

LABORATORIO DI OTTICA, ELETTRONICA E FISICA MODERNA

RELAZIONE DI LABORATORIO 2

Spettrometro a prisma

*Nicolò Cavalleri, Giacomo Lini e Davide Passaro
(LUN12)*

Sommario

Vengono presentati in questo documento la procedura e l'analisi dati di un esperimento di ottica, volto a validare la legge teorica della dispersione cromatica di Cauchy. Lo strumento principale attorno cui si svolge l'intera relazione è il prisma, qui in vetro, utilizzato per rifrangere il raggio di luce.

27 novembre 2016

1 Introduzione

Obbiettivo finale di questo esperimento è quello di determinare l'indice di rifrazione n del vetro di cui è composto un prisma, o, più propriamente di verificare la legge di dispersione secondo la legge di Cauchy qui di seguito

$$n^2(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}. \quad (1)$$

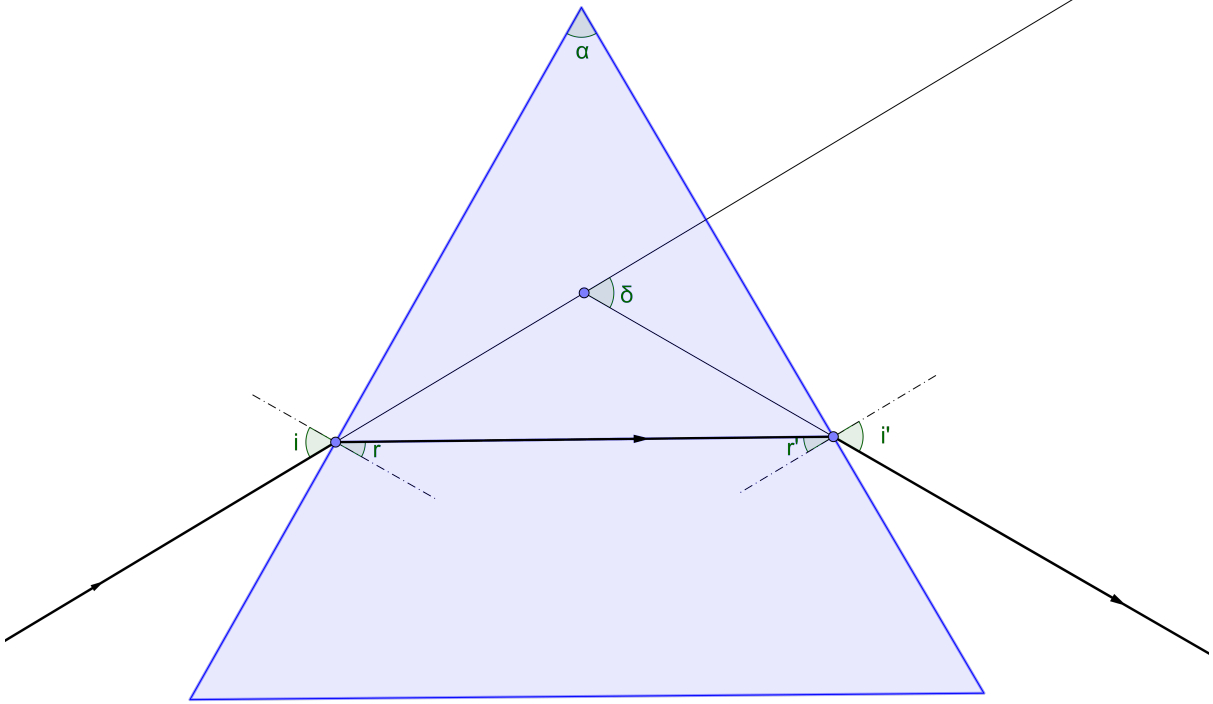


Figura 1: Schema della sezione del prisma

Tuttavia prima di arrivare a questo punto sarà necessario adempiere a tappe intermedie quali la misurazione dell'angolo α caratterizzante il prisma e, subito dopo la ricerca dell'angolo di deviazione minima per ogni colore dello spettro della lampada di Hg. Lo spettro del mercurio era stato trovato e analizzato nell'esperienza precedente. Denotando con i l'angolo di incidenza e con i' l'angolo di emergenza, con r l'angolo in uscita dalla prima faccia, con r' l'angolo in entrata nella seconda faccia e con δ l'angolo di deviazione, si scrivono le seguenti relazioni:

$$r + r' = \alpha \quad \delta = i + i' - \alpha \quad (2)$$

e

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad \frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{1}{n}. \quad (3)$$

Cercando il minimo della funzione $\delta = \delta(i)$ per derivazione, con un po' di algebra si arriva alla condizione

$$i = i' \quad r = r' \quad (4)$$

ossia il raggio di luce deve essere ortogonale alla bisettrice del prisma. Attraverso le 1, si ricava

$$\delta_m = 2i_m - \alpha \quad r_m = \frac{\alpha}{2} \quad \sin i_m = n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (5)$$

Da cui si può ottenere la formula definitiva per n

$$n(\lambda) = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (6)$$

Si andrà quindi a misurare l'angolo α di un prisma e l'angolo δ_m per diverse lunghezze d'onda della lampada di mercurio, che presenta uno spettro ben visibile e ben distribuito su tutto lo spettro visibile. Dall'analisi di questi dati sarà possibile ricavare la legge di Cauchy, come mostreremo successivamente.

2 Strumentazione

Per estrarre i valori relativi all'angolo del prisma e la deviazione minima è stata usata la seguente strumentazione:

Lampada al mercurio Sorgente di luce di fascio noto studiato in precedenza.

Prisma trasparente Strumento utilizzato per permettere la rifrazione della luce. L'obiettivo finale dell'esperienza era quello di misurare l'indice di rifrazione del vetro che lo costituiva. Questo era a base triangolare (60 deg circa ad occhio) e una delle facce laterali era coperta di nastro adesivo opaco.

Spettrometro Principale strumento utilizzato. Lo spettrometro è servito per la misura degli angoli sottesi dai fasci di luce deviati dal prisma. Questo era composto da quattro parti:

Collimatore Componente utilizzata per collimare i raggi provenienti dalla lampada. Il collimatore era fisso alla base dello spettrometro, senza possibilità di movimento. Per la messa a punto del collimatore erano presenti due viti. Una per regolare il fuoco del collimatore e una per variare l'apertura della fenditura dalla quale entrava la luce.

Piatto Utilizzato come sostegno per il prisma. Il piatto era posto parallelamente al piano di lavoro ed era dotato di due pinze verticali per impedire il movimento al reticolo. Il piatto era regolabile in altezza e per rotazioni sul suo asse. Era dotato di tre viti, una di bloccaggio rispetto alle regolazioni in altezza, una di bloccaggio rispetto alle rotazioni e una vite micrometrica per piccole rotazioni sul suo asse.

Cannocchiale Utilizzato per l'osservazione dei raggi luminosi diffratti dal prisma. Il cannocchiale era collegato allo spettrometro in modo che potesse girare intorno al piatto. Inoltre era dotato di tre viti: una per la regolazione del fuoco, una per il bloccaggio rispetto alle rotazioni intorno al piatto ed una vite micrometrica.

Goniometro Utilizzato per la misura degli angoli, dotato di due coppie di noni contrapposti. Il goniometro possedeva una sensibilità al terzo di grado (ossia venti primi), teoricamente estendibile tramite l'utilizzo dei noni al mezzo primo. Più realisticamente l'incertezza dovuta alla difficoltosa lettura del nonio contribuiva con un errore di circa un primo.

3 Iter sperimentale

È possibile dividere la procedura sperimentale in tre fasi:

- Calibrazione e messa a punto dello spettroscopio.
- Misura dell'angolo sotteso da due lati del prisma.

- Ricerca e misura degli angoli di deviazione minima.

Questa esperienza ricalcava quella della misura del passo del reticolo. In particolare la prima fase, quella della calibrazione dello spettroscopio è uguale. Per completezza sarà però riportata una seconda volta la spiegazione.

3.1 Calibrazione dello spettrometro

La calibrazione dello spettrometro era necessaria al fine di rendere più chiaramente visibile lo spettro del mercurio.

Cannocchiale

In primo luogo è stato spostato il fuoco del cannocchiale in modo da poter mettere a fuoco luce proveniente dall'infinito. Per fare ciò è stato puntato il cannocchiale fuori dalla finestra ed è stato messo a fuoco il palazzo di fronte al laboratorio (l'altra ala del Dipartimento di Fisica), posto ad una distanza di circa 50 metri. La calibrazione ottimale del cannocchiale era necessaria per permettere una chiara visione dei raggi di luce paralleli provenienti dal collimatore.

Collimatore

Per la calibrazione del collimatore è stato rimesso a posto il cannocchiale ed è stata accesa la lampada al mercurio. Una volta scaldata attraverso una delle viti del collimatore è stata stretta la fenditura tanto da poter, senza fatica, osservare la luce della lampada attraverso il cannocchiale. Successivamente è stato sistemato il fuoco del collimatore in modo da poter vedere nitidamente la fenditura. Come ultimo passaggio è stata stretta ancora la fenditura fino al punto che il fascio di luce centrale avesse uno spessore di mezzo millimetro circa.

3.2 Misura dell'angolo del prisma

Calibrato il collimatore si è passati alla misura dell'angolo sotteso da due facce del prisma. È necessaria una corretta stima di questa osservabile per poter correttamente valutare l'indice di rifrazione del vetro costituente il prisma.

Per la misura dell'angolo sotteso si è sfruttato il fenomeno di riflessione parziale. Questo è stato osservato ponendo il prisma sul piatto in modo tale che il raggio di luce proveniente dal collimatore formasse un angolo acuto una faccia del prisma. Ponendo il cannocchiale ad un angolo anch'esso acuto con il collimatore era possibile osservare il raggio riflesso dalla superficie del prisma di vetro e quindi prendere una misura dell'angolo θ_1 individuato dal nonio del piatto rotante.

Si è quindi proceduto fissando il cannocchiale e ruotando il piatto sul quale era posto il prisma in modo tale da ripetere lo stesso procedimento sulla rimanente faccia non trasparente quindi prendere una misura dell'angolo θ_2 individuato dal piatto rotante.

Per una buona stima dell'angolo α tra le facce del prisma si è quindi considerato il complementare della differenza degli angoli θ_1 e θ_2 . In simboli:

$$\alpha = \pi - (\Delta\theta) = \pi - (\theta_2 - \theta_1) = \pi + \theta_1 - \theta_2 \quad (7)$$

3.3 Ricerca degli angoli di deviazione minima

Come per l'esperienza dello spettrometro a reticolo, non si sono misurati direttamente gli angoli ma sono stati misurati come differenze di due angoli. In questo caso, per la determinazione dell'angolo di deviazione minima, è stato innanzitutto misurato l'angolo δ_0 individuato

dall'immagine diretta della fenditura, col cannocchiale posto parallelamente al collimatore, sul nonio del cannocchiale.

Quindi per ogni lunghezza d'onda si è andata a cercare l'immagine della fenditura. Le immagini della fenditura causate da raggi di lunghezza d'onda differente erano distinguibili dal colore e, sempre attraverso il colore, riconducibili ai valori verificati nell'esperienza del reticolo.

Trovata l'immagine, si è potuto constatare che, ruotando il piatto si poteva osservare un "movimento" dell'immagine della fenditura. Se inoltre il piatto era ruotato in una direzione particolare, ossia in senso orario se il cannocchiale era sulla destra del collimatore e viceversa, l'immagine si muoveva inizialmente allontanandosi dal collimatore solo per poi invertire il senso di marcia. La condizione di deviazione minima era quindi verificata nel punto nel quale l'immagine invertiva il senso di marcia. È stato quindi misurato l'angolo individuato sul nonio del cannocchiale δ_1 ed è stato calcolato l'angolo di deviazione minima attraverso la relazione:

$$\delta(\lambda) = \delta_1 - \delta_0$$

4 Presentazione ed analisi dei dati

L'analisi dei dati di questo esperimento può essere separata in due sezioni. Da una parte infatti è possibile estrarre, dai dati ricavati in laboratorio, gli indici di rifrazione n_λ del prisma relativi alle lunghezze d'onda dello spettro di emissione del mercurio. In secondo luogo invece è possibile osservare e verificare che la relazione 1 intercorre tra i dati acquisiti.

4.1 Presentazione dei Dati

Per quanto riguarda la presentazione dei dati raccolti occorre fare alcune precisazioni. In primo luogo come lunghezze d'onda sono state utilizzate quelle ricavate sperimentalmente nella sessione di laboratorio precedente. Tra queste poi non sono state considerate quelle particolari λ che, nonostante in teoria dovessero essere visibili, non sono state osservate durante la sessione di laboratorio. In sostanza le λ di riferimento sono le seguenti¹:

Tabella 1: Lunghezze d'onda dello spettro di emissione del Mercurio attraverso il prisma

Colore	λ (nm)	σ_λ (nm)
Viola interno	404.632	0.395
Viola esterno	407.802	0.515
Blu	435.829	0.301
Verde interno	492.283	0.501
Verde giallo	546.037	0.274
Giallo interno	576.942	0.300
Giallo esterno	579.006	0.299

Per il calcolo dell'angolo α , come da procedura indicata nella sezione precedente, sono state ripetute più misure indipendenti. I valori sono riportati nella tabella 2.

Elaborando statisticamente i dati, tramite calcolo della media e di deviazione standard², si ottiene un valore finale

$$\alpha = 1.046373 \pm 0.000300 \text{ rad.}$$

La determinazione degli angoli di deviazione minima per le lunghezze d'onda è stata effettuata con una analoga procedura di ripetizione delle misure. In questo caso, noto l'angolo

¹La nomenclatura utilizzata fa riferimento alla relazione precedente.

²Il controllo sulla compatibilità dei valori ottenuti è evidente e giustifica l'utilizzo di media e deviazione.

Tabella 2: Dati per la determinazione del valore dell'angolo α .

No misura	$\theta_1(\text{rad})$	$\sigma_{\theta_1}(\text{rad})$	$\theta_2(\text{rad})$	$\sigma_{\theta_2}(\text{rad})$	$\alpha(\text{rad})$	$\sigma_\alpha(\text{rad})$
1	6.186029	0.000292	0.949459	0.000292	1.046615	0.000583
2	0.624261	0.000292	4.812164	0.000292	1.046325	0.000583
3	0.529998	0.000292	4.717480	0.000292	1.045889	0.000583
4	0.450295	0.000292	4.638212	0.000292	1.046325	0.000583
5	0.448259	0.000292	4.636176	0.000292	1.046325	0.000583
6	0.535089	0.000292	4.723443	0.000292	1.046761	0.000583

$\delta_0 = 3.126958 \pm 0.000292$ rad, il valore di $\delta_m(\lambda)$ si ottiene per differenza. Le misure effettuate e riportate nella tabella 3 fanno riferimento a un numero eguale di misurazioni compiute in senso orario e anti-orario rispetto all'angolo δ_0 :³

Tabella 3: Angoli di deviazione minima.

Colore	δ (rad)	σ_δ (rad)
Viola interno	1.298476	0.000583
Viola esterno	1.293153	0.000583
Blu	1.255771	0.000583
Verde interno	1.207208	0.000583
Verde giallo	1.177580	0.000583
Giallo interno	1.165038	0.000583
Giallo esterno	1.163969	0.000583

4.2 Elaborazione dei dati e presentazione dei risultati - Indici di Rifrazione

I dati riportati nella sezione precedente sono sufficienti per poter ricavare dei valori relativi all'indice di rifrazione n del materiale di cui è composto il prisma come funzione della lunghezza d'onda λ della luce incidente. Riportiamo per comodità la formula da cui si ricava il valore di n_λ (l'equazione 6 in introduzione):

$$n_\lambda = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_\lambda}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

dove δ_λ rappresenta il valore dell'angolo di deviazione minima associato a una particolare lunghezza d'onda, riportato anche nella tabella 3. Per quanto concerne invece l'errore su n_λ , questo si ottiene dalle formule di propagazione, derivando rispettivamente rispetto sia a λ che ad α :

$$\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \delta} \sigma_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha} \sigma_\alpha\right)^2}$$

ove le derivate parziali sono rispettivamente

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{\cos \frac{\alpha + \delta_\lambda}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

³Le misure riportate si riferiscono ai valori calcolati di $\delta_m(\lambda)$ tramite analisi statistica con media e deviazione. In appendice vengono riportate le misure originali da cui questi dati sono stati estratti.

e

$$\frac{\partial n}{\partial \alpha} = \frac{\sin \frac{-\delta \lambda}{2}}{2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right)^2} .$$

I valori ottenuti per n relativamente ad ognuna delle lunghezze d'onda considerate sono riportati nella tabella 4.

Tabella 4: Valori degli indici di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.

Colore	n (-)	σn (-)
Viola interno	1.844704	0.000742
Viola esterno	1.842632	0.000740
Blu	1.827707	0.000726
Verde interno	1.807367	0.000709
Verde giallo	1.794433	0.000698
Giallo interno	1.788839	0.000694
Giallo esterno	1.788359	0.000694

4.3 Elaborazione dei dati e presentazione dei risultati - Regressione Lineare

Chiaramente di per sé questi valori sono poco indicativi, nella misura in cui non si hanno termini di confronto con cui testarne la compatibilità. Tuttavia l'equazione 1 suggerisce che la bontà delle misure effettuate – a meno di errori sistematici – possa essere testata proprio trovando la miglior retta passante per i punti del piano $(n_\lambda^2, \frac{1}{\lambda^2})$.

In merito all'utilizzo dell'algoritmo di regressione lineare occorre tuttavia una precisazione. I dati che abbiamo a disposizione sia per quanto riguarda l'asse delle x che quello delle y hanno errore variabile. In una situazione del genere non è teoricamente possibile utilizzare l'algoritmo di regressione nella forma pesata. Quello che si osserva è però che se si calcola il coefficiente angolare della retta trascurando gli errori, e si sommano in quadratura gli errori di ascisse e ordinate, il risultato differisce alla quarta cifra significativa rispetto a σ_{n^2} . Il contributo dell'errore su $\frac{1}{\lambda^2}$ è dunque 10^{-4} volte significativo rispetto a quello di n^2 . In considerazione di questo fatto

abbiamo adottato l'algoritmo di regressione pesata⁴.

In tabella 5 vengono riportati i dati tramite i quali è stato effettuato il calcolo di coefficiente angolare e intercetta per la retta e nella figura 2 viene riportato il grafico di n^2 e λ^{-2} e la relativa retta di regressione.

Per questo set di dati l'algoritmo di regressione pesata restituisce rispettivamente

$$m = (6.49762 \pm 0.14067) E - 14 \quad (8)$$

⁴È evidente che la procedura adottata non può essere considerata formalmente inattaccabile, in quanto per scegliere quale tipo di algoritmo di regressione lineare abbiamo calcolato uno dei termini incogniti dell'algoritmo di regressione con un metodo meno raffinato. Quello che giustifica la scelta presente è il fatto, osservabile solo a posteriori, che l'errore sulle ordinate ha un contributo nel calcolo dei termini di regressione molto superiore rispetto a quello sulle ascisse.

Tabella 5: Dati per la regressione lineare.

Colore	n^2 (-)	σ_{n^2} (-)	$\frac{1}{\lambda^2}$ ($\frac{1}{nm^2}$)	$\sigma \frac{1}{\lambda^2}$ ($\frac{1}{nm^2}$)
Viola interno	3.402935	0.005048	6.10779E12	0.00119E12
Viola esterno	3.395291	0.005024	6.01320E12	0.00089E12
Blu	3.340514	0.004853	5.26460E12	0.00121E12
Verde interno	3.266575	0.004632	4.12644E12	0.00084E12
Verde giallo	3.219989	0.004469	3.35391E12	0.00037E12
Giallo interno	3.199945	0.004442	3.00427E12	0.00031E12
Giallo esterno	3.198227	0.004437	2.98283E12	0.00085E12

$$q = 3.00277 \pm 0.00620 \quad (9)$$

Dai valori ricavati è possibile effettuare un test di χ^2 per la verifica della bontà della relazione lineare ricavata dalla regressione. Nel caso particolare dalla formula

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{|y_i - mx_i - q|^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

dove k rappresenta il numero di gradi di libertà del sistema considerato – in questo caso specifico uguale a 5 – si ricava un valore di χ^2 pari a 2.605, associato a un confidence level del 25% circa, ben al di sotto dunque della soglia critica.

5 Conclusioni

I valori ottenuti, che considerati a sé stanti sono poco significativi circa la bontà delle procedure sperimentali adottate, sono stati sottoposti ad analisi statistica per la verifica della legge 1. Il fatto che la verifica di questa sia avvenuta con successo è un indice della correttezza delle procedure sperimentali ottenute e dei valori riscontrati.

Non è del tutto possibile escludere errori di natura sistematica in quanto descritto, ma il fatto che le stesse procedure siano state ripetute più volte, da soggetti diversi, con risultati simili esclude con buona probabilità la presenza di *biases* degli sperimentatori nella procedura.