

1 Raccolta e Analisi Dati

La procedura di raccolta e di analisi dei dati per il calcolo del rapporto e/m consiste principalmente nella registrazione del valore del raggio della circonferenza del fascio di elettroni “sparato” per diversi valori di corrente e differenti differenza di potenziale. In questo modo per variazioni del campo magnetico prodotto dalle bobine di Helmholtz e del potenziale applicato al catodo che emette gli elettroni è possibile verificare la relazione lineare:

$$(B_z R)^2 = 2\Delta V m/e \quad (1)$$

dove ΔV è la differenza di poentziale applicata, B_z è il capo magnetico prodotto dalle bobine di Helmholtz in funzione della corrente. Invertendo questa relazione è possibile individuare il valore di e/m . Questo calcolo viene fatto in due condizioni sperimentali differenti: in condizione di perpendicolarità tra campo magnetico terrestre e campo prodotto dalle bobine, e in condizione di anti-parallelismo.

A queste procedure sperimentali è stata affiancata una seconda fase sperimentale in cui sono state effettuate diverse misure dell'intensità del campo magnetico terrestre B_t , ricavato dalla relazione:

$$B_t = \frac{I}{I_0}(B_z \cot \theta + B_r) \quad (2)$$

dove B_z e B_r sono le componenti del campo magnetico generato dalle bobine dell'apparato di misura, e θ è l'angolo misurato sul goniometro. Questi dati sono necessari per una corretta valutazione dell'intensità del campo generato dalle bobine in situazione di antiparallelismo. La presenza del campo magnetico terrestre ha infatti una influenza apprezzabile sul campo generato dalle bobine, e non può essere trascurato. Terremo la separazione tra misura del rapporto e/m e misura del campo magnetico terrestre.

1.1 Raccolta Dati - Misura del rapporto e/m

La raccolta di dati consiste come descritto precedentemente nella registrazione del raggio della circonferenza descritta dal fascio di elettroni devianti dal campo magnetico. In considerazione del fatto che risulta piuttosto difficile riuscire a far collimare i fermi con la posizione del raggio, anche servendosi dello specchio, si è deciso di prendere come errore per la misura del raggio $\sigma_R = 5 \text{ mm}$, valore che corrisponde a un errore percentuale dell'ordine del 4 – 5% a seconda del raggio misurato. Di seguito le tabelle 1 e 2 riportano i valori ottenuti dei raggi, delle differenze di tensione, delle correnti applicate, e del campo magnetico¹, con gli errori annessi su campioni di 11-13 misurazioni².

Se per gli errori relativi a ΔV , I e R si sono tenuti errori costanti il calcolo di B_z :

$$B_z = \mu_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{NI}{R_b}$$

mostra dipendenza sia dal valore della corrente che da quello del raggio delle bobine, la cui misura è stata di 0.1575 m con un errore di 0.0009 m – questi dati sono il risultato di analisi statistica su più misure del raggio delle bobine, che è identico alla distanza tra le stesse. In conseguenza della doppia dipendenza di B_z si è applicata la formula di propagazione degli errori:

$$\sigma_B = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial R_b} \sigma_R\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial I} \sigma_I\right)^2}$$

¹Ai valori del campo magnetico è già stato applicato il fattore di correzione opportuno

²Per quanto riguarda la tabella 2, i valori di raggio da una certa misurazione sono uguali. Questo perchè, senza perdita di precisione nella misura, si è scelto di lasciare fermi i perni dell'asta attaccata all'ampolla, e di modificare i valori di corrente e tensione fino a centrare la posizione dei fermi stessi da cui poi è stata effettuata la lettura. In questo modo si sono sveltite le procedure di misurazione senza perdita di generalità della procedura, come mostrato dai dati raccolti.

Tabella 1: Dati misura e/m - perpendicolare

	$R(m)$	σ_R	$\Delta V(V)$	σ_V	$I(A)$	σ_I	$B_z(R)(T)$	σ_B
1	0.05352	0.0050	229.2	3.0	1.229	0.020	9.0545E-04	5.55E-06
2	0.05563	0.0050	210.5	3.0	1.102	0.020	8.1140E-04	4.97E-06
3	0.05276	0.0050	243.3	3.0	1.204	0.020	8.8796E-04	5.44E-06
4	0.05125	0.0050	277.3	3.0	1.389	0.020	1.0244E-03	6.28E-06
5	0.05468	0.0050	281.7	3.0	1.333	0.020	9.8149E-04	6.01E-06
6	0.05175	0.0050	296.2	3.0	1.450	0.020	1.0694E-03	6.55E-06
7	0.05612	0.0050	184	3.0	1.000	0.020	7.3586E-04	4.51E-06
8	0.05984	0.0050	199.6	3.0	1.019	0.020	7.4773E-04	4.58E-06
9	0.05277	0.0050	256	3.0	1.290	0.020	9.5089E-04	5.82E-06
10	0.04653	0.0050	190.8	3.0	1.290	0.020	9.5370E-04	5.84E-06
11	0.05224	0.0050	220.4	3.0	1.210	0.020	8.9239E-04	5.47E-06

Tabella 2: Dati misura e/m - antiparallelo.

	$R(m)$	σ_R	$\Delta V(V)$	σ_V	$I(A)$	σ_I	$B_z(R)(T)$	σ_B
1	0.05023	0.0050	179.5	3.0	1.090	0.020	7.7522E-04	4.93E-06
2	0.05362	0.0050	190.4	3.0	1.042	0.020	7.3828E-04	4.7E-06
3	0.05110	0.0050	200	3.0	1.073	0.020	7.6231E-04	4.85E-06
4	0.05110	0.0050	208	3.0	1.210	0.020	8.6339E-04	5.47E-06
5	0.05110	0.0050	222.5	3.0	1.303	0.020	9.3201E-04	5.89E-06
6	0.05110	0.0050	230	3.0	1.301	0.020	9.3054E-04	5.88E-06
7	0.05110	0.0050	241.6	3.0	1.302	0.020	9.3128E-04	5.88E-06
8	0.05110	0.0050	249.9	3.0	1.354	0.020	9.6964E-04	6.12E-06
9	0.05110	0.0050	260.9	3.0	1.315	0.020	9.4087E-04	5.94E-06
10	0.05110	0.0050	279.9	3.0	1.407	0.020	1.0088E-03	6.36E-06
11	0.05110	0.0050	292.2	3.0	1.465	0.020	1.0515E-03	6.62E-06
12	0.05110	0.0050	271	3.0	1.382	0.020	9.9030E-04	6.25E-06
13	0.05110	0.0050	299.8	3.0	1.452	0.020	1.0420E-03	6.56E-06

Tabella 3: Dati raccolti per il calcolo del Campo Magnetico Terrestre

$I(\text{A})$	$B_z(\text{T})$	$B_r(\text{T})$	$\theta(\text{rad})$	σ_θ	$B_t(\text{T})$	σ_B
0.016	15.379	2.86E-02	0.6981	0.0175	2.978E-01	2.133E-02
0.013	1.5295	3.33E-02	0.6109	0.0175	2.883E-01	2.457E-02
0.011	1.519	3.62E-02	0.5236	0.0175	2.934E-01	2.912E-02
0.023	1.5471	1.67E-02	0.8727	0.0175	3.024E-01	1.690E-02
0.032	1.5472	6.20E-03	1.0472	0.0175	2.878E-01	1.464E-02
0.053	1.5423	1.00E-04	1.2217	0.0175	2.976E-01	1.715E-02
0.007	1.4951	3.42E-02	0.3491	0.0175	2.899E-01	4.428E-02

Tabella 4: Valori di compatibilità per le misure del campo magnetico terrestre.

comp.	mis.	comp.	mis.	comp.	mis.	comp.	mis.	comp.	mis.	comp.	mis.
2.93E-1	1-2	1.33E-1	2-3	2.68E-1	3-4	6.52E-1	4-5	4.31E-1	5-6	1.61E-1	6-7
1.23E-1	1-3	4.73E-1	2-4	1.70E-1	3-5	2.01E-1	4-6	4.51E-2	5-7		
1.69E-1	1-4	1.61E-2	2-5	1.23E-1	3-6	2.63E-1	4-7				
3.86E-1	1-5	3.09E-1	2-6	6.51E-2	3-7						
9.30E-3	1-6	3.24E-2	2-7								
1.60E-1	1-7										

che applicata caso per caso dà i risultati riportati in tabella.

È bene far notare da subito un fatto relativo alla tabella 2: nella colonna relativa ai valori del campo magnetico si è tenuto conto non solo dei fattori di correzione opportuni (indicati nella tabella delle dispense), ma al valore ottenuto per B_z è stato sottratto il campo magnetico terrestre, il cui valore e giustificazione della misura è data nella sezione che segue³.

1.2 Raccolta e Analisi Dati- Misura del Campo Magnetico B_t

Come detto questa procedura è necessaria per la correzione dei valori di B_z coerentemente con quanto fatto nella tabella 2. La procedura di analisi per i dati raccolti – che sono riportati nella tabella 3, consiste nella verifica della consistenza dei valori del campo magnetico terrestre ottenuti per differenti angoli, tramite la formula 2 con i relativi errori. Questa procedura è stata ottenuta tramite una media pesata dei termini considerati.

Da questi dati si può osservare che la compatibilità tra i valori ottenuti – supponendo un errore costante sul valore della corrente di 0.001 A è verificato e dalla procedura di media pesata si ottiene dunque $B_t = 2.945 \times 10^{-1} \text{ T}$ con un errore di $8 \times 10^{-4} \text{ T}$. I valori parziali di compatibilità tra le misure effettuate sono riportati nella tabella 4.

2 Analisi dei Dati per la determinazione del rapporto e/m

Una volta determinato il valore del campo magnetico terrestre con il suo errore, è possibile ricavare i dati per la verifica della relazione lineare 1. In particolare il valore di B_t influenza le misure soprattutto nel caso di disposizione antiparallela della strumentazione rispetto al campo magnetico, come detto in precedenza.

Nelle tabelle 5 e 6 sono riportati i valori su cui applicare l'algoritmo di regressione lineare. Si è verificato in particolare che l'errore sulle ascisse – nel caso particolare $2\Delta V$, fosse di ordine inferiore rispetto a quello sulle ordinate e potesse essere trascurato⁴.

³Questa scelta dipende dal fatto di non voler appesantire eccessivamente le tabelle che vengono riportate, facilitando per quanto possibile la lettura dei dati. Inoltre in questo modo è possibile avere continuità tra questi

Tabella 5: Dati per la regressione - perpendicolare.

	$2\Delta V(\text{V})$	σ_V	$(BR)^2(\text{T}^2\text{m}^2)$	σ_{BR}
1	458.4	6	2.348E-09	4.40E-10
2	421	6	2.038E-09	3.67E-10
3	486.6	6	2.195E-09	4.17E-10
4	554.6	6	2.756E-09	5.39E-10
5	563.4	6	2.880E-09	5.28E-10
6	592.4	6	3.062E-09	5.93E-10
7	368	6	1.706E-09	3.05E-10
8	399.2	6	2.002E-09	3.35E-10
9	512	6	2.518E-09	4.78E-10
10	381.6	6	1.969E-09	4.24E-10
11	440.8	6	2.173E-09	4.17E-10

Tabella 6: Dati per la regressione - antiparallelo.

	$2\Delta V(\text{V})$	σ_V	$(BR)^2(\text{T}^2\text{m}^2)$	σ_{BR}
1	359	6	1.516E-09	3.02E-10
2	380.8	6	1.567E-09	2.93E-10
3	400	6	1.518E-09	2.98E-10
4	416	6	1.947E-09	3.82E-10
5	445	6	2.269E-09	4.45E-10
6	460	6	2.261E-09	4.43E-10
7	483.2	6	2.265E-09	4.44E-10
8	499.8	6	2.455E-09	4.81E-10
9	521.8	6	2.312E-09	4.53E-10
10	559.8	6	2.657E-09	5.21E-10
11	584.4	6	2.888E-09	5.66E-10
12	542	6	2.561E-09	5.02E-10
13	599.6	6	2.835E-09	5.56E-10

Alla luce del tipo di dati ricavato, con errore costante e trascurabile sulle ascisse e errore variabile sulle ordinate, si è scelto di applicare l'algoritmo di regressione lineare pesata. Nel caso particolare i pesi sono ricavati dall'inverso dei quadrati dei valori di σ_{BR} . I valori per coefficiente angolare e intercetta ottenuti nel caso "perpendicolare" sono:

$$m/e = 5.337E - 12 \pm 4.42E - 13 \quad q = -1.85E - 10 \pm 1.96E - 10 \quad (3)$$

da cui è possibile immediatamente osservare la compatibilità con l'origine dell'intercetta.

Per quanto riguarda invece il caso "parallelo" i valori ottenuti sono

$$m/e = 5.938E - 12 \pm 5.17E - 13 \quad q = -5.80E - 10 \pm 2.53E - 10 \quad (4)$$

Si osserva che in questo caso la compatibilità con l'origine dell'intercetta ottenuta è al di là del limite di confidenza del 95% seppur di poco. Le figure 2 e ?? riportano una rappresentazione grafica di quanto ricavato sperimentalmente dai dati.

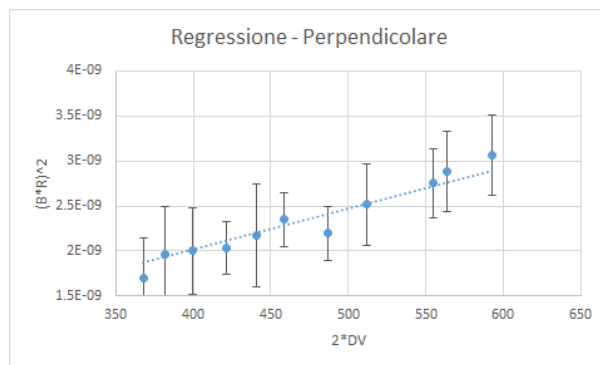


Figura 1: Regressione Lineare - perpendicolare.

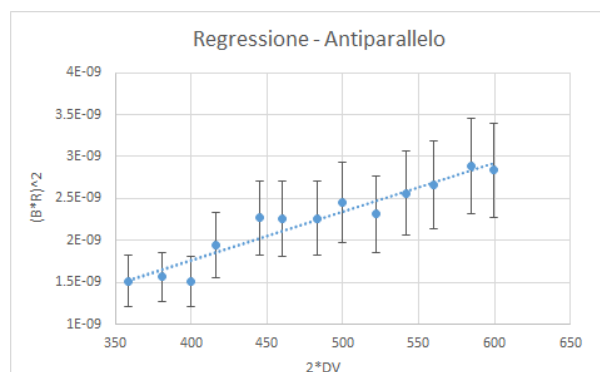


Figura 2: Regressione Lineare - antiparallelo.

Con i dati ricavati da 3 e 4 è possibile invertire per ottenere i valori di e/m calcolando l'errore tramite la derivata, in questo caso in una sola variabile. I valori ottenuti sono rispettivamente

$$e/m = 1.874 \times 10^{11} \text{ C/kg} \pm 1.55E + 10 \quad (5)$$

e

$$e/m = 1.684 \times 10^{11} \text{ C/kg} \pm 1.47E + 10 \quad (6)$$

che risultano compatibili tra di loro e compatibili entrambi con il valore dichiarato di $1.7588 \times 10^{11} \text{ C/kg}$.

dat e quelli che vengono riportati nell'esecuzione delle regressioni lineari.

⁴Si è osservato che la somma in quadratura degli errori, moltiplicando l'errore sulle ascisse per il coefficiente angolare della retta individuata aveva un inferiore all'1% dell'errore totale, cioè di circa lo 0.1% del valore dell'ordinata.

3 Conclusioni

L'esperienza di verifica del rapporto e/m può dirsi eseguita con successo. Entrambi i valori ottenuti, seguendo la stessa procedura ma con condizioni differenti, restituiscono infatti un valore compatibile con quello dichiarato. L'unico punto da chiarire resta la scarsa compatibilità dell'intercetta con l'origine per la seconda regressione, sebbene il limite del 95% non sia poi così distante.