

Algebra Lineare - lezione 4

Appunti di Davide Vella e Alessandro Salerno 2024/2025

Marco Radeschi

marco.radeschi@unito.it

Link al moodle :

informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

30/09/2024

Monimi

Un monomio definito su un campo di numeri K , rispetto ad un insieme di variabili x, y è una espressione del tipo : $a \times x^n \times y^m$, dove $a \in K$ e $m, n \in \mathbb{N}$.

Example

$$3x^2y^3, \sqrt{5}x^1y^0, -5 = x^0y^0$$

Il grado di un monomio $a \times x^n \times y^m = m + n$ (Deg è l'abbreviazione di grado). Nei casi visti sopra quindi, questi sarebbero i gradi in ordine di apparizione.

Example

$$\deg_1 = 2 + 3 = 5, \deg_2 = 1, \deg_3 = 0$$

Polinomio

Un polinomio su un campo K rispetto alle variabili x, y è una somma di monomi.

Example

$$\sqrt{3}x^5y + 2x^{1540}y^2 + 3$$

Di nuovo, il grado dei 3 monomi sopra (che formano un monomio) è :

$$\deg_1 = 8, \deg_2 = 1542, \deg_3 = 0$$

Il grado di un polinomio è dato dal massimo grado dei monomi convolti (in questo caso 1542).

Polinomi in una variabile

Dato un dato K ,

$$K[x] = \{\text{polinomi nella a variabile } x\} \ni P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n$$

In questo caso il grado è n .

Se troviamo a pedice di $K[x]$ un numero n , vuol dire che il grado dei polinomi all'interno di K sono minori uguali (\leq) di n .

$$K[x]_n = \{\text{polinomi di grado } \leq n\}$$

Example

$$K[x]_3 = \sqrt{3}x^3 + 1, -x^2 + 2 \dots$$

Operazioni in $K[x]$

Somma

Se

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots b_nx^n$$

Allora la loro somma è :

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 \dots$$

Example

Prendiamo

$$P(x) = 3 + 2x + 5x^2$$

$$Q(x) = -1 + 6x$$

La loro somma è :

$$P(x) + Q(x) = (3 + (-1)) + (2 + 6)x + 5x^2 = 2 + 8x + 5x^2$$

Moltiplicazione

La moltiplicazione è simile all'addizione. Dobbiamo moltiplicare ogni elemento del primo polinomio per ogni elemento del secondo polinomio. Vediamo subito un esempio :

Exemple

$$\begin{aligned}(3 + 5x + x^2) \times (2 + x) &= \\(3 \times 2) + (3 \times x) + (5x \times 2) + (5x \times x) + (x^2 \times 2) + (x^2 \times x) &= \\6 + 3x + 10x + 5^2 + 2^2 + x^3 &= \\6 + 13x + 7x^2 + x^3 &= \end{aligned}$$

Divisione

Il caso in \mathbb{Z}

Prendiamo in esami il campo \mathbb{Z} . Nel campo \mathbb{Z} possiamo fare le seguenti operazioni :

- addizione, $m + n$
- sottrazione, $m - n$
- moltiplicazione. $m \times n$

Non possiamo fare la divisione come la conosciamo ($\frac{m}{n}$), ma dobbiamo fare una divisione che ci restituisca del resto e scriverla sotto forma di :

$$m = q \times n + r$$

Dove :

$$m, n \neq 0 \rightarrow \exists q, r \in \mathbb{Z}, r < m$$

Exemple

$$16 = 3 \times 5 + 1$$

Se il resto di una divisione è uguale a zero, si dice che n divide m .

Il caso con i polinomi, $K[x]$

Di nuovo, possiamo fare le seguenti operazioni :

- addizione, $P(x) + Q(x)$

- sottrazione, $P(x) - Q(x)$
- moltiplicazione. $P(x) \times Q(x)$

La divisione di nuovo non possiamo fare $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ma dobbiamo ottenere una divisione che può darci del resto, quindi vediamo come si fa.

Se abbiamo

$$P(x) = q(x) \times Q(x) + r(x)$$

Dove :

$$P(x), Q(x) \in K[x] \rightarrow q(x), r(x) \in K[x]$$

Example

$3x^2 + x + 1$	$x + 1$
$3x^2 - 3x$	$3x$
<hr/>	
$0 - 2x + 1$	

$3x^2 + x + 1$	$x + 1$
$3x^2 - 3x$	$3x - 2$
$0 - 2x + 1$	
$-2x + 2$	
$0 + 3$	

↓
Resto della divisione

Possiamo vedere come $P(x)$ è $3x^2 + x + 1$, $q(x)$ è $x + 1$, $r(x)$ è $3x - 2$, quindi :

$$3x^2 + x + 1 = (x + 1)(3x - 2) + 3$$

Osservazione :

$P(x)$ polinomio è una funzione, ovvero qualcosa che ci permette di prendere un numero dal campo e ne restituisce un altro :

$$a \in K \rightarrow P(a) = a_0 + a_1 \times a + a_2 \times a^2 \dots a_n \times a^n$$

Example

$$P(x) = x^2 + 1$$

$$P(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$P(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$P(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Def :

Dato un polinomio $P(x)$ e un elemento a , è una soluzione $P(x)$ se $P(a) = 0$.

Teorema

Un elemento in K è una soluzione di un polinomio $P(x) \iff$ il polinomio $x - a$ divide il polinomio $P(x)$.

Example

La molteplicità di 2 come divisore di 24 è 3

$$\begin{array}{l} m = 24 \\ n = 2 \end{array} \rightarrow 24 = 2 \times 12 = 2^2 \times 6 = 2^3 \times 3$$



In generale, la molteplicità di un qualunque numero n come divisore m è quel k valore ($k \in \mathbb{N}$) è $m = n \times r$, con $n \nmid r$.

Def

Moltiplicazione di un polinomio $Q(x)$ come divisore di $P(x)$ = potenze k tale che

$$P(x) = Q(x)^k \times R(x) \rightarrow Q(x) \nmid R(x)$$

Example

Moltiplicazione di $x - 2$ come divisore di $2x^2 - 8x - 8$

molteplicità = 2

$$2x^2 - 8x + 8 = (x - 2) \times (2x - 4) = (x - 2)^2 \times 2$$

$\begin{array}{r} 2x^2 - 8x + 8 \\ 2x^2 + 4x \\ \hline 0 + 4x - 8 \\ 4x - 8 \\ \hline 0 + 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline 2x - 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2x - 4 \\ 2x + 4 \\ \hline 0 + 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x - 2 \\ \hline 2 \end{array}$
--	---	---	--

Def :

Sia $a \in \mathbb{C}$ soluzione di $P(x)$ ($\rightarrow (x - a)/P(x)$) molteplicità di a come soluzione di $P(x)$ = molteplicità di $x - a$ come divisore di $P(x)$.

Example

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$P(-1) = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

-1 è una soluzione di $P(x)$, quindi cerchiamo la molteplicità di -1 con $x - a$, ovvero $x + 1$.

$$P(x) = (x + 1) \times (x^2 + 2x + 1)$$

Possiamo riscrivere : $(x^2 + 2x + 1)$ come $(x + 1)(x + 1)$, quindi :

$$(x + 1) \times (x^2 + 2x + 1) = (x + 1)(x + 1)(x + 1) = (x + 1)^3$$

Def :

Sia $a \in \mathbb{C}$ una radice/soluzione di $P(x)$, la moltiplicazione di a è quel $K \in \mathbb{N}$ tale che :

$$P(x) = (x - a)^n \times Q(x), \text{ con } Q(a) \neq 0$$

Exemple

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$P(2) = 4 - 6 + 2 = 0$$

Se dividiamo quindi $P(x)$ con $x - 2$ (che non verrà scritto di seguito) otteniamo :

$$P(x) = (x - 2) \times (x - 1)$$

Ad occhio ci accorgiamo subito che $x - 1$ non può essere diviso per $x - 2$, ma in caso contrario basta sostituire la x con 2 e vedere se il risultato è zero, in caso contrario, non è divisibile :

$$P(x) = x - 1$$

$$P(2) = 2 - 1 \neq 0$$

Teorema :

Ogni polinomio di grado n ha coefficienti in qualunque campo ha n soluzioni anche quando sono contate le molteplicità.

Teorema fondamentale dell'algebra :

Ogni polinomio di grado n in $C[x]$ ha esattamente n soluzioni, se contate con le molteplicità.

Note :

\iff = se e solo se.

$n \mid m$ = un elemento n divide un elemento m .

$n \nmid m$ = un elemento n non divide un elemento m .