Algebra Lineare - lezione 1

Appunti di Davide Vella 2024/2025

Marco Radeschi
marco.radeschi@unito.it
Link al moodle :
informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

19/09/2024

Introduzione e sistemi numerici

Introduzione

M.D.A.G. (Matematica discreta e algebra lineare)

Algebra lineare comprende : vettori, matrici, sistemi lineari, teoria spettrale.

Cosa studiare :
- Note di Bruno Martelli (pdf trovabile su *moodle*).
- Note dei professori (pdf trovabile su moodle).

Esami :
- 2 esami separati di cui si fa la media

Struttura esami :
- 10 domande chiuse :
- 1 punto a domanda.
- nessuna penalità in caso di risposa errata.
- incentrate sulla teoria (nessuna dimostrazione).
- minimo 6 punto da totalizzare per far correggere le domande aperte.
- 2 domande aperte :
- punti a domanda.
- vengono corrette con almeno 6 domande chiuse corrette.

Cosa si può portare :
- Note/formule per un massimo di 4 facciate di foglio a4 (2 fogli protocollo).
- Calcolatrice (che compie solo le 4 operazioni di base +-x/) in caso di discalculia e altri casi certificati.

A cosa server Algebra lineare :
Algebra lineare serve, ad esempio, a manipolare i vettori per ottenere delle informazioni richieste.
Definizione vettore (brutta) :
Oggetti che si possono sommare tra di loro e possono essere moltiplicati con un numero.
Alcuni esempi di vettore sono le fotografie/fotogrammi (la matrice dei valori dei pixel), un segnale (onda che viene messa sul piano cartesiano) o ancora un input (array).

Numeri

Esistono tanti sistemi numerici che hanno diverse definizioni di numeri :

Numeri naturali

$\mathbb{N}$ = {0,1,2,3,4, ...}
Ce un numero speciale (0). Per ogni elemento costruito (numero) e successore (1 è successore di 0, 2 è successore di 1...).

Numeri interi

$\mathbb{Z}$ = $\mathbb{N} \cup$ {-a | a $\in \mathbb{N}$, a $\neq$ 0}
Tutti i numeri interi positivi e negativi
$\mathbb{Z}$ = {0, 1, -1, 2, -2}

Numeri razionali

$\mathbb{Q}$ = {$\frac{a}{b} | a, b \in, b \neq \mathbb{Q}$}
$\mathbb{Q}$ = {$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$...}
Due frazioni diverse possono rappresentare lo stesso numero se :

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se $a \times d = b \times c$

Numeri reali

$\mathbb{R}$ = insieme delle classi di equivalenza di successione di Cauchy di numeri $\mathbb{Q}$.
es: π è un numero reale. Possiamo approssimare π a 3,14 ($\frac{314}{100} \to a_1$) o 3,141($\frac{3141}{1000} \to a_2$) e ancora 3,1415($\frac{31415}{10000} \to a_3$). $a_1, a_2 e a_3$ Sono tutte successioni di numeri razionali che si avvicinano sempre di più al valore di π. Questo è detta **Successione di Cauchy**, serie di numeri razionali

che si avvicinano sempre di più al numero reale. Tutte le successioni di Cauchy che si avvicinano allo stesso numeri si dice che coincidono.

> **Note**
>
> Possiamo dire quindi che, un numero reale è una serie di approssimazioni da una successione di cauchy r = $(a_n)_n)$.

Operazioni

Vediamo + e $\times$ in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ diamo per scontato che li sappiamo già). Per moltiplicare e sommare due numeri reali, dato che non possiamo scrivere un numero infinito, useremo le approssimazioni.

Addizione :

$r + r' = (a_n + b_n)_n$

Moltiplicazioni :

$r \times r' = (a_n \times b_n)_n$

Divisioni :

$\frac{r}{r'} = r \times (r')^{-1}$

Proprietà delle operazioni (in $\mathbb{R}$)

Le proprietà dalla 1 alla 4 valgono per le addizioni :

1. La somma è commutativa, $r + r' = r' + r$, $\forall r, r' \in \mathbb{R}$
2. La somma è associativa, $\forall p, q, r \in \mathbb{R} \rightarrow (p + q) + r = p + (r + q)$
3. Esiste un elemento neutro all'addizione (0) $\forall r \in \mathbb{R}.\ r + 0 = r$
4. Per ogni elemento di $\mathbb{R}$ esiste un elemento opposto, $\forall r \in \mathbb{R} \exists -r,\ r + (-r) = 0$
   Le proprietà dalla 5 alla 9 valgono per le moltiplicazioni :
5. La moltiplicazione è commutativa, $r \times r' = r' \times r$, $\forall r, r' \in \mathbb{R}$
6. La moltiplicazione è associativa, $\forall p, q, r \in \mathbb{R} \rightarrow (p \times q) \times r = p \times (r \times q)$
7. Esiste un elemento neutro alla moltiplicazione (1) $\forall r \in \mathbb{R}.\ r \times 1 = r$

8. Per ogni elemento di $\mathbb{R}$ esiste un elemento inverso, $\forall r \in \mathbb{R} \exists (r)^{-1}$, $r \times (r)^{-1} = 1$
9. Vale la proprietà distributiva, $\forall p, q, r \in \mathbb{R} \to (p+q) \times r = p \times r + q \times r$

Def : Un insieme che soddisfi le proprietà dalla 1 alla 9 si dice che è un "campo". $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ sono dei campi.

Ordine

Def : un campo ordinato è un campo k con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che :

1. $\forall a, b \in k \to a \leq b$ oppure, $b \leq a$
2. Se $a \leq b$ e $b <= a$, $b = a$
3. Se $a_1 \leq b_1$ e $a_2 \leq b_2$, $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$
4. Se $a \leq b$ e $0 \leq c$, $a \times c \leq b \times c$
5. Proprietà di Archimede : $\forall a \leq b \; \exists \; n \in \mathbb{N}$ tale che $b \leq n \times a$, ovvero, per ogni a minore o uguale a b esiste un numero naturale n che genera un prodotto, quando moltiplicato con a, che è maggiore di b.

Def : se un campo rispetta le condizioni dalla 1 alla 4 si dice che è un campo ordinato, se un campo rispetta anche la 5, allora si dice che è un campo ordinato archimedeo.