Logica e rappresentazione della conoscenza

Info: g.paronitti@gmail.com

Obiettivo principale

Comprendere l'uso rappresentativo della logica in Intelligenza Artificiale

Nozioni basilari della logica proposizionale.

Nozioni basilari della logica dei predicati.

Saper risolvere alcuni esercizi in questi due ambiti.

Che cosa è la logica

"Tradizionalmente, si dice che la logica è l'arte (o lo studio) del ragionare; in questo senso per descrivere che cosa sia la logica dobbiamo prima sapere che cosa vuol dire 'ragionare'. In accordo con un approccio tradizionale il ragionare consiste nel costruire catene di entità linguistiche per mezzo di una certa relazione '.... segue da ....'" (Dirk van Dalen (2004), "Logic and Structure", Springer)

"L'oggetto di studio della logica sono i nessi inferenziali tra proposizioni." (Marcello Frixione, (2000), "Intelligenza Artificiale", Carocci Editore)

"La logica è lo studio delle argomentazioni. Una argomentazione è una sequenza di proposizioni di cui una si intende come conclusione e le altre, le premesse, sono atte a dimostrare o almeno a fornire un certo sostegno alle conclusioni." (Achille Varzi, John Nolt e Dennis Rohatyn (2008), "Logica", 2ed. McGraw-HIll)

"(1) Informal logic is the study of natural language arguments. The study of fallacies is an especially important branch of informal logic.

(2) Formal logic is the study of inference with purely formal content, where that content is made explicit.

(3) Symbolic logic is the study of symbolic abstractions that capture the formal features of logical inference." (Wikipedia)

Per proposizione (proposition) o asserto (statement) si intende una qualunque espressione linguistica che possa essere vera oppure falsa.

La distinzione tra una proposizione e l'enunciato (sentence) usato per esprimerlo è importante. Un enunciato può essere ambiguo o dipendente dal contesto, e può quindi esprimere uno qualsiasi di due o più asserti - anche asserti con valori di verità opposti.

P.e. Mio fratello è un entomologo.

- Sono proposizioni:

  I cani non volano.

  Robert Musil ha scritto 'L'uomo senza qualità'.

  Bruxelles è in Belgio o in Olanda.

  2+2=5.

  La neve è rossa.

- Non sono proposizioni:

  Chi è l'autore de 'L'uomo senza qualità'?

  Per favore non chiamare dopo le 11 di sera.

  Avanti!

Un'inferenza è un processo che, a partire da alcuni enunciati assunti come punto di partenza (le premesse dell'inferenza), porta ad asserire un altro enunciato (la conclusione).

1. Mario è architetto oppure è geometra.

   Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato.
   Mario non è laureato.
   ∴ **Mario è geometra.**

2. Tutti i cigni osservati finora in Europa sono bianchi.
   Tutti i cigni osservati finora in Nord America sono bianchi.
   Tutti i cigni osservati finora in Sud America sono bianchi. […]
   Non sono mai stati osservati cigni che non fossero bianchi.
   ∴ **tutti i cigni sono bianchi.**

3. L'assassino ha sporcato di sangue il tappeto
   chiunque fosse entrato dal giardino avrebbe sporcato di fango il tappeto.
   ∴ L'assassino è entrato dal giardino.

4. Gli uccelli salvo eccezioni sono in grado di volare.
   Titti è un uccello
   ∴ **Titti è in grado di volare.**

Alcuni degli esempi seguenti sono delle argomentazioni. Identificare le loro premesse e le loro conclusioni:

(a) Luca è del segno del leone, dato che è nato durante la prima settimana di Agosto.

(b) Come è possibile migliorare l'economia? Il deficit economico cresce di giorno in giorno.

(c) Non posso andare a letto, mamma. Il film non è ancora finito.

(d) Il palazzo era malmesso, costruito in una pietra scura coperta di fuliggine, in un quartiere decadente. Scorribande di topi echeggiavano per le stanze vuote.

(e) Chiunque abbia il tuo talento dovrebbe ricevere un'istruzione superiore. Va all'università!

(f) Fummo ampiamente decimati e disarmati dal nemico, e le sue truppe venivano costantemente rinforzate mentre le nostre diminuivano. Quindi uno scontro in campo aperto sarebbe stato un suicidio.

(g) Respirava, quindi era vivo.

(h) C'è nessuno qui che capisca quello che c'è scritto in questo documento?

(i) Molti statunitensi non sanno se il loro paese sostenga la messa al bando internazionale delle mine anti-uomo o vi si opponga.

(j) Il triangolo ABC è equiangolo. Quindi ciascuno dei suoi angoli interni misura 60 gradi.

Soluzioni

(a) {Luca è del segno del leone}, dato che [è nato durante la prima settimana di Agosto].

(b) {*Come è possibile migliorare l'economia*}*? [Il deficit economico cresce di giorno in giorno]. [NO]*

(c) {Non posso andare a letto}, mamma. [Il film non è ancora finito].

(d) Il palazzo era malmesso, costruito in una pietra scura coperta di fuliggine, in un quartiere decadente. Scorribande di topi echeggiavano per le stanze vuote. [NO]

(e) *[Chiunque abbia il tuo talento dovrebbe ricevere un'istruzione superiore]. {Va all'università}! [NO]*

(f) [Fummo ampiamente decimati e disarmati dal nemico], e [le sue truppe venivano costantemente rinforzate mentre le nostre diminuivano]. Quindi {uno scontro in campo aperto sarebbe stato un suicidio}.

(g) [Respirava], quindi {era vivo}.

(h) C'è nessuno qui che capisca quello che c'è scritto in questo documento? [NO]

(i) Molti statunitensi non sanno se il loro paese sostenga la messa al bando internazionale delle mine anti-uomo o vi si opponga. [NO]

(j) [Il triangolo ABC è equiangolo]. Quindi {ciascuno dei suoi angoli interni misura 60 gradi}.

Come identificare una argomentazione

La conclusione potrebbe comparire in qualsiasi punto di un'argomentazione, ma l'inizio e la fine sono i punti più comuni. Ai fini dell'analisi si usa indicare prima le premesse ognuna su una riga separata e alla fine la conclusione preceduta dal simbolo '∴' che significa 'quindi'.

Es: Tutti gli uomini sono mortali

Socrate è un uomo.

∴ Socrate è mortale

Se una argomentazione segue questo formato allora si dice che è in forma canonica.

Si dà una argomentazione solo quando qualcuno presenta un insieme di premesse a sostegno di una conclusione. Questa intenzione potrebbe essere espressa per mezzo di opportuni indicatori inferenziali.

INDICATORI DI CONCLUSIONE: **quindi, così, sicché, perciò, pertanto, ragion per cui, per questa ragione, di conseguenza, stando così le cose, ne segue che, questo dimostra che, questo significa che, da ciò possiamo inferire che, risulta che, in conclusione...**

INDICATORI DI PREMESSE: **poiché, dato che, dal momento che, assumendo che, visto che, considerato che, siccome, perché, la ragione è che, in vista del fatto che, è un dato di fatto che, come mostrato dal fatto che, posto che, in quanto, infatti...**

Esercizi

Usare gli indicatori inferenziali per identificare la struttura delle argomentazioni:

1. È pressoché impossibile ottenere composti di oro e argo in laboratorio, tanto meno in natura, dato che è difficile far sì che l'argo reagisca con altri elementi, e dato che l'oro, a sua volta forma pochi composti.
2. L'inflazione è diminuita notevolmente, mentre i tassi di interesse sono rimasti alti. Quindi in termini reali, i prestiti sono diventati più costosi, dato che a queste condizioni il denaro preso a prestito non può essere ripagato con euro altamente inflazionati (mentre poteva esserlo quando l'inflazione era più alta).
3. Ho portato l'ombrello perché tu non ti bagnassi.
4. Al Capone non era poi così intelligente. Se fosse stato più intelligente, la IRS non lo avrebbe mai incriminato per evasione fiscale.
5. Alcuni politici sono ipocriti. Dicono che se si vuole tenere sotto controllo il deficit nazionale dovremmo pagare più tasse. Ma poi sprecano un sacco di soldi per le loro campagne elettorali.

Soluzioni

1 [È pressoché impossibile ottenere composti di oro e argo in laboratorio, tanto meno in natura,**] {**dato che**} 2 [**è difficile far sì che l'argo reagisca con altri elementi,**]** e **{**dato che**} 3 [**l'oro, a sua volta forma pochi composti**]**.

2, 3 ∴ **1**

1 [L'inflazione è diminuita notevolmente, mentre i tassi di interesse sono rimasti alti.**] {**Quindi**} 2 [**in termini reali, i prestiti sono diventati più costosi,**] {**dato che**} 3 [**a queste condizioni il denaro preso a prestito non può essere ripagato con euro altamente inflazionati (mentre poteva esserlo quando l'inflazione era più alta)**]**.

1, 3 ∴ **2**

Ho portato l'ombrello perché tu non ti bagnassi. [NO]

1 [Al Capone non era poi così intelligente.**] 2 [**Se fosse stato più intelligente, la IRS non lo avrebbe mai incriminato per evasione fiscale.**]**

2 ∴ **1**

1 [Alcuni politici sono ipocriti.**] 2 [**Dicono che se si vuole tenere sotto controllo il deficit nazionale dovremmo pagare più tasse**]**. **3 [**Ma poi sprecano un sacco di soldi per le loro campagne elettorali**]**.

2, 3 ∴ **1**

Argomentazioni complesse

Alcune argomentazioni procedono per stadi.

- **premesse derivate** o **conclusioni intermedie**.

- **premesse fondamentali** o **assunzioni**.

Es. Tutti i numeri razionali sono esprimibili come frazioni di interi. Ma π non è esprimibile come una frazione di interi. Quindi π non è un numero razionale. Tuttavia π è chiaramente un numero. Ne segue che esiste almeno un numero irrazionale.

Forma canonica:

Tutti i numeri razionali sono esprimibili come frazioni di interi.

π non è esprimibile come una frazione di interi.

∴ π non è un numero razionale.

π è un numero.

∴ Esiste almeno un numero irrazionale.

Esercizi

Non temere che la temperatura vada sotto lo zero in giugno, neppure in alta montagna. Non è mai stato così freddo nei mesi estivi, e quindi probabilmente non lo sarà mai.

Matteo ha detto che andrà alla festa il che significa che ci andrà anche Giulia. Così Giulia non potrà venire al cinema con noi.

Soluzioni

Non temere che la temperatura vada sotto lo zero in giugno, neppure in alta montagna. Non è mai stato così freddo nei mesi estivi, e quindi probabilmente non lo sarà mai.

Nei mesi estivi la temperatura non è mai scesa sotto lo zero, neppure in alta montagna.

∴ probabilmente non lo sarà mai

∴ Non temere che la temperatura vada sotto lo zero in giugno.

Matteo ha detto che andrà alla festa il che significa che ci andrà anche Giulia. Così Giulia non potrà venire al cinema con noi.

Matteo ha detto che andrà alla festa

∴ Anche Giulia andrà alla festa

∴ Giulia non potrà venire al cinema con noi.

Diagrammi

I diagrammi sono un modo conveniente per rappresentare una struttura inferenziale. Ecco come si costruiscono:

(1) Mettere tra parentesi gli indicatori inferenziali; (2) Numerare gli asserti; (3) Se molte premesse concorrono a un conclusione, allora si scrivono i loro numeri uniti da segni di addizione e li si sottolinea. (4) Se un passo di ragionamento ha una sola premessa, si scrive semplicemente il suo numero. (5) Si traccia una freccia dall'alto al basso, che va dal numero/i che rappresenta/no una/le premessa/e al numero che rappresenta la conclusione del passo argomentativo.

Es: **1[**Oggi è o martedì o mercoledì.**]** Ma **2[**non può essere mercoledì,**]** **{**dato che**}** **3[**l'ambulatorio medico questa mattina era aperto,**]** e **4[**quell'ufficio è sempre chiuso di mercoledì.**]** Quindi **5[**oggi deve essere martedì.**]**

$$
\begin{array}{c}
\underline{\mathbf{3} \quad + \quad \mathbf{4}} \\
\downarrow \\
\underline{\mathbf{1} \quad + \quad \mathbf{2}} \\
\downarrow \\
\mathbf{5}
\end{array}
$$

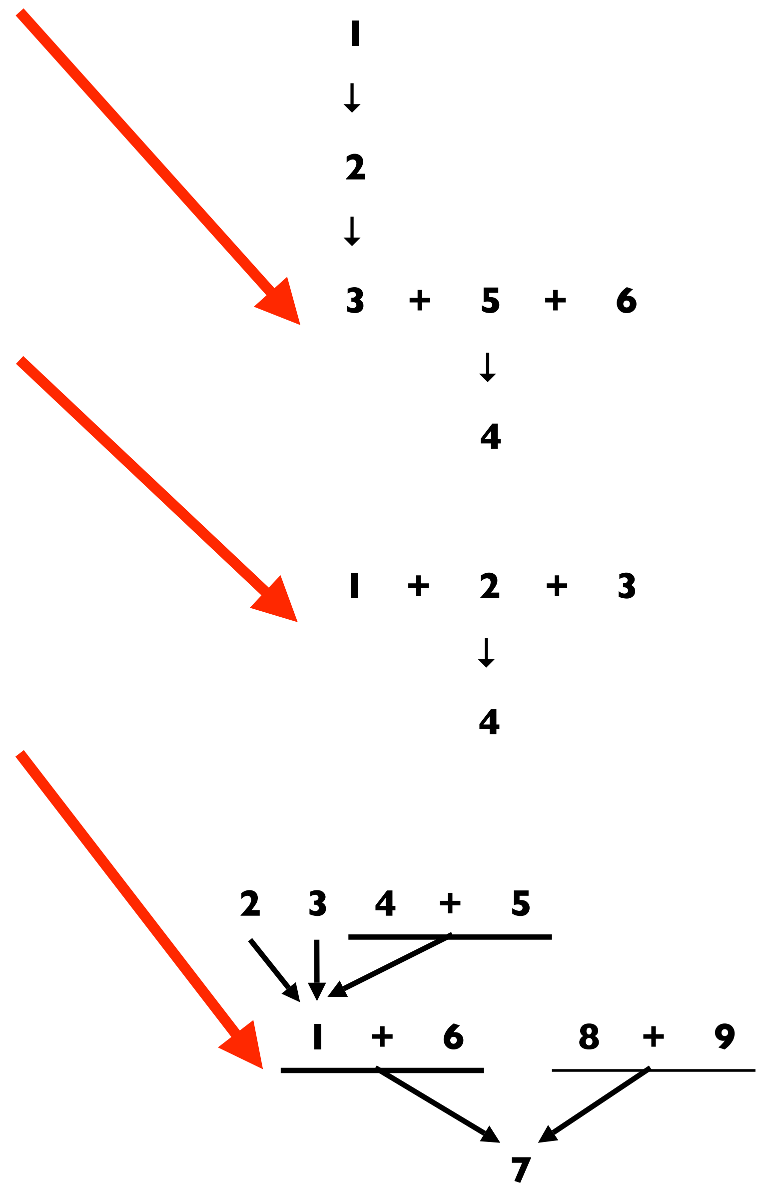
Esercizi

Diagrammare le seguenti argomentazioni:

1. La Fiat è di Torino, quindi è in Italia e di conseguenza fa parte di una nazione altamente industrializzata. Perciò la Fiat non fa parte del Terzo Mondo, poiché il terzo mondo è composto esclusivamente da paesi in via di sviluppo e i paesi in via di sviluppo sono, per definizione, solo parzialmente industrializzati.
2. O gli UFO sono armi segrete del nemico oppure sono navi spaziali che provengono da un mondo alieno. Se sono armi nemiche, allora la tecnologia nemica è ampiamente superiore alla nostra (contrariamente a quanto si pensa solitamente). Se sono navi spaziali aliene, allora dispongono di una tecnologia superiore a qualsiasi cosa noi si possa immaginare. In ogni caso, quindi i loro costruttori sono tecnologicamente più sofisticati di noi.
3. È verosimile che la nostra squadra perda l'ultimo incontro, per queste tre ragioni: il suo attaccante per un infortunio al ginocchio, il morale è a terra dopo due deludenti sconfitte e questa è una partita fuori casa e fuori casa ha giocato malissimo per tutta la stagione. Se perde questa partita, certamente l'allenatore verrà licenziato. Ma questa non è l'unica ragione per pensare che il suo posto sia in pericolo. Infatti è stato accusato da alcuni giocatori di chiudere un occhio di fronte all'uso di sostanze stupefacenti all'interno della squadra, e nessun allenatore che lasci che i suoi giocatori facciano uso di droghe può aspettarsi di mantenere il posto.

Soluzioni

1. **1[**La Fiat è di Torino,**]** **{**quindi**}** **2[**è in Italia**]** e **{**di conseguenza**}** **3[**fa parte di una nazione altamente industrializzata.**]** **{**Perciò**}** **4[**la Fiat non fa parte del Terzo Mondo,**]** **{**poiché**}** **5[**il terzo mondo è composto esclusivamente da paesi in via di sviluppo**]** e **6[**i paesi in via di sviluppo sono, per definizione, solo parzialmente industrializzati.**]**
2. **1[**O gli UFO sono armi segrete del nemico oppure sono navi spaziali che provengono da un mondo alieno.**]** **2[**Se sono armi nemiche, allora la tecnologia nemica è ampiamente superiore alla nostra (contrariamente a quanto si pensa solitamente).**]** **3[**Se sono navi spaziali aliene, allora dispongono di una tecnologia superiore a qualsiasi cosa noi si possa immaginare.**]** In ogni caso, **{**quindi**}** **4[**i loro costruttori sono tecnologicamente più sofisticati di noi**]**.
3. **1[**È verosimile che la nostra squadra perda l'ultimo incontro,**]** **{**per queste tre ragioni:**}** **2[**il suo attaccante per un infortunio al ginocchio,**]** **3[**il morale è a terra dopo due deludenti sconfitte**]** e **4[**questa è una partita fuori casa**]** e **5[**fuori casa ha giocato malissimo per tutta la stagione.**]** **6[**Se perde questa partita, certamente l'allenatore verrà licenziato.**]** Ma **{**questa non è l'unica ragione per pensare che**}** **7[**il suo posto sia in pericolo.**]** **{**Infatti**}** **8[**è stato accusato da alcuni giocatori di chiudere un occhio di fronte all'uso di sostanze stupefacenti all'interno della squadra,**]** e **9[**nessun allenatore che lasci che i suoi giocatori facciano uso di droghe può aspettarsi di mantenere il posto**]**.



Warnings

Attenzione alla possibilità che una argomentazione contenga degli asserti impliciti o incompleti.

Es: uno di noi due deve fare i piatti e non sarò certo io.

Attenzione una certa espressione può essere sia *usata* per dire qualcosa sia *menzionata* come ciò di cui si sta parlando. Per prevenire questa confusione, quando una espressione è menzionata piuttosto che usata la si racchiude tra virgolette.

Es. Socrate era un filosofo greco --> enunciato vero

‘Socrate’ è un nome di 7 lettere --> enunciato vero

‘Socrate’ era un filosofo greco --> enunciato falso

Socrate è un nome di 7 lettere --> enunciato falso

Esercizi

Diagrammare:

Il tuo motore perde acqua. Ci sono solo tre tipi di liquido nel motore: acqua, benzina e olio. Il tuo motore non perde olio, perché il liquido non è viscoso e non perde benzina dato che il liquido è inodore.

Mettere le virgolette nelle frasi seguenti:

1. Il nome di Gianni è Gianni.
2. x+y=x+y è espresso dall'equazione x+y=x+y.
3. Questo enunciato fa parte dell'esercizio 3
4. La prima lettera dell'alfabeto è A
5. A designa la prima lettera dell'alfabeto.

Soluzioni

1[Il tuo motore perde acqua.**] 2[**Ci sono solo tre tipi di liquido nel motore: acqua, benzina e olio.**] 3[**Il tuo motore non perde olio,**] {**perché**} 4[**il liquido non è viscoso,**]** e **5[**non perde benzina**]** **{**dato che**} 6[**il liquido è inodore.**]**

Assunzioni implicite:

7[L'olio è viscoso**]**

8[La benzina ha un odore**]**

9[C'è una perdita di liquido nel tuo motore**]**

$$\frac{4 + 7}{\downarrow} \qquad \frac{6 + 8}{\downarrow}$$

$$\frac{9 + 2 + 3 \quad + \quad 5}{\downarrow}$$

$$1$$

Mettere le virgolette nelle frasi seguenti:

- Il nome di Gianni è 'Gianni'.
- x+y=x+y è espresso dall'equazione 'x+y = x+y'.
- Questo enunciato fa parte dell'esercizio 3
- La prima lettera dell'alfabeto è 'A'
- "A" designa la prima lettera dell'alfabeto.

La logica formale e informale

La **logica formale** è lo studio delle forme argomentative, cioè di modelli astratti comuni a molte argomentazioni differenti. Una forma argomentativa è qualcosa di più semplice della struttura esibita da un diagramma perché codifica qualcosa che riguarda la composizione interna delle premesse e della conclusione.

Es: **se P, allora Q**

P

$\therefore$**Q**

Le variabili P e Q stanno per un qualsiasi asserto. Cioè possono essere rimpiazzate da un qualsiasi enunciato dichiarativo al fine di produrre una argomentazione specifica. Dato che le coppie di enunciati dichiarativi è potenzialmente infinito, la forma rappresenta infinite argomentazioni diverse tutte aventi la stessa struttura.

La **logica informale** è lo studio delle argomentazioni formulate in linguaggio naturale e dei contesti in cui esse occorrono. Dove la logica formale enfatizza la generalità e la teoria, la logica informale si concentra sull'analisi di argomentazioni concrete.

Deduttivamente valido

La logica, tradizionalmente, si occupa di inferenze o argomentazioni **deduttivamente valide**.

La forma di una inferenza si dice valida quando non può condurre da premesse vere a conclusioni false. Un argomento si dice valido se, in ogni modello in cui le premesse sono vere, anche la conclusione lo è.

Una inferenza con queste caratteristiche costituisce un **ragionamento deduttivo**, e la conclusione C viene detta conseguenza logica delle premesse $P_1,\ldots,P_n$. In altri termini, le inferenze valide conservano la verità delle premesse.

Come la mettiamo con il seguente argomento?

Il papa è siciliano
Tutti i siciliani sono giardinieri
$\therefore$ Il papa è un giardiniere.

Argomenti non deduttivi

Non tutte le inferenze 'sensate' sono ragionamenti deduttivi.

Che tipo di ragionamenti sono le seguenti argomentazioni?

1. Tutti i cigni osservati finora in Europa sono bianchi.
   Tutti i cigni osservati finora in Nord America sono bianchi.
   Tutti i cigni osservati finora in Sud America sono bianchi. […]
   Non sono mai stati osservati cigni che non fossero bianchi.
   ∴ tutti i cigni sono bianchi.

2. L'assassino ha sporcato di sangue il tappeto
   chiunque fosse entrato dal giardino avrebbe sporcato di fango il tappeto.
   ∴ L'assassino è entrato dal giardino.

3. Gli uccelli salvo eccezioni sono in grado di volare.
   Titti è un uccello
   ∴ Titti è in grado di volare.

Argomenti non deduttivi

Non tutte le inferenze "sensate" sono ragionamenti deduttivi. Le inferenze della slide precedente, non lo sono. Infatti in esse la conclusione potrebbe risultare falsa pur essendo vere tutte le premesse.

Ad esempio, potrebbe esserci da qualche parte un cigno nero che nessuno ha mai osservato, oppure l'assassino potrebbe aver sporcato il tappeto deliberatamente per sviare le indagini, oppure Titti potrebbe essere un pinguino.

Nell'esempio dei cigni, la conclusione è una generalizzazione delle informazioni contenute nelle premesse. Questo tipo di ragionamento va sotto il nome di **ragionamento induttivo**.

Nell'esempio dell'assassino, nella conclusione, si cerca di formulare un'ipotesi che spieghi i fatti delle premesse. Questo tipo di ragionamento va sotto il nome di **ragionamento abduttivo**.

L'ultimo è un esempio di **ragionamento per default**.

Logica Proposizionale

La *logica proposizionale* cattura le forme più semplici di inferenza logica, ossia quelle della cui validità si può rendere conto senza prendere in considerazione la struttura interna delle proposizioni atomiche.

In logica si dicono *atomiche* quelle proposizioni che non possono essere ulteriormente scomposte in altre proposizioni. Esempi di proposizioni atomiche del linguaggio ordinario sono 'Giorgio corre', 'Roma è la capitale d'Italia', 'Piove'.

Per rendere conto della validità delle inferenze proposizionali non occorre scomporre le proposizioni atomiche in componenti più elementari.

Nel linguaggio formale della logica proposizionale rappresentiamo le proposizioni atomiche mediante *lettere o variabili proposizionali*: *a*, *b*, *c*, … o anche si possono usare le maiuscole P, Q, R …

Le proposizioni atomiche possono essere combinate tra loro per formare *proposizioni composte*.

Esempi

Rappresentando per mezzo di variabili propozionali le proposizioni atomiche che formano una argomentazione ci possiamo rendere conto della loro forma più astratta e possiamo notare che esempi diversi appartengono a una stessa forma. Esempi:

1) Oggi è giovedì o venerdì.
Oggi non è venerdì.
∴ Oggi è giovedì.

2) La Gioconda è stata dipinta o da Rembrandt o da Michelangelo.
Rembrandt non ha dipinto la Gioconda.
∴ La Gioconda è stata dipinta da Michelangelo.

3) O andiamo in macchina o con la bici.
Non andiamo in macchina.
∴ Andiamo con la bici.

La forma di queste argomentazioni è quella del cosiddetto sillogismo disgiuntivo:

o P o Q.
non si dà il caso che P.
∴Q.

Validità e forme argomentative

Se ogni esempio di una forma argomentativa è valido allora la forma argomentativa è valida, altrimenti la forma argomentativa è invalida. Perciò basta un contro-esempio (premesse vere, conclusione falsa) per invalidare una forma argomentativa. Es. il sillogismo disgiuntivo (che abbiamo appena visto) è una forma argomentativa valida perché ogni suo esempio che abbia le premesse vere possiede anche una conclusione vera.

Vediamo una forma argomentativa invalida (l'affermazione del conseguente):

se P, allora Q. Q. ∴P.

Malgrado alcuni esempi siano argomentazioni valide:

Se aprile precede maggio, allora aprile precede maggio e maggio segue aprile.
aprile precede maggio e maggio segue aprile.
∴ *Aprile precede maggio*.*

*la validità di questo argomento dipende dalla seconda premessa, la prima è ridondante.

Esiste almeno un contro-esempio che rende l'affermazione del conseguente invalida:

Se stai facendo i salti di gioia, allora sei vivo.
Sei vivo.
∴ *Stai facendo i salti di gioia.*

Operatori logici, introduzione

Le proposizioni atomiche possono essere combinate tra loro per formare *proposizioni composte*.

Esempi di proposizioni composte del linguaggio ordinario sono:
"Se la temperatura sale, il ghiaccio si scioglie",
"Giorgio corre e Marco cammina",
"Piove oppure fa freddo".

Nel linguaggio formalizzato della logica proposizionale le proposizioni composte si rappresentano combinando tra loro le lettere proposizionali mediante opportuni *connettivi proposizionali*.

Chiameremo *formule proposizionali* sia le singole lettere proposizionali, sia le espressioni complesse ottenute combinando le lettere proposizionali per mezzo dei connettivi.

D'ora in avanti utilizzeremo le lettere maiuscole A, B, C, ..., P_1, P_2, P_3, ... per indicare formule proposizionali generiche. Introduciamo quattro *connettivi proposizionali*: negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale materiale.

La *negazione*

¬ , ~ , –

Data una formula A, la sua negazione si rappresenta con la formula ¬A.

Semantica: Se A è vera, allora ¬A è falsa; se A è falsa, allora ¬A è vera.

La *congiunzione*

∧ , & , ·

Date le formule A e B, la loro congiunzione si rappresenta con la formula A ∧ B.

Semantica: A ∧ B è vera se sia A sia B sono vere, ed è falsa in tutti gli altri casi.

La *disgiunzione*

∨

Semantica: A ∨ B è vera se e soltanto se è vera almeno una delle due formule A e B, è quindi falsa nel caso che A e B siano entrambe false.

Il *condizionale materiale*

→ , ⊃

Semantica: il significato di A → B è 'Non si dà il caso che sia vera A e falsa B'. Cioè, A → B è falsa se A è vera e B è falsa, ed è vera in tutti gli altri casi.

Il *bicondizionale*

↔ , ≡

Semantica: una formula A ↔ B è vera quando sia A che B sono entrambi veri o entrambi falsi; è falsa negli altri casi.

Consuetudini

È consuetudine scrivere le forme argomentative orizzontalmente, con le premesse separate da virgole, perciò:

$P \vee Q$
$\neg P$
$\therefore Q$

Si può riscrivere nel modo seguente: $P \vee Q, \neg P$ |- Q

Il simbolo '|-' sta al posto dei tre puntini ed è chiamato cancelletto o segno d'asserzione.

Tavole di verità

La **semantica** di un'espressione è il suo contributo alla verità o alla falsità degli enunciati in cui occorre (o, più precisamente, alla verità e alla falsità delle asserzioni espresse da quegli enunciati).
La verità o falsità di un asserto è anche chiamata **valore di verità** di quell'asserto.
La semantica di un operatore logico è fornita da una regola che permette di determinare il valore di verità di qualsiasi asserzione composta nella quale compaia quell'operatore, sulla base del valore di verità dei suoi componenti.
Assumiamo il **principio di bivalenza** secondo il quale vero e falso sono i soli valori di verità e, in ogni situazione possibile, ciascun asserto ha uno e un solo valore di verità.
Ecco le tavole di verità degli operatori logici che abbiamo visto finora.

Negazione	
A	¬A
V	F

Congiunzione		
A	B	A∧B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disgiunzione		
A	B	A∨B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicazione o condizionale materiale		
A	B	A→B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondizionale e disgiunzione esclusiva

La semantica del bicondizionale deriva dalla congiunzione di due implicazioni. Quindi la tavola di verità per il bicondizionale deriva dalla tavola di verità della seguente formula:

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Vediamo come:

P	Q	P→Q	∧	Q→P
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Bicondizionale		
P	Q	P↔Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

C'è anche una lettura della disgiunzione in cui 'P o Q' significa 'o P o Q, ma non entrambi'. Questa è una lettura esclusiva della disgiunzione la cui tavola di verità deriva da quella della formula seguente:

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

Il simbolo che esprime la disgiunzione esclusiva è il seguente: $\underline{\vee}$ (ma si può anche usare 'oe').

Disgiunzione esclusiva		
P	Q	$P \underline{\vee} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Formule ben formate, fbf

Le formule usate per gli esercizi precedenti sono composte dai seguenti tre insiemi di simboli:

1. Lettere enunciative;
2. Operatori logici;
3. Parentesi: ‘(’, ‘)’.

Questi tre insiemi costituiscono il vocabolario della logica proposizionale.

Una formula del linguaggio della logica proposizionale è una qualunque sequenza di elementi del vocabolario. Quindi potrebbero esistere anche delle sequenze prive di senso come ‘((¬()P’. Per distinguere queste sequenze dalle formule valide introduciamo la nozione di formula grammaticale o *formula ben formata*, in breve fbf.

La nozione di fbf è definita dalle seguenti regole di formazione, le quali costituiscono la grammatica della logica proposizionale:

1. Qualsiasi lettera enunciativa è una fbf;
2. Se φ è una fbf, allora anche $\neg \varphi$ lo è;
3. Se φ e ψ sono fbf, allora lo sono anche $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Si noti che con la regola 3 si stipula che, ogniqualvolta si introduce un operatore binario, si introduce una corrispondente coppia di parentesi. Ma c’è una convenzione ufficiosa per cui le parentesi più esterne si possono omettere.

Esercizi

Interpretando la lettera enunciativa ‘P’ come ‘sta piovendo’ e la lettera ‘N’ come ‘sta nevicando’, esprimere in logica proposizionale la forma di ciascuno dei seguenti enunciati italiani:

a. Sta piovendo.
b. Non sta piovendo.
c. O sta piovendo, o sta nevicando.
d. Sta sia piovendo che nevicando.
e. Sta piovendo ma non nevicando.
f. Non è vero che sta sia piovendo che nevicando.
g. Se non sta piovendo allora sta nevicando.
h. Non si dà il caso che, se sta piovendo, allora sta nevicando.
i. Non si dà il caso che, se sta nevicando, allora sta piovendo.
j. Sta piovendo se e solo se non sta nevicando.
k. Non sta ne piovendo, né nevicando.
l. Se sta sia nevicando che piovendo, allora sta nevicando.
m. Se non sta piovendo, allora non è vero che sta sia nevicando che piovendo.
n. O sta piovendo o sta sia nevicando che piovendo
o. O sta sia piovendo che nevicando, o sta nevicando ma non piovendo

Soluzioni

a. Sta piovendo. [P]
b. Non sta piovendo. [¬P]
c. O sta piovendo, o sta nevicando. [P $\underline{\vee}$ N]
d. Sta sia piovendo che nevicando. [P ∧ N]
e. Sta piovendo ma non nevicando. [P ∧ ¬N]
f. Non è vero che sta sia piovendo che nevicando. [¬(P ∧ N)]
g. Se non sta piovendo allora sta nevicando. [¬P → N]
h. Non si dà il caso che, se sta piovendo, allora sta nevicando. [¬(P → N)]
i. Non si dà il caso che, se sta nevicando, allora sta piovendo. [¬(N → P)]
j. Sta piovendo se e solo se non sta nevicando. [P ↔ ¬N]
k. Non sta né piovendo, né nevicando. [¬P ∧ ¬N] o [¬(P ∨ N)]
l. Se sta sia nevicando che piovendo, allora sta nevicando. [(N ∧ P) → N]
m. Se non sta piovendo, allora non è vero che sta sia nevicando che piovendo. [¬P → ¬(N ∧ P)]
n. O sta piovendo o sta sia nevicando che piovendo. [P ∨ (N ∧ P)]
o. O sta sia piovendo che nevicando, o sta nevicando ma non piovendo. [(P ∧ N) ∨ (N ∧ ¬P)]

Il condizionale materiale

Nel linguaggio ordinario le espressioni del tipo *se* ... *allora* .... di solito non sono puramente vero-funzionali: il valore di verità di un enunciato del tipo *se* A *allora* B non dipende esclusivamente dai valori di verità degli enunciati A e B. Spesso ad esempio *se*... *allora* ... ha sfumature di tipo causale.

Un tipico esempio di enunciati del tipo *se* ... *allora* ... che non sono vero-funzionali sono i cosiddetti *condizionali contro-fattuali*, ossia quegli enunciati che asseriscono cosa sarebbe successo se si fosse verificato un evento che nella realtà non si è verificato (ad esempio: *se i dinosauri non si fossero estinti, allora l'uomo non si sarebbe mai evoluto*, oppure *se la sveglia avesse suonato, allora non avrei perso il treno*).

I controfattuali

Per rendersi conto in che senso il *se* ... *allora* ... controfattuale non mappa il linguaggio di uso comune si considerino i due enunciati controfattuali seguenti:

(a) Se Dante fosse morto a cinque anni, allora non avrebbe scritto la Divina Commedia.
(b) Se Dante fosse morto a cinque anni, allora la Luna sarebbe fatta di formaggio.

In entrambi i casi l'antecedente (ossia, l'enunciato che segue il *se*) è falso, perché Dante non è morto a cinque anni. Analogamente, in entrambi è falso il conseguente (ossia, l'enunciato che segue l'*allora*): non è vero che Dante non ha scritto la Divina Commedia, così come non è vero che la Luna è di formaggio. Quindi a livello vero-funzionale entrambe le proposizioni sono vere. Tuttavia, tutti diremmo che (a) è vero mentre (b) è falso. Quindi, abbiamo due enunciati (a) e (b) del tipo *se* A *allora* B, in entrambi i quali sia A sia B sono falsi. Ma (a) è vero e (b) è falso. Di conseguenza, questo uso del *se* ... *allora* ... non è vero-funzionale (perché in base alle tavole di verità dovrebbe essere entrambi veri): non basta sapere il valore di verità di A e di B per sapere il valore di verità di *se* A *allora* B.

Altro esempio: "se tu sei morto, allora sei vivo".
Giacché se il 'tu' della frase si rivolge al lettore ….

Il ragionamento per assurdo (reductio ad absurdum)

Sul condizionale materiale si basa la possibilità delle *dimostrazioni per assurdo*.

Per dimostrare per assurdo un enunciato del tipo *se* A *allora* B si procede nel modo seguente. Si assume che A→B (*ipotesi d'assurdo*). Si deriva A→¬B cioè si deriva una contraddizione, visto che da A posso deriva B e ¬B. Se da una ipotesi deriviamo una contraddizione, rivelandone l'assurdità, allora siamo in grado di affermare che è vera l'ipotesi contraria. In altre parole, se si riesce a dimostrare che da una stessa premessa è possibile far derivare due conseguenze opposte tra loro, allora la premessa è falsa. Dunque la tesi è impossibile perché porta a una contraddizione tra le conseguenze derivate dalla premessa.

Es. mamma:- perché hai iniziato a fumare?
figlio:- tutti i miei amici lo fanno!
mamma:- quindi se i tuoi amici si buttano dal ponte, tu anche lo fai.

Es. Giacomo vede Giovanni sull'uscio di casa. Osservando che è completamente asciutto si rende conto che non piove. La sua prova che non sta piovendo è che se stesse piovendo, Giovanni sarebbe bagnato. Perciò non sta piovendo.

Tavole di verità per forme argomentative

Abbiamo detto che una forma argomentativa è valida se tutti i suoi esempi sono validi (o potremmo dire se non ha controesempi).

Una tavola di verità è una lista esaustiva di situazioni possibili. E quindi possiamo costruire una tavola di verità anche per specifiche forme argomentative.

Es.

La principessa o la regina presenzierà alla cerimonia.

La principessa non presenzierà

La regina presenzierà

Formalizzato:

$P \vee R, \neg P \vdash R$

P	R	$P \vee R$	$\neg P$	$\vdash R$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Esercizi

Formalizzare le seguenti argomentazioni.

1. Se dio esiste, allora la vita ha senso. Dio esiste, dunque la vita ha senso. (D,V)
2. Dio non esiste, perché, se dio esistesse, la vita avrebbe senso. La vita, invece, non ha senso. (D,V)
3. Se l'aereo non fosse precipitato, avremmo avuto qualche contatto radio. Non abbiamo avuto alcun contatto radio con l'aereo. Quindi è precipitato. (P, R)
4. Dato che oggi non è giovedì, deve essere venerdì, in quanto oggi è giovedì o venerdì. (G,V)
5. Se oggi è giovedì, allora domani è venerdì. Se domani è venerdì, allora dopodomani è sabato. Di conseguenza, se oggi è giovedì, dopodomani è sabato. (G,V, S)
6. Siamo nel fine settimana se e solo se è o sabato o domenica. Dunque siamo nel fine settimana, dal momento che è sabato. (F, S, D)
7. È sabato o domenica se siamo nel fine settimana; ma non siamo nel fine settimana. Dunque non è sabato né domenica.
8. Se siamo nel fine settimana allora è sabato o è domenica. Non è sabato. Non è domenica. Quindi, non siamo nel fine settimana. (F, S, D)
9. La domanda per la borsa di studio è già stata spedita. Se i commissari la ricevono per venerdì, la prenderanno in considerazione. Quindi la prenderanno in considerazione, poiché, se la domanda è già stata spedita, la riceveranno per venerdì. (S,V, C)
10. O lei non è a casa, o non risponde al telefono; ma se lei non è a casa allora è stata rapita e, se non risponde al telefono si trova in qualche altro pericolo. Quindi o è stata rapita o si trova in qualche altro pericolo. (C, R_1, R_2, P)

Soluzioni

1. $D \rightarrow V, D \vdash V$
2. $D \rightarrow V, \neg V \vdash \neg D$
3. $\neg P \rightarrow R, \neg R \vdash P$
4. $G \vee V, \neg G \vdash V$
5. $G \rightarrow V, V \rightarrow S \vdash G \rightarrow S$
6. $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$
7. $(S \vee D) \rightarrow F, \neg F \vdash \neg S \vee \neg D$
8. $*F \rightarrow (S \vee D), \neg S, \neg D \vdash \neg F$
9. $S \rightarrow V, V \rightarrow C, S \vdash C$
10. $\neg C \vee \neg R_1, \neg C \rightarrow R_2\ \neg R_1 \rightarrow P \vdash R_2 \vee P$

Esercizi

Costruire le tavole di verità e dimostrare la validità degli argomenti seguenti:

1. $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \quad \vdash P \rightarrow R$
2. $P \rightarrow Q, Q \quad \vdash P$
3. $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \quad \vdash \neg P$
4. $P \rightarrow Q \quad \vdash \neg(Q \rightarrow P)$
5. $P, \neg P \quad \vdash Q$
6. $R \quad \vdash P \leftrightarrow (P \vee (P \wedge Q))$

Soluzioni 1,2

P	Q	R	P → Q	Q → R	|- P → R
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

P	Q	P → Q	Q	|- P
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

Soluzioni 3,4

P	Q	P → Q	P → ¬Q	|- ¬P
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

P	Q	P → Q	|- ¬(Q → P)
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Soluzioni 5,6

P	Q	P	¬P	|- Q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

P	Q	R	R	|- P ↔	(P∨	(P∧Q))
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F

Equivalenza Logica

Due formule sono logicamente equivalenti quando assumono lo stesso valore di verità.

Es. **$\neg(A \wedge B)$ è logicamente equivalente a $\neg A \vee \neg B$** (prima legge di *De Morgan*).

A	B		$\neg$	$(A \wedge B)$		$\neg A$	$\vee$	$\neg B$
V	V		F	V		F	F	F
V	F		V	F		F	V	V
F	V		V	F		V	V	F
F	F		V	F		V	V	V

$\neg(A \vee B)$	*Equivale a*	$\neg A \wedge \neg B$	II De Morgan
$\neg\neg A$	“	A	idempotenza
$A \wedge B$	“	$B \wedge A$	Commutatività di $\wedge$
$A \vee B$	“	$B \vee A$	Commutatività di $\vee$
$(A \wedge B) \wedge C$	“	$A \wedge (B \wedge C)$	Associatività di $\wedge$
$(A \vee B) \vee C$	“	$A \vee (B \vee C)$	Associatività di $\vee$
$A \wedge (B \vee C)$	“	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Leggi distributive
$A \vee (B \wedge C)$	“	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	

Regole di inferenza

Abbiamo visto delle tecniche semantiche (basate sulle tavole di verità) per verificare la validità di una forma argomentativa. Ora introduciamo brevemente un metodo basato sull'idea che, se una argomentazione è deduttivamente valida, allora dovrebbe essere possibile inferire o derivare la conclusione dalle premesse, in altre parole mostrare come in effetti la conclusione segua dalle premesse.

La chiave per fornire la dimostrazione della validità di una forma argomentativa per mezzo di una serie di passaggi deduttivi risiede nella padronanza dei principi che possono essere utilizzati in ognuno di questi passaggi. Questi principi sono chiamati **regole di inferenza**.

Regole di inferenza

Le regole di inferenza consentono di manipolare le formule della logica proposizionale.
Di solito una regola di inferenza ha la forma seguente:

$$\frac{P_1,\ldots,P_n}{C}$$

Dove $P_1,\ldots,P_n$ sono le premesse della regola e C ne è la conclusione. Una regola di inferenza si dice *valida* se mantiene la verità delle premesse (cioè se $P_1,\ldots,P_n$ sono vere allora anche C è vera.

Il sistema delle regole di inferenza costituisce il cosiddetto calcolo proposizionale. Una deduzione nel calcolo proposizionale si presenta come una serie di formule espresse nel linguaggio della logica proposizionale, ciascuna delle quali è usata come premessa o è ottenuta tramite l'applicazione di una regola di inferenza.

Una deduzione è chiamata anche derivazione o dimostrazione.

Regola di risoluzione

La regola di risoluzione si applica a strutture di premesse dette clausole. Una clausola è una disgiunzione $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ dove ogni L_i (detto letterale) può essere una lettera proposizionale o una lettera proposizionale negata.

Qualunque formula proposizionale, applicando appropriate leggi logiche, può essere trasformata in una clausola.

Per es. trasformiamo $a \rightarrow \neg(b \wedge c)$, ricordandoci che $a \rightarrow b$ è logicamente equivalente a $\neg a \vee b$ (legge che chiamiamo *(*)*).

$\mathbf{a} \rightarrow \neg(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$	Formula di partenza
$\neg \mathbf{a} \vee \neg(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$	In virtù dell'equivalenza (*)
$\neg \mathbf{a} \vee (\neg \boldsymbol{b} \vee \neg \boldsymbol{c})$	In virtù di De Morgan
$\neg \mathbf{a} \vee \neg \boldsymbol{b} \vee \neg \boldsymbol{c}$	In virtù dell'associatività di $\vee$

Oppure $(a \vee b) \rightarrow c$:

$(\mathbf{a} \vee \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{c}$	Formula di partenza
$\neg(\mathbf{a} \vee \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c}$	In virtù dell'equivalenza (*)
$(\neg \mathbf{a} \wedge \neg \boldsymbol{b}) \vee \boldsymbol{c}$	In virtù di De Morgan
$(\neg \mathbf{a} \vee \boldsymbol{c}) \wedge (\neg \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c})$	Commutiamo e distribuiamo $\vee$

Regola di risoluzione

$(a \wedge b) \rightarrow c$	Formula di partenza
$\neg(a \wedge b) \vee c$	In virtù dell'equivalenza (*)
$\neg a \vee \neg b \vee c$	In virtù di De Morgan

$(a \rightarrow b) \rightarrow c$	Formula di partenza
$\neg(\neg a \vee b) \vee c$	In virtù dell'equivalenza (*) x2
$\neg\neg(a \wedge \neg b) \vee c$	In virtù di De Morgan e dell'idempotenza
$(a \wedge \neg b) \vee c$	In virtù dell'idempotenza
$(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$	In virtù della distributività e della commutatività

Regola di risoluzione

$$\frac{A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee B \quad \neg B \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m}{A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m}$$

Due clausole differenti con uno stesso letterale, *in uno dei due casi negato,* si risolvono in un'unica clausola eliminando il letterale comune, senza perdere il loro valore di verità.
Dimostrazione della validità della regola di risoluzione:

A	B	C	A ∨ B	¬B ∨ C	|- A ∨ C
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

Casi notevoli

Casi particolari che la regola di risoluzione può assumere:

$$\frac{B \quad \neg B \vee C_1 \vee \ldots \vee C_m}{C_1 \vee \ldots \vee C_m} \qquad \frac{A_1 \vee \ldots \vee A_n \vee B \quad \neg B}{A_1 \vee \ldots \vee A_n} \qquad \frac{B \quad \neg B}{\bot}$$

$$\frac{\neg A \vee B \quad A}{B}$$

$$\frac{\neg A \vee B \quad \neg B}{\neg A}$$

$$\frac{\neg A \vee B \quad \neg B \vee C}{\neg A \vee C}$$

Che tradotti tramite (*) $\longrightarrow$

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$ **Modus ponens**

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$ **Modus tollens**

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

Transitività dell'implicazione

Utilizzando la regola di risoluzione si può definire un metodo generale di inferenza basato sulla *refutazione*.

La refutazione è un procedimento per assurdo.

Per dimostrare per refutazione che la conclusione C segue logicamente dalle premesse $P_1, \ldots, P_n$ si aggiunge alle premesse la negazione di C. Se da $P_1, \ldots, P_n$ e da $\neg C$ segue una contraddizione, allora non può essere che $P_1, \ldots, P_n$ siano vere e che al tempo stesso C sia falsa, per cui se ne può concludere che C segue logicamente da $P_1, \ldots, P_n$.

Refutazione

Dimostriamo la validità del seguente argomento per refutazione:

Mario è architetto oppure è geometra. (A, G)

Se Mario fosse architetto, allora Mario sarebbe laureato. (G, L)

Mario non è laureato. (L)

∴ Mario è geometra. (G)

Neghiamo la conclusione, e trasformiamo in clausole le premesse e la negazione della conclusione:

$$A \lor G, \neg A \lor L, \neg L \quad \vdash \neg G$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg A \lor L \quad \neg L}{\neg A} \quad A \lor G}{G} \quad \neg G}{\bot}$$

Dimostriamo la validità del seguente argomento per refutazione:

Se piove mi bagno. (P, B)

Se nevica ho freddo. (N, F)

∴ Se piove oppure nevica, mi bagno oppure ho freddo.

E poi a casa:

(a) *Se ha nevicato vado a sciare; se vado a sciare sono contento; non sono contento; quindi non ha nevicato.*

(b) *Se piove non esco; se esco vedo gente; non vedo gente; quindi piove.*

(c) *O piove o nevica; se non fa freddo non nevica; non piove; quindi fa freddo.*

Dimostriamo la validità del seguente argomento per refutazione:

Se piove mi bagno. (P, B)

Se nevica ho freddo. (N, F)

∴ Se piove oppure nevica, mi bagno oppure ho freddo.

Neghiamo la conclusione, e formalizziamo il ragionamento:

$$P \rightarrow B, N \rightarrow F \quad \vdash \neg((P \vee N) \rightarrow (B \vee F))$$

Trasformiamolo in clausole:

$$\neg P \vee B, \neg N \vee F \quad \vdash (P \vee N) \wedge \neg B \wedge \neg F$$

$\mathbf{\neg((P \vee N) \rightarrow (B \vee F))}$	Formula di partenza
$\mathbf{\neg(\neg(P \vee N) \vee (B \vee F))}$	In virtù dell'equivalenza (*)
$\mathbf{\neg\neg(P \vee N) \wedge \neg(B \vee F)}$	In virtù di De Morgan
$\mathbf{(P \vee N) \wedge \neg(B \vee F)}$	In virtù dell'idempotenza
$\mathbf{(P \vee N) \wedge \neg B \wedge \neg F}$	In virtù di De Morgan

Esercizio

Da questo insieme di clausole dimostriamo che si giunge a una contraddizione:

$\neg P \vee B$, $\neg N \vee F$, $P \vee N$, $\neg B$, $\neg F$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P \vee B \qquad \neg B}{\neg P} \qquad P \vee N}{N} \qquad \neg N \vee F}{F} \qquad \neg F}{\perp}$$

Logica dei predicati

Tenendo conto della struttura interna delle proposizioni atomiche è possibile costruire una logica più espressiva: la logica dei predicati del primo ordine.

La struttura interna può essere analizzata nei termini di *costanti individuali* e *simboli predicativi.*

Le **costanti individuali** sono simboli che indicano singoli oggetti del dominio: si indicano con le prime lettere dell'alfabeto minuscole, es. *a,b,c,* ecc.

I **simboli predicativi** rappresentano dei predicati che si applicano agli oggetti del dominio: si possono avere predicati ad un argomento ossia proprietà (*R(a)*) oppure a più argomenti cioè relazioni (*P(a,b)*).

Le formule atomiche della logica dei predicati possono essere combinate per mezzo degli stessi connettivi della logica proposizionale.
Es. $A(m) \wedge G(m)$ (con *A* = *architetto*, *G* = *geometra*, *m* = *Mario)*.

Logica dei predicati

Per completare la descrizione della logica dei predicati bisogna aggiungere alle *costanti individuali* e ai *simboli predicativi* altri due ingredienti:

(1) Le **variabili individuali** che consentono di rappresentare generici individui del dominio: si indicano con le ultime lettere dell'alfabeto minuscole, es. *x,y,z,* ecc.

(2) I **quantificatori**:

- Quello **universale** "per ogni" che si esprime con il simbolo $\forall$. Quindi un'espressione del tipo "$\forall x$…" si legge "per ogni x …". Es. $\forall x(Cane(x) \rightarrow Mammifero(x))$ si legge *"per ogni generico individuo x, se x è un cane, allora x è un mammifero".*

- Quello **esistenziale** che si esprime con il simbolo $\exists$. Un'espressione del tipo "$\exists x$…" si legge "esiste almeno un x tale che…". Es. l'espressione "$\exists x(Cane(x)) \wedge (Nero(x))$" si legge *"esiste almeno un individuo x tale che x è un cane ed è nero".*

Esercizi

Formalizzare i seguenti enunciati interpretando le lettere ‘R’ e ‘V’ rispettivamente come i predicati ‘è una rana’ ed ‘è verde’.

a. Le rane sono verdi.
b. C’è almeno una rana verde.
c. Qualche rana non è verde.
d. Non ci sono rane verdi.
e. Nessuna rana è verde.
f. Le rane non sono verdi.
g. Non tutte le rane sono verdi.

Soluzioni

Formalizzare i seguenti enunciati interpretando le lettere 'R' e 'V' rispettivamente come i predicati 'è una rana' ed 'è verde'.

a.	Le rane sono verdi.	$\forall x(R(x) \rightarrow V(x))$
b.	C'è almeno una rana verde.	$\exists x(R(x) \wedge V(x))$
c.	Qualche rana non è verde.	$\exists x(R(x) \wedge \neg V(x))$
d.	Non ci sono rane verdi.	$\neg\exists x(R(x) \wedge V(x))$
e.	Nessuna rana è verde.	$\forall x(R(x) \rightarrow \neg V(x))$ oppure $\neg\exists x(R(x) \wedge V(x))$
f.	Le rane non sono verdi.	$\forall x(R(x) \rightarrow \neg V(x))$ oppure $\neg\exists x(R(x) \wedge V(x))$
g.	Non tutte le rane sono verdi.	$\neg\forall x(R(x) \rightarrow V(x))$

Esercizi

Formalizzare i seguenti enunciati usando le lettere 'R', 'S', 'T' e 'V' rispettivamente come i predicati 'è una rana', salta, 'è testarda' ed 'è verde' e la lettera P per l'enunciato piove:

a. Tutto è verde.
b. Alcune cose sono verdi.
c. Non qualsiasi cosa è verde.
d. Non ci sono cose verdi.
e. O tutto è verde o nulla è verde.
f. Tutto è o verde o non verde.
g. Alcune cose sono verdi e alcune cose non lo sono.
h. Alcune rane sono verdi e alcune non lo sono.
i. Vi sono rane verdi e rane testarde.
j. Vi sono rane verdi e testarde.
k. Alcune rane testarde non sono verdi.
l. Tutte le rane verdi sono testarde.
m. Ogni rana è o verde o testarda.
n. Qualche rana è sia verde che testarda.
o. Qualche rana verde è testarda.
p. Qualche rana testarda è verde.
q. Non esistono rane verdi testarde.
r. Tutte le rane verdi saltano.
s. Alcune rane verdi non saltano.
t. Nessuna rana che salta è testarda.
u. Ci sono rane testarde che non saltano.
v. Ci sono rane testarde che saltano solo se piove.
w. Ci sono rane che, se piove, saltano.
x. Se piove qualche rana testarda salta.
y. Se non piove, nessuna rana salta.
z. Le rane testarde saltano se e solo se piove.

Soluzioni

a.	Tutto è verde.	$\forall x V(x)$
b.	Alcune cose sono verdi.	$\exists x V(x)$
c.	Non qualsiasi cosa è verde.	$\neg\forall x V(x)$
d.	Non ci sono cose verdi.	$\neg\exists x V(x)$
e.	O tutto è verde o nulla è verde.	$\forall x V(x) \vee \forall x \neg V(x)$ oppure $\forall x V(x) \vee \neg\exists x V(x)$
f.	Tutto è o verde o non verde.	$\forall x(V(x) \vee \neg V(x))$
g.	Alcune cose sono verdi e alcune cose non lo sono.	$\exists x V(x) \wedge \exists x \neg V(x)$
h.	Alcune rane sono verdi e alcune non lo sono.	$\exists x(R(x) \wedge V(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge \neg V(x))$
i.	Vi sono rane verdi e rane testarde.	$\exists x(R(x) \wedge V(x)) \wedge \exists x(R(x) \wedge T(x))$
j.	Vi sono rane verdi e testarde.	$\exists x(R(x) \wedge (V(x) \wedge T(x)))$
k.	Alcune rane testarde non sono verdi.	$\exists x((R(x) \wedge T(x)) \wedge \neg V(x))$
l.	Tutte le rane verdi sono testrade.	$\forall x((R(x) \wedge V(x)) \rightarrow T(x))$
m.	Ogni rana è o verde o testrada.	$\forall x(R(x) \rightarrow (V(x) \vee T(x)))$
n.	Qualche rana è sia verde che testarda.	$\exists x(R(x) \wedge (V(x) \wedge T(x)))$
o.	Qualche rana verde è testarda.	$\exists x((R(x) \wedge V(x)) \wedge T(x))$
p.	Qualche rana testarda è verde.	$\exists x((R(x) \wedge T(x)) \wedge V(x))$
q.	Non esistono rane verdi testarde.	$\neg\exists x((R(x) \wedge V(x)) \wedge T(x))$
r.	Tutte le rane verdi saltano.	$\forall x((R(x) \wedge V(x)) \rightarrow S(x))$
s.	Alcune rane verdi non saltano.	$\exists x((R(x) \wedge V(x)) \wedge \neg S(x))$
t.	Nessuna rana che salta è testarda.	$\forall x((R(x) \wedge S(x)) \rightarrow \neg T(x))$
u.	Ci sono rane testarde che non saltano.	$\exists x((R(x) \wedge T(x)) \wedge \neg S(x))$
v.	Ci sono rane testarde che se piove, saltano.	$\exists x((R(x) \wedge T(x)) \wedge (P \rightarrow S(x))$
w.	Ci sono rane che, se piove, saltano.	$\exists x(R(x) \wedge (P \rightarrow S(x))$
x.	Se piove qualche rana testarda salta.	$P \rightarrow \exists x((R(x) \wedge T(x)) \wedge S(x))$
y.	Se non piove, nessuna rana salta.	$\neg P \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$
z.	Le rane testarde saltano se e solo se piove.	$\forall x((R(x) \wedge T(x)) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow P))$

Interdefinibilità dei quantificatori

Il quantificatore universale e il quantificatore esistenziale sono interdefinibili: il quantificatore universale si può definire per mezzo del quantificatore esistenziale e della negazione, e il quantificatore esistenziale si può definire per mezzo del quantificatore universale e della negazione.

Si ha infatti che un'espressione del tipo "$\forall x$ …"
equivale a "$\neg\exists x\neg$ …",
e che un'espressione del tipo "$\exists x$ …"
equivale a "$\neg\forall x\neg$ …".

Interdefinibilità dei quantificatori

Vediamoli all'opera:

In virtù dell'interdefinibilità dei quantificatori, la formula: $\forall x\,(U(x) \rightarrow M(x))$

può essere riscritta come : $\neg\exists x\neg(U(x) \rightarrow M(x))$

che, in virtù di (*), può a sua volta essere riscritta come: $\neg\exists x\neg(\neg U(x) \vee M(x))$

da cui, per De Morgan, si ottiene: $\neg\exists x(\neg\neg U(x) \wedge \neg M(x))$

e, mediante l'idempotenza della negazione: $\neg\exists x(U(x) \wedge \neg M(x))$

che può essere letta come: '**Non esiste alcun individuo *x* che sia un uomo e allo stesso tempo non sia mortale**'.

Analogamente, la formula: $\exists x(C(x) \wedge \neg N(x))$

può essere riscritta come: $\neg\forall x\neg(C(x) \wedge \neg N(x))$

da cui, per De Morgan: $\neg\forall x(\neg C(x) \vee \neg\neg N(x))$

e, applicando l'idempotenza della negazione: $\neg\forall x(\neg C(x) \vee N(x))$

e, in virtù di (*): $\neg\forall x(C(x) \rightarrow N(x))$

che può essere letta come: '**Non tutti i cani sono neri**'.

Corso di Filosofia della scienza, Facoltà di Filosofia, Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Logica e rappresentazione della conoscenza

Info: g.paronitti@gmail.com