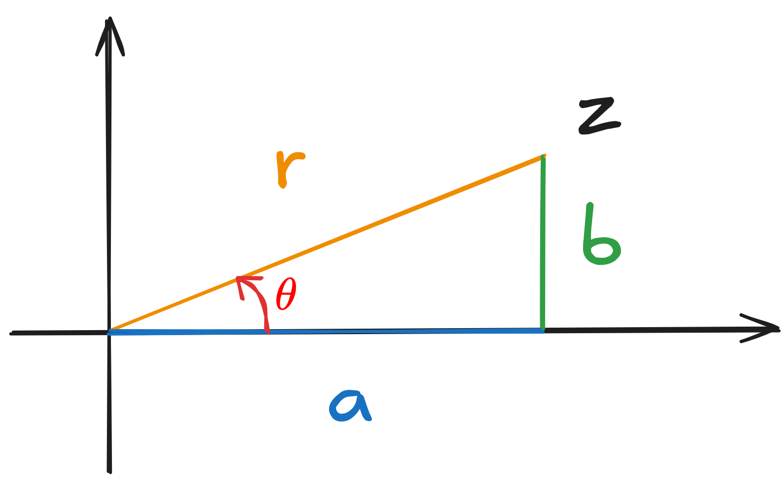
Appunti di Davide Vella e Alessandro Salerno 2024/2025

Marco Radeschi
marco.radeschi@unito.it
Link al moodle :
informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

25/09/2024

Coordinate polari

Finora un numero complesso è stato scritto nella forma a + ib e questo ci permette di rappresentare un numero all'interno del piano complesso mettendolo come quel punto con coordinate (a, b). Le coordinate polari sono un'altra coppia di numeri che rappresenta sempre un punto del piano, ma anziché rappresentarlo utilizzando le distanza da X ed Y utilizza la distanza r del punto dall'origine e l'angolo (in senso antiorario) che il segmento da z all'origine crea con l'asse delle X.



In questo esempio, le coordinate polari di z sono (r, θ).

Sapendo le coordinate polari è sempre possibile ottenere le coordinate cartesiane utilizzando la trigonometria. Riconosciamo la forma del triangolo rettangolo ed identifichiamo r come il valore dell'ipotenusa e sappiamo che :

- $a = r \cos \theta$
  mentre

- b = r sin θ
  Seno e coseno sono due valori associati ad un angolo. Prendendo la circonferenza unitaria (goniometrica) e preso un qualunque punto sulla circonferenza unitaria che forma un angolo θ con l'asse delle X, la sua prima coordinata è il coseno di θ, mentre la seconda è il seno di θ. Da questa definizione seguono una serie di cose tra cui le formule usate sopra applicate al triangolo rettangolo.
  Visto ciò di cui sopra, un numero z = a + bi può essere scritto in coordinate polari come :

$$z = r \times \cos\theta + i \times (r \times \sin\theta) = r \times (\cos\theta + i \times \sin\theta)$$

> **Note**
>
> Notiamo che r = $\sqrt{a^2+b^2}$ quindi, r = norma di z (|z|). θ è detto argomento di z $\theta = Arg(z)$.

Formula di Eulero

$$\cos\theta + i \times \sin\theta = e^{i\theta}$$

È comodo scrivere così perché in questo modo ogni numero complesso z $\neq$ 0 si scrive come

$$z = re^{i\theta}$$

Si deve notare che per $e^{i\theta}$ valgono le solite proprietà degli esponenziali, quindi, vale la seguente relazione :

$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} \times e^{i\phi}$$

Si può dimostrare ciò nel seguente modo :

$$e^{i(\theta+\phi)} = \cos\theta + \phi + i\sin\theta + \phi$$

$$= \cos\theta \times \cos\phi - \sin\theta \times \sin\phi + i(\sin\theta \times \cos\phi + \cos\theta \times \sin\phi)$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta) \times (\cos\phi + i\sin\phi)$$

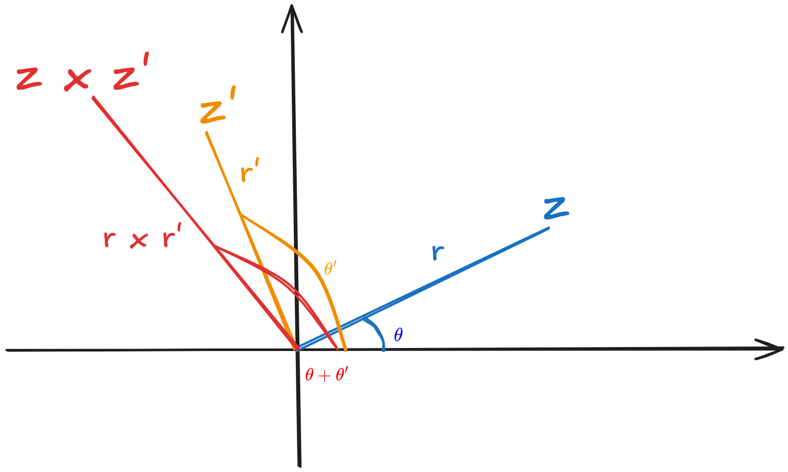
$$= e^{i\theta} \times e^{i\phi}$$

Prodotto

Se abbiamo una $z = r_1 \times e^{i\theta_1}$ e una $z_2 = r_2 \times e^{i\theta_2}$ allora le coordinate polari si dimostrano utili per calcolare il loro prodotto, il quale è :

$$z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \times e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

La norma di $z_1 \times z_2$ è il prodotto delle due norme, mentre l'argomento è $\theta_1 + \theta_2$ ovvero la somma dei due argomenti



Esempio

$$z_1 = 3 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \;\; e \;\; z_1 = 4 \times e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 \times z_2 = 12 \times e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})}$$

Inverso

L'inverso z^{-1} ha argomento di $-\theta$ opposto a quello di θ di z e modulo $|z^{-1}|$ = r^{-1} inverso rispetto a $|z|$ = r. In sintesi :

- $Arg(z^{-1})$ = $-Arg(z)$
- $|z^{-1}|$ = r^{-1}

Notiamo anche che due numeri complessi non nulli espressi in forma polare r0ei#0 , r1ei#1 , sono lo stesso numero complesso se e solo se valgono entrambi i fatti seguenti:

- $r_1 = r_2$
- θ_1 = θ_2 + $2k\pi$ (o $2\pi m$), $\forall k \in \mathbb{Z}$

Potenze

Per svolgere le potenze di un numero complesso non conviene usare il classico metodo del $z \times z \times z...$ perché ciò risulta in due problemi :

- Difficile per grandi potenze

- Geometricamente, non è possibile identificare facilmente ciò che risulta dalla moltiplicazione
  Quando il numero complesso è espresso in coordinate polari diventa tutto più chiaro :

$$z = 1 + i \to z^2 = (1+i) \times (1+i) = (1-1) + i(1+1) = 2i$$

$$z^3 = z^2 \times z = 2i \times (1+i)$$

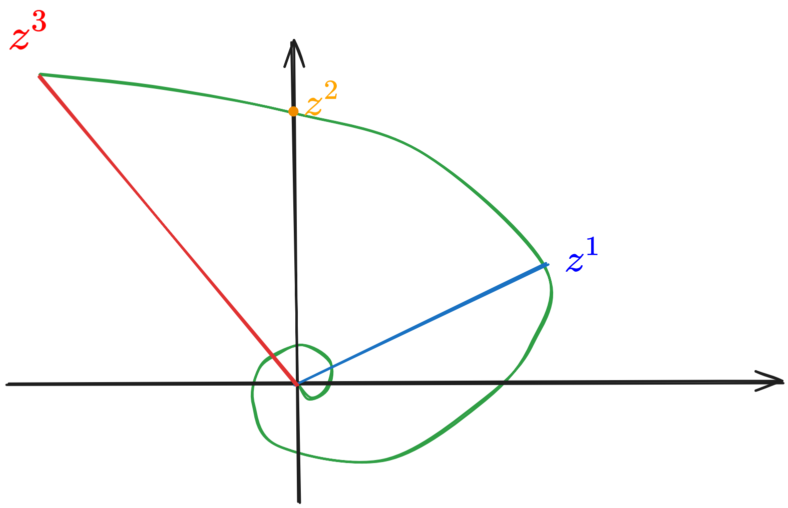
  Vediamo come ciò risulta complicato alla lunga. In alternativa possiamo scrivere :

$$z = r \times e^{i\theta} \to z^n = (r \times e^{i\theta})^n = r^n \times (e^{i\theta})^n = r^n \times e^{in\theta}$$

  Allora :

- |z| = r $\to$ |z^n| = |z|^n
- Arg(z^n) = nArg(z)

Argomento:
Questo deriva direttamente dalle proprietà degli esponenti perché l'argomento è il valore che viene moltiplicato per i nell'esponente di e ed
elevando il tutto alla n si ottiene lo stesso risultato di moltiplicare l'esponente per n.



Radici

Def : Una radice n-esima di $z_0 \in \mathbb{C}$ è un $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^n = Z_o$.
Osservazione fondamentale: Avendo la scrittura cartesiana di un numero complesso, si ha una rappresentazione unica del numero. In altre parole, lo stesso numero ottenuto in due modi diversi, la scrittura dev'essere la stessa. Questo non è garantito per le coordinate polari. Dati due numeri

$$z = re^{i\theta}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

è noto che r = |z| e r_2 = $|z_2|$, ma è possibile che $\theta \neq \theta_2$. Questo è dovuto alla modularità dell'angolo θ.

Le n soluzioni dell'equazione $z^n = z_0$ hanno tutte lo stesso modulo $\sqrt[n]{r_0}$ e argomenti che variano in una sequenza di angoli separati da un passo costante $\frac{2\pi}{n}$. Geometricamente, questo significa che le soluzioni formano i vertici di un poligono regolare centrato nell'origine con n lati e raggio $\sqrt[n]{r_0}$.

Esempi :

Example

L'equazione z^n = 1 ha come soluzioni i numeri complessi

$$z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

dove k = 0, 1, . . . , $n - 1$. Queste n soluzioni sono i vertici di un poligono regolare di raggio 1
con n lati, avente 1 come vertice. Questi numeri sono le radici n-esime dell'unità.

Example

Le tre soluzioni dell'equazione$z^3 = -8$ hanno modulo $\sqrt[3]{8} = 2$ e argomento $\frac{\pi}{3}$,π e $\frac{5\pi}{3}$. Si tratta dei numeri complessi

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2e^{i\pi} = -2$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$