Algebra Lineare - lezione 4

Appunti di Davide Vella e Alessandro Salerno 2024/2025

Marco Radeschi
marco.radeschi@unito.it
Link al moodle :
informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

30/09/2024

Lezione 4

1. Monimi
2. Polinomio
   2.1 Polinomi in una variabile
   2.2 Operazioni in K[x]
   2.2.1 Somma
   2.2.2 Moltiplicazione
   2.2.3 Divisione
   2.2.3.1 Il caso in Z
   2.2.3.2 Il caso con i polinomi, K[x

Monimi

Un monomio definito su un campo di numeri K, rispetto ad un insieme di variabili x, y è una esperessione del tipo : $a \times x^n \times y^m$, dove $a \in K$ e $m, n \in N$.

Exemple

$$3x^2y^3,\ \sqrt{5}x^1y^0,\ -5 = x^0y^0$$

Il grado di un monomio $a \times x^n \times y^m = m + n$ (Deg è l'abbreviazione di grado). Nei casi visti sopra quindi, questi sarebbero i gradi in ordine di apparizione.

Exemple

$$deg_1 = 2 + 3 = 5,\ deg_2 = 1,\ deg_3 = 0$$

Polinomio

Un polinomio su un campo K rispetto alle variabili x, y è una somma di monomi.

Exemple

$$\sqrt{3}x^5y + 2x^{1540}y^2 + 3$$

Di nuovo, il grado dei 3 monomi sopra (che formano un monomio) è :

$$deg_1 = 8,\ deg_2 = 1542,\ deg_3 = 0$$

Il grado di un polinomio è dato dal massimo grado dei monomi convolti (in questo caso 1542).

Polinomi in una variabile

Dato un dato K,

$$K[x] = \{polinomi\ nella\ a\ variabile\ x\} \ni P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n$$

In questo caso il grado è n.

Se troviamo a pedice di $K[x]$ un numero n, vuol dire che il grado dei polinomi all'interno di K sono minori uguali ($\leq$) di n.

$$K[x]_n = \{polinomi\ di\ grado\ \leq\ n\}$$

Exemple

$$K[x]_3 = \sqrt{3}x^3 + 1, -x^2 + 2 \dots$$

Operazioni in $K[x]$

Somma

Se

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots a_nx^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \dots b_nx^n$$

Allora la loro somma è :

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 \dots$$

Exemple

Prendiamo

$$P(x) = 3 + 2x + 5x^2$$

$$Q(x) = -1 + 6x$$

La loro somma è :

$$P(x) + Q(x) = (3 + (-1)) + (2 + 6)x + 5x^2 = 2 + 8x + 5x^2$$

Moltiplicazione

La moltiplicazione è simile all'addizione. Dobbiamo moltiplicare ogni elemento del primo polinomio per ogni elemento del secondo polinomio. Vediamo subito un esempio :

Exemple

$$(3 + 5x + x_2) \times (2 + x) =$$

$$(3 \times 2) + (3 \times x) + (5x \times 2) + (5x \times x) + (x^2 \times 2) + (x^2 \times x) =$$

$$6 + 3x + 10x + 5^2 + 2^2 + x^3 =$$

$$6 + 13x + 7x^2 + x^3$$

Divisione

Il caso in $\mathbb{Z}$

Prendiamo in esami il campo $\mathbb{Z}$. Nel campo $\mathbb{Z}$ possiamo fare le seguenti operazioni :

- addizione, $m + n$
- sottrazione, $m - n$
- moltiplicazione. $m \times n$
  Non possiamo fare la divisione come la conosciamo ($\frac{m}{n}$), ma dobbiamo fare una divisione che ci restituisca del resto e scriverla sotto forma di :

  $$m = q \times n + r$$

  Dove :

$$m, n \neq 0 \rightarrow \exists\, q, r \in \mathbb{Z}, \;\; r < m$$

Exemple

$$16 = 3 \times 5 + 1$$

Se il resto di una divisione è uguale a zero, si dice che n divide m.

Il caso con i polinomi, $K[x]$

Di nuovo, possiamo fare le seguenti operazioni :

- addizione, $P(x) + Q(x)$
- sottrazione, $P(x) - Q(x)$
- moltiplicazione. $P(x) \times Q(x)$
  La divisione di nuovo non possiamo fare $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ma dobbiamo ottenere una divisione che può darci del resto, quindi vediamo come si fa.
  Se abbiamo

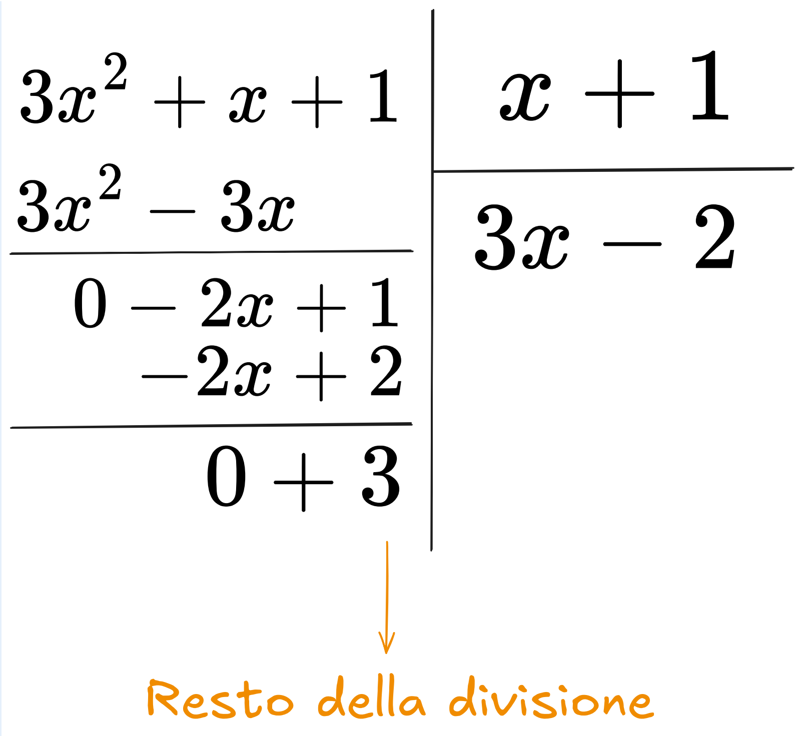
$$P(x) = q(x) \times Q(x) + r(x)$$

  Dove :

$$P(x), Q(x) \in K[x] \rightarrow q(x), r(x) \in K[x]$$

Exemple

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + x + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2} 3x^2 - 3x & 3x \\ \cline{1-1} 0 - 2x + 1 & \end{array}$$



Possiamo vedere come $P(x)$ è $3x^2 + x + 1$, q(x) è $x + 1$, r(x) è $3x - 2$, quindi :

$$3x^2 + x + 1 = (x + 1)(3x - 2) + 3$$

Osservazione :
$P(x)$ polinomio è una funzione, ovvero qualcosa che ci permette di prendere un numero dal campo e ne restituisce un altro :

$$a \in K \rightarrow P(a) = a_0 + a_1 \times a + a_2 \times a^2 \ldots a_n \times a^n$$

Exemple

$$P(x) = x^2 + 1$$

$$P(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$P(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$P(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

Definizione :
Dato un polinomio $P(x)$ e un elemento a, è una soluzione $P(x)$ se $P(a) = 0$.

Teorema
Un elemento in K è una soluzione di un polinomio $P(x)$ $\iff$ il polinomio $x - a$ divide il polinomio P(x).

Exemple

La molteplicità di 2 come divisore di 24 è 3

$$m = 24 \rightarrow 24 = 2 \times 12 = 2^2 \times 6 = 2^3 \times 3$$
$$n = 2$$

In generale, la molteplicità di un qualunque numero n come divisore m è quel k valore ($k \in \mathbb{N}$) è $m = n \times r$, con $n \nmid r$.

Definizione

Moltiplicazione di un polinomio $Q(x)$ come divisore di $P(x)$ = potenze k tale che

$$P(x) = Q(x)^k \times R(x) \rightarrow Q(x) \nmid R(x)$$

Exemple

Moltiplicazione di $x - 2$ come divisore di $2x^2 - 8x - 8$

molteplicità = 2

$$2x^2 - 8x + 8 = (x-2) \times (2x-4) = (x-2)^2 \times 2$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 8x + 8 & x - 2 \\ \cline{2-2} 2x^2 + 4x & 2x - 4 \\ \hline 0 + 4x - 8 & \\ 4x - 8 & \\ \hline 0 + 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2x - 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} 2x + 4 & 2 \\ \hline 0 + 0 & \end{array}$$

Definizione :

Sia $a \in \mathbb{C}$ soluzione di $P(x)$ ($\rightarrow (x-a)/P(x)$) molteplicità di a come soluzione di $P(x)$ = molteplicità di $x - a$ come divisore di $P(x)$.

Exemple

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$P(-1) = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

-1 è una soluzione di P(x), quindi cerchiamo la molteplicità di -1 con $x-a$, ovvero $x+1$.

$$P(x)=(x+1)\times(x^2+2x+1)$$

Possiamo riscrivere : (x^2+2x+1) come $(x+1)(x+1)$, quindi :

$$(x+1)\times(x^2+2x+1)=(x+1)(x+1)(x+1)=(x+1)^3$$

Definizione :
Sia $a \in \mathbb{C}$ una radice/soluzione di $P(x)$, la moltiplicazione di a è quel $K \in \mathbb{N}$ tale che :

$$P(x)=(x-a)^n \times Q(x),\ con\ Q(a) \neq 0$$

Exemple

$$P(x)=x^2-3x+2$$

$$P(2)=4-6+2=0$$

Se dividiamo quindi $P(x)$ con $x-2$ (che non verrà scritto di seguito) otteniamo :

$$P(x)=(x-2)\times(x-1)$$

Ad occhio ci accorgiamo subito che $x-1$ non può essere diviso per $x-2$, ma in caso contrario basta sostituire la x con 2 e vedere se il risultato è zero, in caso contrario, non è divisibile :

$$P(x)=x-1$$

$$P(2)=2-1\neq 0$$

Teorema :
Ogni polinomio di grano n ha coefficienti in qualunque campo ha n soluzioni anche quando sono contate le molteplicità.
Teorema fondamentale dell'algebra :
Ogni polinomio di grado n in $C[x]$ ha esattamente n soluzioni, se contate con le molteplicità.

Note :
$\iff$ = se e solo se.
$n \mid m$ = un elemento n divide un elemento m.
$n \nmid m$ = un elemento n non divide un elemento m.