

Esercizi del corso di Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare

Davide Passaro

Anno scolastico 2017-2018

1 Fisica nucleare

Esercizio 1 (3.2). *L'abbondanza naturale di ^{235}U è dello 0.7% di ^{238}U . Assumendo che i processi di nucleosintesi producano approssimativamente le stesse quantità di ^{235}U e di ^{238}U , quanti è vecchio l'uranio presente sulla terra. Si ricordino i dati delle due catene della radiattività naturale:*

$$A = 4n + 2, \quad ^{238}\text{U}, \quad \tau_{\frac{1}{2}} = 4.5 \times 10^9 \text{ yr} \quad (1)$$

$$A = 4n + 3, \quad ^{235}\text{U}, \quad \tau_{\frac{1}{2}} = 7.15 \times 10^8 \text{ yr} \quad (2)$$

Svolgimento: Osservando solamente i dati si può osservare che il tempo di dimezzamento dell'uranio 235 è minore di quello 238 di quasi un ordine di grandezza. Questa osservazione conferma il fatto che, avendo uguali quantità di uranio nei suoi due isotopi, col passare del tempo, il rapporto della quantità di Uranio 235 con quella di Uranio 238 andrà diventando man mano sempre minore di uno. La strategia di soluzione di questo problema sarà dunque quella di analizzare l'equazione secolare dei due isotopi di uranio, che ne governano i decadimenti nel tempo e stimare attraverso il rapporto di queste il tempo al quale lo stesso assume il valore odierno fornito dal problema.

Per definizione il tempo di dimezzamento è il tempo medio al quale la metà di una quantità di materia dimezza per effetto di decadimento. Tramite questo parametro è possibile scrivere una legge in forma di equazione differenziale che risolta fornirà l'equazione secolare. In particolare sia $m(t)_X$ la funzione descrivente la quantità di materia di una particolare specie chimica X. Per brevità di scrittura fino a quando il problema non imporrà di specificarla con gli isotopi dell'Uranio la specificazione di questa sarà omessa dai calcoli. Si ha che, se $\tau_{\frac{1}{2}}$ è il tempo di dimezzamento, è possibile esprimere la vita media τ e la costante di decadimento λ nel seguente modo:

$$\tau_{\frac{1}{2}} = \tau \ln(2) \implies \tau = \frac{\tau_{\frac{1}{2}}}{\ln(2)} \quad (3)$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln(2)}{\tau_{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

La costante di decadimento a sua volta è interpretabile come la probabilità di decadimento per unità di tempo. Si ha dunque che, una quantità di materia $m(t)$ in un'unità di tempo decrescerà di una quantità legata sia a λ che al proprio valore in quell'istante. Questo concetto può esprimersi matematicamente attraverso la seguente equazione differenziale:

$$-\frac{m(t)}{t} = \lambda m(t) \quad (5)$$

La soluzione di questa equazione differenziale è banale e nota, perciò non verrà riportata. Questa è:

$$m(t) = Ce^{-\lambda t} \quad (6)$$

dove C è la costante d'integrazione. Questa rappresenta la quantità di materia presente all'istante zero, infatti $m(0) = C$.

I valori delle costanti di tempo e costante di decadimento calcolati dai dati del problema sono riportati nella tabella 1.

Applicando la teoria sviluppata al nostro problema, possiamo certamente dire che, sebbene il valore delle costanti di integrazione non sia noto, questo è uguale sotto la supposizione di uguale nucleogenesi.

Tabella 1: Costanti di tempo e di decadimento calcolate per l'uranio 235 e 238

	^{238}U	^{235}U
τ	$6.49 \times 10^9 \text{ yr}$	$1.03 \times 10^9 \text{ yr}$
λ	$1.54 \times 10^{-10} \text{ yr}^{-1}$	$9.71 \times 10^{-10} \text{ yr}^{-1}$

Dunque il rapporto tra le equazioni secolari è:

$$r(t) = \frac{m(t)_{^{235}\text{U}}}{m(t)_{^{238}\text{U}}} = e^{-(\lambda_{^{235}\text{U}} - \lambda_{^{238}\text{U}})t}$$

Da cui, prendendo il logaritmo e dividendo per meno la differenza delle costanti di decadimento si ottiene:

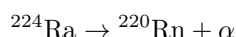
$$t(r) = -\frac{\ln(r)}{(\lambda_{^{235}\text{U}} - \lambda_{^{238}\text{U}})} \quad (7)$$

L'equazione 7 rappresenta il tempo t al quale il rapporto tra le quantità di isotopi di uranio è r . Da cui, inserendo i dati forniti dal problema e quelli calcolati e riportati nella tabella 1 si ha:

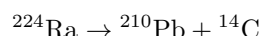
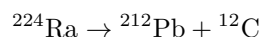
$$t(r) = 6.08 \times 10^9 \text{ yr}$$

Questo valore sembra avere senso. Infatti è poco più grande del valore stimato dell'età della Terra: $4.54 \times 10^9 \text{ yr}$. \square

Esercizio 2 (4.1). Calcolare il Q-valore del decadimento:



e sapendo che il tempo di dimezzamento è di 3.66 giorni, calcolare il fattore di Gamow. Stimare il tempo di dimezzamento per i possibili decadimenti:



Svolgimento: Va calcolato in primis il Q-valore. Questo è per definizione l'energia liberata del decadimento, ed è uguale alla differenza delle masse nucleari. Tra i dati necessari, non dati dal testo del problema ci sono quindi gli eccessi di massa per gli elementi. Consultando le tabelle si può trovare che:

Elemento	Eccesso di massa (MeV)
α (particella)	2.42
^{224}Ra	18.83
^{220}Rn	10.61
^{212}Pb	-7.55
^{210}Pb	-14.73
^{14}C	3

Il Q valore si può ottenere quindi per differenza. In particolare si ha:

	u	MeV
Ra	224	+18.86
Rn	-220	-10.61
α	-4	-2.42
Q valore	0	5.83

Per trovare il fattore di Gamow si utilizza la legge di Geiger-Nuttal, con i coefficienti espressi secondo i dati. In particolare si ha che:

$$\ln(\tau) = \ln\left(\frac{v}{2a}\right) - 2G_\alpha$$

Da cui

$$\tau_{1/2} = \ln(2)\tau \implies \tau = \frac{\tau_{1/2}}{\ln(2)} = 5.28 \text{ d} = 4.56 \times 10^5 \text{ s}$$

Si assume come valore di V_0 dell'energia di legame particella α nucleo 30 MeV. Da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2(Q + V_0)}{m}} = 0.14c$$

Il raggio a del nucleo è dato dalla solita formula:

$$a = r_0 A^{1/3} = 7.29 \text{ fm}$$

Combinando tutto:

$$G = -\frac{1}{2} \left(\ln(\tau) + \ln\left(\frac{2a}{v}\right) \right) = -\frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{2a\tau}{v}\right) \right) = 18.19$$

Si può sfruttare quindi quanto ottenuto per stimare i fattori Gamow e quindi i tempi di decadimento per i decadimenti richiesti nel punto due. Si ha che:

$$G = \alpha \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} Z_X (Z_{\text{Ra}} - Z_X) f\left(\frac{a}{b}\right)$$

Da cui, dividendo per G_α :

$$\frac{G_X}{G_\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{m_X}{Q_X}}}{\sqrt{\frac{m_\alpha}{Q_\alpha}}} \frac{Z_X (Z_Y - Z_X)}{2(Z_{\text{Ra}} - 2)} \frac{f\left(\frac{a}{b_C}\right)}{f\left(\frac{a}{b_\alpha}\right)}$$

Vanno dunque calcolati nei due casi i Q valori.

	u	MeV		u	MeV
Ra	224	+18.86	Ra	224	+18.86
Pb	-212	-(-7.55)	Pb	-210	-(-14.73)
C	-12	0	C	-14	-3
$Q_{^{12}\text{C}}$	0	26.41	$Q_{^{14}\text{C}}$	0	30.59

Si ricorda che la funzione f nel termine del fattore di Gamow è:

$$f(x) = \arccos(\sqrt{x}) - \sqrt{x - x^2}$$

Inoltre si ha che:

$$b_{^{12}\text{C}} = \frac{6(88-6)\alpha\hbar c}{Q_{^{12}\text{C}}} = 27.20\text{fm}$$

$$b_{^{14}\text{C}} = \frac{6(88-6)\alpha\hbar c}{Q_{^{14}\text{C}}} = 23.48\text{fm}$$

$$b_\alpha = \frac{2(88-2)\alpha\hbar c}{Q_\alpha} = 43.07\text{fm}$$

Da cui:

$$f\left(\frac{a}{b_{^{12}\text{C}}}\right) = 0.584 \quad f\left(\frac{a}{b_{^{14}\text{C}}}\right) = 0.517 \quad f\left(\frac{a}{b_\alpha}\right) = 0.772$$

Rimane solo il termine delle masse di ^{12}C e ^{14}C . Consultando le tabelle si trova che:

$$M(^{12}\text{C}) = 11.178 \times 10^3 \text{ MeV}/c^2, \quad M(^{14}\text{C}) = 13.043 \times 10^3 \text{ MeV}/c^2$$

Da cui inserendo tutto nelle formule:

$$\frac{G_{^{12}\text{C}}}{G_\alpha} = 1.760 \implies G_{^{12}\text{C}} = 32.018$$

$$\frac{G_{^{14}\text{C}}}{G_\alpha} = 1.565 \implies G_{^{14}\text{C}} = 29.472$$

Esponenziando la formula di Gamow-Nuttal:

$$\tau = \sqrt{\frac{(Q + V_0)}{2ma^2}} e^{-2G}$$

Da cui:

$$\tau_{^{12}\text{C}} = 3.110 \times 10^8 \text{ s}$$

$$\tau_{^{14}\text{C}} = 3.685 \times 10^{11} \text{ s}$$

□

Si può dunque osservare che il canale di decadimento preferito tra quelli analizzati è quello che rilascia le particelle alpha. Infatti si ha che il tempo medio di decadimento per i due isotopi di carbonio è molto maggiore di quello delle particelle alpha.

Tabella 2: Valori della sezione d'urto per il problema 5.3

$\sigma[\text{b}]$	^{235}U	^{238}U
σ_{tot}	703	12
σ_{fiss}	589	1.7×10^{-5}
$\sigma_{n,\gamma}$	99	2.7

Esercizio 3 (5.3). Usando le sezioni d'urto riportate nella tabella 2, ed assumendo che, se si usa acqua come moderatore, un neutrone abbia una probabilità del 47% di essere catturato in acqua, calcolare la frazione di ^{235}U richiesta per avere un reattore critico. Oggi la frazione di ^{235}U è del 0.7%, ma in passato era maggiore: calcolare quando era sufficiente perché l'U naturale potesse essere critico.

Svolgimento: L'equazione che descrive il numero medio di neutroni prodotti per un sistema in cui avviene una reazione nucleare è:

$$N(t) = N(0) \exp \left[(\nu q - 1) \frac{1}{\tau} \right] \quad (8)$$

Dove $N(t)$ è il numero di neutroni, τ è il tempo medio necessario affinché un neutrone causi una fissione, ν è il numero medio di neutroni prodotti da una fissione, e q è la probabilità che la fissione avvenga. Affinché il reattore possa autosostenersi è necessario che questo prodotto sia uguale ad uno, in modo tale da avere una soluzione *critica*. Si suppone che la probabilità di fissione con l'uranio 238 possa essere trascurata. Come numero medio di neutroni prodotti per fissione, si utilizza il valore riportato a lezione di $\nu \approx 2.4$. Sia x il rapporto tra gli isotopi di uranio. La sezione d'urto di fissione totale è quindi:

$$\bar{\sigma}_{fiss} = x \times \sigma_{fiss,^{235}\text{U}} \quad (9)$$

La sezione d'urto di cattura neutronica con seguente emissione di fotone totale invece è:

$$\bar{\sigma}_{n,\gamma} = x \times \sigma_{n,\gamma,^{235}\text{U}} + (1 - x) \times \sigma_{n,\gamma,^{238}\text{U}} \quad (10)$$

Quindi, la probabilità di fissione causata da un elettrone non catturato dall'acqua è:

$$p_{fiss} = \frac{\bar{\sigma}_{fiss}}{\bar{\sigma}_{fiss} + \bar{\sigma}_{n,\gamma}} = \frac{x \times \sigma_{fiss,^{235}\text{U}}}{x \times \sigma_{fiss,^{235}\text{U}} + x \times \sigma_{n,\gamma,^{235}\text{U}} + (1 - x) \times \sigma_{n,\gamma,^{238}\text{U}}} \quad (11)$$

Tuttavia non tutti i neutroni emessi colpiscono atomi di uranio, in parte ne vengono assorbiti dal moderatore, che in questo caso è l'acqua. La probabilità che vengano assorbiti, e quindi che non conseguano a reazioni nucleari è fornita dai dati. Si ha dunque che la probabilità totale di fissione è:

$$\bar{p}_{fiss} = 53\% p_{fiss} \quad (12)$$

Affinché la reazione sia in grado di autosostenersi è quindi necessario che:

$$\nu \bar{p}_{fiss} = 1 \quad (13)$$

Invertendo le relazioni a partire dalla 10 si ottiene:

$$x \left(\left(\frac{53\nu - 100}{100} \right) \sigma_{fiss} + \sigma_{n,\gamma,^{238}\text{U}} - \sigma_{n,\gamma,^{235}\text{U}} \right) = \sigma_{n,\gamma,^{238}\text{U}} \quad (14)$$

Da cui:

$$x = \frac{\sigma_{n,\gamma,^{238}\text{U}}}{\left(\left(\frac{53\nu - 100}{100} \right) \sigma_{fiss} + \sigma_{n,\gamma,^{238}\text{U}} - \sigma_{n,\gamma,^{235}\text{U}} \right)} = \frac{2.7}{63.908} = 4.2\% \quad (15)$$

Nell'esercizio 1 era stata calcolata la relazione tra il tempo trascorso e il rapporto tra le quantità degli isotopi di Uranio presenti (l'equazione 7). Inserendo il valore calcolato in 15 si trova:

$$t(4.2\%) = 3.87 \times 10^9 \text{ yr} \quad (16)$$

Purché questo risultato non sia identico a quello riportato alla fine dell'esercizio ne è una buona stima. Infatti l'errore presente è solo di un fattore due e può essere attribuito alle approssimazioni fatte nella modellizzazione matematica del problema. \square

Esercizio 4 (7.1). *Dare i valori di spin e parità attesi secondo il modello a shell per gli stati fondamentali di: ${}^7\text{Li}$, ${}^{11}\text{B}$, ${}^{15}\text{C}$, ${}^{17}\text{F}$, ${}^{31}\text{P}$, ${}^{141}\text{Pr}$*

Svolgimento: In generale, nello studio di spin e parità di nuclei conseguente al modello a shell ci sono tre casistiche possibili:

Pari-pari Nel caso di atomi pari-pari, ossia con un numero pari sia di protoni che di neutroni tutti questi sono accoppiati e lo spin totale è zero e la parità è positiva.

Pari-dispari Nel caso in cui un tipo di nucleone non sia pari uno di questi rimane disaccoppiato e lo spin del nucleo è uguale al valore di momento angolare totale del nucleone non accoppiato. La parità è uguale a $(-1)^l$ dove l è il numero quantico associato al valore di momento angolare orbitale del nucleone più esterno (quello disaccoppiato).

Dispari-dispari Nel caso in cui ci fossero sia un protone che un neutrone disaccoppiati, con numeri quantici associati al momento angolare totale uguali a j_1 e j_2 rispettivamente, lo spin totale nucleare è la somma di questi. Lo spin nucleare può quindi prendere tutti valori compresi nel range:

$$|j_1 - j_2| \leq j_N \leq j_1 + j_2$$

La parità del nucleo è data da $(-1)^{(l_1+l_2)}$ dove l_1 ed l_2 sono i numeri quantici associati al momento angolare orbitale del (rispettivamente) protone e neutrone più esterno.

Per tutti i seguenti casi si farà uso della tabella presentata a lezione degli orbitali nel modello a shell e della tavola periodica degli elementi.

Il ${}^7\text{Li}$ ha tre protoni e quattro neutroni. Si è quindi nel caso 2. Il protone più esterno è nella shell $1p_{\frac{3}{2}}$ dunque lo spin totale del nucleo sarà $\frac{3}{2}$. Il numero quantico associato alla shell p è $l_p = 1$ dunque la parità è negativa.

Il ${}^{11}\text{B}$ ha cinque protoni e sei neutroni. Si è ancora nel caso 2. Il protone più esterno è nella shell $1p_{\frac{3}{2}}$ dunque lo spin totale del nucleo sarà $\frac{3}{2}$. La parità è ancora negativa.

Il ${}^{15}\text{C}$ ha sei protoni e nove neutroni. Si è ancora nel caso due. Il neutrone più esterno è nella shell $1d_{\frac{5}{2}}$ dunque lo spin totale sarà $\frac{5}{2}$. Il numero quantico associato alla shell d è $l_d = 2$ quindi la parità è positiva.

Il ${}^{17}\text{F}$ ha nove protoni e otto neutroni. Si è ancora nel caso 2. Il protone più esterno è nella shell $1d_{\frac{5}{2}}$ dunque lo spin totale sarà $\frac{5}{2}$. La parità è ancora positiva.

Il ${}^{31}\text{P}$ ha 15 protoni e 16 neutroni. Si è ancora nel caso 2. Il protone più esterno è nella shell $2s_{\frac{1}{2}}$ dunque lo spin totale sarà $\frac{1}{2}$. Il numero quantico associato alla shell s è $l_s = 0$ dunque la parità è positiva.

Il ${}^{141}\text{Pr}$ ha 59 protoni e 82 neutroni. Si è ancora nel caso 2. Il protone più esterno è nella shell $1g_{\frac{7}{2}}$ dunque lo spin totale sarà $\frac{7}{2}$. Il numero quantico associato alla shell g è $l_g = 4$ dunque la parità è positiva.

Tutti i risultati ottenuti combaciano con quelli sperimentali ad eccezione del terzo. Il carbonio 15 in fatti, si misura avere spin $1/2$. Questo risultato non è previsto dalla teoria e necessita ulteriori approfondimenti. \square

Esercizio 5 (7.5). Nel modello a shell, le proprietà dello stato fondamentale dei nuclei dispari-dispari dipende dall'interazione di protone e neutrone, ovvero da $\vec{J} = \vec{j}_p + \vec{j}_n$. Considerando i nuclei

$$^{16}\text{N}(2^-), \ ^{12}\text{B}(1^+), \ ^{34}\text{P}(1^+), \ ^{28}\text{Al}(3^+)$$

da un semplice diagramma vettoriale indicare la posizione relativa di \vec{j}_p e \vec{j}_n . Sostituire $\vec{j}_p = \vec{l}_p + \vec{s}_p$ e derivare una regola empirica per l'orientazione relativa degli spin di p ed n. Usare tale regola per predire J^P dello stato fondamentale di ^{26}Na e ^{28}Na .

Svolgimento: Il $^{16}\text{N}(2^-)$ ha sette protoni e nove neutroni. Il protone più esterno occupa la shell $1p_{\frac{1}{2}}$ e il neutrone più esterno occupa la shell $1d_{\frac{5}{2}}$. Perciò i momenti angolari totali sono rivolti in direzione opposta. Inoltre per il protone, per permettere che il momento angolare totale sia $\frac{1}{2}$ è necessario che il momento angolare di spin e quello orbitale siano antiparalleli. Per il neutrone questi sono invece paralleli. Il grafico corrispondente a questa disposizione è presente in figura 1.

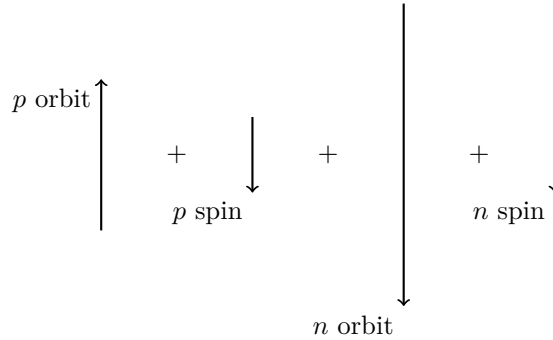


Figura 1: Posizionamento dei momenti angolari orbitali e di spin nel nucleo di ^{16}N

Il $^{12}\text{B}(1^+)$ ha cinque protoni e sette neutroni. Il protone più esterno occupa la shell $1p_{\frac{3}{2}}$ e il neutrone più esterno occupa la shell $1p_{\frac{1}{2}}$. Perciò i momenti angolari totali sono rivolti in direzione opposta. Inoltre per il protone, per permettere che il momento angolare totale sia $\frac{3}{2}$ è necessario che il momento angolare di spin e quello orbitale siano paralleli. Per il neutrone questi sono invece antiparalleli. Il grafico corrispondente a questa disposizione è presente in figura 2.

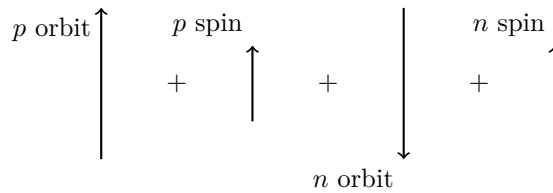


Figura 2: Posizionamento dei momenti angolari orbitali e di spin nel nucleo di ^{12}B

Il $^{34}\text{P}(1^+)$ ha 15 protoni e 19 neutroni. Il protone più esterno occupa la shell $2s_{\frac{1}{2}}$ e il neutrone più esterno occupa la shell $1d_{\frac{3}{2}}$. Perciò i momenti angolari totali sono rivolti in direzione opposta. Il protone non ha momento angolare orbitale. Per il neutrone, per permettere un momento angolare totale di $\frac{3}{2}$ è necessario che il momento angolare orbitale e quello di spin siano antiparalleli. Il grafico corrispondente a questa disposizione è presente in figura 3.

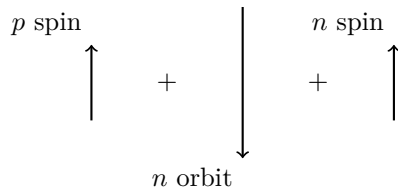


Figura 3: Posizionamento dei momenti angolari orbitali e di spin nel nucleo di ^{34}P

Il $^{28}\text{Al}(3^+)$ ha 13 protoni e 15 neutroni. Il protone più esterno occupa la shell $1d_{\frac{5}{2}}$ e il neutrone più esterno occupa la shell $2s_{\frac{1}{2}}$. Perciò i momenti angolari totali sono rivolti in direzione parallela. Inoltre per il protone, per permettere che il momento angolare totale sia $\frac{5}{2}$ è necessario che il momento angolare di spin e quello orbitale siano paralleli. Il neutrone non ha momento angolare orbitale. Il grafico corrispondente a questa disposizione è presente in figura 4.

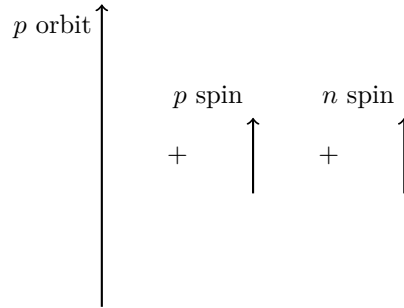


Figura 4: Posizionamento dei momenti angolari orbitali e di spin nel nucleo di ^{28}Al

Da tutte le rappresentazioni grafiche di spin e momento angolare risulta che i momenti angolari di spin sono sempre paralleli l'uno all'altro. Si può usare questa regola euristica per dedurre i momenti angolari di totali dei nuclei richiesti.

Il ^{26}Na ha 11 protoni e 15 neutroni. Il protone più esterno occupa la shell $1d_{\frac{5}{2}}$ e il neutrone più esterno occupa la shell $2s_{\frac{1}{2}}$. Per il protone, per permettere che il momento angolare totale sia $\frac{5}{2}$ è necessario che il momento angolare di spin e quello orbitale siano paralleli. Il neutrone non ha momento angolare orbitale. Dovendo gli spin essere paralleli l'uno all'altro si ha che tutti i momenti angolari si sommano, ottenendo così un momento angolare totale di 3. La situazione è completamente analoga a quella dell'alluminio 28, per cui ci si può aspettare una parità positiva.

Il ^{28}Na ha 11 protoni e 17 neutroni. Il protone più esterno occupa la shell $1d_{\frac{5}{2}}$ e il neutrone più esterno occupa la shell $1d_{\frac{3}{2}}$. Per il protone, per permettere che il momento angolare totale sia $\frac{5}{2}$ è necessario che il momento angolare di spin e quello orbitale siano paralleli. Per il neutrone invece è necessario che questi siano antiparalleli. Dovendo gli spin essere paralleli l'uno all'altro si ha che i momenti angolari totali si sottraggono, ottenendo così un momento angolare totale di 1. La situazione è completamente analoga a quella dell'azoto 16, per cui ci si può aspettare una parità negativa.

□

2 Fisica delle particelle

Esercizio 6 (10.2). *Le reazioni nucleari avvengono nella parte centrale del Sole:*

$$R < 0.2R_{\odot} \quad (17)$$

In tale regione è contenuta circa un terzo della massa solare. Assumendo che il Sole sia composto totalmente da idrogeno, dare una stima della reattività:

$$\langle \sigma \nu \rangle$$

per la reazione:



Svolgimento: La massa del Sole è:

$$M = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

e la potenza irradiata è di:

$$L = 4 \times 10^{26} \text{ W}$$

Ogni processo di fusione libera $24.68 \text{ MeV} = 3.954 \times 10^{-12} \text{ J}$. Dunque il tasso di fusioni è di:

$$f = \frac{L}{3.954 \times 10^{-12} \text{ J}} = 4 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}$$

Per ogni fusione ci sono due reazioni del tipo 18 per cui il tasso di reazioni è di:

$$f_{H+H} = 2f = 8 \times 10^{38} \text{ s}^{-1} \quad (19)$$

La massa di un protone è di:

$$m_p = 938 \text{ MeV}/c^2 = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Per cui il numero di protoni presenti nella zona centrale del Sole è di:

$$N_H = \frac{M_{\odot}}{3m_p} \approx 4 \times 10^{56}$$

Quindi la probabilità di fusione in un secondo è:

$$\langle \sigma \nu \rangle = \frac{f_{H+H}}{N_H} = 2 \times 10^{-18}$$

□

Esercizio 7 (13.3). *Dimostrare che i decadimenti:*

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^- \quad (20)$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \quad (21)$$

Sono proibiti dalla simmetria di isospin.

Svolgimento: I pioni hanno isospin in modulo uguale a $I_\pi = 1$, e ciascun pione può essere visto come uno stato diverso della stessa particella assegnando come valori di I_z :

$$I_z |\pi^\pm\rangle = \pm |\pi^\pm\rangle, \quad I_z |\pi^0\rangle = 0 |\pi^0\rangle \quad (22)$$

Perciò il gruppo che governa questi stati è $SU(2)$ e in particolare questi stati sono ben descritti da una rappresentazione tridimensionale dell'algebra di questo gruppo. Al contrario il mesone η ha isospin zero come è possibile verificare sul libretto del PDG del 2016 a pagina 35 è zero. Con questo in mente, è possibile calcolare i valori possibili di isospin totale a destra e a sinistra della reazione. In tutti e due i casi quello a sinistra è banalmente zero mentre quello a destra è dato dal prodotto di tre rappresentazioni **3** di $\mathfrak{su}(2)$. Questo si può calcolare tramite l'uso di diagrammi di Young. Usando questo formalismo, in cui ciascun quadrato rappresenta una rappresentazione fondamentale (quindi di dimensione due in questo caso) dell'algebra, è possibile vedere di colpo i prodotti di rappresentazioni e le loro relazioni di simmetria ed antisimmetria. In particolare rappresentazioni ottenute per simmetrizzazioni di fondamentali sono rappresentate nei tableaux da quadrati accostati orizzontalmente, quelle ottenute per antisimmetrizzazione sono poste verticalmente. Utilizzando questo formalismo si ha che $\square\square$ rappresenta la rappresentazione tridimensionale e, iniziando dal prodotto di due rappresentazioni:

$$\square\square \otimes \square\square = \square\square\square\square \oplus \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (23)$$

Dove $\square\square\square\square$ è la rappresentazione **5** e $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ è la rappresentazione banale. Queste rappresentazioni corrispondono a valori di isospin uguale a due e zero. Tuttavia, avendo spin zero i pioni sono bosoni e poiché la rappresentazione banale è ottenuta per antisimmetrizzazione questa va scartata. Procedendo quindi con il secondo prodotto si ottiene, per il primo dei due tableaux:

$$\square\square\square\square \otimes \square\square = \square\square\square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (24)$$

Corrispondenti a rappresentazioni di dimensione sette, cinque e uno. Inoltre la cinque, possedendo una parte antisimmetrica deve essere scartata. Il secondo prodotto è uguale al primo, e come visto prima non presenta tra i suoi prodotti una rappresentazione banale completamente simmetrica. Dunque i decadimenti 20 e 21 non sono possibili attraverso interazioni che conservino l'isospin.

È anche possibile dedurre questo risultato per un'altra strada, senza ricorrere al formalismo dei tableaux di Young. Infatti, è banale il fatto che, la somma di tre rappresentazioni di isospin con numero quantico uguale ad 1 è:

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = (3 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1) \quad (25)$$

(si noti come questi si sovrappongono esattamente agli tableaux trovati prima, eccetto che ogni informazione riguardo alla simmetrizzazione o antisimmetrizzazione è nulla). Da questa scomposizione può sembrare che ci sia anche la rappresentazione banale 0 tra le scelte possibili. Facciamo vedere che questo è falso, poiché la 0 corrisponde alla completa antisimmetrizzazione. Per definizione di rappresentazione riducibile, sappiamo che questo è l'unico modo di ridurre l'algebra prodotto ossia che, se dovessimo trovare un sottospazio invariante per trasformazioni che conservano l'isospin e che abbia dimensione uno, questo è certamente identificato con lo 0 dell'equazione 25. Consideriamo lo spazio completamente antisimmetrico. Questo è composto da tutte le funzioni indipendenti completamente antisimmetriche di tre pioni, ciascuno dei quali può avere uno di tre valori. La dimensione di questa rappresentazione è quindi uguale al coefficiente binomiale con entrambi i valori uguali, ed uguali a tre:

$$\dim(V_{antisimm}) = \binom{3}{3} = 1$$

dunque coincide con la rappresentazione 0. Poiché la funzione d'onda di tre pioni deve essere completamente simmetrica, questo sottospazio è da scartare. \square