

LABORATORIO DI OTTICA, ELETTRONICA E FISICA MODERNA

RELAZIONE DI LABORATORIO 6

Millikan

*Nicolò Cavalleri, Giacomo Lini e Davide Passaro
(LUN12)*

Sommario

Di seguito vengono riportate ed esaminate le procedure compiute per la misura della carica dell'elettrone. Sfruttando un supporto fisico che genera un campo elettrico è infatti possibile osservare la variazione di moto di alcune goccioline di olio che si sono caricate elettricamente per strofinio. Dalla variazione di questo moto – in termini di velocità di caduta e risalita a seconda del verso del campo elettrico, è poi possibile dedurre la quantità di carica che si è “sedimentata” sulle goccioline, individuando così dei multipli della carica di un singolo elettrone.

1 Introduzione

L'elettrone è una particella subatomica fondamentale dotata di carica q che per convenzione è assunta essere una carica negativa. Una delle possibili procedure per effettuare una misura del valore assoluto di questa carica consiste nello studio della dinamica di alcune goccioline di un determinato materiale su cui le cariche si sedimentano (nel caso specifico dell'olio) in diverse condizioni. In particolare è possibile osservare delle differenze quando questa dinamica è influenzata dalla sola forza di gravità (oltre che dall'attrito dell'aria), e quando invece è soggetta anche all'azione di un campo elettrico.

Nello specifico per una gocciolina in caduta libera, per la quale si suppone una forma sferica, vale la relazione:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_o - \rho_a)g - 6\pi\eta r v_0 = 0 \quad (1)$$

dove $r, \rho_o, \rho_a, \eta, v_0$ sono nell'ordine il raggio della gocciolina, la densità dell'olio e dell'aria, il coefficiente di attrito viscoso dell'aria e la velocità limite della goccia in assenza di campo. Generando un campo elettrico E all'interno del sistema la relazione si modifica e la dinamica delle gocce d'olio obbedisce alla seguente equazione:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_o - \rho_a)g - 6\pi\eta r v + Eq = 0 \quad (2)$$

dove q rappresenta la carica che caratterizza la goccia e v è la nuova velocità limite in presenza di campo.

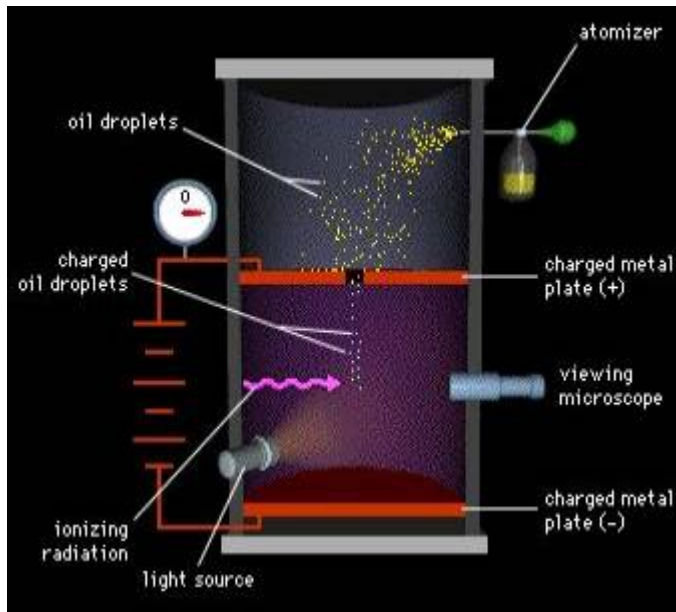


Figura 1: Schema della composizione dell'apparato per la misura della carica dell'elettrone.

te, ci si attende che questi valori siano tutti multipli di un valore "unitario" che è proprio la carica del singolo elettrone. Per estrazione di questo termine si può utilizzare il criterio di massima verosimiglianza stimando il valore di q tramite la ricerca del minimo della parabola

Noti i valori di g, ρ_o, ρ_a la 1 consente, al netto della possibilità di osservare la dinamica della goccia per determinare la velocità con cui questa si muove, di determinarne il raggio. Noto quindi r è possibile generare il campo elettrico all'interno del supporto sperimentale (del tipo di quello rappresentato in figura 1 e di cui segue descrizione) per ricavare la carica totale sulla gocciolina d'olio¹. Questa considerazione deve valere in maniera indipendentemente dall'orientamento del campo, ed è opportuno in tal senso considerare quando necessario il modulo della velocità.

Invertendo la 2 è quindi possibile ricavare la carica che caratterizza ognuna delle goccioline su cui è stata effettuata la misura delle velocità.

Avendo a che fare con cariche discrete,

¹Chiaramente queste relazioni sono di natura vettoriale, in quanto si ha a che fare con campi, forze e accelerazioni. L'omissione della notazione vettoriale è qui dovuta alla scelta di snellire leggermente la componente matematica della trattazione teorica del problema.

individuata dai punti

$$S(q) = \sum_{i=0}^N \left[\frac{Q_i}{k_i(q)} - q \right]^2$$

dove Q_i rappresenta la carica sulle particelle e k_i è l'intero più vicino al valore del rapporto $\frac{Q_i}{q}$. Questo valore con il suo errore associato restituisce dunque la miglior stima della carica di un singolo elettrone a partire dai dati ricavati in laboratorio.

2 Strumentazione

Qui di seguito sono elencati i pezzi dell'apparato sperimentale usato per portare a termine l'esperimento.

Generatore necessario per fornire la differenza di potenziale che genera la forza operante sugli elettroni. Il generatore permette di applicare un voltaggio fino a 500 V.

Commutatore che permette di invertire la polarità degli elettrodi, invertendo così anche il verso della forza.

Lampada opportunamente regolabile in direzione e intensità luminosa, che permette di illuminare le gocce d'olio da visualizzare.

Bolla d'aria incastonata nel supporto dell'esperimento, che permette la messa in bolla dell'intero apparato.

Camera di Millikan ossia il pezzo più importante dell'esperimento, luogo in cui avviene la caduta delle gocce d'olio. La camera è a sua volta composta da

Una sede provvista di delle guide su cui montare l'intera camera.

Un distanziatore isolante e trasparente, attraverso cui è possibile osservare la caduta delle gocce. La lampada sopra citata illumina proprio in questo punto.

Due elettrodi i cui ruoli di anodo e catodo sono decisi nel corso dell'esperimento tramite il commutatore. Uno si trova sotto la sede, l'altro sopra il distanziatore. A loro è applicata la differenza di potenziale del generatore; sono pertanto essenziali per esercitare la forza sugli elettroni.

Una parete laterale che circonda l'intera camera in modo da tenere insieme e isolare dall'ambiente circostante tutti i pezzi. La parete è provvista di una lente attraverso cui guardare le gocce.

Un coperchio di chiusura provvisto di un foro dove inserire lo spruzzatore delle goccioline d'olio.

Ago da inserire nella camera per la messa al fuoco delle goccioline. L'ago si trova infatti nella posizione in cui più o meno cadranno le goccioline.

Microscopio dotato di un sistema di lenti per la messa a fuoco e di un reticolo da utilizzare per le misure della posizione delle goccioline.

Sorgente di Th necessaria per una migliore ionizzazione delle gocce d'olio. Poiché le gocce uscivano già ionizzate dallo spruzzatore se ne poteva in realtà fare a meno.

Termistore utilizzato per controllare la temperatura nella camera di Millikan.

Tester connesso ai terminali del termistore per misurarne la resistenza elettrica. Sul supporto dell'esperimento era presente una tabella che permetteva di convertire il valore della resistenza nella temperatura d'esercizio.

Spruzzatore d'olio per spruzzare le gocce all'interno della camera.

Un cellulare di modello LG G4 usato come cronometro, in quanto più sensibile e facilmente leggibile di quello in dotazione. Era possibile utilizzare i tasti del volume per fermare e segnare un giro del cronometro.

Chiaramente è presente un supporto per tenere insieme tutti i pezzi citati.

3 Procedura sperimentale

Segue ora una descrizione della procedura usata per l'esperimento. Per prima cosa si sono fatte con un calibro sei misure in punti diversi del distanziatore isolante per poi determinare l'intensità del campo elettrico. Si è poi montata la camera di Millikan e si è messo a fuoco l'ago inserito nel foro dell'elettrodo superiore attraverso cui sarebbero poi passate le gocce d'olio. Si è messo a fuoco anche il reticolo. Si è connesso il tester ai terminali del termistore e si è misurata la temperatura, cosa che è stata ripetuta all'inizio di ogni misura. Si sono poi prese le misure: si spruzzava inizialmente le gocce d'olio nella camera, con la sorgente di Th accesa per una decina di secondi. Una volta individuata poi una gocciolina d'olio visibile si verificava che la sua velocità di caduta senza differenza di potenziale, quella di risalita e quella di caduta con la differenza di potenziale consentissero delle misure precise (se infatti una delle tre velocità, tipicamente quella di caduta con differenza di potenziale, fosse stata troppo alta i nostri tempi di reazione avrebbero influito troppo sulla misura). Allo stesso tempo la velocità di caduta libera non doveva essere troppo lenta poiché per esperienze, le gocce troppo leggere erano molto più soggette a perturbazioni esterne e spesso subivano rallentamenti o accelerazioni. Una volta individuata, non senza fatica, una goccia adatta all'osservazione si procedeva alla misurazione delle sue posizioni e dei relativi tempi. Si portava la goccia, tramite la forza elettrica, in cima al reticolo dopodiché si misurava il tempo che ci metteva a percorrere una tacca grande del reticolo (corrispondente a 0.5 mm) per cinque tacche, si accendeva il generatore in maniera tale da far percorrere alla goccia lo stesso percorso in salita e la si faceva scendere nuovamente, questa volta applicando la differenza di potenziale. Si ottenevano in questo modo quindici misure. Ogni tanto si vedeva facilmente che la goccia accelerava o decelerava in presenza di corrente, sintomo di perdita di carica, per cui si scartavano i dati presi e si ricominciava con un'altra goccia.

Si sono prese le misure più volte per diverse gocce e per differenze di potenziale di 200, 300 o 400 V. Al termine di ogni misura si trasferivano i tempi registrati col cronometro su un file excel e si verificava che la misura avesse senso.

4 Analisi dei dati

L'analisi dei dati per questo esperimento è stata molto complicata. L'operazione che ha mostrato più importanza nell'analisi è stata la scrematura dei dati. Avendo infatti avuto a disposizione una grande quantità di dati su cui lavorare abbiamo potuto eliminare tutti quelli che davano anche un minimo di indicazione di essere stati affetti da errori di misurazione. Le modalità di eliminazione e i criteri secondo i quali i dati sono stati rimossi sono descritti in seguito.

4.1 Premessa generale

I dati raccolti sono stati prevalentemente i tempi ai quali una gocciolina oltrepassava delle linee distanti 0.5 mm l'una dall'altra. Conoscendo la distanza e le differenze di tempo siamo riusciti a calcolare le velocità medie della goccia. Si è in tutti i casi fatta l'ipotesi di velocità limite, ossia che la velocità della goccia fosse costante a causa della viscosità dell'aria. A partire da queste misure della velocità sono poi state estratte tutte le misure necessarie all'estrazione della carica.

Nel corso della relazione inoltre, si farà riferimento a tre set diversi di misure di velocità, quelle misurate in assenza di campo (*caduta libera*), quelle misurate in presenza di una forza elettrica rivolta verso l'alto (*risalita*) e quelle misurate in presenza di una forza elettrica rivolta verso il basso (*seconda caduta*).

Come errore sulla misura della velocità si è considerato che ogni misura di tempo avesse un errore di 0.250 s, che è stato calcolato mediante un semplice programma. L'errore totale sulla velocità è quindi stato:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_2}\right)^2 \sigma_t^2} = \sqrt{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t_1}\right) \sigma_t = \sqrt{2} \frac{v}{\Delta t} \sigma_t \quad (3)$$

4.2 Estrazione del raggio

L'estrazione del raggio è stata effettuata utilizzando le velocità ottenute nella caduta libera. Per l'estrazione della misura del raggio è necessario conoscere il coefficiente di viscosità dell'aria. Come già notò il gruppo di ricerca di Millikan questo dipende dal raggio della goccia secondo la relazione:

$$\eta_{eff} = \frac{\eta}{1 + \frac{b}{pr}} \quad (4)$$

dove b è una costante uguale a 8.2×10^{-3} Pa m, p è la pressione dell'aria, r il raggio della goccia e η è dipendente dalla temperatura secondo la relazione:

$$\eta = \left[1.8 + (t - 15) 4.765 \times 10^{-3}\right] 10^{-5} \quad (5)$$

dove t è la temperatura in gradi centigradi. Quest'ultima è stata misurata indirettamente mediante a partire dalla resistenza di un circuito posto nella camera di Millikan.

Queste relazioni, unite all'equazione del moto di una sfera in un fluido viscoso ha fornito la relazione:

$$r = \left[\left(\frac{b}{2p}\right)^2 + \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_o - \rho_a)} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2p} \quad (6)$$

dove tutte le costanti sono come prima e g è l'accelerazione di gravità e ρ_o e ρ_a sono rispettivamente le densità dell'olio e dell'aria.

4.2.1 Errore sul raggio

Per il raggio sono stati considerati tre errori: uno proveniente dalle velocità e descritto sopra, uno casuale calcolato tramite la deviazione standard delle misure, e uno proveniente dalla temperatura. Non effettuando direttamente la misura della temperatura ma dovendoci riferire ad una tabella, come errore si è considerato la metà della differenza di tempo tra un valore tabulato ed il successivo, ossia mezzo grado. Questi errori sono stati propagati mediante la formula:

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 + \sigma_{rstd}^2} \quad (7)$$

dove

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[\left(\frac{b}{2p} \right)^2 + \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_o - \rho_a)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{9v_0}{4g(\rho_o - \rho_a)} 4.765 \times 10^{-8} \quad (8)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left[\left(\frac{b}{2p} \right)^2 + \frac{9\eta v_0}{2g(\rho_o - \rho_a)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{9_0\eta}{4g(\rho_o - \rho_a)} \quad (9)$$

e $\sigma_{r_{std}}$ è la deviazione standard dei valori ricavati.

4.2.2 Rigetto dei dati per incongruenze sul raggio

Come detto prima la grande quantità di dati disponibili ha permesso una scrematura dei dati. In particolare, riguardo al raggio sono stati rigettati i set di misura per i quali non si aveva una buona stima del raggio. Questo è stato valutato tramite la z di Gauss e in particolare sono stati rigettati tutti i dati per i quali risultava che più di una misura era incompatibile² con 3 o più delle altre.

4.2.3 Valore di r finale per il set di dati

Come valore finale del set di dati per il raggio è stato considerata la media tra i valori del raggio compatibili e come errore è stato propagato un'altra volta l'errore a partire dal valore del raggio medio e la differenza di tempo media.

4.3 Estrazione delle cariche

L'estrazione delle cariche è stata effettuata con l'utilizzo delle misure delle velocità di risalita e discesa in presenza di campo elettrico. Poichè spesso le gocce interagivano elettricamente con altre gocce, variando la carica su di esse presente, si è considerata ogni misura di carica separatamente, senza effettuare un'operazione di media. La formula per il valore della carica deriva dalla condizione di equilibrio tra forza d'attrito viscosa, forza elettrica e forza di gravità. La necessità di conoscere il raggio della goccia deriva dalla forza di gravità: a partire dal raggio e dalla densità dell'olio si ricava la massa. In questo modo si ottengono le formule:

$$q = - \left(\frac{4\pi}{3} \right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E} \right) \left(1 + \frac{|v|}{v_0} \right) \quad (10)$$

$$q = - \left(\frac{4\pi}{3} \right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E} \right) \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) \quad (11)$$

rispettivamente per la salita e la discesa. In queste formule le costanti sono come prima ed E è il campo elettrico, calcolato come il prodotto tra la differenza di potenziale fornita dal generatore e lo spessore del distanziatore isolato e trasparente, v è la velocità misurata, di discesa o di salita e v_0 è la velocità di discesa in assenza di campo elettrico.

4.3.1 Errore sulle cariche

L'errore sulle cariche è derivato da cinque errori: l'errore sul raggio, l'errore sulla velocità in assenza di campo elettrico, l'errore sulla velocità in presenza di campo elettrico, l'errore sul campo elettrico e l'errore casuale, derivante dalla deviazione standard. L'errore totale è stato calcolato attraverso la propagazione degli errori degli errori sopra citati, quindi con la formula.

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial r} \right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial E} \right)^2 \sigma_E^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v} \right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v_0} \right)^2 \sigma_{v_0}^2 + \sigma_{q_{std}}^2} \quad (12)$$

²Per un confidence level del 95% ossia $-1.96 < z < 1.96$, $z = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{\sigma_{r_1}^2 + \sigma_{r_2}^2}}$

Dove E è il campo elettrico calcolato come $E = \Delta V/d$. L'errore sul campo è stato derivato dall'errore sulla misura della distanza d , effettuata con un micrometro, e l'errore sulla differenza di potenziale, dichiarata un centesimo del valore della misura. Quindi:

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{1}{d}\sigma_{\Delta V}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta V}{d^2}\sigma_d\right)^2} \quad (13)$$

Inoltre le derivate parziali calcolate sono state: per il raggio

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -3 \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^2 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(1 + \frac{|v|}{v_0}\right) \quad (14)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -3 \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^2 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \quad (15)$$

per la discesa, per il campo elettrico

$$\frac{\partial q}{\partial E} = \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E^2}\right) \left(1 + \frac{|v|}{v_0}\right) \quad (16)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial E} = \left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E^2}\right) \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \quad (17)$$

per la discesa, per la velocità in presenza del campo elettrico

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{1}{v_0}\right) \quad (18)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{-1}{v_0}\right) \quad (19)$$

per la discesa e, per la velocità in assenza di campo elettrico

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{-|v|}{v_0^2}\right) \quad (20)$$

per la salita e

$$\frac{\partial q}{\partial v} = -\left(\frac{4\pi}{3}\right) r^3 (\rho_o - \rho_a) \left(\frac{g}{E}\right) \left(\frac{v}{v_0^2}\right) \quad (21)$$

per la discesa.

4.3.2 Rigetto dei dati in base alla carica

Nota quindi la carica con un buon errore sono stati rigettati tutti i valori delle cariche che possedevano un errore superiore al 40% oppure che erano visibilmente dovute a misurazioni sbagliate. Si è cercato di non utilizzare questo ultimo metodo per non influenzare il risultato, ma in certi casi questo era proprio evidente (per esempio se il valore di carica oscillava per una misura per poi ritornare al valore precedente). Questi errori erano probabilmente dovuti a piccole interazioni che non causavano uno scambio di elettroni ma una semplice spinta dalla forza di Coulomb. Sono riportati nella tabella 1 sotto i valori finali delle cariche campionate.

Tabella 1: Cariche misurate (1×10^{-19} C)

| | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|
| 30.7 | 96.9 | 14.6 | 17.1 | 7.5 | 24.3 | 4.9 |
| 34.4 | 44.3 | 15.1 | 16.7 | 7.6 | 21.4 | 4.6 |
| 33.8 | 46.9 | 13.6 | 17.6 | 6.9 | 20.4 | 19.7 |
| 34.1 | 46.4 | 14.4 | 21.3 | 7.3 | 20.8 | 21.0 |
| 57.6 | 43.5 | 17.8 | 25.4 | 7.2 | 13.4 | 21.8 |
| 44.4 | 39.8 | 17.9 | 21.2 | 8.3 | 19.1 | 20.0 |
| 48.7 | 14.4 | 17.0 | 21.0 | 9.2 | 22.6 | 20.2 |
| 105.0 | 13.9 | 19.1 | 20.3 | 11.3 | 18.0 | 24.2 |
| 106.0 | 14.9 | 15.3 | 20.8 | 9.3 | 19.4 | 18.1 |
| 86.3 | 15.2 | 17.9 | 15.5 | 9.9 | 18.6 | 19.4 |
| 14.3 | 13.4 | 18.2 | 22.2 | 18.9 | 17.5 | 22.3 |
| 16.6 | 16.3 | 17.9 | 22.0 | 22.7 | 4.7 | 19.1 |
| 17.7 | 16.7 | 15.1 | 21.9 | 24.6 | 4.6 | 10.3 |
| 15.4 | 17.3 | 16.9 | 23.0 | 21.4 | 4.6 | 10.3 |
| 16.3 | 20.3 | 17.3 | 22.2 | 22.7 | 3.4 | 10.4 |
| 15.6 | 16.2 | 16.1 | 24.1 | 4.6 | 4.8 | 10.5 |
| 18.9 | 16.6 | 17.3 | 16.8 | 4.7 | 5.1 | 9.7 |
| 9.6 | 10.6 | 10.6 | 9.3 | 9.1 | | |

5 Estrazione della carica dell'elettrone

L'estrazione della carica dell'elettrone a questo punto è stata effettuata attraverso un programma appositamente scritto in C++. Il programma aveva il compito di trovare il valore migliore di carica q con il metodo di massima verosomiglianza. In particolare si è cercato il valore di q per cui risultava minima la seguente quantità:

$$S(q) = \sum_{i=0}^N \left[\frac{Q_i}{k_i(q)} - q \right]^2 \quad (22)$$

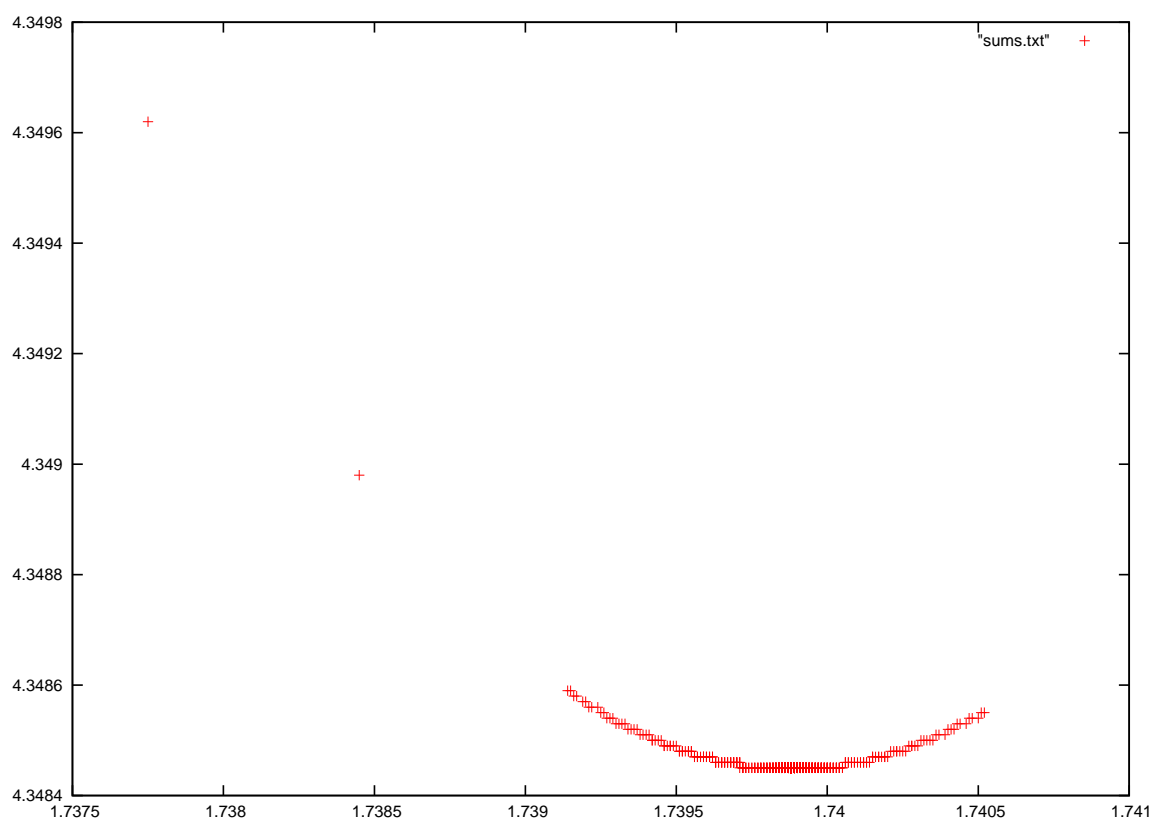
dove Q_i sono i valori campionati sopra, $k_i(q)$ è il numero intero più vicino al rapporto Q_i/q ed N è il numero totale di cariche. L'errore finale di q è stato trovato come la deviazione standard della media delle quantità $Q_i/k_i(q)$, che vista la natura della funzione $S(q)$ erano dati da:

$$\sigma_{q_e} = \sqrt{\frac{S(q_e)}{N(N-1)}} \quad (23)$$

con le stesse costanti di prima. I valori sopra indicati hanno dato una curva parabolica per $S(q)$ il cui grafico è riportato in figura 2³.

³Si noti che i valori riportati sulle ascisse sono Coulomb per 1×10^{-19} e i valori di $S(q)$ sono calcolati usando le cariche così normalizzate.

Figura 2: Grafico di $S(q)$



6 Conclusioni

Questo procedimento ha portato al valore riportato in tabella 2. Valore che risulta pienamente compatibile con quello atteso entro un confidence level del 95%.

Tabella 2: Misura finale della carica dell'elettrone

| q (C) | σ_q (C) | Err. Rel. |
|------------------------|------------------------|-----------|
| 1.74×10^{-19} | 0.16×10^{-19} | 0.089 |