

# 1 Analisi dei dati

L'analisi dei dati per questo esperimento è stata molto complicata. L'operazione che ha mostrato più importanza nell'analisi è stata la scrematura dei dati. Avendo infatti avuto a disposizione una grande quantità di dati su cui lavorare abbiamo potuto eliminare tutti quelli che davano anche un minimo di indicazione di essere stati affetti da errori di misurazione. Le modalità di eliminazione e i criteri secondo i quali i dati sono stati rimossi sono descritti in seguito.

## 1.1 Premessa generale

I dati raccolti sono stati prevalentemente i tempi ai quali una gocciolina oltrepassava delle linee distanti 0.5 mm l'una dall'altra. Conoscendo la distanza e le differenze di tempo siamo riusciti a calcolare le velocità medie della goccia. Si è in tutti i casi fatta l'ipotesi di velocità limite, ossia che la velocità della goccia fosse costante a causa della viscosità dell'aria. A partire da queste misure della velocità sono poi state estratte tutte le misure necessarie all'estrazione della carica.

Nel corso della relazione inoltre, si farà riferimento a tre set diversi di misure di velocità, quelle misurate in assenza di campo (*caduta libera*), quelle misurate in presenza di una forza elettrica rivolta verso l'alto (*risalita*) e quelle misurate in presenza di una forza elettrica rivolta verso il basso (*seconda caduta*).

Come errore sulla misura della velocità si è considerato che ogni misura di tempo avesse un errore di 0.250 s, che è stato calcolato mediante un semplice programma. L'errore totale sulla velocità è quindi stato:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_2}\right)^2 \sigma_t^2} = \sqrt{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right) \sigma_t = \sqrt{2} \frac{v}{\Delta t} \sigma_t \quad (1)$$

## 1.2 Estrazione del raggio

L'estrazione del raggio è stata effettuata utilizzando le velocità ottenute nella caduta libera. Per l'estrazione della misura del raggio è necessario conoscere il coefficiente di viscosità dell'aria. Come già notò il gruppo di ricerca di Millikan questo dipende dal raggio della goccia secondo la relazione:

$$\eta_{eff} = \frac{\eta}{1 + \frac{b}{pr}} \quad (2)$$

dove  $b$  è una costante uguale a  $8.2 \times 10^{-3}$  Pa m,  $p$  è la pressione dell'aria,  $r$  il raggio della goccia e  $\eta$  è dipendente dalla temperatura secondo la relazione:

$$\eta = \left[1.8 + (t - 15) 4.765 \times 10^{-3}\right] 10^{-5} \quad (3)$$

dove  $t$  è la temperatura in gradi centigradi. Quest'ultima è stata misurata indirettamente mediante a partire dalla resistenza di un circuito posto nella camera di Millikan.

Queste relazioni, unite all'equazione del moto di una sfera in un fluido viscoso ha fornito la relazione:

$$r = \left[ \left(\frac{b}{2p}\right)^2 + \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_o - \rho_a)} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2p} \quad (4)$$

dove tutte le costanti sono come prima e  $g$  è l'accelerazione di gravità e  $\rho_o$  e  $\rho_a$  sono rispettivamente le densità dell'olio e dell'aria.

### 1.2.1 Errore sul raggio

Per il raggio sono stati considerati tre errori: uno proveniente dalle velocità e descritto sopra, uno casuale calcolato tramite la deviazione standard delle misure, e uno proveniente dalla temperatura. Non effettuando direttamente la misura della temperatura ma dovendoci riferire ad una tabella, come errore si è considerato la metà della differenza di tempo tra un valore tabulato ed il successivo, ossia mezzo grado. Questi errori sono stati propagati mediante la formula:

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 + \sigma_{r_{std}}^2} \quad (5)$$

dove

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[ \left(\frac{b}{2p}\right)^2 + \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_o - \rho_a)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{9v_0}{4g(\rho_o - \rho_a)} 4.765 \times 10^{-8} \quad (6)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left[ \left(\frac{b}{2p}\right)^2 + \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_o - \rho_a)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{9\eta}{4g(\rho_o - \rho_a)} \quad (7)$$

e  $\sigma_{r_{std}}$  è la deviazione standard dei valori ricavati.

### 1.2.2 Rigetto dei dati per incongruenze sul raggio

Come detto prima la grande quantità di dati disponibili ha permesso una scrematura dei dati. In particolare, riguardo al raggio sono stati rigettati i set di misura per i quali non si aveva una buona stima del raggio. Questo è stato valutato tramite la  $z$  di Gauss e in particolare sono stati rigettati tutti i dati per i quali risultava che più di una misura era incompatibile<sup>1</sup> con 3 o più delle altre.

### 1.2.3 Valore di $r$ finale per il set di dati

Come valore finale del set di dati per il raggio è stato considerata la media tra i valori del raggio compatibili e come errore è stato propagato un'altra volta l'errore a partire dal valore del raggio medio e la differenza di tempo media.

## 1.3 Estrazione delle cariche

L'estrazione delle cariche è stata effettuata con l'utilizzo delle misure delle velocità di risalita e discesa in presenza di campo elettrico. Poichè spesso le gocce interagivano elettricamente con altre gocce, variando la carica su di esse presente, si è considerata ogni misura di carica separatamente, senza effettuare un'operazione di media. La formula per il valore della carica deriva dalla condizione di equilibrio tra forza d'attrito viscosa, forza elettrica e forza di gravità. La necessità di conoscere il raggio della goccia deriva dalla forza di gravità: a partire dal raggio e dalla densità dell'olio si ricava la massa. In questo modo si ottengono le formule:

$$q = - \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(1 + \frac{|v|}{v_0}\right) \quad (8)$$

$$q = - \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \quad (9)$$

rispettivamente per la salita e la discesa. In queste formule le costanti sono come prima ed  $E$  è il campo elettrico, calcolato come il prodotto tra la differenza di potenziale fornita dal generatore e lo spessore del distanziatore isolato e trasparente,  $v$  è la velocità misurata, di discesa o di salita e  $v_0$  è la velocità di discesa in assenza di campo elettrico.

---

<sup>1</sup>Per un confidence level del 95% ossia  $-1.96 < z < 1.96$ ,  $z = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{\sigma_{r_1}^2 + \sigma_{r_2}^2}}$

### 1.3.1 Errore sulle cariche

L'errore sulle cariche è derivato da cinque errori: l'errore sul raggio, l'errore sulla velocità in assenza di campo elettrico, l'errore sulla velocità in presenza di campo elettrico, l'errore sul campo elettrico e l'errore casuale, derivante dalla deviazione standard. L'errore totale è stato calcolato attraverso la propagazione degli errori degli errori sopra citati, quindi con la formula.

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial E}\right)^2 \sigma_E^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v_0}\right)^2 \sigma_{v_0}^2 + \sigma_{q_{std}}^2} \quad (10)$$

Dove  $E$  è il campo elettrico calcolato come  $E = \Delta V/d$ . L'errore sul campo è stato derivato dall'errore sulla misura della distanza  $d$ , effettuata con un micrometro, e l'errore sulla differenza di potenziale, dichiarata un centesimo del valore della misura. Quindi:

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{1}{d} \sigma_{\Delta V}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta V}{d^2} \sigma_d\right)^2} \quad (11)$$

Inoltre le derivate parziali calcolate sono state: per il raggio

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -3 \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^2 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(1 + \frac{|v|}{v_0}\right) \quad (12)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -3 \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^2 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \quad (13)$$

per la discesa, per il campo elettrico

$$\frac{\partial q}{\partial E} = \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E^2}\right) \left(1 + \frac{|v|}{v_0}\right) \quad (14)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial E} = \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E^2}\right) \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \quad (15)$$

per la discesa, per la velocità in presenza del campo elettrico

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{1}{v_0}\right) \quad (16)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{-1}{v_0}\right) \quad (17)$$

per la discesa e, per la velocità in assenza di campo elettrico

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{-|v|}{v_0^2}\right) \quad (18)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{v}{v_0^2}\right) \quad (19)$$

per la discesa.

### 1.3.2 Rigetto dei dati in base alla carica

Nota quindi la carica con un buon errore sono stati rigettati tutti i valori delle cariche che possedevano un errore superiore al 40% oppure che erano visibilmente dovute a misurazioni sbagliate. Si è cercato di non utilizzare questo ultimo metodo per non influenzare il risultato, ma in certi casi questo era proprio evidente (per esempio se il valore di carica oscillava per una misura per poi ritornare al valore precedente). Questi errori erano probabilmente dovuti a piccole interazioni che non causavano uno scambio di elettroni ma una semplice spinta dalla forza di Coulomb. Sono riportati nella tabella 1 sotto i valori finali delle cariche campionate.

Tabella 1: Cariche misurate ( $1 \times 10^{-19}$  C)

30.7	96.9	14.6	17.1	7.5	24.3	4.9
34.4	44.3	15.1	16.7	7.6	21.4	4.6
33.8	46.9	13.6	17.6	6.9	20.4	19.7
34.1	46.4	14.4	21.3	7.3	20.8	21.0
57.6	43.5	17.8	25.4	7.2	13.4	21.8
44.4	39.8	17.9	21.2	8.3	19.1	20.0
48.7	14.4	17.0	21.0	9.2	22.6	20.2
105.0	13.9	19.1	20.3	11.3	18.0	24.2
106.0	14.9	15.3	20.8	9.3	19.4	18.1
86.3	15.2	17.9	15.5	9.9	18.6	19.4
14.3	13.4	18.2	22.2	18.9	17.5	22.3
16.6	16.3	17.9	22.0	22.7	4.7	19.1
17.7	16.7	15.1	21.9	24.6	4.6	10.3
15.4	17.3	16.9	23.0	21.4	4.6	10.3
16.3	20.3	17.3	22.2	22.7	3.4	10.4
15.6	16.2	16.1	24.1	4.6	4.8	10.5
18.9	16.6	17.3	16.8	4.7	5.1	9.7
9.6	10.6	10.6	9.3	9.1		

## 2 Estrazione della carica dell'elettrone

L'estrazione della carica dell'elettrone a questo punto è stata effettuata attraverso un programma appositamente scritto in C++. Il programma aveva il compito di trovare il valore migliore di carica  $q$  con il metodo di massima verosomiglianza. In particolare si è cercato il valore di  $q$  per cui risultava minima la seguente quantità:

$$S(q) = \sum_{i=0}^N \left[ \frac{Q_i}{k_i(q)} - q \right]^2 \quad (20)$$

dove  $Q_i$  sono i valori campionati sopra,  $k_i(q)$  è il numero intero più vicino al rapporto  $Q_i/q$  ed  $N$  è il numero totale di cariche. L'errore finale di  $q$  è stato trovato come la deviazione standard della media delle quantità  $Q_i/k_i(q)$ , che vista la natura della funzione  $S(q)$  erano dati da:

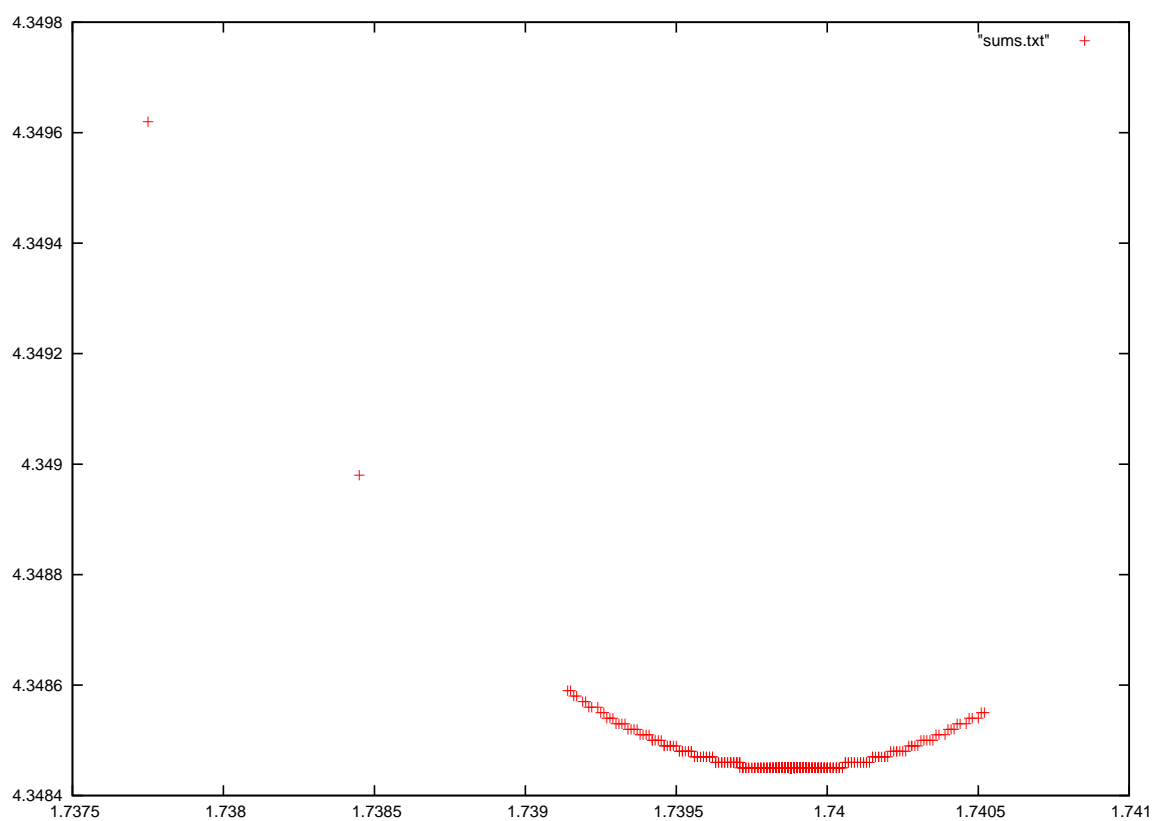
$$\sigma_{q_e} = \sqrt{\frac{S(q_e)}{N(N-1)}} \quad (21)$$

con le stesse costanti di prima. I valori sopra indicati hanno dato una curva parabolica per  $S(q)$  il cui grafico è riportato in figura 1<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Si noti che i valori riportati sulle ascisse sono Coulomb per  $1 \times 10^{-19}$  e i valori di  $S(q)$  sono calcolati usando le cariche così normalizzate.

Figura 1: Grafico di  $S(q)$



### 3 Conclusioni

Questo procedimento ha portato ad un valore di: valore che risulta compatibile con quello

Tabella 2: Add caption

$q$ (C)	$\sigma_q$ (C)	Err. Rel.
$1.74 \times 10^{-19}$	$0.16 \times 10^{-19}$	0.089

atteso, entro un confidence level dell'95%.