

LABORATORIO DI OTTICA, ELETTRONICA E FISICA MODERNA

RELAZIONE DI LABORATORIO 2

Spettrometro con Prisma

Nicolò Cavalleri, Giacomo Lini e Davide Passaro
Lun(12)

Sommario

27 novembre 2016

1 Presentazione ed analisi dei dati

L'analisi dei dati relativamente a questo esperimento può essere separata in due sezioni. Da una parte infatti è possibile estrarre, dai dati ricavati in laboratorio, gli indici di rifrazione n_λ del prisma relativi alle lunghezze d'onda dello spettro di emissione del mercurio. In secondo luogo invece è possibile osservare e verificare la relazione lineare che intercorre tra i quadrati degli inversi delle lunghezze d'onda e i quadrati degli indici di rifrazione,

$$n_\lambda^2 = \frac{m}{\lambda^2} + q; \quad m, q \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

In quanto segue verrà seguita questa separazione.

1.1 Presentazione dei Dati

Per quanto riguarda la presentazione dei dati raccolti occorre fare alcune precisazioni. In primo luogo come lunghezze d'onda sono state utilizzate quelle ricavate sperimentalmente nella sessione di laboratorio precedente. Tra queste poi non sono state considerate quelle particolari λ che non venivano osservate durante la raccolta dei dati. In sostanza le λ di riferimento sono le seguenti¹:

Tabella 1: Lunghezze d'onda dello spettro di emissione del Mercurio attraverso il prisma

Colore	λ (nm)	σ_λ (nm)
Viola interno	404.632	0.395
Viola esterno	407.802	0.515
Blu	435.829	0.301
Verde interno	492.283	0.501
Verde giallo	546.037	0.274
Giallo interno	576.942	0.300
Giallo esterno	579.006	0.299

Per il calcolo dell'angolo α , come da procedura indicata nella sezione precedente, sono state ripetute più misure indipendenti. I valori sono riportati nella tabella 2.

Tabella 2: Dati per la determinazione del valore dell'angolo α .

Numero misura	θ_1 (rad)	σ_{θ_1} (rad)	θ_2 (rad)	σ_{θ_2} (rad)	α (rad)	σ_α (rad)
1	6.186029	0.000292	0.949459	0.000292	1.046615	0.000583
2	0.624261	0.000292	4.812164	0.000292	1.046325	0.000583
3	0.529998	0.000292	4.717480	0.000292	1.045889	0.000583
4	0.450295	0.000292	4.638212	0.000292	1.046325	0.000583
5	0.448259	0.000292	4.636176	0.000292	1.046325	0.000583
6	0.535089	0.000292	4.723443	0.000292	1.046761	0.000583

Elaborando statisticamente i dati nella tabella 2, tramite calcolo della media e di deviazione standard², si ottiene un valore finale

$$\alpha = 1.046373 \pm 0.000300 \text{ rad.}$$

¹La nomenclatura utilizzata fa riferimento alla relazione precedente.

²Il controllo sulla compatibilità dei valori ottenuti è evidente e giustifica l'utilizzo di media e deviazione.

La determinazione degli angoli di deviazione minima per le lunghezze d'onda è stata effettuata con una analoga procedura di ripetizione delle misure. In questo caso, noto l'angolo $\delta_0 = 3.126958 \pm 0.000292 \text{ rad}$, il valore di $\delta_m(\lambda)$ si ottiene per differenza. Le misure effettuate e riportate nella tabella 3 fanno riferimento a un numero eguale di misurazioni compiute in senso orario e anti-orario rispetto all'angolo δ_0 :³

Tabella 3: Angoli di deviazione minima.

Colore	δ (rad)	σ_δ (rad)
Viola interno	1.298476	0.000583
Viola esterno	1.293153	0.000583
Blu	1.255771	0.000583
Verde interno	1.207208	0.000583
Verde giallo	1.177580	0.000583
Giallo interno	1.165038	0.000583
Giallo esterno	1.163969	0.000583

1.2 Elaborazione dei dati e presentazione dei risultati - Indici di Rifrazione

I dati riportati nella sezione precedente sono sufficienti per poter ricavare dei valori relativi all'indice di rifrazione n del materiale di cui è composto il prisma come funzione della lunghezza d'onda λ della luce incidente. La formula da cui si ricava il valore di n_λ in particolare è

$$n_\lambda = \frac{\sin(\frac{\alpha + \delta_\lambda}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

e viene ricavata da considerazioni geometriche sulla struttura del prisma. In particolare δ_λ rappresenta il valore dell'angolo di deviazione minima associato a una particolare lunghezza d'onda, riportato anche nella tabella 3. Per quanto concerne invece l'errore su n_λ questo si ottiene dalle formule di propagazione, derivando rispettivamente rispetto sia a λ che ad α :

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \delta} \sigma_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} \sigma_\alpha\right)^2}$$

ove le derivate parziali sono rispettivamente

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{\cos \frac{\alpha + \delta_\lambda}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

e

$$\frac{\partial n}{\partial \alpha} = \frac{\sin \frac{-\delta_\lambda}{2}}{2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} .$$

I valori ottenuti per n relativamente ad ognuna delle lunghezze d'onda considerate sono riportati nella tabella 4.

1.3 Elaborazione dei dati e presentazione dei risultati - Regressione Lineare

Chiaramente di per sé questi valori sono poco indicativi, nella misura in cui non si hanno termini di confronto con cui testarne la compatibilità. Tuttavia l'equazione 1 suggerisce che

³Le misure riportate si riferiscono ai valori calcolati di $\delta_m(\lambda)$ tramite analisi statistica con media e deviazione. In appendice vengono riportate le misure originali da cui questi dati sono stati estratti.

Tabella 4: Valori degli indici di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.

Colore	n (-)	σn (-)
Viola interno	1.844704	0.000742
Viola esterno	1.842632	0.000740
Blu	1.827707	0.000726
Verde interno	1.807367	0.000709
Verde giallo	1.794433	0.000698
Giallo interno	1.788839	0.000694
Giallo esterno	1.788359	0.000694

la bontà delle misure effettuate – a meno di errori sistematici – possa essere testata proprio trovando la miglior retta passante per i punti del piano $(n_\lambda^2, \frac{1}{\lambda^2})$.

In merito all'utilizzo dell'algoritmo di regressione lineare occorre tuttavia una precisazione. I dati che abbiamo a disposizione sia per quanto riguarda l'asse delle x che quello delle y hanno errore variabile. In una situazione del genere non è teoricamente possibile utilizzare l'algoritmo di regressione nella forma pesata. Quello che si osserva è però che se si calcola il coefficiente angolare della retta trascurando gli errori, e si sommano in quadratura gli errori di ascisse e ordinate, il risultato differisce alla quarta cifra significativa rispetto a σ_{n^2} . Il contributo dell'errore su $\frac{1}{\lambda^2}$ è dunque di ben quattro ordini di grandezza meno significativo rispetto a quello di n^2 , e può essere trascurato. In considerazione di questo fatto abbiamo adottato l'algoritmo di regressione pesata⁴.

In tabella 5 vengono riportati i dati tramite i quali è stato effettuato il calcolo di coefficiente angolare e intercetta per la retta.

Tabella 5: Dati per la regressione lineare.

Colore	n^2 (-)	σ_{n^2} (-)	$\frac{1}{\lambda^2}$ ($\frac{1}{nm^2}$)	$\sigma_{\frac{1}{\lambda^2}}$ ($\frac{1}{nm^2}$)
Viola interno	3.402935	0.005048	6.10779E12	0.00119E12
Viola esterno	3.395291	0.005024	6.01320E12	0.00089E12
Blu	3.340514	0.004853	5.26460E12	0.00121E12
Verde interno	3.266575	0.004632	4.12644E12	0.00084E12
Verde giallo	3.219989	0.004469	3.35391E12	0.00037E12
Giallo interno	3.199945	0.004442	3.00427E12	0.00031E12
Giallo esterno	3.198227	0.004437	2.98283E12	0.00085E12

Per questo set di dati l'algoritmo di regressione pesata restituisce rispettivamente

$$m = 6.49762 E - 14 \pm 0.14067 E - 14 \quad (2)$$

$$q = 3.00277 \pm 0.00620 \quad (3)$$

Dai valori ricavati è possibile effettuare un test di χ^2 per la verifica della bontà della relazione lineare ricavata dalla regressione. Nel caso particolare dalla formula

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{|y_i - mx_i - q|^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

⁴É evidente che la procedura adottata non può essere considerata formalmente inattaccabile, in quanto per scegliere quale tipo di algoritmo di regressione lineare abbiamo calcolato uno dei termini incogniti della regressione utilizzando un metodo meno raffinato. Quello che giustifica la scelta presente è il fatto, osservabile solo a posteriori, che l'errore sulle ordinate ha un contributo nel calcolo dei termini di regressione molto superiore rispetto a quello sulle ascisse.

dove k rappresenta il numero di gradi di libertà del sistema considerato – in questo caso specifico uguale a 5 – si ricava un valore di χ^2 pari a 2.605, associato a un confidence level del 25% circa, ben al di sotto dunque della soglia critica.

2 Conclusioni

Sono stati riportati i dati e l'analisi di questi relativi all'utilizzo di uno spettrometro con prisma per la determinazione dell'indice di rifrazione di un materiale. Si è osservata la dipendenza dell'indice di rifrazione del materiale dalla lunghezza d'onda della luce rifratta e sono stati estratti i valori di questo per le lunghezze d'onda più significative dello spettro del mercurio.

I valori ottenuti, che considerati a sè stanti sono poco significativi circa la bontà delle procedure sperimentali adottate, sono stati sottoposti ad analisi statistica per la verifica della relazione lineare 1. Il fatto che la verifica di questa sia avvenuta con successo è un indice della correttezza delle procedure sperimentali ottenute e dei valori riscontrati.

Non è del tutto possibile escludere errori di natura sistematica in quanto descritto, ma il fatto che le stesse procedure siano state ripetute più volte, da soggetti diversi, con risultati simili esclude con buona probabilità la presenza di *biases* degli sperimentatori nella procedura.