Ricerca Operativa - lezione 2

Appunti di Davide Vella 2024/2025

Pierre Hosteins
pierre.hosteins@unito.it
Link al moodle :
https://informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3008

20/02/2025

Contenuti

Alcuni metodi per trattare i problemi

- Teoria del grafo : per problemi modellati su una rete
- Programmazione Leneare (PL) : problemi con formmule e obbiettivi lineari e variabili continue (variabili che cambiano in modo continuo, ad esempio il tempo)
- PL mista intera (PLMI) : PL con variabili continue e intere (variabili che cambiano in modo intero, n macchine : 1,2,3... non ha senso dire $\frac{1}{2}$macchina).
  Metodi che non studieremo :
- Programmazione non-lineare
- Programmazione multi-obbiettivo : più di un obbiettivo da ottimizzare
- Programmazione stocastica o robusta : quando alcuni parametri sono incerti (magari quale direzione prendere per migliorare le consegne e così via)
- Metodi di decomposiozione in programmazione matematica : generazione di colonne, decomposizione di benders,...
- Teoria delle probabilità
- Teorida delle code
- Teoria dei giochi : quando diversi attori interagiuscono fra di loro
- Simulazione di scenari "what-if"
- Algoritmi euristici e meta-euristici (calcolano soluzioni approsimative di problemi che richiederebbero troppo tempo (miliardi di anni magari))

Uso degli algoritmi

La modellazione permette la risoluzione di un problema P tramite un algortimi. Data un'istanza I di P, l'algoritmo fornisce una soluzione $x*$. Se la soluzione è la migliore per ogni istanza di P, l'algoritmo è detto **esatto**.

Calcolo della complessità computazionale di un algoritmo

Per capire quanto un algortimo è efficiente guardiamo il numero di operazioni elementari (non possiamo basarci solo sul tempo preso, computer migliori ci metterebbero meno tempo rispetto a computer peggiori). $T(n)$ è la funzione che ci sa il numero di operazioni elementari. Per scegliere quindi quale algortimo utilizzare dobbiamo prendere quello che ha il numero più basso dalla funzione $T(n)$.
Gli algoritmi si dividno in :

- facili : se $T(n)$ è polinomiale in n per ogni istanza, ovvero $(T(n)\~O(n^{\alpha}))$.
- difficile : se T(n) è esponziale in n per almeno un'istanza ... FINIRE

Insiemi P e NP (aggiuntivo, non richiesto)

La complessità computazionale è formalizzata attraverso classi di complessità. QUeste classi si applicano ai problemi decisionali (o di certificalo).
I problemi decisionali sono : data una soluzione x di un'istanza f di dimensione n di un problema

Programmazione linerare

$$\frac{max}{min} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

soggetto a :

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq / = / \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq / = / \geq b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m_1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq / = / \geq b_m$$

$$x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \ldots, x_n \in D_n$$

$D_i = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$
Preferiamo questi problemi perché è un modello già ben conosciuto, per i quali esistono modelli e linguaggi adatti a risolverli in modo facile. Possono anche reggere problemi di medie/grandi dimensioni.

Programma lineare MIsto intero

$$\frac{max}{min} z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

soggetto a :

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq / = / \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leq / = / \geq b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m_1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq / = / \geq b_m$$

$$x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, \ldots, x_n \in D_n$$

$D_i = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{Z} \ldots$

Esempio pratico

Un'azienda produce prodotto di accaio e deve decirede come allocarei l tempo di lavoro del suo laminatoio, che può trasformare pezzi di acciaio in due tipi di prodotti chiamati strisce e bobine.
Il laminatoio lavora i diversi prodotto con produttività varie :

- strisce : 200 ton/h
- bobine : 140 ton/h
  Hanno proditti diversi :
- strisce : 25$/ton
- bobine : 30$/ton
  La quantità massima di produzione autorizzata (magari perché oltre questo l'azienda non riesce a venderle il resto) per la prossima settimana è la seguente :
- strisce : 6000 ton
- bobine : 4000 ton
  Domanda : Se 40 ore di tempo di produzione sono disponibili questa settimana, quante tonnelate di strice e bobine deve produrre l'azienda per massimizzare i guadagni?

Formulazione matematica :

Cerchiamo di rappresentare tutti gli aspetti del problema con forumule matematiche che implicale le variabili di decisione.

Variabili decisionali :

- T_s : Tonnellate di strisce prodotte
- T_b : Tonnellate di bobine prodotte

Vincoli :

Ci sono solo 40 ore disponibili per la produzione. Questo è ovviamente un vincolo, in questo caso di tempo, quindi andiamo su e vediamo che l'unico parametro che va con il tempo è la produzione oraria (in questo caso), allora, :

1. Strisce : 200ton/h, $\frac{T_s(ton)}{200(\frac{ton}{h})}$ semplifico $\frac{ton}{ton}$ e ho il risulatato in ore
2. Bobine : 140ton/h, $\frac{T_b(ton)}{140(\frac{ton}{h})}$, semplifico $\frac{ton}{ton}$ e ho il risultato in ore, ora le comparo
3. $\frac{1}{200}T_s + \frac{1}{140}T_b \leq 40$, dobbiamo dire che stiamo sotto le 40 ore di lavoro.
   Un secondo vincolo è il numero massimo di tonnellate che possiamo produrre :
4. $0 \leq T_s \leq 6000$
5. $0 \leq T_b \leq 4000$
   Seguendo queste regole, ho il modello da seguire per ottenere la soluzione, ora scriviamo la formula matematica per l'obbiettivo, ovvero il profitto totale (in $) si scrive :
6. Guardiamo di nuovo sopra e vediamo i profitti per le varie tonnellate
7. profitto tolate = (profitto per ton. di strisce (25)) $\times T_s$ + (profitto per ton. di bobine) $\times T_b$.
8. Per questo problema semplice, possiamo calcolare e vedere che con le strisce (6000 ton) abbiamo un profitto di 15000, con le bobine faremmo 120000, quindi conviene massimizzare le strisce (30 ore di produzione quindi per fare 6000 ton) e poi le strisce (10 ore per finire le 40 ore massime).
9. Massimizzare : z = $25T_s + 30T_b$, la risposta è quindi T_s = 6000 ton, T_b = 1400 ton e il profitto migliore è 192000$.

Nota

CI sono vari modi di arrivvare alla stessa soluzione. Ci sono più possibilità di modellazione e così via...

Il problema dello zaino (vincolo di capacità) (esempio)

Un gruppo di amci dovendo fare una girta ha deciso di mettere cibi e bevande in un unico zaino da 10Kg. Lo zaino può essere riempito con :

- cioccolato (conf da 500g)
- succhi di frutta (bott. da 1l)
- lattine di birra (da 0.33l)
- panini (100g l'uno)
- acqua minerale (bott da 1l)
- biscotti (conf da 500g)
  Si mette a votazione cosa portare e dobbiamo contare che per non scontentare nessuno dobbiamo :
- 2 ciocclato
- 2 succhi
- 6 birre
- 10 panini

- 2 conf. di biscotti

Scelta delle variabili

$x_i = \text{quantià di confenzioni dell'alimento i che metto nello zaino.}$
Per scrivere il modello serve rappresentare della quantità cruciali :
- Il profitto, in punteggio, di una soluzione. La soluzione è costituda dal numero di ogni tipo di cibo/bevande $x_1, x_2, \ldots x_6$. Per il ciocolato il punteggio taotale raccoldo da un numero x_1 di confezioni è 10x_1 (10 è la risultate delle votazioni), quindi :
$10x_1 + 30x_2 + 6x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 8x_6$

- Il peso totale della soluzione (ovvero che rispettiamo la capacità massima dello zaino). Calcoliamo quindi il peso che ha ogni elemento nello zaino, ad esempio, il cioccolato è 0,5 Kg, quindi $\frac{1}{2}x_1$:
$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{10}x_4 + x_5 + \frac{1}{2}x_6 \leq 10$
- Consideriamo gli alimenti minimi da portare :
  - $x_1 \geq 2$ (cioccolato)
  - $x_2 \geq 2$ (succhi)
  - $x_3 \geq 6$ (birre)
  - $x_4 \geq 10$ (panini)
  - $x_5 \geq_2$ (biscotti)

Soluzione

Ora guardiamo, in questo caso, quale alimento porta il profitto migliore, allora facciamo profitto/ingombro (il profitto lo otteniamo dalle votazioni) e abbiamo :

- $x_1 = 20$
- $x_2 = 30$
- $x_3 = 18$
- $x_4 = 200$
- $x_5 \ldots$
- ...

Formalizzazione matematica del problema

Serve generallizare il problema, perchè se cambiano alcune cose (ad esempio il peso del cioccoalto perché cambiamo confezione oppure le votazioni...), ci serve avere un modello generallizato dove cambiare semplicemente il valore dei parametri, senza dover cambiare tutto il modello. Quindi dobbiamo associare ogni dato ad un tipo di struttura matematica :

- oggetti numerati $i = 1, 2, \ldots, n$
- profitti per item (alimento in questo caso, item è un termine generale) $p_i, i = 1, 2, \ldots, n$
- Limiti inf/sup (massimo/minimo) al numero di esemplari di ogni oggetti
- Capacità del contenitore : W
- Caricare il contenitore in modo "ottimale".

$$max\ z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

soggetto a :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \text{ (vincolo di budget/peso)}$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, 2, \ldots, n$$

Osservazione 1

Anzichè scrivere ogni volta $i = 1, 2, \ldots, n$ possiamo esplicatare un insieme

Osservazione 2

Diciamo $x_i \in \mathbb{Z}_+$ perché siamo negli interni positivi, non possiamo porta metà confezione oppure -2 confezioni. Ad esempio, se avessi potuto portare 1 solo oggetto in generale e basta avremmo detto che saremmo stati in {0, 1}.