Ricerca Operativa - lezione 3

Appunti di Davide Vella 2024/2025

Pierre Hosteins
pierre.hosteins@unito.it
Link al moodle :
https://informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3008

25/02/2025

Contenuti

Modelli di mix

Un caso di approvvigionamento.

Esempio

L'acciaieria PLASTIK deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX, il quale si produce con :

- manganese (almeno 1%)
- cromo (almeno 18%)
- molibdeno (almeno 2%)
  I fornitori offrono :
- 2kg di manganese, 2kg di cromo, 1kg di molibdeno a 10 euro.
- 2kg di manganese, 3kg di cromo, 1kg di molibdeno a 15 euro.
- 1kg di manganese, 2kg di cromo, 5kg di molibdeno a 20 euro.
  Facciamo in tabella

Tipo conf	Manganense	Cromo	Molbdeno	Costo	Fabbisogno (in kg per ottenere 1000 tonnelate di Acc. inox)
1	2	2	1	10	10000
2	2	3	1	15	180000
3	1	2	5	20	20000

Variabili

$x_i = \text{confezioni di tipi i } (1, 2, 3) \text{ aquistate}$

Formule matematiche utili per modellare il problema :

- Costo di acquisto : $10x_1(\text{conf. }1) + 15x_2(\text{conf. }2) + 20x_3(\text{conf. }3)$.
- Quantità di manganese acquistata : $2x_1 + 2x_2 + 1x_3$.
- Quantità di cromo acquistata : $2x_1 + 3x_2 + 2x_3$.
- Quantità di molibdeno : $1x_1 + 1x_2 + 5x_3$.

Vincoli

Da quanto visto nei due punti sopra, prendiamo la quantità dei vari materiali e confrontiamoli con il fabbisogno (i nostri minimi in questo problema)

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \geq 10000 \text{ (fabbisogno manganese)}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 180000$$

$$1x_1 + 1x_2 + 5x_3 \geq 20000$$

$$\min \text{costo} = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$$

Formalizzazione

Più utile per problemi simili, ma con dati diversi.

Dati

- insiemi K di confezioni e M di metalli
- C_k = costo delle confezioni. $k \in \mathbb{K}$
- f_m = fabbisogno del metallo. $m \in \mathbb{M}$
- a_{km} = quantità di metallo $m \in M$ nella confezione $k \in K$.

Variabili

x_k = quantità di confezioni di tipo $k \in K$ comprate.

Obbiettivo

$$\min \text{z} = \sum_{k \in K} c_k x_k$$

Vincoli

$$\sum a_{km} x_k \geq f_m, \quad \forall m \in M$$

$$x_k \in Z_+, \quad \forall k \in K$$

Problema di trasporto

Un’azienda deve far transitare dei containers da certi depositi (Verona, Perugia, Roma, Pescara, Taranto e Lamezia) verso i principali porti (Genova, Venezia, Ancona, Napoli e Bari). Il numero di containers disponibili in ogni deposito e la domanda in container in ogni porto sono :

	Disponibilità
Verona	10
Perugia	12
Roma	20
Pescara	24
Taranto	18
Lamezia	40

	Domanda
Genova	20
Venezia	15
Ancona	25
Napoli	33
Bari	21

Il costo di trasporto è di 1 Euro per km. Le distanze fra depositi e porti, in km, sono le seguenti:

	Genova	**Venezia**	**Ancona**	**Napoli**	**Bari**
Verona	290	115	355	715	810
Perugia	308	340	165	380	610
Roma	505	530	285	220	450
Pescara	655	450	155	240	315
Taranto	1010	840	550	305	95
Lamezia	1072	1097	747	372	333

Dati

- l'insieme dei depositi D e l'insieme dei porti P.
- La disponibilità e la domanda in containers: A_i per $i \in D$ e D_j for $j \in P$.
- c :Il costo per km.
- δ_{ij} = la distanza fra $i \in D$ e $j \in P$.

Variabili

$x_{ij} \geq 0$ = quantità di containers trasferiti fra $i \in D$ e $j \in P$ (che dovrebbero prendere valori interi).

Obbiettivo

$$\text{minimizzare c} \sum_{i \in D} \sum_{j \in P} \delta_{ij} x_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{i \in D} x_{ij} \geq D_j, \quad \forall j \in P$$

$$\sum_{j \in P} x_{ij} \geq A_i, \quad \forall i \in D$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in D, j \in P$$

Proprietà di integralità

Se i parametri sono interi, la soluzione è anche lei intera, per via delle proprietà della matrice che raccoglie i coefficienti dei vincoli (unimodularità).

Problema di assegnamento

Una fabbrica possiede 5 macchine {1, 2, 3, 4, 5} che devono processare 5 lavori diversi {A, B, C , D, E }. Ogni macchina può gestire ogni lavoro ma hanno tutte un'efficienza diversa rispetto a ogni lavoro. Ogni combinazione macchina-lavoro corrisponde dunque a un livello di produttività diverso, espresso in pezzi prodotti per ora nella seguente matrice:

$$P_{mj} = \begin{array}{c} \text{macchina} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ 10 & 7 & 9 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 12 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 9 & 8 & 8 \\ 9 & 18 & 2 & 4 & 3 \\ 9 & 9 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

La matrice è : macchina-lavoro.

Dati

- J = insieme di lavori
- M = insieme di macchine
- p_{mj} = valori di produttività

Variabili

- x_{mj} = 1 se la macchina $m \in M$ è assegnata al lavoro $j \in J$, altrimenti 0.

Obbiettivo

$$\max \text{z} = \sum_{m \in M} \sum_{j \in J} p_{mj} x_{mj}$$

Vincoli

$$\sum_{j \in J} x_{mj} = 1, \quad \forall m \in M \text{ (un lavoro per macchina)}$$

$$\sum_{m \in M} x_{mj} = 1, \quad \forall j \in J \text{ (una macchina per lavoro)}$$

$$x_{mj} \in \{0, 1\}, \quad \forall m \in M, j \in J$$

Problema di matching

Nel problema dell'assegnamento, si accoppiano elementi di due nature diverse, per es : un'azione (lavoro) a una risorsa (macchina). Nel problema di matching, si accoppiano elementi della stessa natura.
Consideriamo 2n persone ad accoppiare in n binomi di lavoro :

- c_{ij} = beneficio di accoppiare i e j (magari due persone che vanno più d'accordo tra di loro e quindi lavorano meglio e in modo più produttivo)
- x_{ij} = 1 se i e j sono accoppiati, con $1 \leq i < j \leq 2n$

$$\text{max z} = \sum_{i=1}^{2n-1} \sum_{j=i+1}^{2n} c_{ij} x_{ij}$$

\sum*{k<i}x*{ki} + \sum*{j>i} x*{ij} = 1, i = 1, 2, 3, \dots, n

x_{ij} \in (0, 1),