# Algebra Lineare - lezione 2

### Appunti di Davide Vella e Alessandro Salerno 2024/2025

Marco Radeschi
marco.radeschi@unito.it
Link al moodle :
informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

**23/09/2024**

# Numeri complessi

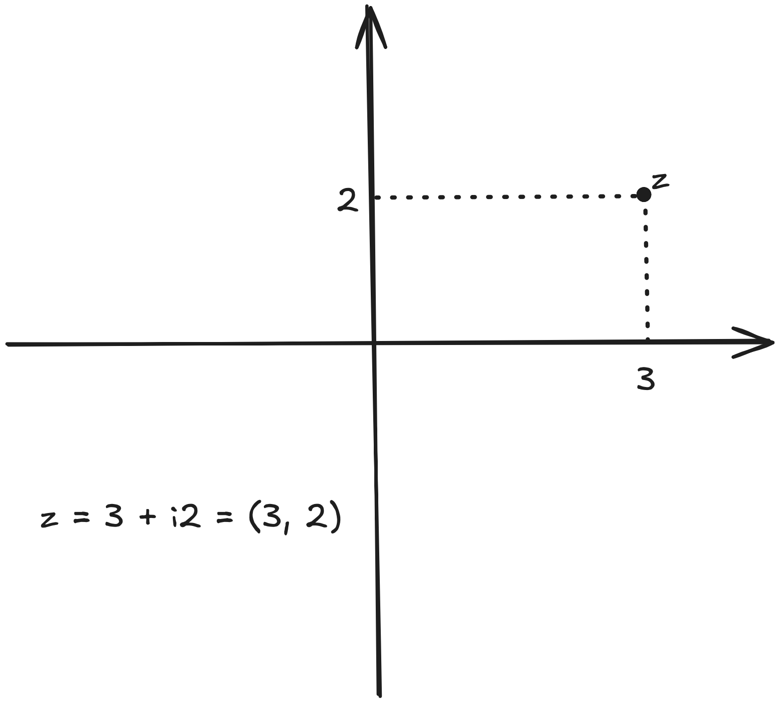
I numeri complessi sono tutti quegli oggetti che si scrivono nella forma "numero reale + i volte numero reale" $\rightarrow$ a + ib.

**Definizione** : $\mathbb{C}$ = {a + ib | a, b $\in$ $\mathbb{R}$}

"i" rappresenta l'unità immaginaria la cui proprietà è quella che il suo quadrato è -1.

## Significato Geometrico

Quando parlavamo di numeri reali, li immaginavamo come presenti su una retta sequenziale. I numeri complessi, invece, li possiamo considerare come elementi di un piano (il piano complesso) dove ogni numero viene pensato come un punto sul piano le cui coordinate sono a e b.




Data l'equazione *z* = *a* + *ib*, si dice che a è la parte reale (a = Re(z)) e si dice che ib è la parte immaginaria (b = Im (z)).
È possibile affermare che i numeri reali ($\mathbb{R}$) sono contenuti nei numeri complessi ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, r $\in \mathbb{R}$, r + i0 $\in \mathbb{C}$). Geometricamente questo è spiegabile dalla presenza dei numeri reali sull'asse X che forma il piano su cui esistono i numeri complessi (descrizione geometrica sopra). Questo rende possibile esprimere qualsiasi numero reale come un numero complesso avendo b = 0.
ES : z = 3 + i0.

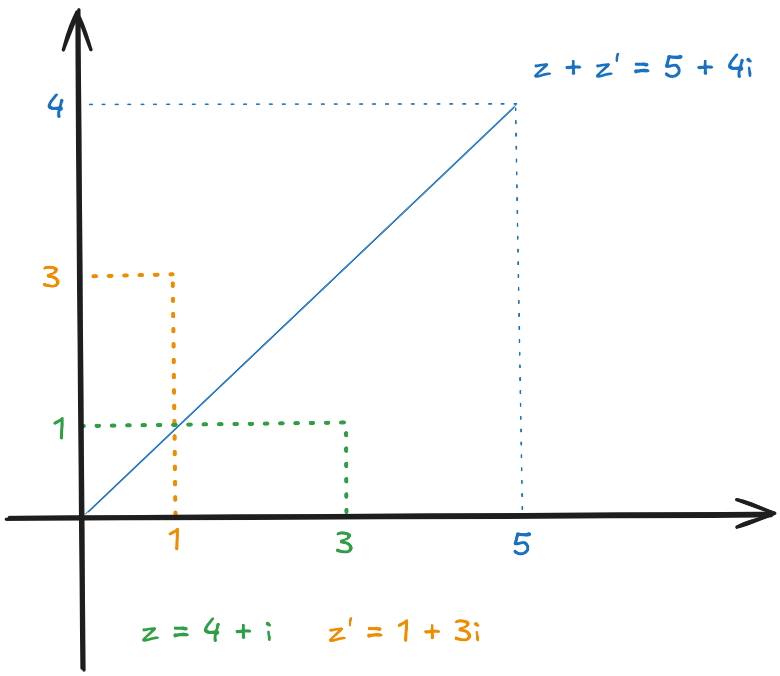
## Operazioni di addizione e moltiplicazione

Un campo di numeri è un insieme di numeri insieme a più operazioni (addizione e moltiplicazioni) che soddisfano una serie di proprietà. Si pone, quindi, la necessità di capire cos è un'addizione e cos è una moltiplicazione di due numeri complessi.

### Addizione

Siano z = a + ib e z' = c + id due numeri complessi. La somma di z e z' come la somma della parti reali (a + c) + i (c + d).

ES :




### Moltiplicazione

Siano z = a + ib e z' = c + id due numeri complessi. La moltiplicazione è calcolata come un normale prodotto di binomio, dunque, si ottiene che il prodotto è quel numero complesso che ha come parte reale *ac* - *bd* e come parte immaginaria *iad* + *ibc*.

## Proprietà di somma e di prodotto

### Somma

1. La somma è commutativa.
2. La somma è associativa.
3. La somma ha un elemento neutro *0* (0 + 0i).
4. Ogni elemento z ha un opposto -z (-a - ib).

### Moltiplicazioni

5. Il prodotto è commutativo.
6. Il prodotto è associativo.
7. Esiste un elemento neutro del prodotto *1* (1 + 0i).
8. Ogni numero complesso z diverso da 0 ha un inverso moltiplicativo ($\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$).
   Vi è anche la proprietà distributiva, quindi è un campo.

## Non proprietà dei numeri complessi

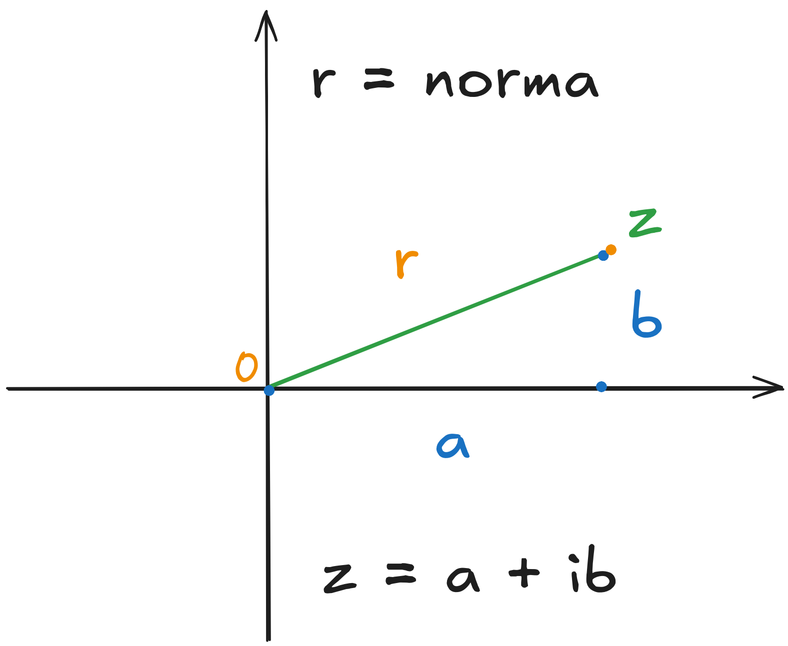
$\mathbb{C}$ non è un campo ordinato. Se $\mathbb{C}$ fosse ordinato, dovrebbe essere possibile dire se i > 0 o i < 0, ma in qualsiasi modo venga posta questa domanda, il risultato rimane sempre assurdo.

## Concetto di norma e di congiunto

La norma è sostanzialmente un modo per generalizzare il concetto di valore assolto nei numeri reali applicandolo ai numeri complessi.

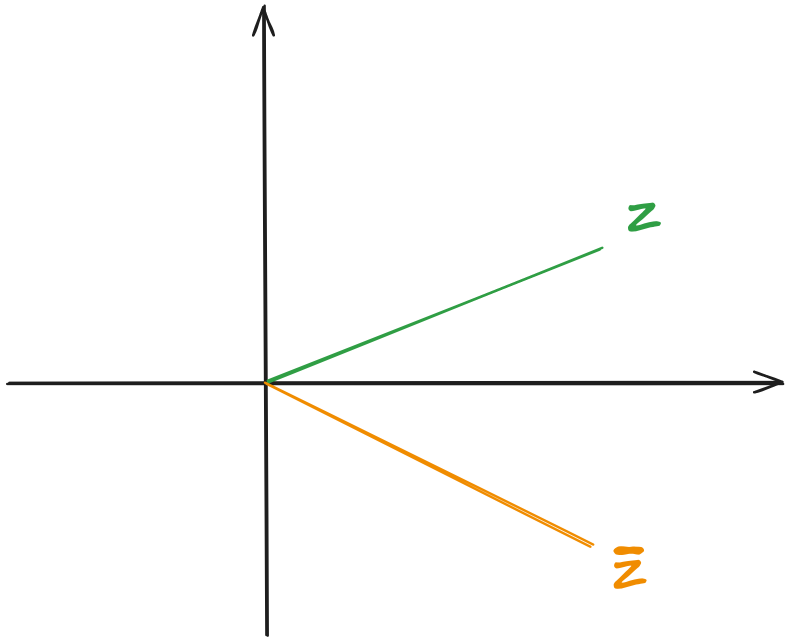
### La norma

Se si ha un numero complesso z, allora la norma |z| sarà un elemento reale pari a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, è possibile passare pensare a e b come cateti di un triangolo rettangolo e, usando il teorema di pitagora, è possibile ottenere la lunghezza dell'ipotenusa che, in questo caso, congiunge l'origine con z. In altre parole, la norma è la distanza dell'origine con z.




### Il coniugio

Il coniugio è un'operazione che prende un numero complesso z = a + ib e tira fuori un nuovo numero complesso detto coniugato che ha la stessa parte reale di z, ma parte immaginaria opposta. Geometricamente, il coniugato restituisce un punto che ha la stessa coordinata X dell'originale, ma è verticalmente riflesso rispetto all'asse reale (asse X). In altre parole, vuol dire semplicemente riflettere rispetto all'asse delle X. Il coniugio si segna inserendo una linea orizzontale sopra al numero complesso che dobbiamo coniugare, ovvero Z = a + ib, $\overline{Z}$ = a - ib.




## Esempi di norma e coniugio

1. $z = a + ib \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2. $z = 3 + i \rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
3. $z = 4i \rightarrow |z| = \sqrt{0 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$
4. $z = -4i \rightarrow |z| = \sqrt{0 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$
5. $z = 3 + 5i \rightarrow \overline{z} = 3 - 5i$

## Proprietà norma e coniugio

### Proprietà del coniugio

1. $\overline{z + z'}$ = $\overline{z} + \overline{z'}$, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$
2. $\overline{z \times z'}$ = $\overline{z} \times \overline{z'}$, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$
3. $\overline{\overline{z}}$ = z, $\forall z \in \mathbb{C}$
4. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{C}$
5. $\forall z \in \mathbb{C}$a, z $\times$ $\overline{z}$ = |z|$^2$ $\rightarrow$ (a + ib) $\times$ (a - ib) = a$^2$ - (ib)$^2$ = a$^2$ + b$^2$

Dalla proprietà 5 si ottiene il metodo per fare l'inverso di z :

$$z \times \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \rightarrow \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

Es :

$$\frac{1}{3+2i} \rightarrow_{inverso}$$

$$\rightarrow \frac{\overline{3+2i}}{|3+2i|} =$$

$$= \frac{3-2i}{\sqrt{3^2+2^2}} =$$

$$= \frac{3-2i}{9+4} =$$

$$= \frac{3-2i}{13}$$

---

Note :

$\iff$ = se e solo se.