Algebra Lineare - lezione 6

Appunti di Davide Vella 2024/2025

Marco Radeschi
marco.radeschi@unito.it
Link al moodle :
informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

07/10/2024

Contenuti

Matrici

Def :
Poniamo che K sia un campo, allora una matrice ha 'm' righe e 'n' colonne ($m \cdot n$).
$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Entrate/coefficienti

Le entrate (o coefficienti) di A sono $\forall i, j \to a_{ij} \in K$.

Exemple

A = $\begin{bmatrix} 3 & 1+i & -2 \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix}$. A è una matrice $2 \cdot 3$ a coefficienti in $\mathbb{C}$.

Def :
Per definire una matrice diciamo che questa è definita in M(m. n, K), dove m sta per le righe, n

per le colonne e infine diciamo in cosa è definita la matrice.

Exemple

$A \in M(2, 3, \mathbb{C})$.

Somma e moltiplicazione

Somma

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{1\,1} & \dots & b_{1\,n} \\ b_{m\,1} & \dots & b_{m\,n} \end{bmatrix}$$

La somma tra due matrici si può fare solo se le due matrici (A e B in questo caso) hanno lo stesso numero di elementi.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{1\,1} + b_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} + b_{1\,n} \\ a_{m\,n} + b_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} + b_{m\,n} \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione

La moltiplicazione per ora si limita a moltiplicare una costante (λ) con ogni elemento della matrice. La moltiplicazione tra matrici è più complessa e la si vede alla lezione 8.
Per moltiplicare una costante λ dobbiamo avere che $\lambda \in K$ e quindi possiamo dire che :

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} \cdot \lambda & \dots & a_{1\,n \cdot \lambda} \\ a_{m\,1} \cdot \lambda & \dots & a_{m\,n} \cdot \lambda \end{bmatrix}$$

Proprietà :
$M(m, n, K)$ è uno spazio vettoriale su K,
Def :
Sia V uno spazio vettoriale su K, un sottospazio vettoriale è un sottoinsieme $W \subseteq V$ tale che :

1. $0_V \in W$
2. $\forall w_1, w_2 \in W \rightarrow w_1, w_2 \in W$
3. $\forall w \in W, \forall \lambda \in K \rightarrow \lambda w \in W$

Proprietà :
Un sottospazio vettoriale (di V in questo caso) è uno spazio vettoriale su K.

Exemple

ES:

SPAZIO DEI POLINOMI

FISSIAMO $\mathbb{K}[x]$ E FISSIAMO UN $d \in \mathbb{N}_{>0}$

$\mathbb{K}[x]_d \subseteq \mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}[x]_d = \{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid DEG(P(x)) \leq d\}$

$= \{P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d \mid a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}\}$

1) $0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^d \in \mathbb{K}[x]_d$

2) $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d \in \mathbb{K}[x]_d$

$Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_d x^d \in \mathbb{K}[x]_d$

$P + Q \in \mathbb{K}[x]_d$

3) $P(x) = a_0 + \dots + a_d x^d \in \mathbb{K}[x]$

$\lambda \cdot P(x) = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_d x^d \in \mathbb{K}[x]$

ES:

$$C_d \subseteq \mathbb{K}[x] \qquad C_d = \{P(x) \in \mathbb{K}[x] \mid DEG(P(x)) = d\}$$

C_d NON SODDISFA (2):

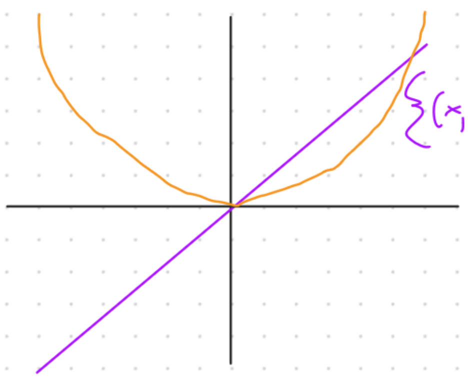
DIM -> $C_2 \subseteq \mathbb{R}[x] \qquad P(x) = 1 + x + x^2 \in C_2$

$$Q(x) = -x^2 \in C_2$$

$$P(x) + Q(x) = 1 + x + x^2 - x^2 = 1 + x$$

NON HA PIÙ GRADO 2.

ES: $\mathbb{R}^2$



$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} = Z$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x\} = V$

V È SPAZIO. VETT.

1) $(0,0) \in V$? $\quad 0 = \frac{1}{2} 0$ -> SÌ

2) $(x,y), (x',y') \in V$ $\to y = \frac{1}{2}x$, $\to y' = \frac{1}{2}x'$ $\Big\} \; \underbrace{y+y'}_{} = \frac{1}{2}\underbrace{(x+x')}_{}$

$(x,y) + (x'+y') \in V$?

$(\underbrace{x+x'}_{}, \underbrace{y+y'}_{})$

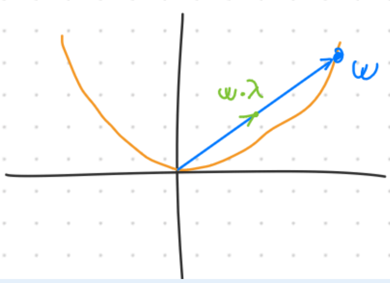
3) $(x,y) \in V$

$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda(x,y) \in V$

V È UN SOTTOSPAZIO VETT

Z È UN SOTT. VETT ?

NO, NE LA 2 NE LA 3 È VER



$w \cdot \lambda \notin Z$

PENSIANO DI SCALARLO INDIETRO, VEDIAMO CHE NON APPARTIENE

Matrici quadrate

Def :

Una matrice $n \times n$ è detta quadrata. $M(n) = M(n,K) = M(n,n,K)$.

Sono tutti spazi vettoriali di M(n) :

1. D(n) (diagonale) = $\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right\}$ = $\{A \in M(n) | a_{ij} = 0, \forall i \neq j\}$.
2. U(n) (triangolo superiore) = $\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right\}$ = $\{A \in M(n) | a_{ij} = 0, \forall i > j\}$

3. L(n) (triangolo inferiore) = $\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right\}$ = $\{A \in M(n) | a_{ij} = 0, \forall i < j\}$
4. S(n) (simmetriche, esempio) = $\left\{ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ = $\{A | a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j\}$.
5. A(n) (anti simmetriche, esempio) = = $\left\{ A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ = $\{A | a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j\}$.

Span di vettori

V spazio vettorale su K, fissiamo vettori : $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

Exemple

$V = K[x], v_1 = x, v_2 = 1 + x, v_3 = 5$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ si dice combinazione lineare dei vettori : $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Exemple

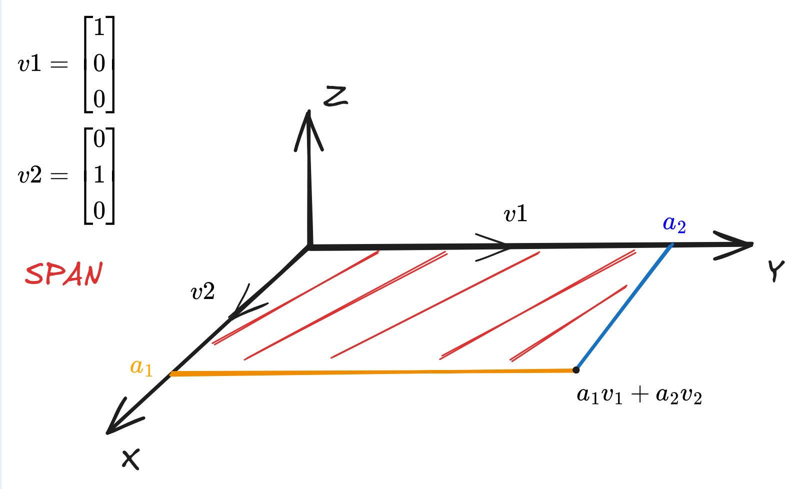
$3x + (-1)(1 + x) + 7 \cdot 5$, esempio di combinazione lineare di : $x + (1 + x) + 5$.

Def :
Lo span dei vettori (v_1, v_2, v_3) = $\{v \in V | a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n\}$ è lo spazio generato di $v_1, \dots, v_n$
.

Proprietà :
Span($v_1, \dots, v_n$) $\subseteq$ V è sempre un sottospazio vettoriale.

Exemple

V = R^3



SPAN (v_1, v_2) = $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3 | \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Il piano preso è x e y, il piano non preso è z.