

1 Analisi e presentazione dei dati

Veniamo ora all'analisi dei dati raccolti. Questa operazione si è svolta in quattro fasi:

1. Estrazione di c per ogni misura.
2. Verifica compatibilità dei dati per ogni set.
3. Stima di c per ogni set di dati.
4. Verifica compatibilità dei set e media.

Inoltre le prime due parti dell'analisi dei dati sono state ripetute tre volte, una per ogni set di dati.

1.1 Premesse generale dell'analisi dei dati

Nel corso dell'analisi dati ci sono state alcune linee guida seguite per cercare di ottenere il migliore risultato possibile con il minor numero di dati possibili. Poichè erano disponibili diversi dati con diversi errori (per motivi spiegati poi in seguito) questo fine si è ottenuto in primo luogo attraverso l'operazione di media pesata dei dati. Questa statistica è stata preferita alla semplice media in quanto privilegia misure con errore minore senza tuttavia scartare completamente misure con errori più grandi. Inoltre l'errore è stato diviso in due parti: *errore sistematico* ed *errore statistico* o *casuale*. Inoltre, tutte le costanti indicate sotto sono relative alla formula ??, che per semplicità di lettura è riportata qui sotto.

$$c = \frac{4f_2 D^2 (\omega - \omega_0)}{(D + a - f_2) \Delta \delta}$$

1.1.1 Errore sistematico

Per *errore sistematico* si intende un errore nella misura di osservabili utilizzate per ricavare i dati in tutte le misure. In particolare nel ricavare le misure di c sono state usate ripetutamente le misure di, D , la distanza dello specchio rotante dallo specchio concavo, a , la distanza della lente 2 dallo specchio rotante e f_2 la distanza focale dello specchio 2. Un errore di misura su una di queste osservabili avrebbe portato ad un errore sistematicamente ripetuto in tutti i calcoli. L'errore finale causato dalla misura di queste osservabili è stato stimato tramite la propagazione degli errori dalla formula ?? ottenendo quindi che:

$$\sigma_{c_{sist}} = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial f_2}\right)^2 \sigma_{f_2}^2} \quad (1)$$

dove, per derivazione:

$$\frac{\partial c}{\partial D} = \frac{4Df_2(2a + D - 2f_2)(\omega - \omega_0)}{(a + D - f_2)^2 \Delta \delta} \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = -\frac{4D^2 f_2 (\omega - \omega_0)}{(a + D - f_2)^2 \Delta \delta} \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial f_2} = \frac{4D^2(a + D)(\omega - \omega_0)}{(a + d - f_2)^2 \Delta \delta} \quad (4)$$

È stato quindi necessario avere una buona stima dell'errore di queste osservabili.

1.1.2 Errore casuale

Gli errori sopra citati non coprono tutti quelli possibili nell'esperimento. In particolare non sono considerati gli errori su $\Delta\delta$ ne quelli su ω e ω_0 . Non essendo questi stimabili in modo rigoroso ed essendo idealmente casuali e quindi distribuiti normalmente, gli errori di questi osservabili sono stati raggruppati nella deviazione standard delle misure.

1.2 Stima delle distanze

Il valore di D è stato, tra le distanze, il più complicato da misurare. Questa osservabile è stata calcolata a partire da altre tre osservabili che ai fini del testo chiameremo D_1 , D_2 e D_3 . In particolare D_1 è la distanza tra lo specchio rotante e il centro del primo specchio S_1 , D_2 è la distanza tra il centro dello specchio S_1 e il secondo specchio S_2 e D_3 è la distanza tra lo specchio S_2 e lo specchio concavo. In questo modo si ha che:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 \quad \sigma_D = \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2 + \sigma_{D_3}^2} \quad (5)$$

dove D e D_i , $i = 1, 2, 3$ sono come prima e σ_D e σ_{D_i} , $i = 1, 2, 3$ sono gli errori delle relative misure. L'errore di queste distanze derivava da molti fattori, in particolar modo causati dallo strumento di misura. Come descritto nelle sezioni precedenti queste misure sono state effettuate con il metro a nastro, con sensibilità al centimetro. La principale fonte di errore derivava dal fatto che il metro, sospeso in aria, si fletteva sotto al proprio peso modificando il valore letto. Un'altra fonte di errore è stata la non perfetta centratura del metro, dovuta anche al fatto che non era possibile toccare le superfici degli specchi. Con queste considerazioni, si sono stimati, in base alla variabilità delle possibili misure sono riportati nella tabella 1.

	Misura (m)	Errore (m)	Err. rel.
s_{f_2}	0.252	0.001	0.004
s_{spr}	0.865	0.005	0.006
a	0.478	0.005	0.011

	Misura (m)	Errore (m)	Err. rel.
D_1	6.32	0.04	0.006
D_2	0.66	0.02	0.033
D_3	6.54	0.04	0.006
D	13.52	0.35	0.026

In confronto a D , la stima dell'errore di a è stata più semplice. Come descritto in precedenza, sia la lente che lo specchio rotante si trovavano su una guida sulla quale era incollato un metro. Mentre la lente aveva un chiaro riferimento per la posizione (una piccola tacchetta bianca) lo specchio rotante no.

Per questa ragione per lo specchio è stata aumentata l'incertezza di misura da 1 mm a 5 mm. Quindi a è stata calcolata attraverso la seguente relazione:

$$a = s_{spr} - s_{f_2} \quad \sigma_a = \sqrt{\sigma_{s_{spr}}^2 + \sigma_{s_{f_2}}^2} \quad (6)$$

dove s_{spr} è la posizione dello specchio rotante, s_{f_2} è la posizione della lente 2 e le altre costanti sono i relativi errori. I valori misurati e i rispettivi errori sono presenti in tabella 2.

Non c'è stata una vera e propria misura di f_2 poiché questo valore era dato dal costruttore. Come errore è stato considerato un millesimo del valore. Quindi:

$$f_2 = 0.242 \text{ m} \quad \sigma_{f_2} = 0.242 \times 10^{-4} \text{ m}$$

1.3 Estrazione della velocità per ogni misura

Come anticipato nel corso dell'esperimento sono stati effettuati tre set di misura: uno facendo ruotare lo specchio in senso orario (set *clockwise*), uno in senso antiorario (set *counterclockwise*) e uno facendolo partire in senso antiorario e finendo in senso orario (set *counterclock-clock*).

Per ogni misura si sono quindi campionati i valori di ν , ν_0 (che attraverso la relazione $\omega = 2\pi\nu$ si sono convertiti rispettivamente in ω e ω_0), δ_1 , e δ_2 . Il valore di $\Delta\delta$ è stato calcolato come differenza di δ_1 e δ_2 . Il valore di c per ogni misura è stato calcolato tramite la formula ?? e i valori ricavati nella sezione 1.2. Sono di seguito riportate le misure campionate, con i relativi valori di c e gli errori sistematici.¹

Tabella 3: Set *clockwise*

Indice	ν_0 (Hz)	ν (Hz)	δ_1 (mm)	δ_2 (mm)	c (m s ⁻¹)	σ_{sist} (m s ⁻¹)	Err. Rel.
1	82	934	9.94	10.17	326.16×10^6	8.50×10^6	0.039
2	110	917	9.94	10.18	311.98×10^6	8.13×10^6	0.040
3	108	959	9.95	10.18	283.19×10^6	7.38×10^6	0.042
4	100	929	9.95	10.18	311.62×10^6	8.12×10^6	0.040
5	118	1002	9.94	10.20	303.56×10^6	7.91×10^6	0.040
6	115	1435	9.94	10.31	286.35×10^6	7.46×10^6	0.042
7	100	977	9.94	10.20	300.46×10^6	7.83×10^6	0.041
8	107	900	9.94	10.16	284.08×10^6	7.40×10^6	0.042
9	109	950	9.94	10.19	303.58×10^6	7.91×10^6	0.040
10	119	1442	9.95	10.33	283.32×10^6	7.38×10^6	0.042
11	120	1440	9.94	10.33	293.22×10^6	7.64×10^6	0.041
12	102	1420	9.94	10.30	288.76×10^6	7.53×10^6	0.042
13	127	1435	9.95	10.31	308.34×10^6	8.04×10^6	0.040
14	114	1436	9.94	10.31	306.00×10^6	7.98×10^6	0.040
15	107	1422	9.95	10.32	300.92×10^6	7.84×10^6	0.041
16	109	1443	9.95	10.33	299.32×10^6	7.80×10^6	0.041
17	144	1422	9.96	10.32	295.66×10^6	7.71×10^6	0.041
18	128	1433	9.94	10.32	298.98×10^6	7.79×10^6	0.041
19	119	1440	9.95	10.33	289.23×10^6	7.54×10^6	0.042

Tabella 4: Set *counterclockwise*

Indice	ν_0 (Hz)	ν (Hz)	δ_1 (mm)	δ_2 (mm)	c (m s ⁻¹)	σ_{sist} (m s ⁻¹)	Err. Rel.
1	118	920	9.87	9.66	321.64×10^6	8.38×10^6	0.049
2	114	908	9.88	9.65	290.74×10^6	7.58×10^6	0.053
3	127	915	9.86	9.65	316.03×10^6	8.24×10^6	0.050
4	115	908	9.88	9.65	290.38×10^6	7.57×10^6	0.053
5	97	963	9.87	9.62	291.74×10^6	7.60×10^6	0.053
6	79	1400	9.88	9.53	317.87×10^6	8.29×10^6	0.050
7	115	1395	9.88	9.54	317.07×10^6	8.26×10^6	0.050
8	113	1385	9.89	9.54	306.08×10^6	7.98×10^6	0.051
9	79	1396	9.88	9.54	326.23×10^6	8.50×10^6	0.049
10	93	1385	9.89	9.54	310.89×10^6	8.10×10^6	0.051

¹Per la tabella 5, è stata usata una convenzione per cui frequenze di rotazioni antiorarie sono state considerate negative.

Tabella 5: Set *counterclock-clockwise*

Indice	ν_0 (Hz)	ν (Hz)	δ_1 (mm)	δ_2 (mm)	c (ms ⁻¹)	σ_{sist} (ms ⁻¹)	Err. Rel.
1	-1384	1384	10.32	9.53	296.97×10^6	7.74×10^6	0.029
2	-1388	1382	10.31	9.54	302.97×10^6	7.90×10^6	0.029
3	-1395	1373	10.32	9.53	293.24×10^6	7.64×10^6	0.029
4	-1410	1395	10.33	9.53	293.46×10^6	7.65×10^6	0.029
5	-1405	1397	10.32	9.53	298.72×10^6	7.79×10^6	0.029
6	-1416	1396	10.32	9.52	296.03×10^6	7.72×10^6	0.029
7	-1420	1394	10.32	9.53	301.91×10^6	7.87×10^6	0.029
8	-1428	1399	10.34	9.54	299.49×10^6	7.81×10^6	0.029
9	-1416	1398	10.35	9.55	296.25×10^6	7.72×10^6	0.029
10	-1420	1395	10.32	9.53	302.01×10^6	7.87×10^6	0.029

1.4 Verifica bontà dei dati acquisiti

A questo punto, prima di estrarre da ogni set la misura della velocità della luce è stato necessario verificare la compatibilità dei dati sotto alle ipotesi di errori effettuate e verificarne l'indipendenza. Tutti i controlli di indipendenza sono stati effettuati con un *confidence level* del 95% rispetto alla variabile standardizzata z di Gauss.

1.4.1 Verifica compatibilità

Per applicare correttamente l'operazione di media pesata è necessario verificare che i valori che si mediano siano compatibili, ossia derivino dalla stessa distribuzione. Come era facile aspettarsi, il controllo di compatibilità tra le misure dei set effettuato con solo l'errore sistematico (quello tabulato nelle tabelle 3, 4 e 5). Per controllare la compatibilità era necessario aggiungere all'errore anche la componente casuale. Si è scelto, come prima stima dell'errore casuale, la deviazione standard delle misure di c del set. I valori delle deviazioni standard sono riportati in tabella 6.

Tabella 6: Deviazioni standard dei set

	<i>Clockwise</i>	<i>Counterclockwise</i>	<i>Counterclock-clockwise</i>
Dev. Std. (m)	9.40×10^6	13.50×10^6	3.50×10^6

Questa statistica è stata preferita rispetto alla deviazione standard della media in quanto ogni valore era preso da un campione solo di dati e non era frutto di alcuna medi: con questa operazione non si voleva verificare che i valori siano statisticamente uguali, ma che derivino da una stessa distribuzione. A causa della quantità di dati confrontati, e delle dimensioni occupate da una tabella che riporti tali valori, queste non saranno ricopiate. Con i dati sopra il lettore interessato può verificare che tutte le misure sono compatibili in questo modo. Sono però riportati nelle figure 1, 2 e 3 seguenti i valori misurati con gli errori ottenuti e, come confronto, la misura reale della velocità della luce.

Figura 1: *Clockwise* data set

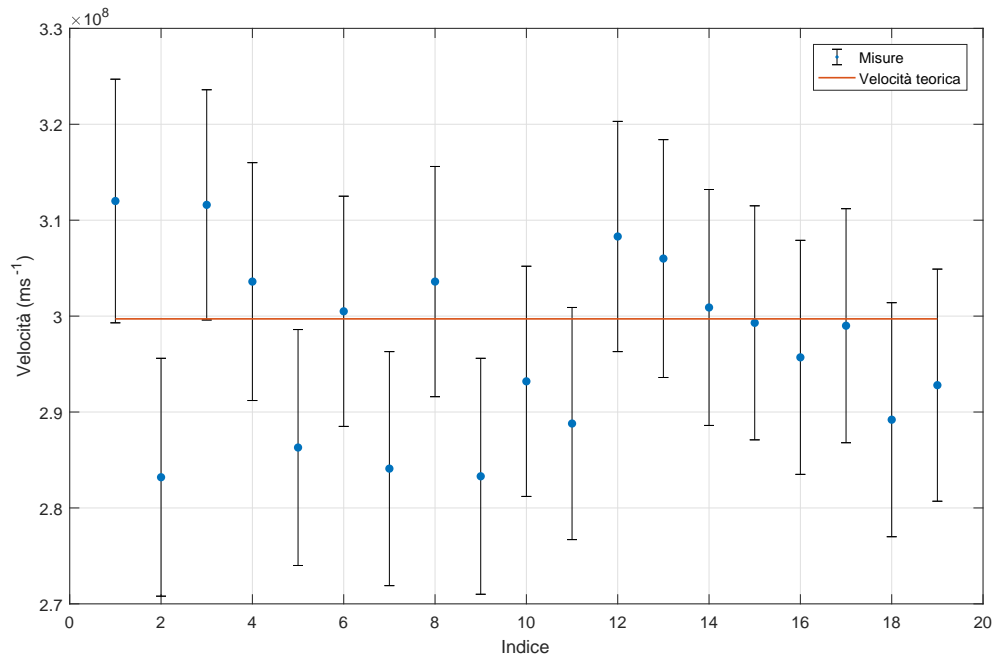


Figura 2: *Counterclockwise* data set

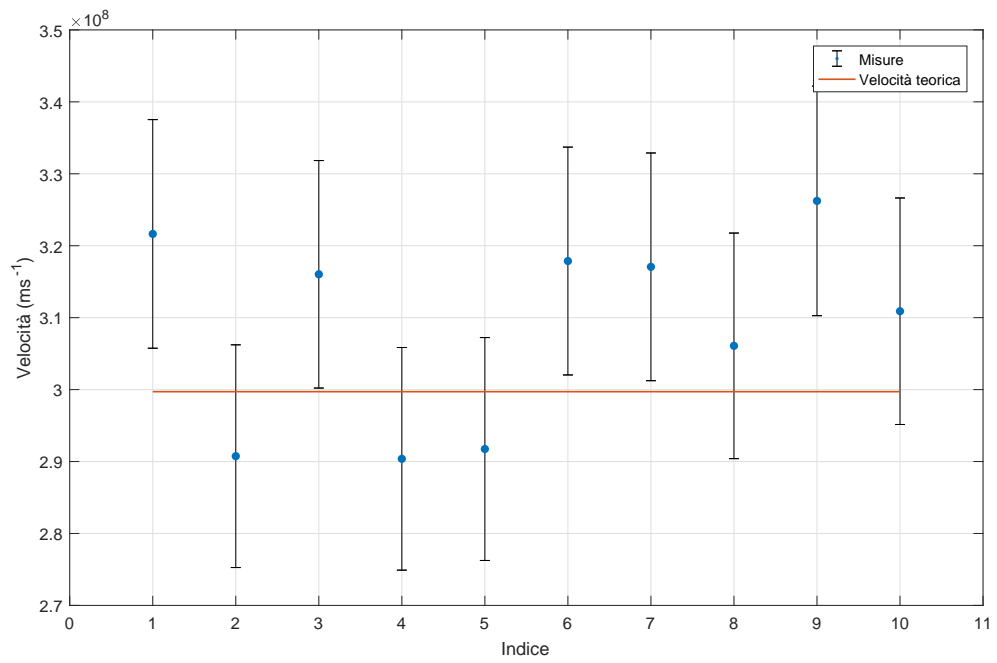
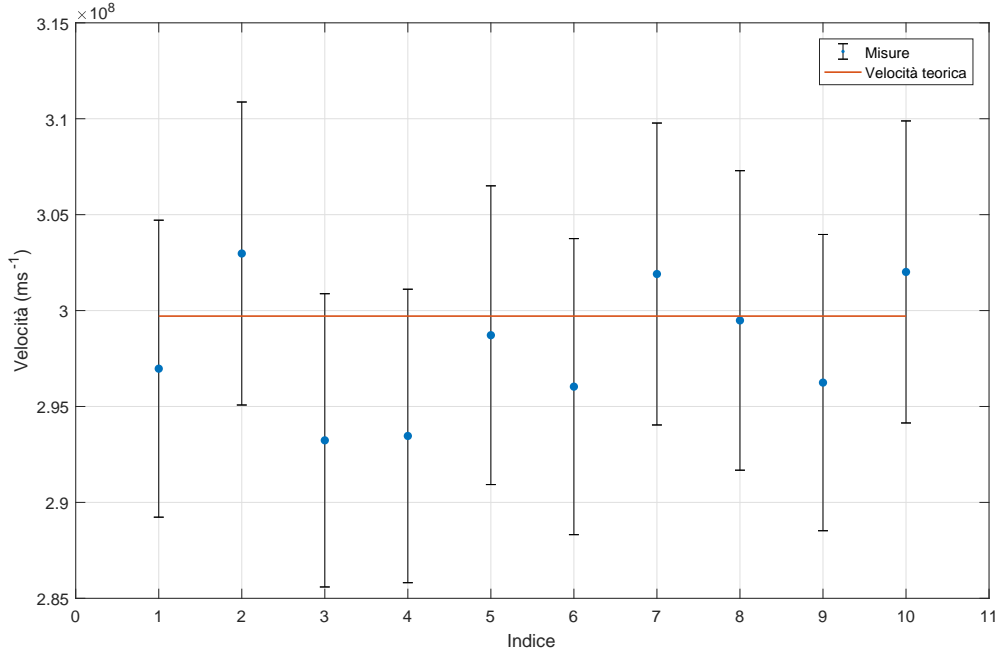


Figura 3: *Counterclock-clockwise* data set



1.4.2 Verifica indipendenza

Per la verifica dell'indipendenza dei dati si è usato il valore teorico della velocità della luce. In particolare un set di dati indipendenti avrebbe prodotto una distribuzione normale di valori della velocità della luce misurati centrati nel valore teorico e con deviazione standard uguale all'errore totale stimato. Per provare questa ipotesi si è usato il test del χ^2 . Come errore è stato usato lo stesso errore descritto nella sezione 1.4.1. In tutti e tre i casi il test ha verificato l'ipotesi di indipendenza. A seguito di queste due operazioni è dunque lecito eseguire l'operazione di media pesata.

1.5 Stima della velocità della luce per ogni set

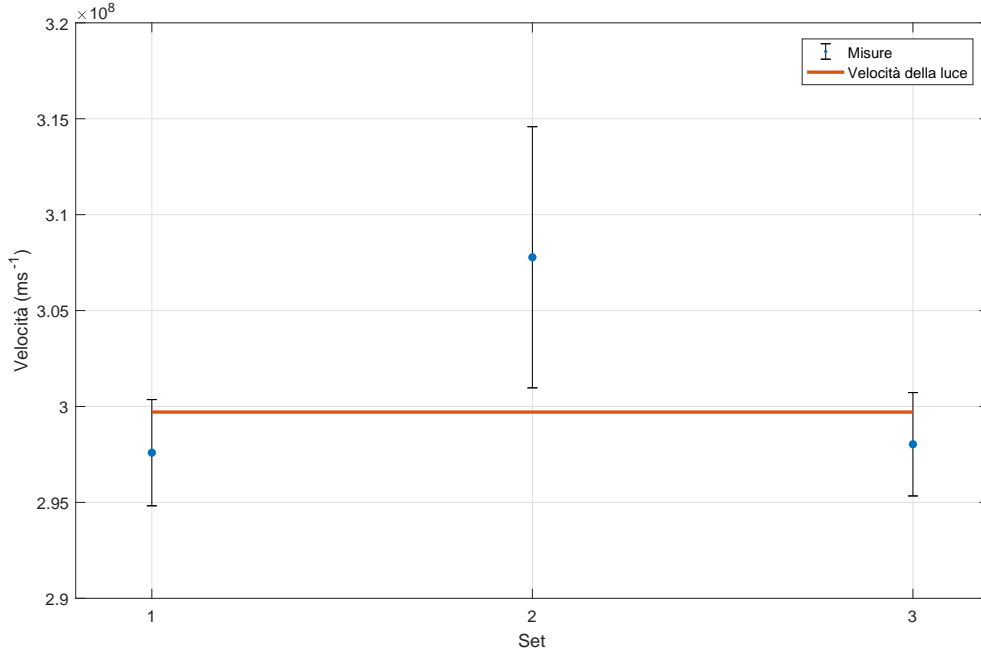
Come anticipato per la stima della velocità della luce è stata eseguita una media pesata. Come peso si è scelto di usare l'errore sistematico. Questa scelta è stata fatta in quanto l'errore casuale è uguale per tutte le misure e non influenza l'operazione di media pesata. Inoltre era utile tenere separati gli errori sistematici da quelli casuali per osservare quale errore influisce di più sull'errore finale. L'errore totale per ogni valore ottenuto è stato trovato tramite la radice della somma in quadratura degli errori. I risultati di questa operazione sono riportati nella tabella 7.

Tabella 7: Misure di c per ogni set

Set	c (ms ⁻¹)	σ_{sist} (ms ⁻¹)	σ_{sist} rel.	σ_{rand} (ms ⁻¹)	c_{rand} rel.	σ_c (ms ⁻¹)	σ_c rel.
1	2.98×10^8	0.02×10^8	0.006	0.02×10^8	0.007	0.03×10^8	0.009
2	3.08×10^8	0.03×10^8	0.008	0.04×10^8	0.014	0.07×10^8	0.022
3	2.98×10^8	0.02×10^8	0.008	0.01×10^8	0.004	0.03×10^8	0.009

È interessante notare come la presa dei dati abbia influito sull'errore. In particolare due cose hanno influito: la quantità di dati presi e il $\Delta\omega$ considerato. A causa di un malfunzionamento del dispositivo di lettura delle frequenze infatti, abbiamo potuto prendere solo 10 misure per

Figura 4: Velocità dei set



ognuno dei set 2 e 3, mentre per il primo 19. Inoltre il $\Delta\omega$ per l'ultimo set era il maggiore come descritto in precedenza. Si può notare quindi che, il minor numero di misure ha causato un errore sistematico maggiore nei set 2 e 3 rispetto al primo. Questo perchè il processo di media pesata aiuta a ridurre l'errore tanti più sono le misure campionate. Invece l'aver usato un $\Delta\omega$ maggiore ha aiutato a diminuire notevolmente l'errore casuale nel terzo set. Quindi in futuro qualora si volesse diminuire l'errore sistematico è necessario compiere più misure, mentre qualora si volesse ridurre l'errore casuale è necessario campionare su $\Delta\omega$ maggiori.

1.6 Verifica compatibilità dei set e media

Ottenuti quindi i valori di c per ogni set come passaggio finale è stata fatta una media (ancora pesata ovviamente) per ottenere il valore finale di c . Come pesi per la media sono stati usati gli errori totali. Come prima anche per questa media è stato necessario verificare la compatibilità e l'indipendenza dei dati raccolti. Che i dati fossero indipendenti è ovvio, in quanto provenienti da set di misura diversi. Per la compatibilità è stato usato lo stesso procedimento di prima che ha ovviamente confermato la compatibilità. Nella figura 4 sono presenti i valori calcolati per ogni set con i relativi errori.

Come valore finale di c si è quindi ottenuto:

Tabella 8: Valore finale di c

c (ms ⁻¹)	σ_c (ms ⁻¹)	Err. rel.
2.99×10^8	0.02×10^8	0.006

Valore pienamente compatibile con il risultato atteso.