Algebra Lineare - lezione 5

Appunti di Davide Vella 2024/2025

Marco Radeschi
marco.radeschi@unito.it
Link al moodle :
informatica.i-learn.unito.it/course/view.php?id=3004

02/10/2024

Contenuti

Spazio Vettoriali

Si parte subito con un esempio dello spazio euclideo :

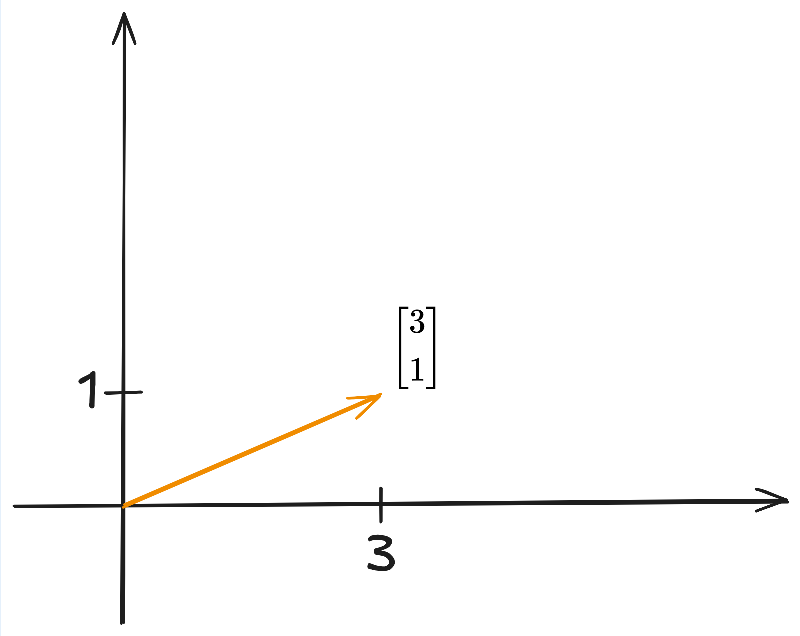
$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \} = v. a_0, a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$$

Questo : $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$ è detto **vettore colonna.** $a_i =$ i-esima componente di v.

Exemple

Potremmo avere : $\mathbb{R}^2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Con dei numeri diventerebbe $\mathbb{R}^2 = \{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}\}$:



Operazioni in $\mathbb{R}^n$

Somma di vettori

Se abbiamo il vettore $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ la loro somma sarà : $\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$.

Moltiplicazione con scalare

Se abbiamo il vettore $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ e un numero (detto da ora in poi scalare, dato che fa scalare il vettore, rappresentato da λ) fisso con cui vogliamo moltiplicare tutto il vettore avremo : $\begin{bmatrix} a_1 * \lambda \\ a_2 * \lambda \\ a_3 * \lambda \end{bmatrix}$

.

Exemple

Se abbiamo un vettore con $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$ avremo :

$$\lambda \times v = \begin{bmatrix} 8 \times \frac{1}{2} \\ 6 \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nota che la moltiplicazione fa scalare la lunghezza del vettore, ma non fa cambiare l'angolo.

Def :
Un insieme in generale che abbia operazione somma si chiama **gruppo**. Un gruppo è un insieme, G, dotato di una operazione binaria stella (rappresentato con il simbolo : $*$), noi la vedremo solo come somma, ma può essere più astratta. La funzione $G * G_{(a,b)}$ restituisce G_{a*b}. L'operazione deve soddisfare le seguenti condizioni :

1. Ce un elemento neutro, $\exists$ elemento neutro $e \in G$, tale che $\forall a \in G$ che $a * e = e * a = a$.
2. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$ inverso, cioè $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
3. Associatività : $\forall a, b, c \in G \to (a * b) * c = a * (b * c)$.
   Un'operazione che soddisfa queste 3 si chiama gruppo.

Note

Non si richiede la proprietà commutativa ($a + b = b + a$), anche se vale sempre per 1 e 2;

Def :
Un gruppo commutativo è commutativo se vale anche la proprietà 4, ovvero :

$$\forall a, b \in G \to a \cdot b = b \cdot a$$

La somma tra vettori è sempre un gruppo commutativo. Un numero è un elemento di un campo.

Spazio vettoriale

Def :
Sia $\mathbb{K}$ un campo (appunto lezione 1). Uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ è un gruppo commutativo, ovvero :

$(V, +_v)$ (il primo è un insieme il secondo è l'operazione del gruppo) con prodotto per scalari che prende un elemento del campo $\mathbb{K}$ e un numero V e produce V.

$$\mathbb{K} \cdot V = V$$
$$(\lambda, v) = \lambda \cdot_v v$$

Che suppone le seguenti proprietà ($\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$) :

1. (simil distributiva)

$$(\lambda + \mu) \cdot_V v = (\lambda \cdot_V v) +_V (\mu \cdot_V v)$$

2. (simil distributiva)

$$\lambda \cdot_V (v +_V w) = (\lambda \cdot_V v) +_V (\lambda \cdot_V w)$$

3. (associativa)$$
   (\lambda \cdot \mu) \cdot*{V} v = \lambda \cdot*{V} (\mu\cdot_{V}v)

$$Perdefinireunospaziovettorialeabbiamobisognodi:$$

- Un campo degli scalari
- Qual è l'insieme vettoriale
- Su questo insieme, abbiamo bisogno di 2 operazioni : somma e prodotto.

Esempi di gruppi

1. K campo $\rightarrow$ (K, +) è un gruppo commutativo (ha come elemento neutro 0).
2. K campo $\rightarrow$ (K -{0}, $\cdot$) è un gruppo commutativo (il -{0} vuol dire che togliamo lo 0 da k) (l'elemento neutro è 1).
3. ($\mathbb{R}^n$, +) è un gruppo $\rightarrow$ elemento neutro = $\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$.
4. su K^n definiamo $\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$.
5. In particolare, $K^1 (= K)$ è uno spazio vettoriale su se stesso.
6. K campo, $K[x] = \{P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \,|a_0, \dots, a_n \in K\}$.
   $K[x]$ ammette +
   $K[x]$ è uno spazio vettoriale su k.

Elementi neutri

Spazio	Elemento neutro
V	0_v
K^n	$\begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
K	0

Spazio	Elemento neutro
$K[x]$	0 = $0x + 0x^2 \dots 0x^n$

Proprietà

1. (G, +) gruppo $\rightarrow$ l'elemento neutro è unico
2. V spazi vettoriali su K $\rightarrow \forall v \in V, 0 \in K, 0 \cdot V = 0$

Sono degli spazi vettoriali (per esempio) :

- R è uno spazio vettoriale su R
- C è uno spazio vettoriale su C
- C è uno spazio vettoriale su R