



Crecimiento de Errores en Modelos Simplificados de Dinámica Atmosférica. Una Perspectiva Espacio-Temporal

TESIS DEL MASTER:
MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN
DE LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Presentada por
SIXTO HERRERA

bajo la dirección de
Dr. Jesús Fernández
Dr. José M. Gutiérrez



Universidad de Cantabria.

Santander, 9 de octubre de 2009

Índice general

1. Objetivos y Estructura de la Tesis	3
2. Modelos Simplificados. Ecuación de Vorticidad Barotrópica	5
2.1. Introducción	5
2.2. Ecuaciones Primitivas de la Atmósfera	6
2.2.1. Ecuación de Continuidad	6
2.2.2. Ecuación de Conservación del Momento	7
2.2.3. Ecuación de Conservación de la Energía	7
2.2.4. Ecuación de Conservación del Vapor de Agua	8
2.2.5. Ecuación de Estado de los Gases Ideales	8
2.2.6. Sistema de Ecuaciones Primitivas	8
2.3. Ecuación de Vorticidad Barotrópica	9
2.3.1. Análisis de Escala	9
2.3.2. Modificaciones de la Ecuación de Vorticidad Barotrópica . . .	11
2.4. Modelización Numérica. Modelo Barotrópico	12
2.4.1. Discretización de la Ecuación	13
2.4.2. Resolución de la Ecuación	16
2.5. Construcción del Modelo	19
2.6. Validación del Modelo	20
3. Crecimiento de Perturbaciones. Diagrama MVL	23
3.1. Introducción	23
3.2. Predicción por conjuntos	24
3.3. Fluctuaciones en Sistemas Espacio-Temporales	27
3.4. Diagrama MVL	29

4. Fluctuaciones en Modelos Multi-Escala	33
4.1. Introducción	33
4.2. Fluctuaciones en el Modelo Lorenz96	34
4.3. Fluctuaciones en el Modelo Barotrópico	37
5. Conclusiones y Trabajos Futuros	43
Bibliografía	45

CAPÍTULO 1

Objetivos y Estructura de la Tesis

En la actualidad las predicciones meteorológicas han adquirido una gran relevancia para muchas actividades socioeconómicas: salud, turismo, agricultura, energía, etc. Las necesidades de cada una de estas actividades son muy diversas y abarcan desde predicciones a corto plazo (días), hasta predicciones mensuales y estacionales.

A pesar de los grandes avances producidos en el siglo XX y principios del XXI en las diferentes técnicas involucradas en la predicción meteorológica (mejora de los esquemas numéricos, aumento de la resolución de los modelos, resolución semiempírica de fenómenos de escalas inferiores a la resolución del modelo, asimilación de observaciones al grid del modelo, etc.), aún son muchas las fuentes de incertidumbre asociadas a las predicciones actuales. Por otro lado, el carácter caótico del sistema atmosférico da lugar a que pequeñas perturbaciones (errores en la condición inicial, en el modelo, etc.) crezcan exponencialmente con el tiempo y establezcan un límite teórico de predecibilidad que, en la práctica, dependerá del estado particular del sistema (condición inicial).

A finales del siglo XX se desarrolló el sistema de predicción por conjuntos (Gneiting and Raftery, 2005; Leutbecher and Palmer, 2008), que trata de cuantificar dos de las principales fuentes de incertidumbre: el modelo y las condiciones iniciales. Para este fin se consideran perturbaciones en las condiciones iniciales y/o en el modelo, obteniendo un conjunto (ensemble) de predicciones que da lugar a una distribución de los posibles estados de la atmósfera, dentro de los cuales se espera que esté la realidad, y de la incertidumbre asociada a cada uno de ellos. En la actualidad, este es el método más utilizado en los sistemas de predicción meteorológica.

En este marco, el estudio y la caracterización del crecimiento de las perturbaciones en estos sistemas espacio-temporales se ha convertido en un problema fundamental para cuantificar la incertidumbre de esta metodología.

En esta Tesis se aborda este problema considerando modelos simplificados de la dinámica atmosférica, obtenidos a partir de las ecuaciones primitivas de la atmósfera mediante hipótesis apropiadas que reducen su complejidad (modelos de vorticidad barotrópica). Para ello, se parte de una nueva metodología para el análisis espacio-temporal del crecimiento de perturbaciones y se extiende su aplicación a sistemas no triviales (hasta la fecha esta teoría ha sido aplicada a sistemas simples de una única escala característica, dados por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)).

Esta Tesis está dividida en tres capítulos. En el segundo describiremos el sistema atmosférico y las hipótesis que dan lugar al modelo utilizado, así como los métodos numéricos utilizados en su integración (métodos espectrales para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs)). En el tercero introduciremos la metodología utilizada para caracterizar el crecimiento de errores que posteriormente será aplicada al modelo (Cap. 4). Finalmente, resumiremos las principales conclusiones obtenidas en las dos secciones anteriores y estableceremos las futuras líneas de investigación.

El trabajo presentado en esta Tesis ha sido desarrollado dentro del grupo *Meteorology & Data Mining*, de la Universidad de Cantabria <http://www.meteo.unican.es>. Tengo que agradecer el apoyo y la colaboración de todos los miembros del grupo, en especial a Miguel, Jose y Jesús por su inestimable colaboración y paciencia en el desarrollo de esta Tesis.

Sixto Herrera
Santander, 9 de octubre de 2009

CAPÍTULO 2

Modelos Simplificados. Ecuación de Vorticidad Barotrópica

2.1. *Introducción*

La atmósfera es un sistema muy complejo en el que se dan movimientos que abarcan escalas temporales y espaciales muy diversas, desde las ondas sonoras y gravitatorias a ondas planetarias de circulación de larga escala. A finales de los años 30 Rossby descubrió el modo de simplificar el sistema más general de EDPs que describe la dinámica atmosférica (ver Ec. 2.8) mediante ciertas aproximaciones, obteniendo modelos más simples que filtraban las ondas meteorológicamente menos relevantes y que presentaban mayores problemas para su resolución numérica. La posibilidad de utilizar estos modelos en lugar del sistema completo de ecuaciones, en ese momento inabordable por su alto coste computacional, dio lugar a un gran desarrollo en el campo de la predicción que se vio culminado con la primera predicción operativa diaria (Charney et al., 1950).

A pesar del posterior desarrollo tecnológico que ha posibilitado la construcción de modelos numéricos basados en las ecuaciones fundamentales, los modelos filtrados han seguido siendo una gran herramienta para el análisis de la dinámica atmosférica, el desarrollo y validación de nuevos métodos numéricos, la validación de nuevas metodologías de predicción, etc.

Dentro de los modelos filtrados, el barotrópico es el más simple de aquellos que mantienen su capacidad predictiva. Este modelo reproduce razonablemente bien las

ondas planetarias de larga escala ($\sim 1000\text{km}$), también llamada escala sinóptica, en latitudes medias. A pesar de sus limitaciones, la relativa sencillez y maleabilidad de este modelo han hecho de él una herramienta esencial para el estudio del sistema atmosférico. Los estudios realizados con este modelo son muy diversos y abarcan un gran número de disciplinas: predicción (Charney et al., 1950), crecimiento de errores (Lorenz, 1972; Wei and Frederiksen, 2004), sensibilidad al cambio de forzamientos en el modelo (Bell, 1980), predicción de ciclones tropicales (Holland et al., 1991), sincronización (Duane and Tribbia, 2001), variabilidad estacional de patrones (Frederiksen and Branstator, 2005), estudio de parametrizaciones (Nadiga and Margolin, 2001), etc.

En este capítulo introduciremos las ecuaciones fundamentales que representan las leyes de circulación atmosférica (Sec. 2.2) y obtendremos el modelo barotrópico a partir de ellas mediante la imposición de ciertas hipótesis adicionales (Sec. 2.3). En la Sec. 2.4 resumiremos la metodología empleada para la resolución numérica del modelo obtenido. Por último, mostraremos los resultados de la validación y algunos detalles de su implementación (Sec. 2.6).

2.2. *Ecuaciones Primitivas de la Atmósfera*

Las ecuaciones con las que representamos la dinámica de la atmósfera son las ecuaciones de conservación de la masa, el momento, la energía y el vapor de agua, y una ecuación de estado mediante la cual relacionamos las variables termodinámicas de las anteriores ecuaciones. En el caso de la atmósfera, la ecuación de estado relaciona la presión, la densidad y la temperatura del aire y viene dada por la ecuación de estado de los gases ideales. A continuación daremos la expresión explícita de cada ecuación y definiremos los principales términos involucrados (Kalnay, 2003; Washington and Parkinson, 1986; Holton, 1992), que relacionan las variables primarias del sistema: densidad (ρ), velocidad (\mathbf{v}), temperatura (T), presión (p) y vapor de agua (q).

2.2.1. *Ecuación de Continuidad*

Esta ecuación representa la conservación de la masa a lo largo del movimiento o, equivalentemente, que la variación temporal de la densidad (ρ) es debida a la advección por la frontera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.1)$$

2.2.2. Ecuación de Conservación del Momento

La 2^a Ley de Newton representa que la aceleración sufrida por una masa de aire, es debida al conjunto de fuerzas que actúan sobre ella. Esta ecuación vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\alpha \nabla \mathbf{p} - \nabla \phi + \mathbf{F} - 2\Omega \times \mathbf{v} \quad (2.2)$$

donde $\alpha = \frac{1}{\rho}$ es el volumen específico de la masa de aire, ϕ es la energía potencial por unidad de masa (geopotencial), \mathbf{F} son las fuerzas externas consideradas y Ω es la velocidad angular de la Tierra. En la ecuación anterior:

- $-\alpha \nabla \mathbf{p}$ es la fuerza generada por el gradiente de presión,
- $-\nabla \phi$ agrupa la fuerza debida al potencial gravitacional terrestre y la fuerza centrífuga generada por el movimiento de rotación de la tierra,
- \mathbf{F} representa al conjunto de fuerzas externas consideradas (fricción, radiación, etc.)
- $2\Omega \times \mathbf{v}$ representa la fuerza generada por la aceleración que sufre una masa de aire cuando se mueve en un sistema de referencia en rotación (la Tierra). Esta fuerza es conocida como fuerza de Coriolis.

2.2.3. Ecuación de Conservación de la Energía

Esta ecuación representa que el calor aplicado al sistema da lugar a un aumento en la energía interna y/o la expansión del sistema. La ecuación viene dada por la siguiente expresión:

$$Q = C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \quad (2.3)$$

donde Q es el calor y C_v es el calor específico a volumen constante. En esta ecuación,

- el primer término expresa la variación de la energía interna del sistema, mientras que
- el segundo hace referencia a la expansión del mismo.

En el caso de $Q = 0$, el proceso se llama adiabático y no existe ganancia o pérdida de calor. Si consideramos la Ec. 2.7 y la siguiente relación: $C_v = C_p - R$, donde C_p es el calor específico a presión constante y R la constante de los gases para el aire seco, podemos expresar esta ley con la ecuación:

$$Q = C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} \quad (2.4)$$

2.2.4. Ecuación de Conservación del Vapor de Agua

Esta ecuación representa que la variación total de cantidad de vapor de agua, \mathbf{q} , se debe a la diferencia entre la evaporación, \mathbf{E} , y la condensación, \mathbf{C} , del sistema. En caso de no existir dichos procesos, la cantidad de vapor de agua se conservaría. Esta ecuación puede ser expresada mediante la expresión:

$$\frac{dq}{dt} = \mathbf{E} - \mathbf{C} \quad (2.5)$$

Si desarrollamos la derivada total de dicha ecuación obtenemos una expresión alternativa en *forma de flujo*:

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} q) + \rho(E - C) \quad (2.6)$$

El segundo término de la ecuación ($\rho(E - C)$) suele considerarse nulo o ser parametrizado en los modelos ya que los procesos de condensación y evaporación no aparecen en el resto del sistema de ecuaciones.

2.2.5. Ecuación de Estado de los Gases Ideales

Podemos asumir que la atmósfera es un gas ideal y por lo tanto debe cumplir su ecuación de estado:

$$p\alpha = RT \Leftrightarrow p = \rho RT \quad (2.7)$$

siendo p la presión, $\alpha = \frac{1}{\rho}$ el volumen específico, R la constante de los gases para el aire seco y T la temperatura. Esta ecuación nos relaciona las variables termodinámicas.

2.2.6. Sistema de Ecuaciones Primitivas

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores obtenemos un sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas (ρ , $\mathbf{v} = (u, v, w)$, T , p y q) dado por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\alpha \nabla p - \nabla \phi + \mathbf{F} - 2\Omega \times \mathbf{v} \quad (2.9)$$

$$Q = C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} q) \quad (2.11)$$

$$p\alpha = RT \quad (2.12)$$

que se conoce como ecuaciones primitivas de la atmósfera.

2.3. *Ecuación de Vorticidad Barotrópica*

Decimos que una atmósfera es barotrópica cuando las superficies de igual presión coinciden con las de igual densidad. Por otro lado, la vorticidad es la medida microscópica de la rotación de un fluido, un campo vectorial definido por el rotacional de la velocidad.

La ecuación de vorticidad barotrópica expresa la conservación de la vorticidad absoluta en el tiempo, donde la vorticidad absoluta es la suma de la asociada a la velocidad del sistema y la asociada a la fuerza de Coriolis. Este modelo se obtiene a partir de las ecuaciones de conservación del momento (Ec. 2.2) mediante la eliminación de los términos de las ecuaciones despreciables para movimientos de escala sinóptica y el filtrado de las ondas de Lamb, las gravitatorias y las sonoras. Por lo tanto, el modelo inicial vendrá dado por las ecuaciones expresadas en forma escalar:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan(\theta)}{a} + \frac{uw}{a} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + 2\Omega v \sin(\theta) - 2\Omega w \cos(\theta) \quad (2.13)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan(\theta)}{a} + \frac{vw}{a} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} + F_y + 2\Omega u \sin(\theta) \quad (2.14)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z + 2\Omega u \cos(\theta) \quad (2.15)$$

Donde a es el radio de la Tierra, y θ la latitud.

2.3.1. *Análisis de Escala*

El análisis de escala es un recurso habitual en el proceso de simplificación de las ecuaciones del movimiento. Este método consiste en eliminar de las ecuaciones aquellos términos cuyos órdenes de magnitud sean despreciables frente al resto a la escala a la que se quiere analizar el sistema, en nuestro caso la escala sinóptica. Esta metodología no sólo simplifica las ecuaciones sino que, en ocasiones, elimina o filtra movimientos no deseados presentes en el sistema inicial.

La Tabla. 2.1 muestra el análisis de escala de las ecuaciones del momento horizontal (zonal en el eje X y meridional en el eje Y). Para obtener una ecuación de predicción es necesario conservar los términos de aceleración (columna E). Si eliminamos los términos con escalas inferiores a la de los términos de aceleración, las ecuaciones del momento horizontal vendrán dadas por:

	A	B	C	D	E	F	G
Zonal	F_x	$\frac{uw}{a}$	$2\Omega w \cos(\theta)$	$\frac{uv \tan(\theta)}{a}$	$\frac{du}{dt}$	$\alpha \frac{\partial p}{\partial x}$	$2\Omega v \sin(\theta)$
Meridional	F_y	$\frac{vw}{a}$		$\frac{u^2 \tan(\theta)}{a}$	$\frac{dv}{dt}$	$\alpha \frac{\partial p}{\partial y}$	$2\Omega u \sin(\theta)$
Escalas ($m \cdot s^{-2}$)	10^{-12}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}

Tabla 2.1: Análisis de escala de las ecuaciones del momento horizontal

$$\frac{du}{dt} - fv = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.17)$$

donde $f = 2\Omega \cdot \sin(\theta)$.

	A	B	C	D	E	F
Z-Ecuación	F_z	$\frac{dw}{dt}$	$\frac{u^2 + v^2}{a}$	$2\Omega u \cos(\theta)$	$\alpha \frac{\partial p}{\partial z}$	g
Escalas ($m \cdot s^{-2}$)	10^{-15}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}	10	10

Tabla 2.2: Análisis de escala de la ecuación del momento vertical

En la Tabla 2.2 se muestra el análisis de escala de la componente vertical de la ecuación del momento. Este análisis muestra que, para movimientos sinópticos, los términos relevantes de la ecuación son los correspondientes a las columnas E y F en la tabla. Por lo tanto, la ecuación resultante vendría dada por la expresión:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g \quad (2.18)$$

Esta ecuación se conoce como hipótesis hidrostática y expresa que la presión en cualquier punto es igual al peso de una columna de sección unidad de aire sobre ese punto. La hipótesis hidrostática filtra aquellas ondas que se propagan verticalmente, ya que no permite la expansión o contracción de la columna de aire y por lo tanto es habitualmente aplicada en modelos con resoluciones horizontales mayores de 10km, en los cuales la aceleración vertical es despreciable frente a la gravitacional.

En adelante nos centraremos en el análisis de las ecuaciones del momento horizontal obtenidas a partir del análisis de escala:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.20)$$

Derivando la primera ecuación respecto de y y la segunda respecto de x y restando ambos resultados obtenemos la ecuación de vorticidad:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

donde $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ es la componente vertical de la vorticidad relativa. Si recordamos que $f = 2\Omega \cdot \sin(\theta)$ sólo depende de la latitud (variable y) podemos reescribir la ecuación en la forma:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.21)$$

Esta ecuación puede ser simplificada mediante un nuevo análisis de escala en el cual retenemos únicamente los términos de órdenes superiores a $10^{-10} s^{-2}$ obteniendo una nueva expresión de la ecuación de vorticidad:

$$\frac{d_h}{dt}(\zeta + f) = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.22)$$

donde $\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ es la derivada total en el plano horizontal.

Por último, si consideramos un fluido totalmente horizontal, el término de divergencia se anula y se obtiene la ecuación de vorticidad barotrópica

$$\frac{d_h}{dt}(\zeta + f) = 0 \quad (2.23)$$

la cual establece que la vorticidad absoluta se conserva siguiendo el movimiento horizontal. Esta será la ecuación que resolveremos numéricamente.

2.3.2. Modificaciones de la Ecuación de Vorticidad Barotrópica

En la sección anterior hemos obtenido la ecuación de vorticidad barotrópica en su expresión más simple. Sin embargo, en la literatura podemos encontrar una gran cantidad de modificaciones de esta ecuación, en las cuales se añaden diversos términos o forzamientos con el fin de reproducir o analizar ciertas dinámicas de la atmósfera. En esta sección trataremos de definir los términos más comunes, dándoles una interpretación física (consultar Majda and Wang (2006) para una información más detallada).

La forma más general de la ecuación de vorticidad barotrópica viene dada por la expresión:

$$\frac{d_h}{dt}(\zeta + f) = -\frac{1}{a^2} J(\psi, f \cdot H(h)) + k_1 \cdot \zeta - k_2 \cdot \psi + k_3 \cdot \zeta^* + \sum_{i=3}^{i=N} (\eta_i \cdot \nabla^i \zeta) - \nu \nabla^9 \psi \quad (2.24)$$

donde ψ es la función de corriente y $J(p, q) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x}$ es el operador Jacobiano. En el caso de fluidos con divergencia nula, como es el caso que nos ocupa, la función de corriente cumple la siguiente relación con la vorticidad relativa: $\nabla^2 \psi = \zeta$. En esta ecuación encontramos los siguientes términos adicionales:

- $J(\psi, f \cdot H(h))$. Este término incluye en la ecuación la vorticidad generada por el efecto de la orografía, ya sea real o definida mediante una función $H(h)$.
- $k_1 \cdot \zeta$. Es el término de disipación de Ekman. Representa los efectos de fricción entre dos capas de un fluido, en este caso el aire.
- $\sum_{i=3}^{i=N} (\eta_i \cdot \nabla^i \zeta)$. Este sumatorio representa la contribución de los términos de hiperviscosidad. Cada uno de estos términos introduce una leve disipación en los movimientos de larga escala, mientras que reduce sensiblemente las oscilaciones de escalas más bajas. El primero de los términos del sumatorio es el más utilizado en la literatura.
- $k_2 \cdot \psi$. Este término disipativo trata de modelizar la reducción de las oscilaciones de larga escala provocada por procesos radiativos. Es un término inusual ya que actúa más fuertemente sobre las oscilaciones de larga escala a diferencia del resto de términos disipativos vistos.
- $k_3 \cdot \zeta^*$. Es un término de forzamiento, normalmente constante en el tiempo. Este término evita que el campo se aleje de la situación definida por el forzamiento, ζ^* .
- $\nu \nabla^9 \psi$. Este último término es de estabilidad numérica. Se incluye para compensar la cascada de energía existente entre los modos espectrales.

2.4. Modelización Numérica. Modelo Barotrópico

La resolución numérica de la ecuación de vorticidad barotrópica (Ec. 2.23) afronta parte de los principales problemas del cálculo numérico (integración y derivación numérica, análisis de estabilidad, discretización, cálculo de raíces, etc). El primero de estos es la selección del sistema de coordenadas. Al considerar un dominio esférico (la Tierra) utilizaremos como coordenadas la longitud y el seno de la latitud (λ, μ) (la selección de μ se verá justificada al definir los armónicos esféricos, Sec. 2.4.1). De este modo, la Ec. 2.23 vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{a \cdot \cos \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + \frac{v \cdot \cos \theta}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} + \frac{2 \cdot \Omega \cos \theta \cdot v}{a} = 0 \quad (2.25)$$

donde (u, v) son las componentes zonal y meridional de la velocidad.

En el caso de fluidos no divergentes las dos componentes de la velocidad pueden expresarse en función de la función de corriente ψ mediante las siguientes relaciones:

$$\frac{u}{\cos \theta} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (2.26)$$

$$v * \cos \theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.27)$$

Aplicando las relaciones anteriores y expresando la Ec. 2.25 en función del flujo obtenemos:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left(2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + J(\psi, \nabla^2 \psi) \right) = 0 \quad (2.28)$$

Esta será la ecuación que resolveremos numéricamente.

2.4.1. Discretización de la Ecuación

Discretización Espacial: Armónicos Esféricos

El esquema de discretización seleccionado para la resolución del modelo es un método espectral, en el que la familia de funciones utilizada son los armónicos esféricos. Este tipo de métodos son los más utilizados en la actualidad para la resolución de los modelos globales de circulación. En el caso particular de la ecuación de vorticidad barotrópica, este método presenta ciertas ventajas (Kasahara, 1977) respecto a otras metodologías (diferencias finitas, elementos finitos, etc.):

- la resolución del problema en los polos asociada a la discretización del espacio realizada por otros métodos.
- las ecuaciones espectrales truncadas presentan buenas propiedades de estabilidad del sistema y de conservación (energía, enstrofía, etc.).
- el cálculo de parte de los términos de la ecuación se puede realizar de forma exacta hasta el truncamiento.

Los métodos espectrales parten de la descomposición del campo como serie de una familia de funciones. En nuestro caso, esa familia de funciones serán los armónicos esféricos:

$$Y_n^m = P_n^m(\mu) \cdot e^{im\lambda},$$

donde n es el número de onda meridional, m es el número de onda zonal y $P_n^m(\mu)$ es el polinomio asociado de Legendre de primera especie de grado n

$$P_n^m(\mu) = \sqrt{(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \frac{1}{2^n n!} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n.$$

De este modo podemos descomponer el campo real ψ como:

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \psi_n^m \cdot Y_n^m \quad (2.29)$$

donde los

$$\psi_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 \psi(\lambda, \mu) Y_n^{m*} d\mu d\lambda \quad (2.30)$$

son los coeficientes espectrales y los Y_n^m son los armónicos esféricos. La notación a^* indica el complejo conjugado de a .

Propiedades de los Armónicos Esféricos: Los armónicos esféricos cumplen las siguientes propiedades:

1. Son ortogonales, continuos y diferenciables en los polos.
2. Los armónicos esféricos son funciones propias o autofunciones del operador laplaciano, es decir:

$$\nabla^2 Y_n^m = \frac{-n(n+1)}{a^2} Y_n^m \quad (2.31)$$

3. Al trabajar en un campo real se cumple que

$$P(\mu)_n^{-m} = P(\mu)_n^m \quad (2.32)$$

$$Y(\lambda, \mu)_n^{-m} = Y(\lambda, \mu)_n^{m*} \quad (2.33)$$

4. La derivada de los polinomios de Legendre cumple la siguiente ecuación:

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} = (n+1)\epsilon_n^m P_{n-1}^m - n\epsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m \quad (2.34)$$

$$\epsilon_n^m = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}} \quad (2.35)$$

5. La derivada longitudinal de los armónicos esféricos cumple que:

$$\frac{\partial Y_n^m}{\partial \lambda} = im Y_n^m$$

La Ec. 2.31 implica que la resolución de la ecuación de Poisson es trivial para esta descomposición.

Dada la imposibilidad de manejar la serie anterior, ésta se trunca en base a los números de onda zonal y meridional. Si M y $N(m)$ son los máximos números de onda zonal (longitudinal) y meridional (latitudinal) representados por nuestro modelo, los truncamientos más utilizados son el triangular y el romboidal:

- **Triangular:** En este caso se toma $N(m) = M, \forall m$, dando lugar a un campo de resolución uniforme que no es apropiado para bajas resoluciones aplicadas a campos con fluctuaciones zonales sistemáticas. Este es el caso del geopotencial, ya que las fluctuaciones del campo son más débiles en los trópicos que en latitudes medias.
- **Romboidal:** Este tipo de truncamiento es más útil para resoluciones con $N < 30$, ya que concentra el movimiento en las latitudes medias lo cual es conveniente para modelos de baja resolución, aunque puede no ser apropiado para otros propósitos. En este caso definimos $N(m) = |m| + M, \forall m$, lo cual implica que la resolución meridional es la misma para cada número de onda zonal.

Discretización Temporal:

Los esquemas de discretización temporal más utilizados son los métodos de diferencias finitas. En nuestro caso, los métodos utilizados son:

1. **Euler:** Dada una función $f(t)$ y su derivada $\frac{df(t)}{dt}$, el valor de la función en el instante $t_0 + dt$ vendrá dado por: $f(t_0 + dt) = f(t_0) + dt \cdot \frac{df(t_0)}{dt}$. Este método es de orden uno.
2. **Centrado o Leap-Frog:** Dada una función $f(t)$ y su derivada $\frac{df(t)}{dt}$, el valor de la función en el instante $t_0 + dt$ vendrá dado por: $f(t_0 + dt) = f(t_0 - dt) + 2 \cdot dt \cdot \frac{df(t_0)}{dt}$. Este método es de orden dos.

Nota: El método Leap-Frog requiere los valores de la función y de la derivada en los instantes $t_0 - dt$ y t_0 respectivamente. Por lo tanto, en el primer paso se calcula primero el valor de la función en un punto intermedio ($t_0 + 0.5 \cdot dt$) mediante el método de Euler y finalmente se calcula su valor en $t_0 + dt$ aplicando el método de Leap-Frog con los valores obtenidos en los instantes t_0 y $t_0 + 0.5 \cdot dt$.

Como hemos visto, el método centrado es de orden dos. Sin embargo, este método requiere del valor de la función en dos instantes de tiempo para su aplicación. Este hecho da lugar a que el método pueda presentar problemas de estabilidad por el desarrollo de un modo computacional derivado de la diferencia entre estas dos condiciones iniciales. Para evitar la desestabilización del sistema por dicho modo suelen aplicarse modificaciones o *filtros* a la integración temporal. Los más utilizados son:

1. **Filtro de Robert-Asselin:**

$$\phi_1^{n+1} = \phi^{n-1} + 2dt \cdot \frac{d\phi^n}{dt} \quad (2.36)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n + a(\phi^{n-1} - 2\phi^n + \phi_1^{n+1}) \quad (2.37)$$

2. *Filtro Trapezoidal:*

$$\phi_1^{n+1} = \phi^{n-1} + 2dt \cdot \frac{d\phi^n}{dt} \quad (2.38)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} + \frac{dt}{2} \left(\frac{d\phi_1^{n+1}}{dt} + \frac{d\phi^n}{dt} \right) \quad (2.39)$$

El primer método rebaja en un orden el del Leap-Frog, aunque su coste computacional es muy bajo. El segundo caso mantiene el orden del método, pero resulta computacionalmente más caro por la necesidad de reevaluar la derivada de la función en un punto intermedio. En nuestro caso se ha utilizado el filtro trapezoidal.

Condición de Courant-Friedrichs-Levy:

La condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) establece que la velocidad de la onda más rápida representada por el modelo debe ser menor que la relación entre las resoluciones espacial y temporal. De este modo, si c es la velocidad de la onda más rápida representada por el modelo, la condición de CFL vendrá dada por: $c \cdot \delta t / \delta x \leq 1$. Esta es una condición necesaria pero no suficiente para que el modelo sea numéricamente estable.

2.4.2. Resolución de la Ecuación

Una vez introducidos los elementos necesarios para la resolución numérica de la ecuación, en esta sección trataremos de desarrollar paso a paso el proceso de resolución y los problemas que engloba. Recordemos en primer lugar la Ec. 2.28:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left(2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \right) = 0.$$

Si aplicamos el desarrollo en serie y las distintas propiedades de los armónicos esféricos introducidas en la sección anterior, obtenemos la siguiente expresión para la derivada temporal de cada uno de los modos del desarrollo 2.29:

$$\frac{d\psi_n^m}{dt} = iv_n^m \psi_n^m + A_n^m (n(n+1))^{-1}, \forall m = -M, \dots, M \wedge \forall n = |m|, \dots, M$$

donde

$$v_n^m = \frac{2 \cdot m \cdot \Omega}{n(n+1)} \quad (2.40)$$

$$A_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^1 A(\lambda, \mu) Y_n^{m*} d\mu d\lambda \quad (2.41)$$

$$A(\lambda, \mu) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \right). \quad (2.42)$$

Por lo tanto, por las propiedades de los armónicos y una vez obtenida la expresión de $A(\lambda, \mu)$ como serie de armónicos nuestro problema se reduce a una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo. Notar que el primer armónico esférico no tiene ecuación asociada, ya que el denominador de segundo término es nulo y el primer término es nulo también, por lo que se mantendrá constante a lo largo de la integración. Notar también que es posible calcular los distintos elementos de la expresión de $A(\lambda, \mu)$ de forma exacta hasta el truncamiento elegido. Sin embargo, el producto de estos elementos aumenta el orden del desarrollo en serie de $A(\lambda, \mu)$, siendo superior al representado en un principio. Este error se propagaría en la integral y *contaminaría* la solución de la ecuación diferencial. Para evitarlo debemos definir un método de integración adecuado que sea exacto hasta el orden de $A(\lambda, \mu)$ y no sólo hasta el orden de la serie inicial.

Para el cálculo de $A(\lambda, \mu)$ utilizaremos las siguientes expresiones con el fin de aprovechar las propiedades de los armónicos esféricos:

$$F_1 = -(1 - \mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (2.43)$$

$$F_2 = \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \quad (2.44)$$

$$F_3 = (1 - \mu^2) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \quad (2.45)$$

$$F_4 = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.46)$$

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{(1 - \mu^2)} \cdot (F_1 \cdot F_2 + F_3 \cdot F_4) \quad (2.47)$$

De modo que los coeficientes de la expansión en armónicos esféricos de A vendrán dados por la integral:

$$A_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda, \mu) Y_n^{m*} d\lambda d\mu$$

o equivalentemente

$$A'_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda, \quad (2.48)$$

$$A_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A'_m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu. \quad (2.49)$$

Ambas integrales pueden calcularse de forma exacta mediante la utilización de la transformada de Fourier y la cuadratura Gaussiana. Definimos a continuación ambas metodologías. Mediante la *Transformada de Fourier* resolvemos la primera integral,

obteniendo una función dependiente de μ que viene dada por la expresión

$$A'_m(\mu) = \frac{1}{nlon} \sum_{j=1}^{nlon} A(\mu, \lambda_j) e^{-im\lambda_j},$$

siendo $nlon$ el número de puntos de longitud. Mediante la *Cuadratura Gaussiana* resolveremos la segunda integral. Considerando el intervalo $[-1, 1]$, podemos definir una fórmula de cuadratura de orden $2m - 1$, eligiendo m puntos en el intervalo de forma adecuada. Esta fórmula vendrá dada por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^{j=m} A_j f(x_j),$$

donde

$$A_j = \frac{2(1 - x_j^2)}{(mP_{m-1}(x_j))^2}$$

y los puntos x_j son las m raíces del polinomio de Legendre de grado m :

$$P_m(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n.$$

Como no disponemos de la expresión exacta de estas raíces las calcularemos con un algoritmo iterativo de Newton comenzando con una aproximación de orden $O(1/m^4)$ (Durran, 1999) dada por la expresión:

$$x_j = \left(1 - \frac{1}{8m^2} + \frac{1}{8m^3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{4j - 1}{2m + 1}\right).$$

repitiendo el proceso hasta la precisión deseada. Notar que esta fórmula nos define una serie de latitudes. A la malla del modelo numérico que usa estos puntos se le denomina Gaussiana. El número de puntos necesarios depende del truncamiento elegido. El número mínimo de puntos necesarios en latitud es $(3M-1)/2$ y $(5M-1)/2$ en los truncamientos triangular y romboidal respectivamente. Este hecho implicará que debamos tener un mínimo de $(3M-1)$ y $(5M-1)$ puntos en longitud y por lo tanto la elección del truncamiento nos determina la resolución del grid. Aplicando la fórmula construida anteriormente a la segunda integral obtendremos los coeficientes de la serie de armónicos esféricos de $A(\lambda, \mu)$ y por lo tanto obtenemos una ecuación diferencial ordinaria para cada uno de los modos del desarrollo.

Problemas de Aliasing

La discretización del espacio puede dar lugar al efecto de *aliasing* (solapamiento) que es la identificación de una onda corta con una larga al muestrear ésta en

intervalos discretos. Debemos tener muy en cuenta este fenómeno ya que puede desestabilizar el sistema, concentrando su energía en modos cuya longitud de onda oscila entre $2dx$ y $4dx$. Una de las propiedades de la malla Gaussiana es la eliminación de parte de este problema.

2.5. Construcción del Modelo

El modelo numérico introducido en las secciones anteriores ha sido implementado en MatLab 6.5, incorporando las funciones necesarias para la realización de las operaciones definidas en la Sec. 2.4: cuadratura Gaussiana, transformada de Fourier, cálculo de los polinomios de Legendre y sus raíces, cálculo del operador jacobiano, etc. De este modo, el modelo construido conforma un paquete de funciones de MatLab autocontenido en el sentido de que sólo requiere de las funciones propias de MatLab y las incluidas en el directorio del modelo, sin necesidad de ningún otro paquete adicional.

En su implementación se ha dado gran importancia a la capacidad del modelo de incorporar nuevos términos de forzamiento (ver Sec. 2.3.2), así como la necesidad de realizar un gran número de integraciones del modelo. Estos factores se han tenido en cuenta a la hora de seleccionar las resoluciones espacial y temporal del modelo:

- *Resolución Espacial*: la resolución del modelo es de 3.5° aproximadamente en longitud y en latitud, correspondiente a un truncamiento romboidal con $N = 21$. Recordemos que el grid Gaussiano es regular en longitud, pero no en latitud (Sec. 2.4.1).
- *Resolución Temporal*: el paso de integración seleccionado es $dt = 1h$ y el esquema temporal seleccionado ha sido el Leap-Frog con un filtro trapezoidal (Sec. 2.4.1).
- *Ecuación*: la ecuación considerada en esta tesis no presenta términos de forzamiento añadidos, por lo que viene dada por la Ec. 2.28.

Los parámetros del modelo seleccionados definidos en la sección anterior aseguran la estabilidad numérica del modelo y son una solución de compromiso entre la precisión y la operatividad del modelo. Para dar una idea de la estabilidad del modelo, en la Fig. 2.1 se muestra la evolución del módulo de los coeficientes espectrales. En dicha figura se observa como los valores de los módulos siguen una distribución característica que se mantiene a lo largo de toda la trayectoria. Como veremos en la siguiente sección, dentro de esta estructura, a lo largo de la trayectoria se refuerzan

los modos cuyo número de onda meridional es bajo (entre 0 y 5 aproximadamente), debilitando los modos con números de onda meridional altos. Este efecto da lugar a una concentración de energía en los primeros.

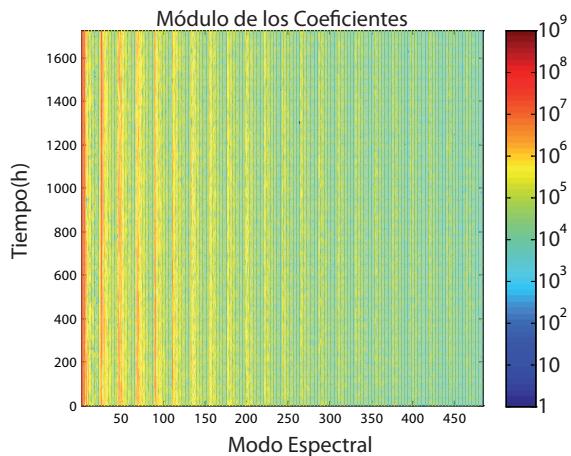


Figura 2.1: Evolución temporal del módulo de los coeficientes espectrales.

2.6. Validación del Modelo

Como hemos visto en la Sec. 2.4.2 la resolución del modelo requiere de un gran número de algoritmos numéricos para aproximar desde las raíces de un polinomio a la integral de una función. Cada uno de estos algoritmos está sujeto a error lo que da lugar al error del modelo. En este apartado trataremos de dar cuenta de cada uno de estos errores con el fin de cuantificar las propiedades del modelo implementado.

- *Cálculo de las raíces del polinomio de Legendre:* el algoritmo utilizado calcula las raíces utilizando la precisión numérica de MatLab, $\varepsilon \sim 1e^{-16}$.
- *Transformación grid-espectral-grid:* la transformación del campo en forma espectral (armónicos esféricos) a grid (longitud-latitud) tiene asociados los errores cometidos en el proceso de integración numérica, tanto en la cuadratura gaussiana como en la transformada de Fourier.

En la Fig. 2.2 se muestra a la izquierda la función de corriente para un caso particular y a la derecha el error cometido en la transformación Grid-Espectral-Grid. Como se observa en la figura, los errores se concentran en las zonas de los polos donde alcanzan valores del orden de 18×10^{-5} , que no son comparables al orden de magnitud del campo (10^8).

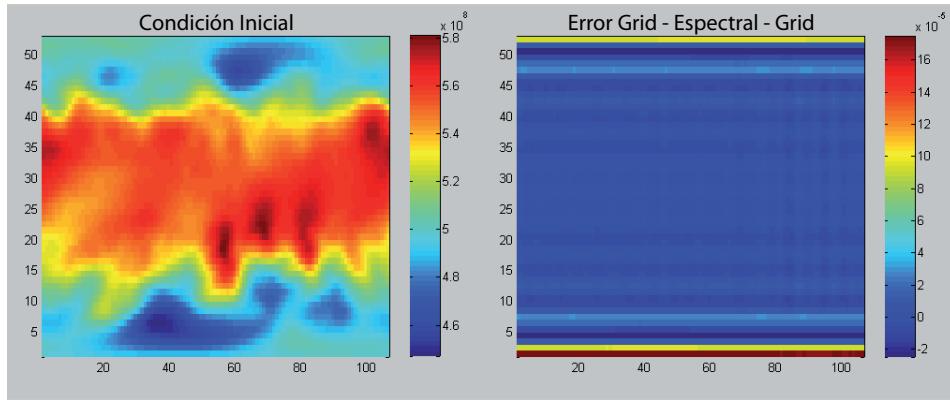


Figura 2.2: Error en el paso Grid-Espectral-Grid.

- *Error en la integración temporal:* el método de integración temporal también tiene asociado un error. Sea el campo espectral definido por un único coeficiente $\psi_{(m,n)}$ no nulo. Para este tipo de campos existe solución analítica dada por la expresión:

$$\psi_n^m(t) = \psi_n^m(0) \exp(i \cdot \nu_{(n,m)} \cdot t) \quad (2.50)$$

donde $\nu_{(n,m)} = \frac{2\Omega_m}{n(n+1)}$. La validación del modelo se realizará en base a la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE):

$$error(t) = \sqrt{\frac{1}{nlat \cdot nlon} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (\psi_{real}(\mu, \lambda, t) - \psi_{model}(\mu, \lambda, t))^2} \quad (2.51)$$

Con el fin de realizar un análisis detallado del error numérico asociado a cada modo espectral, comparamos la solución analítica con la obtenida por el modelo para cada uno de los primeros 400 modos. En la Fig. 2.3 se muestran la evolución temporal del promedio de los errores cometidos en los modos considerados (izquierda) y el error cometido en cada modo e instante de tiempo (derecha). En la figura de la derecha, cada fila muestra un instante de tiempo y cada columna un modo espectral. Como se muestra en dicha figura, los errores se concentran en ciertos nodos, que coinciden con aquellos que tienden

a dominar la dinámica del sistema (Fig. 2.1), mientras que en el resto el error permanece constante a lo largo de toda la trayectoria.

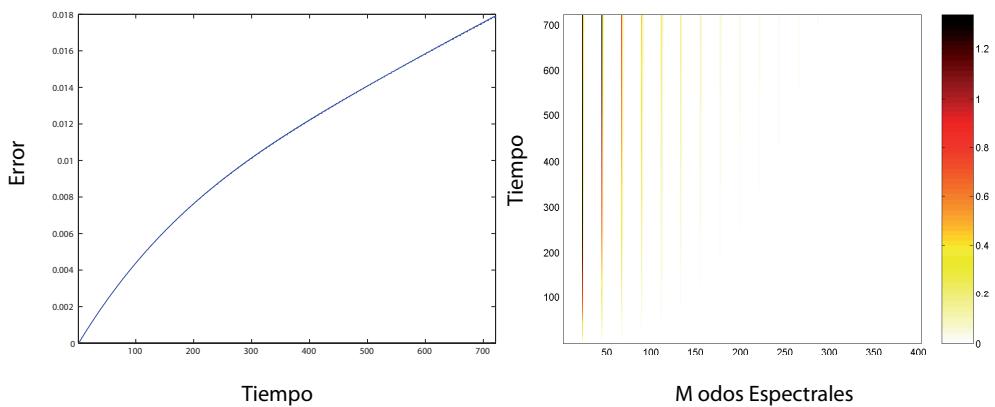


Figura 2.3: Evolución temporal del error de validación para la media (izquierda) y para cada uno de los modos (derecha).

CAPÍTULO 3

Crecimiento de Perturbaciones. Diagrama MVL

3.1. *Introducción*

Como hemos visto en el capítulo anterior, las ecuaciones fundamentales de la atmósfera forman un sistema dinámico no lineal. Por tanto, pequeños errores cometidos en las condiciones iniciales y/o en la modelización pueden crecer exponencialmente con el tiempo, estableciendo un umbral de predicción tras el cual las predicciones no serían *fiables*. A pesar del gran desarrollo llevado a cabo en la modelización del sistema atmosférico y la asimilación de los datos observados para generar condiciones iniciales óptimas, aún son muchas las incertidumbres asociadas a los modelos y las condiciones iniciales para una predicción dada. Estos errores crecerán en el tiempo, afectando a las predicciones realizadas con los modelos.

Dada la barrera teórica de la predecibilidad de los modelos deterministas, a finales del siglo XX se desarrolló la predicción por conjuntos. Este método muestrea las incertidumbres asociadas a nuestra representación de la atmósfera, tanto en el modelo como en las condiciones iniciales, generando diferentes perturbaciones de éstos mediante el uso de diferentes modelos (predicción multimodelo) o de parametrizaciones físicas diferentes en un único modelo (predicción multifísica). De este modo, se obtiene un conjunto (*ensemble*) de predicciones que dan lugar a una predicción probabilística y a una medida de la dispersión entre los miembros del ensemble asociada a esa predicción.

En este marco, la caracterización y el estudio del crecimiento de perturbaciones en el sistema atmosférico se ha convertido en un problema fundamental para

cuantificar la fiabilidad de esta metodología. Este problema ha sido abordado utilizando modelos simples de dinámica espacio-temporal, que presentan un crecimiento exponencial de errores, característico de los sistemas caóticos, similar al observado en el sistema atmosférico (Primo et al., 2007). El estudio con estos modelos simples ha permitido el desarrollo de una nueva metodología para analizar el crecimiento espacio-temporal de perturbaciones (Gutiérrez et al., 2008). En este trabajo se puso de manifiesto la necesidad de extender la metodología clásica de sistemas de baja dimensión (crecimiento exponencial de los errores caracterizado por los exponentes de Lyapunov) para tener en cuenta la relación entre la dinámica espacial y la temporal. Para estudiar los distintos regímenes de este crecimiento (crecimiento infinitesimal, en el cual la aproximación lineal es válida, saturación y efectos no lineales y saturación final) los autores propusieron la utilización del diagrama MVL (Media y Varianza de los Logaritmos de las perturbaciones) cuyas componentes caracterizan tanto la dinámica temporal como espacial del crecimiento de perturbaciones. Este diagrama aprovecha una analogía no trivial entre el crecimiento de interfases rugosas y el crecimiento de errores (Pikovsky and Politi, 1998) en sistemas dinámicos para caracterizar la dinámica espacio-temporal de éstos de forma sencilla.

En la Sec. 3.2 trataremos de definir los conceptos básicos empleados en la predicción por conjuntos que utilizaremos en las secciones posteriores, en la Sec. 3.3 introduciremos las componentes del diagrama MVL, que será definido e interpretado en la Sec. 3.4.

3.2. Predicción por conjuntos

El sistema de predicción por conjuntos se ha impuesto en la actualidad al resto de métodos de predicción, siendo utilizado tanto en predicciones a corto y medio plazo como en predicciones estacionales y simulaciones climáticas. Como hemos visto, este sistema trata de considerar las principales fuentes de incertidumbre asociadas a las predicciones realizadas con los modelos atmosféricos. Éstas pueden clasificarse en dos grandes grupos:

- Las debidas a las *condiciones iniciales*:
 - Errores en las observaciones, dados por la precisión finita del instrumental de medida.
 - Errores en la asimilación de estas observaciones a los puntos de rejilla del modelo, para generar la condición inicial (métodos de optimización, pesos relativos, etc.).

- Las debidas al *modelo utilizado*:
 - Imperfecciones en el modelo de circulación.
 - Incertidumbres numéricas debidas a la resolución o representación numérica finita.
 - Imperfecciones en la parametrización de diversos procesos físicos.
 - Imperfecciones en las condiciones de contorno: humedad de la tierra, temperatura de la superficie del mar, propiedades de la vegetación, etc.

Los distintos errores asociados a las condiciones iniciales dan lugar a un conocimiento impreciso del estado inicial del sistema. La mejor aproximación de este estado se denomina *análisis* y el proceso mediante el cual se obtiene es la *asimilación de datos*, que consiste en una combinación estadística entre las observaciones y predicciones a corto plazo. Llamaremos *control* a la trayectoria obtenida integrando el modelo a partir del análisis, y *miembro* a cada una de las integraciones realizadas incluyendo las fuentes de incertidumbre (por ejemplo, perturbando la condición inicial aleatoriamente o considerando variaciones en el modelo).

Las diferencias entre el análisis y el verdadero estado inicial de la atmósfera se denominan *errores de análisis*. Estos errores no se conocen a priori (pues no conocemos el verdadero estado de la atmósfera), con lo cual uno de los objetivos fundamentales de la predicción por conjuntos es determinar la distribución que siguen a partir del conocimiento que se tiene de los distintos errores de medición. Así se podría obtener un conjunto de predicciones a partir de la perturbación del análisis, de manera que la atmósfera se comportara como un miembro más del conjunto (objetivo primordial de la predicción por conjuntos).

La Fig. 3.1 representa un esquema de la evolución de un conjunto de dos predicciones obtenidas a partir de condiciones iniciales perturbadas, y la correspondiente trayectoria de control, obtenida de las condiciones iniciales sin perturbar (el análisis). La Fig. 3.2, muestra el caso en el que la incertidumbre la aporta el modelo. Por tanto, a la hora de construir el conjunto de predicciones, se ha de intentar que refleje la incertidumbre real inicial, para así poder caracterizar el espacio de posibles estados futuros.

El hecho de considerar la predicción meteorológica de manera probabilística ha supuesto muchas mejoras frente a la predicción determinista tradicional. El primer sistema de predicción por conjuntos implementado en el Centro Europeo para Predicción a Plazo Medio (*European Centre for Medium-Range Weather Forecast*,

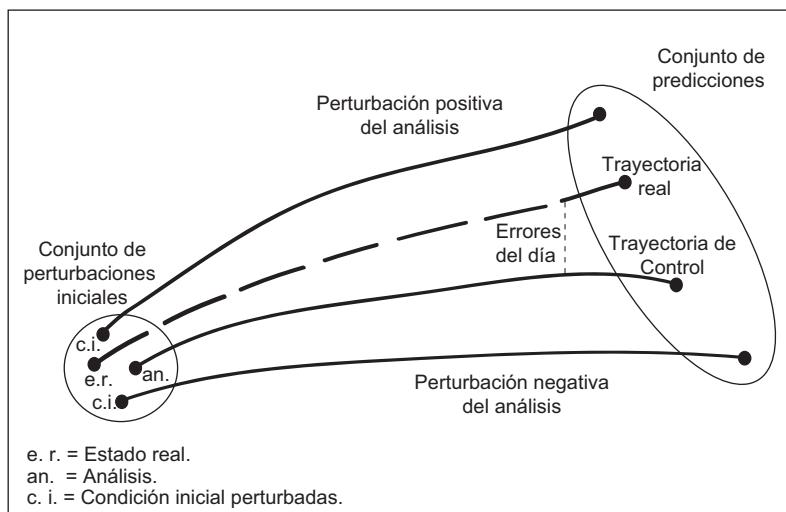


Figura 3.1: Evolución de un conjunto de predicciones de dos miembros, en el que la incertidumbre se encuentra en las condiciones iniciales.

ECMWF) en diciembre de 1992, incluyó únicamente incertidumbres en las condiciones iniciales (Palmer et al., 1993; Molteni et al., 1996). Una estrategia similar de modelo perfecto se llevó a cabo en el Centro Nacional de Predicción de Estados Unidos (*National Center for Environmental Prediction, NCEP*, Tracton and Kalnay, 1993).

En 1996 se introdujeron por primera vez las incertidumbres debidas a imperfecciones del modelo en la predicción por conjuntos desarrollada en el Servicio de Predicción Atmosférica de Canadá (*Atmospheric Environment Service*, Houtekamer et al. (1996)). En este caso, cada miembro difería tanto en las condiciones iniciales como en parámetros del modelo. Cada miembro se integró usando diferentes parametrizaciones de difusión, convección, orografía, etc. Desde octubre de 1998, en el ECMWF se utiliza un esquema estocástico simple para simular los errores aleatorios del modelo debido a las parametrizaciones de los procesos físicos (Buizza et al., 1999). Otra opción es usar distintos modelos (Multi-Modelo, ver Palmer et al., 1995).

En esta tesis trataremos únicamente la incertidumbre asociada a las condiciones iniciales mediante el estudio del crecimiento de las perturbaciones en los sistemas espacio-temporales ya que aún son muchas las cuestiones asociadas a la caracterización de este tipo de dinámicas.

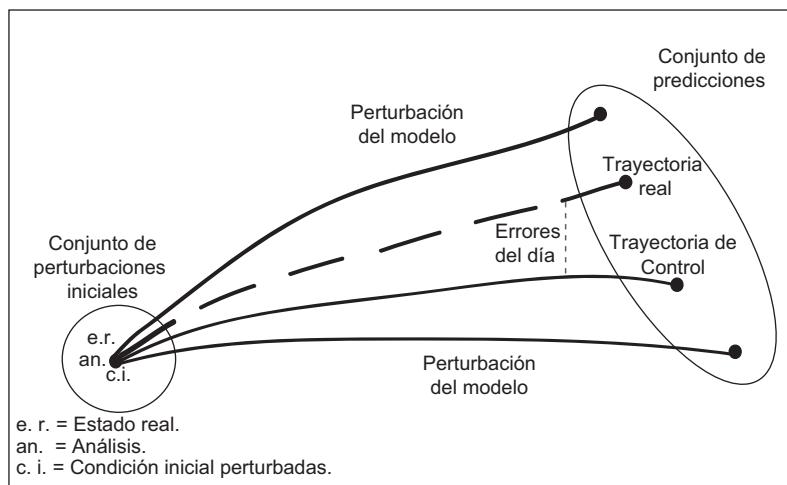


Figura 3.2: Evolución de un conjunto de predicciones de dos miembros en el que la incertidumbre la aporta el modelo.

3.3. Fluctuaciones en Sistemas Espacio-Temporales

La sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica intrínseca de los sistemas caóticos. Desde un punto de vista temporal, el crecimiento de las perturbaciones de una condición inicial crece de forma exponencial hasta alcanzar un umbral de saturación no lineal (el tamaño del sistema). Esta componente temporal del crecimiento está caracterizada por los exponentes de Lyapunov y existen una gran cantidad de trabajos que analizan su evolución.

En sistemas espacio-temporales la dinámica espacial juega un papel fundamental, ya que la correlación espacial de las perturbaciones aleatorias iniciales crece (en el régimen lineal) y decae hasta la saturación (en el régimen no lineal), interactuando localmente con el crecimiento exponencial en el tiempo. Por lo tanto, el análisis mediante exponentes de Lyapunov o técnicas similares caracteriza sólo parcialmente la dinámica espacio-temporal del sistema.

El diagrama MVL trata de dar una solución a este problema mediante una simple representación gráfica que caracteriza la evolución espacio-temporal de las perturbaciones. La interpretación de las perturbaciones como interfaces rugosas (Pikovsky and Politi, 1998; López et al., 2004) permite caracterizar las componentes espacial y temporal de su dinámica mediante la media y varianza espacial en cada instante de tiempo.

Media y Varianza de las Fluctuaciones

Sean las condiciones iniciales $\psi_i(\lambda, \mu, 0) : i = 1, \dots, N_{ci}$. Para cada condición inicial, sea la trayectoria control $\psi_i(\lambda, \mu, t)$ obtenida mediante la integración de (2.28) a partir de $\psi_i(\lambda, \mu, 0)$. Consideramos N trayectorias $\psi_i^n(\lambda, \mu, t) : n = 1, \dots, N$ obtenidas a partir de las condiciones iniciales:

$$\psi_i^n(\lambda, \mu, 0) = \psi_i(\lambda, \mu, 0) + \delta\psi_i^n(\lambda, \mu, 0) : n = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

donde $\delta\psi_i^n(\lambda, \mu, 0)$ son perturbaciones aleatorias independientes con distribución normal. La evolución espacio-temporal del conjunto estará caracterizada por las fluctuaciones finitas entre cada trayectoria perturbada y la trayectoria control,

$$\delta\psi_i^n(\lambda, \mu, t) = \psi_i^n(\lambda, \mu, t) - \psi_i(\lambda, \mu, t).$$

Aunque las perturbaciones iniciales (Ec. 3.1) siguen una distribución normal, el crecimiento multiplicativo de las fluctuaciones provoca que adquieran rápidamente una distribución log-normal (es decir, el logaritmo de las fluctuaciones sigue una distribución normal). Para analizar las componentes espacial y temporal de la dinámica del sistema consideraremos la siguiente transformación (transformación de Hopf-Cole) de las fluctuaciones:

$$h_i^n(\lambda, \mu, t) = \log(|\delta\psi_i^n(\lambda, \mu, t)|) \quad (3.2)$$

Es esta transformación la que nos permite interpretar las fluctuaciones como interfasas rugosas (López et al., 2004) y su distribución normal nos permite su caracterización mediante la media y la varianza espaciales, las cuales evolucionan según leyes de potencia relacionadas con magnitudes responsables de su dinámica espacio-temporal. Así, por ejemplo, si $nlon$ y $nlat$ son el número de longitudes y latitudes consideradas definimos las componentes del MVL como:

Media espacial:

$$M(t) = \langle \frac{1}{N} \sum_n \left(\frac{1}{nlon \cdot nlat} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} h_i^n(\lambda, \mu, t) \right) \rangle \quad (3.3)$$

donde el símbolo $\langle \rangle$ denota el promedio en realizaciones (condiciones iniciales diferentes consideradas). La media espacial evoluciona con un régimen lineal característico $M(t) \approx M(0) + \gamma \cdot t$, donde γ es el primer exponente de Lyapunov. La saturación de esta componente se produce por el carácter finito del sistema.

Varianza espacial:

$$V(t) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_n \left(\frac{1}{nlon \cdot nlat} \sum_{\lambda} \sum_{\mu} (h_i^n(\lambda, \mu, t) - \overline{h_i^n(t)})^2 \right) \right\rangle \quad (3.4)$$

donde $\overline{h_i^n(t)}$ representa el promedio espacial de las fluctuaciones. La varianza espacial de las fluctuaciones representa la anchura o rugosidad de la interfase. Esta magnitud crece con una ley de potencia de la forma $V(t) \sim t^{2\beta}$ durante el régimen lineal. Sin embargo, como el espacio es finito, la anchura satura en un valor dependiente del tamaño del sistema $V_s(t) \sim L^{2\alpha}$, donde $L = nlon \cdot nlat$ es el tamaño del sistema. En el régimen no lineal la varianza decae debido a los efectos no lineales.

Obsérvese que en los sistemas espacio-temporales cada punto del espacio evoluciona interactuando con sus vecinos, creando estructuras correlacionadas con escalas espaciales características. Como se mostró en el trabajo de López et al. (2004), estas escalas características de las perturbaciones evolucionan con el tiempo según las leyes que rigen las interfasas rugosas y pueden ser analizadas considerando la anchura de la interfase, $V(t)$. Por lo tanto, mientras la media $M(t)$ está sólo relacionada con el crecimiento temporal de las perturbaciones (anulando la componente espacial), la anchura $V(t)$ está relacionada con los cambios en la estructura espacial, la cual es responsable también del crecimiento global, en interacción con la componente temporal. De este modo, ambas componentes han de ser tenidas en cuenta para una caracterización completa del crecimiento de las perturbaciones.

3.4. Diagrama MVL

El diagrama MVL considera las dos variables introducidas anteriormente, $M(t)$ y $V(t)$, para caracterizar el crecimiento espacio-temporal de las fluctuaciones mediante la representación en un eje coordenado de la media $M(t)$, que caracteriza el crecimiento medio temporal, y en otro eje la anchura $V(t)$, que caracteriza el crecimiento espacial y la longitud de correlación (es decir, el grado de localización de la perturbación).

En el trabajo de Gutiérrez et al. (2008) se aplicó este diagrama a una simplificación del modelo Loren96 (Lorenz, 1996):

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i-1} \cdot (x_{i+1} - x_{i-2}) - x_i + F, i = 1, \dots, L \quad (3.5)$$

el cual aproxima la evolución de una variable meteorológica escalar inespecífica, x , en L puntos equidistantes a lo largo de un paralelo; F es un forzamiento constante.

En la Fig. 3.3 se muestra el MVL del Lorenz96, con parámetros $F = 8$ y $L = 40$, construido considerando 20 condiciones iniciales y 10 perturbaciones de cada una de ellas.

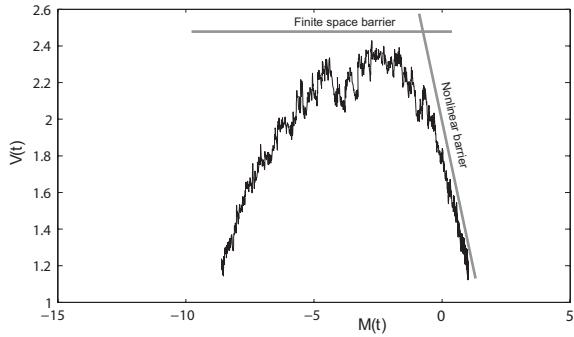


Figura 3.3: Diagrama MVL del sistema Lorenz 96.

En este diagrama los puntos evolucionan con el tiempo de izquierda a derecha, ya que la media de las perturbaciones siempre crece con el tiempo. Sin embargo, la componente vertical presenta una mayor riqueza en su dinámica, ya que la anchura crece a medida que las perturbaciones ganan estructura (se localizan) y decrece cuando la pierden (es decir, cuando aparecen los efectos no lineales debido a la amplitud finita del sistema).

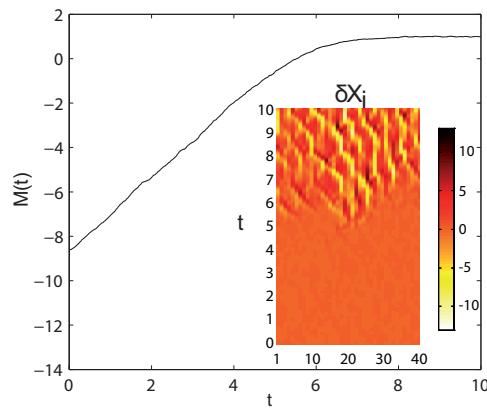


Figura 3.4: Componente $M(t)$ del diagrama MVL que recoge la dinámica temporal de las perturbaciones. En el panel interior se muestra el patrón espacial de la evolución.

En la Fig. 3.4 se muestra la evolución de la componente $M(t)$ en el tiempo. En el panel interior se muestra el patrón espacial de la evolución. Se observa como, partiendo de una pequeña perturbación, al cabo de un tiempo la perturbación alcanza

el tamaño del sistema. Esta barrera se muestra en la Fig. 3.3 y el la impuesta por el tamaño finito del sistema.

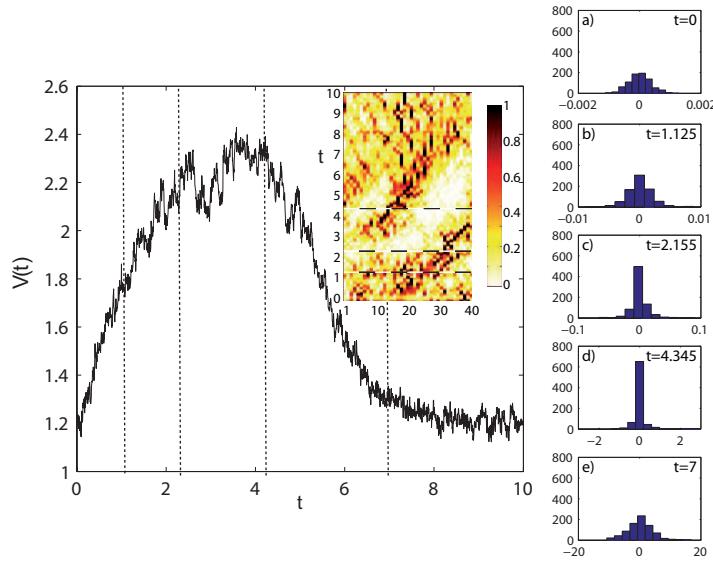


Figura 3.5: Componente $V(t)$ del diagrama MVL que recoge la dinámica espacio-temporal de las perturbaciones. En el panel interior se muestra el patrón espacial de la evolución de la perturbación normalizada en cada instante al intervalo $[0,1]$. Los histogramas recogen la distribución de las perturbaciones.

De forma análoga, en la Fig. 3.5 se muestra la evolución de la componente $V(t)$ en el tiempo. Vemos como el sistema gana estructura con el tiempo hasta la saturación y la aparición de los efectos no lineales debido a la consideración de perturbaciones finitas. En el panel interior se muestra el patrón espacial de la evolución de la perturbación mostrada en la Fig. 3.4 normalizada en cada instante al intervalo $[0,1]$ para observar su distribución. En los histogramas de la derecha se muestran la distribución de las fluctuaciones en los instantes señalados mediante líneas en la gráfica. Se observa como las perturbaciones parten de una distribución normal y se van localizando a medida que crece el valor de $V(t)$. Del mismo modo, cuando comienza a decrecer $V(t)$ las perturbaciones recuperan el carácter normal de su distribución. La deslocalización de las perturbaciones viene dada por la aparición de los efectos no lineales, definida en la Fig. 3.3 como barrera no lineal.

CAPÍTULO 4

Fluctuaciones en Modelos Multi-Escala

4.1. *Introducción*

Como hemos visto en el capítulo anterior, el diagrama MVL es una potente herramienta para la caracterización de la dinámica espacio-temporal de las fluctuaciones en modelos simples. En estos modelos, la interpretación de las diferentes fases del diagrama MVL y su asociación con ciertas estructuras espaciales del sistema es sencilla.

En un estudio reciente, Fernández et al. (2008) aplicaron este diagrama para el análisis de las fluctuaciones en modelos operativos globales de circulación. A pesar de partir de sistemas similares (todos resuelven las ecuaciones primitivas), los diagramas obtenidos dependían fuertemente del modelo considerado, siendo mayor esta dependencia para unas variables que para otras. La complejidad del sistema atmosférico, en el cual interactúan diferentes variables y dinámicas de escalas muy diversas, dificulta la interpretación de estos resultados y su asociación con los elementos (términos, parametrizaciones, esquemas numéricos, etc.) del modelo y los procesos físicos que éstos representan.

En los modelos de circulación general, la interacción de dinámicas de escalas temporales y espaciales muy diferentes y la utilización de parametrizaciones dificulta la interpretación del diagrama, enmascarando los fenómenos físicos que dan lugar a ese crecimiento exponencial de los errores.

La posibilidad de usar modelos de juguete y modelos atmosféricos simplificados, como el descrito en la Sec. 2.4, permite analizar la interacción de las diferentes esca-

las del modelo, caracterizar el crecimiento de errores para determinadas dinámicas presentes en el sistema atmosférico e introducir nuevos términos en el modelo que permitan analizar su efecto en dichas dinámicas.

En este capítulo abordaremos el análisis de estos problemas mediante la aplicación del diagrama MVL a un modelo teórico de dos escalas (Sec. 4.2), el modelo de Lorenz96 (Lorenz, 1996), y al modelo barotrópico (Sec. 2.3) introducido en la Sec. 4.3. Por último, estableceremos las principales conclusiones del estudio y las posibles líneas de investigación futura (Sec. ??).

4.2. Fluctuaciones en el Modelo Lorenz96

El sistema de Lorenz96 (Lorenz, 1996) es un modelo teórico de dinámica atmosférica multi-escala. Este sistema consiste en L variables lentas $x_i : i = 1, \dots, L$

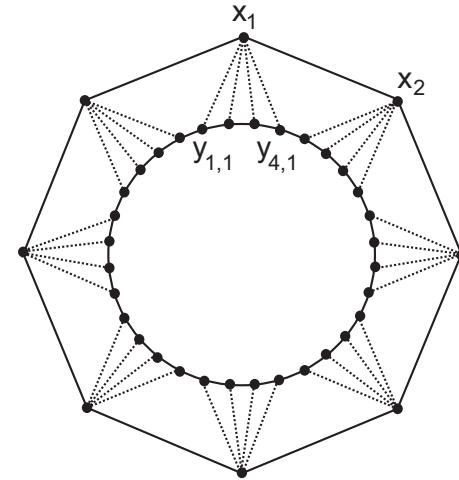


Figura 4.1: Ilustración esquemática del sistema Lorenz96 con $L = 8$ y $N = 4$.

acopladas a $L \times N$ variables rápidas $y_{j,i} : i = 1, \dots, L; j = 1, \dots, N$ (equivalentemente, escalas larga y corta), cuya evolución viene dada por el siguiente sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i-1} \cdot (x_{i+1} - x_{i-2}) - x_i + F - \frac{hc}{b} \sum_{j=1}^N y_{j,i} \quad (4.1)$$

$$\frac{dy_{j,i}}{dt} = cb y_{j+1,i} \cdot (y_{j-1,i} - y_{j+2,i}) - cy_{j,i} + \frac{hc}{b} x_i \quad (4.2)$$

donde $i = 1, \dots, L$, $j = 1, \dots, N$; h es la constante de acoplamiento, b y c son las constantes de escala y F es un forzamiento constante. Notar que el sistema de Lorenz utilizado en el capítulo anterior es una versión simplificada de este, considerando

únicamente una escala. En este sistema las variables se consideran periódicas, es decir $x_{L+1} = x_1; x_0 = x_L$ y $y_{N+1,i} = y_{1,i+1}; y_{0,i} = y_{N,i-1}$. En la Fig. 4.1 se muestra un esquema del modelo para $L = 8$ y $N = 4$. En nuestro caso, consideraremos $F = 8$, $L = 40$, $N = 4$, $h = 1$ y $b = c = 10$. Para dichos valores de los parámetros el sistema presenta dos escalas en las que las variables rápidas ($y_{j,i}$) oscilan 10 veces más rápido y con una amplitud 10 veces menor que las variables lentas (x_i). En este sistema una unidad de tiempo se corresponde con una evolución de cinco días en un modelo atmosférico.

En las figuras 4.2(a) y 4.2(b) se muestran la evolución de ambas variables en el tiempo. En ambas figuras, el eje de abscisas representa el espacio y el de ordenadas el tiempo. En la Fig. 4.2(c) se muestra la evolución con el tiempo de las variables x_1 , $y_{1,1}$ y s_1 , donde $s_1 = c \sum_{j=1}^N y_{j,1}$ es el término de acoplamiento entre ambas escalas. Obsérvese que este término es la contribución de las variables rápidas a las lentas en un punto del espacio dado, x_1 .

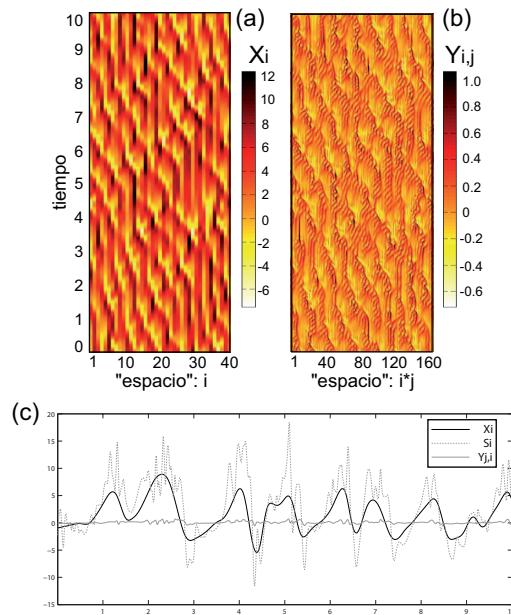


Figura 4.2: Dinámica de las variables lentas (a) y rápidas (b) del sistema de Lorenz96. (c) Evolución temporal de las variables x_1 (línea negra), $y_{1,1}$ (línea gris) y s_1 (línea gris de puntos).

En el caso de sistemas de varias escalas, el crecimiento de errores presenta un patrón más complejo que en el caso de una escala. En la Fig. 4.3 se muestran los histogramas de las perturbaciones para las variables lentas ((a)-(e)) y rápidas ((f)-(j)) del modelo. En el instante inicial la perturbación sigue una distribución normal

por construcción. En el siguiente instante considerado ($t=1.125$) ambas variables se encuentran casi totalmente localizadas. En el caso de la variable rápida las perturbaciones se vuelven a deslocalizar hasta recuperar la distribución normal mientras que en el caso de las variables lentas se observa como, tras perder estructura inicialmente, las perturbaciones vuelven a localizarse para finalmente perder estructura y recuperar la distribución normal.

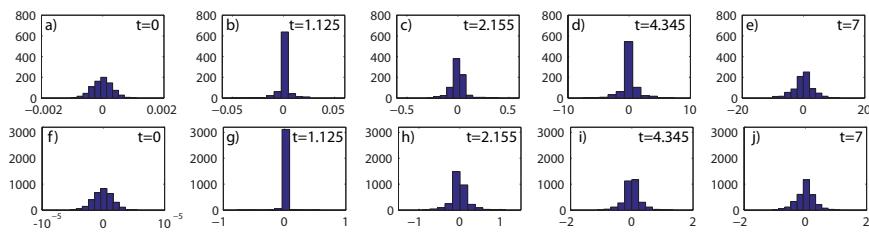


Figura 4.3: Histogramas de las perturbaciones para (a)-(e) las variables lentas x_i y (f)-(j) las variables rápidas $y_{j,i}$ del sistema de Lorenz96, correspondientes a los instantes inicial, final y tres intermedios.

Si representamos conjuntamente los diagramas MVL de ambas variables (x_i e $y_{j,i}$) y del sistema simplificado podemos analizar más detalladamente el efecto de la interacción de ambas escalas en el crecimiento de las perturbaciones. En la Fig. 4.4, la línea negra corresponde al sistema simplificado (considerando sólo las variables lentas), la gris a la variable lenta del Lorenz96 y la gris punteada a la variable rápida de dicho sistema. Obsérvese que, en ausencia de interacción entre las escalas, las líneas negra y gris deberían presentar la misma evolución.

Si analizamos la componente M del diagrama MVL (Fig. 4.4(a)) observamos como la dinámica de la variable rápida modifica la de la variable lenta, *arrastrando* a ésta en su crecimiento hasta el punto de saturación, en el cual la variable lenta recupera su dinámica *natural* confundiéndose finalmente con la curva asociada al sistema simplificado.

En el caso de la componente V observamos una mayor riqueza de regímenes ya que, tras la saturación de la componente M de la variable rápida ($t \approx 2$), la varianza de esta variable entra en un régimen de deslocalización progresiva mientras que la variable lenta recupera estructura para, a partir de $t \approx 4$, volver a deslocalizarse junto con la variable rápida hasta la saturación de ambas.

Quizás el intervalo de tiempo entre $t \approx 2$ y $t \approx 4$ sea el más interesante ya que ambas escalas, en su intento de seguir su evolución natural, compiten dando lugar al segundo máximo que se observa en el MVL de la variable lenta, que no está presente

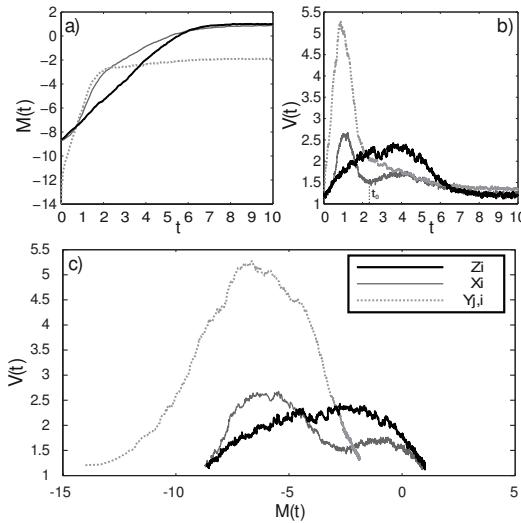


Figura 4.4: (a) Media, (b) Varianza y (c) diagrama MVL del sistema de Lorenz96 simplificado (línea negra) y de las variables lentas (línea gris) y rápidas (línea gris punteada) del sistema de Lorenz96.

en sistemas de una escala y que no es reproducible sustituyendo la variable rápida por un ruido (Herrera et al., 2010).

4.3. Fluctuaciones en el Modelo Barotrópico

En esta sección aplicaremos el diagrama MVL al modelo barotrópico construido en la Sec. 2.4. Para ello se han considerado 46 condiciones iniciales y 10 perturbaciones aleatorias de cada una de ellas.

Condiciones Iniciales: Las condiciones iniciales utilizadas han sido construidas a partir del campo geopotencial en 500mb del reanálisis del ERA40 del ECMWF (European Center for Medium-Range Weather Forecast). Este reanálisis abarca el periodo comprendido entre el 1 de septiembre de 1957 y el 31 de agosto de 2002 de modo que se ha considerado una condición inicial de cada año. En la Fig. 4.5(a) se muestra a modo de ejemplo la condición inicial correspondiente al año 1979.

Perturbaciones: A partir de cada condición inicial han sido construidas 10 perturbaciones aleatorias independientes, todas ellas con distribución $N(0, \sigma)$, donde σ representa la amplitud de la perturbación y se definirá en función de la amplitud del sistema. En lo que sigue consideraremos $\sigma_{pert} = \sigma_{sistema} \cdot 10^{-6}$. En la Fig. 4.5(b) se muestra la primera perturbación introducida en la condición inicial del año 1979.

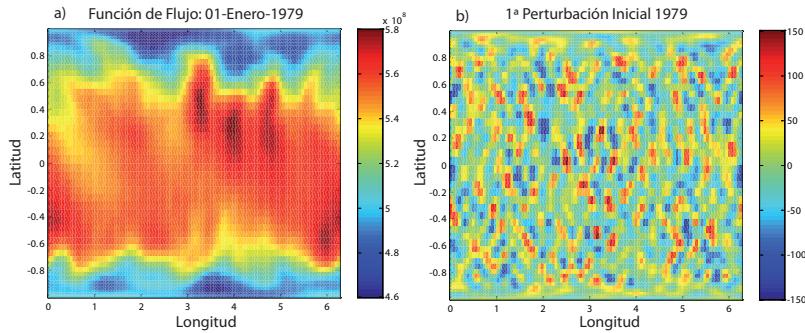


Figura 4.5: (a) Condición inicial considerada para el año 1979. (b) Primera perturbación inicial considerada para el año 1979

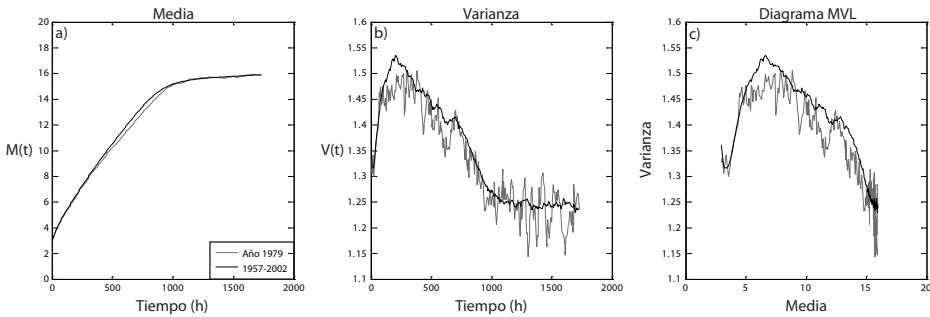


Figura 4.6: (a) Media, (b) varianza y (c) diagrama MVL para las 10 perturbaciones de una condición inicial y para el promedio de todas las condiciones iniciales.

En la Fig. 4.6 se muestran las componentes del diagrama MVL y el propio diagrama para una condición inicial, año 1979, y el promedio de las 46 condiciones iniciales consideradas. En este caso aparece en los primeros pasos del diagrama una aparente pérdida de estructura que no aparece en los casos anteriores. Este decaimiento inicial es debido a la transformación de la perturbación inicial de grid apectral.

Como puede verse en la Fig. 4.7, las perturbaciones parten de una estructura aleatoria para concentrarse en vórtices, dipolos o estructuras más complejas. Finalmente esta localización se pierde hasta alcanzar un estado estacionario en el que ni se gana ni se pierde estructura ya que la fluctuación es del propio tamaño del sistema.

En la componente V del diagrama (Fig. 4.6(b)) observamos como la deslocalización del sistema hasta la saturación presenta al menos dos regímenes diferentes, el primero entre los tiempos $t \approx 200$ y $t \approx 750$, y el segundo desde $t \approx 750$ hasta $t \approx 1000$. Como hemos visto en la sección anterior, la aparición de diferentes régime-

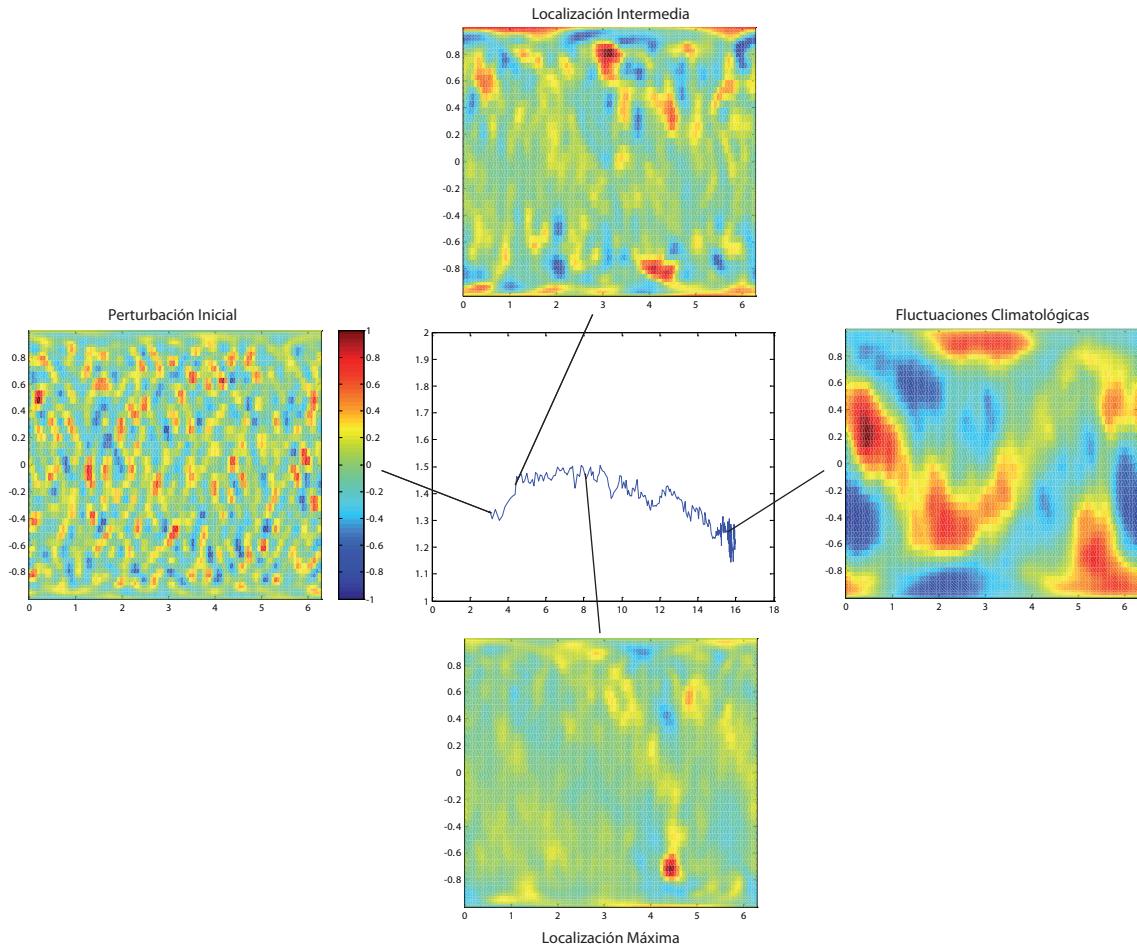


Figura 4.7: Evolución de las perturbaciones en el tiempo, para un condición inicial y perturbación particulares.

nes en el MVL puede deberse a la interacción dentro del sistema de movimientos de diferentes escalas, ya sea temporal o espacial. Por otro lado, si nos fijamos en la parte final del MVL del año 1979 parece distinguirse una maximo local, aunque en este caso no se refleja en el MVL global ni se aprecia claramente en ese caso particular.

Con el fin de analizar la posibilidad de que en el modelo barotrópico interactúen varias escalas de modo análogo a lo observado en el Lorenz96, se realizó un experimento en el cual se separaban los modos espectrales en base a sus números de onda zonal y meridional. En la Fig. 4.8 se muestra la división considerada y su contribución al campo en los instantes inicial y final de la integración. Como se puede ver en la figura la contribución al campo de ambas escalas permanece constante a

lo largo de la integración, siendo la escala larga la predominante.

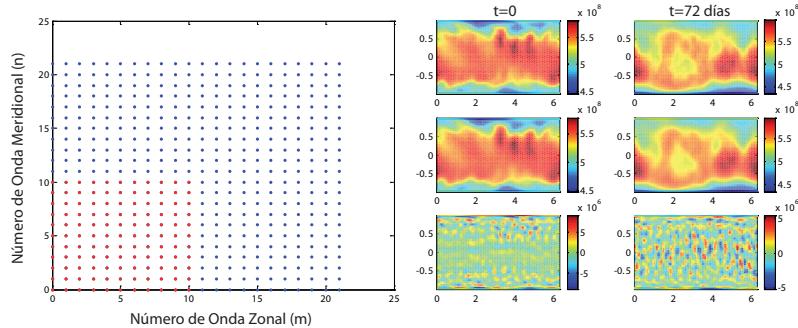


Figura 4.8: División de los modos espectrales en escala larga (puntos rojos) y corta (puntos azules).

Si construimos el diagrama MVL considerando la división anterior (Fig. 4.9), se observa que el crecimiento de errores del sistema completo (línea negra) es igual al de la escala larga (línea roja), salvo en ciertos instantes en los que la componente V se comporta como la de la escala corta (línea azul). A diferencia de lo observado en el sistema de Lorenz96, en este caso no parece existir una interacción entre ambas escalas sino que parecen estar desacopladas ya que ambas presentan regímenes similares de crecimiento y localización.

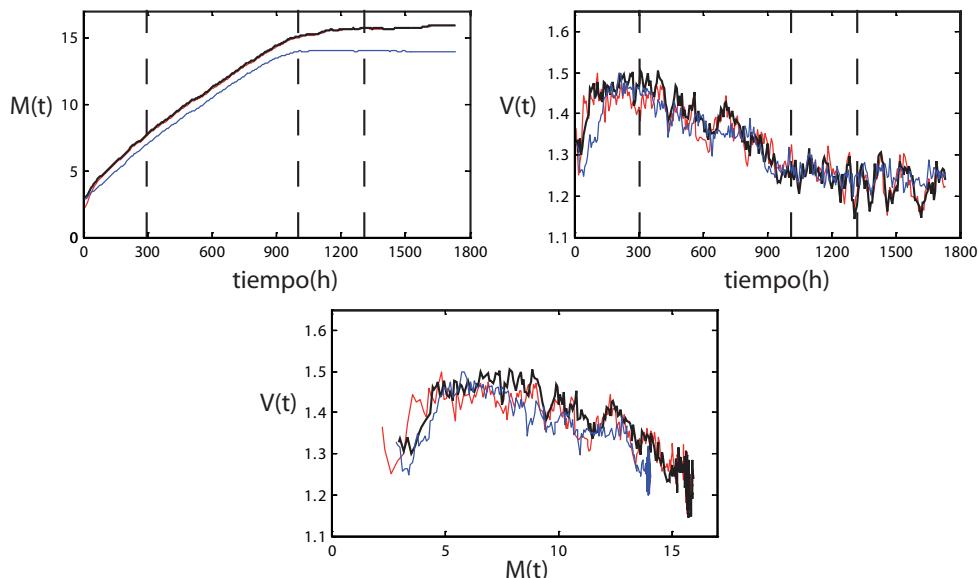


Figura 4.9: Diagrama MVL del sistema completo (línea negra), de la escala larga (línea roja) y la corta (línea azul).

Si observamos la perturbaciones en los instantes marcados en la Fig. 4.9(a) y la contribución de las dos escalas a dicho campo, vemos reflejados los regímenes definidos por el MVL. Es decir, en el instante inicial se observa como la perturbación en los tres casos es aleatoria y la magnitud de ésta se concentra en la escala corta. En un corto espacio de tiempo la magnitud del error en la escala larga pasa a ser del mismo orden que en el sistema completo, aunque la contribución de la escala corta aún es visible en él. En este instante ambas escalas comienzan a localizarse hasta el instante de máxima localización de ambas ($t \approx 12$ días) y, por lo tanto, del sistema. Este es el instante en el cual la varianza del sistema completo se comporta como la de la escala corta. La contribución de la escala corta se manifiesta en el sistema hasta la saturación de ésta en media y varianza ($t \approx 40$ días). A partir de ese instante el diagrama MVL del sistema completo es muy similar al de la escala larga.

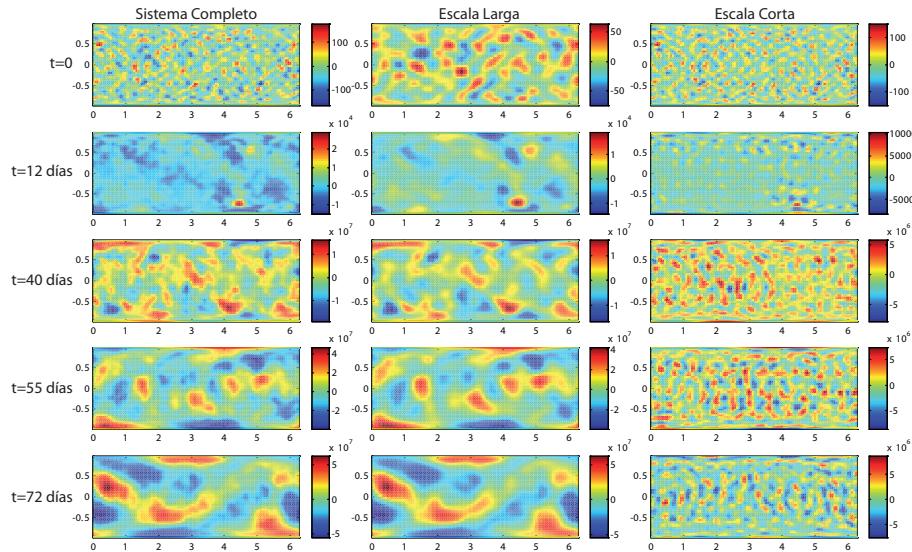


Figura 4.10: Campo de perturbaciones para el sistema completo y ambas escalas.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

A lo largo de esta tesis se ha abordado el problema de la caracterización del crecimiento de errores en sistemas con caos espacio-temporal. En particular, se han considerados dos casos de estudio: el sistema de Lorenz96 y el modelo barotrópico, que dan cuenta de parte de los problemas aún por resolver en este campo, como son el efecto de la interacción entre escalas diferentes o la compresión y caracterización del caos en sistemas espacio-temporales realistas.

Como principales conclusiones de esta tesis podemos resaltar las siguientes:

1. La interacción de las diferentes escalas en el sistema de Lorenz96 da lugar a un patrón de crecimiento más complejo que el definido en el caso de una escala.
2. La aplicación del diagrama MVL a este tipo de sistemas permite identificar e interpretar los diferentes regímenes de crecimiento de errores.
3. En este tipo de sistemas la sustitución de los procesos de corta escala por un término de ruido no es válida en todos los casos y requiere de un análisis detallado del término de ruido.
4. Se ha construido un modelo atmosférico simplificado estable en el entorno de programación de MatLab que asienta las bases para la construcción de modelos más complejos que incluyan nuevos procesos físicos.
5. Se ha aplicado el diagrama MVL a un modelo atmosférico simplificado, caracterizando la dinámica espacio-temporal de las fluctuaciones de este sistema.

6. Se ha realizado un primer acercamiento al estudio de la aportación de las diferentes escalas del sistema al crecimiento de errores.

Los diferentes experimentos llevados a cabo a lo largo de la realización de esta tesis abren un amplio abanico de líneas futuras de investigación, entre las cuales podemos señalar:

1. La caracterización, mediante el diagrama MVL, de las diferentes técnicas existentes para la obtención de las perturbaciones de la condición inicial en modelos atmosféricos simplificados o sistemas multi-escala.
2. La caracterización del efecto de los diferentes términos utilizados para modificar el modelo barotrópico en el crecimiento de errores.
3. La realización de estudios de sincronización y sincronización anticipada con un modelo atmosférico simplificado.
4. La construcción de un modelo más complejo y realista en el cual interaccionen diferentes niveles de presión (Modelo Barocílico).
5. Aplicación de las técnicas descritas a modelos más complejos.

Parte de los trabajos llevados a cabo en esta Tesis han sido recogidos en el artículo "Herrera, S. et al, Spatio-temporal Error Growth in the Multi-Scale Lorenz96 Model", enviado para su revisión y publicación a la revista *Nonlinear Processes in Geophysics*.

Bibliografía

- BELL, T. (1980). Climate sensitivity from fluctuation dissipation: some simple model tests. *Journal of Atmospheric Sciences*, No. 37:1700–1707.
- BUIZZA, R., MILLER, M., and PALMER, T. N. (1999). Stochastic simulation of model uncertainties. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, No. 125:2887–2908.
- CHARNEY, J., FJØRTOFT, R., and von NEUMANN, J. (1950). Numerical integration of barotropic vorticity equation. *Tellus*, vol 2, No. 4:237–254.
- DUANE, G. and TRIBBIA, J. (2001). Synchronized chaos in geophysical fluids dynamics. *Physical Review Letters*, vol. 86 No. 19:4298–4301.
- DURRAN, D. (1999). *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag.
- FERNÁNDEZ, J., PRIMO, C., COFIÑO, A., GUTIÉRREZ, J., and RODRÍGUEZ, M. (2008). Mvl spatiotemporal analysis for model intercomparison in eps: application to the demeter multi-model ensemble. *Climate Dynamics*.
- FREDERIKSEN, J. and BRANSTATOR, G. (2005). Seasonal variability of teleconnection patterns. *Journal of Atmospheric Sciences*, No. 62:1346–1365.
- GNEITING, T. and RAFTERY, A. (2005). Weather forecasting with ensemble methods. *Science*, No. 310:1115255.
- GUTIÉRREZ, J., PRIMO, C., RODRÍGUEZ, M., and FERNÁNDEZ, J. (2008). Spatio-temporal characterization of ensemble prediction systems - the mean-variance of logarithmics (mvl) diagram. *Nonlinear Processes in Geophysics*, No. 15:109–114.

- HERRERA, S., FERNÁNDEZ, J., RODRÍGUEZ, M., and GUTIÉRREZ, J. (2010). Spatio-temporal error growth in the multi-scale lorenz96 model. *Nonlinear Processes in Geophysics*, p. Submitted.
- HOLLAND, G., LESLIE, L., RITCHIE, E., DIETACHMAYER, G., POWERS, P., and KLENK, M. (1991). An interactive analysis and forecast system for tropical cyclone motion. *Computer Techniques: Weather and Forecasting*, No. 6:415–424.
- HOLTON, J. (1992). *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press.
- ROUTEKAMER, P. L., LEFAIVRE, L., DEROME, J., RITCHIE, H., and MITCHELL, H. (1996). A system simulation approach to ensemble prediction. *Mon. Wea. Rev.*, No. 124:1225–1242.
- KALNAY, E. (2003). *Atmospheric modeling, data assimilation and predictability*. Cambridge University Press.
- KASAHARA, A. (1977). Numerical integration of the global barotropic primitive equations with hough harmonic expansions. *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 34 No. 5:687–701.
- LEUTBECHER, M. and PALMER, T. (2008). Ensemble forecasting. *Journal of Computational Physics*, No. 227:3515–3539.
- LÓPEZ, J., PRIMO, C., RODRÍGUEZ, M., and SZENDRO, I. (2004). Scaling properties of growing noninfinitesimal perturbations in space-time chaos. *Physical Review E*, No. 70:056224.
- LORENZ, E. (1972). Barotropic instability of rossby wave motion. *Journal of Atmospheric Sciences*, No. 29:258–264.
- LORENZ, E. N. (1996). Predictability-a problem partly solved. in proceedings of ecmwf seminar predictability. *ECMWF Seminar Proceedings, ECMWF, Reading, UK.*, Seminar on Predictability, Vol. I:1–19.
- MAJDA, A. and WANG, X. (2006). *Nonlinear dynamics and statistical theories for basic geophysical flows*. Cambridge University Press.
- MOLTENI, F., BUIZZA, R., PALMER, T. N., and PETROLIAGIS, T. (1996). The new ecmwf ensemble prediction system: methodology and validation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, No. 122:73–119.

- NADIGA, B. and MARGOLIN, L. (2001). Dispersive-dissipative eddy parametrization in a barotropic model. *Journal of Physical Oceanography*, No. 31:2525–2531.
- PALMER, T. N., ALESSANDRI, A., ANDERSEN, U., CANTELAUBE, P., DAVEY, M., DÉLÉCLUSE, P., DÉQUÉ, M., DÍEZ, E., DOBLAS-REYES, F. J., FEDEERSEN, H., GRAHAM, R., GUALDI, S., GUÉRÉMY, J. F., HAGEDORN, R., HOSHEN, M., KEENLYSIDE, N., LATIF, M., LAZAR, A., MAISONNAVE, E., MARLETTA, V., MORSE, A. P., ORFILA, B., ROGEL, P., TERRES, J. M., and THOMSON, M. C. (1995). Development of a european ensemble system for seasonal to inter-annual prediction (DEMETER). *Bulletin of the American Meteorological Society*, 85(6):853–872.
- PALMER, T. N., MOLTENI, F., MUREAU, R., BUIZZA, R., CHAPELET, P., and TRIBBIA, J. (1993). Ensemble prediction. In *Proceedings of the ECMWF Seminar on Validation od models over Europe:vol. I*. Shinfield Park, Reading, RG29AX, UK.
- PIKOVSKY, A. and POLITI, A. (1998). Dynamic localization of lyapunov vectors in spacetime chaos. *Nonlinearity*, No. 11:1049–1062.
- PRIMO, C., SZENDRO, I., RODRÍGUEZ, M., and GUTIÉRREZ, J. (2007). Error growth patterns in systems with spatial chaos: from coupled map lattices to global weather models. *Physical Review Letters*, No. 98:108501.
- TRACTON, M. and KALNAY, E. (1993). Operational ensemble prediction at the national meteorological center: practical aspects. *Weather and Forecasting.*, No. 8:379–398.
- WEI, M. and FREDERIKSEN, J. (2004). Error growth and dynamical vectors during southern hemisphere blocking. *Nonlinear Processes in Geophysics*, No. 11:99–118.
- WHASINGTON, W. and PARKINSON, C. (1986). *An introduction to three-dimensional climate modeling*. University Science Books.