IL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

Supponiamo di voler dimostrare una certa **proposizione P** che dipende da un **numero naturale**;

l'idea che abbiamo dei **numeri naturali** ci suggerisce che:

se P è vera per il numero 0, e se inoltre il fatto che sia vera per un generico numero naturale n comporta necessariamente che sia vera anche per il successore di n, n+1, allora è evidente che nessun numero naturale può sfuggire; la proprietà P è vera per tutti i numeri naturali.

Questo è quanto afferma il ***Principio di Induzione Matematica*** che caratterizza l'insieme **N:**

Se una proposizione *P*:

1. **è vera per n = 0** **(base di induzione)**
2. **se è vera per *n,* allora è vera anche per *n+1*** **(ipotesi d'induzione)**

allora *P* è vera per ogni $n \in N$.

Non è necessario ***partire*** da **0**; **spesso una proposizione diventa significativa da un certo numero naturale k in poi**; per esempio la proposizione:

La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è (n – 2)·180°

è **significativa per n ≥ 3**. È ovvio che il primo passo della ***dimostrazione*** per ***induzione*** consiste nel dimostrare che la ***proprietà è vera per k = 3***, ***anziché per k = 0***; la conclusione è che la proposizione ***è vera per tutti i numeri naturali n ≥3.***

Il Principio di Induzione si può così generalizzare:

Se una proposizione P

1. **è vera per k,**
2. **e se tutte le volte che P è vera per n > k, allora P è vera anche per n+1,**

allora P è vera per tutti i numeri naturali maggiori o uguali a k

ESERCIZIO 1.1: Dimostrare, mediante il principio di induzione, il teorema seguente:
La somma dei primi n numeri dispari è n^2.

Un numero dispari può scriversi nella forma (**2n - 1**); la somma dei primi n numeri dispari si può indicare nel seguente modo:

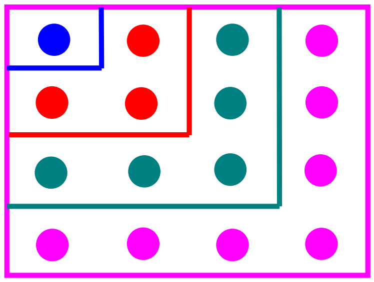
$$1+3+5+.......+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

(per esempio, la somma dei primi 6 numeri dispari è: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11, in cui è 11 = 2·6 – 1)
La dimostrazione mediante il principio di induzione si effettua in due passi:

1. **l'enunciato è vero per n = 1**, ed è banale: $1^2 = 1$;
2. dimostriamo ora che **il fatto che la (1) sia vera per un certo n, implica necessariamente che sia vera anche per il suo successore (n + 1)**. Premesso che il numero dispari successivo a (2n–1) è ***(2n –1 + 2) = (2n + 1)***, si ha:

   $$1+3+5+.......+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

   cioè, **la somma dei primi (n + 1) numeri dispari è il quadrato di (n + 1).**
   Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (1) in cui (**n+1**) sostituisce **n**.



Sono così soddisfatte le condizioni imposte dal principio di induzione e, pertanto, il teorema risulta dimostrato. ***Se accettiamo il principio di induzione matematica dobbiamo concludere che la (1) è vera per tutti gli n ≥ 1***. La figura seguente offre, inoltre un'utile "**comprensione grafica**" del teorema sopra enunciato, in cui si è ritenuto di limitare la **rappresentazione grafica** al caso di **n = 4**; l'estensione ad **n intero qualsiasi** è, tuttavia, ovvia.

ESERCIZIO 1.2: Dimostrare, mediante il principio di induzione, il teorema seguente:
Per ogni n > 1, la somma dei quadrati dei primi n numeri è data da:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.......+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

1. **l'enunciato è vero per n = 1**; infatti è:

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot(2+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1)**. Se:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.......+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

allora:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.......+n^2+(n+1)^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot[n\cdot(2n+1)+6\cdot(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)\cdot(2n^2+n+6n+6)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (2) in cui (**n+1**) sostituisce **n**, ovvero:

$$\frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]\cdot[(2(n+1)+1]}{6}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+2+1)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$$

ESERCIZIO 1.3: Dimostrare, mediante il principio di induzione, il teorema seguente:
Per ogni n ≥ 1, la somma dei cubi dei primi n numeri è data da:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+.......+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$$

1. **l'enunciato è vero per n = 2**; infatti è:

$$1^3+2^3=\left(\frac{2\cdot(2+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2=3^2=9$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1)**. Se:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots\dots+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2 \qquad (3)$$

allora:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots\dots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2\cdot[n^2+4(n+1)]}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2\cdot(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (3) in cui (**n+1**) sostituisce **n**; infatti:

$$\left.\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2\right|_{(n+1)}=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2$$

ESERCIZIO 1.4: Dimostrare, mediante il principio di induzione, la posizione seguente:
Per ogni n ≥ 1, la somma dei termini relativi alla seguente relazione vale:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

1. **l'enunciato è vero per n = 1**; infatti è:

$$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1**). Se:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (4)$$

allora:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (4) in cui (**n+1**) sostituisce **n**, ovvero:

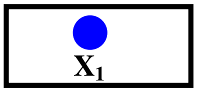
$$\left.\frac{n}{n+1}\right|_{(n+1)}=\frac{n+1}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2}$$

ESERCIZIO 1.5: Dimostrare, mediante il principio di induzione, il teorema seguente:
Il numero dei sotto insiemi di un insieme A contenente n elementi è dato da

$$N_S(A_n) = 2^n \qquad (5)$$

(se n = 0, l'unico sottoinsieme possibile è l'insieme stesso, cioè l'insieme vuoto).

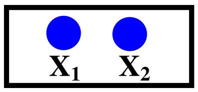
1. **l'enunciato è vero per n = 1**; infatti è:



A

I **sottoinsiemi** ottenibili dall'insieme **A**, costituito da un solo elemento, sono: (**{X_1}, {Φ}**). Essi sono in numero di **due** e quindi $\mathbf{N_S(A_1) = 2 = 2^1}$.

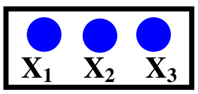
1.1. l'enunciato è vero per n = 2; infatti è:



A

I **sottoinsiemi** ottenibili dall'insieme **A**, costituito da due soli elementi, sono: (**{X_1}, {X_2}, {X_1, X_2}, {Φ}**). Essi risultano in numero di **quattro** e pertanto è $\mathbf{N_S(A_2) = 4 = 2^2}$.

1.2. l'enunciato è vero per n = 3; infatti è:



A

I **sotto insiemi** ottenibili dall'insieme **A**, costituito da tre elementi, sono: (**{X_1}, {X_2}, {X_3}, {X_1, X_2}, {X_1, X_3}, {X_2, X_3}, {X_1, X_2, X_3}, {Φ}**).
Essi risultano in numero di **otto** e pertanto è verificato $\mathbf{N_S(A_3) = 8 = 2^3}$.

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1)**.
   Per quanto ottenuto dalla costruzione precedente, si osserva che se gli elementi dell'insieme A si incrementano di una unità, allora il numero dei ***sottoinsiemi*** di A raddoppia. Quindi se gli elementi dell'insieme A sono **n**, il numero dei **sotto insiemi** di A è pari a $\mathbf{N_S(A_n) = 2^n}$; se gli elementi di A diventano (**n+1**) allora il numero di **sotto insiemi** di A raddoppia, ovvero:

$$N_S(A_{n+1}) = N_S(A_n) \cdot 2 = 2^n \cdot 2 = 2^{(n+1)}$$

   Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (5) in cui (**n+1**) sostituisce **n**, ovvero:

$$2^n \Big|_{(n+1)} = 2^{(n+1)}$$

Risultano così verificate le due condizioni stabilite dall'enunciato del Principio di Induzione, pertanto resta dimostrata la validità dell'asserto, ovvero: **Il numero dei sotto insiemi di un insieme A che contiene n elementi è dato da $\mathbf{N_S(A_n) = 2^n}$.**

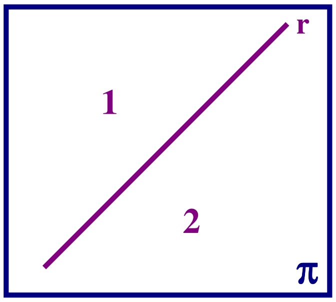
ESERCIZIO 1.6: Dimostrare, mediante il principio di induzione, la posizione seguente:
n rette che non siano a due a due parallele e che non siano a tre a tre secanti nello stesso punto, dividono il piano in un numero di regioni definito da:

$$N_{reg} = \frac{n^2 + n + 2}{2} \qquad (6)$$

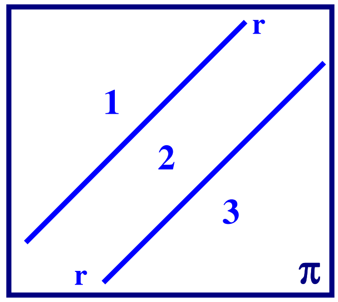
Il problema consiste nel determinare, applicando il principio di induzione, il **numero di regioni** in cui viene **diviso il piano** in seguito al **tracciamento** di **alcune rette**, rispettando determinate ***condizioni***.
Osserviamo, per ispezione, che:

- con **zero rette**, si ottiene **una regione** soltanto, ovvero l'**intero piano**;
- con **una retta**, si ottengono **due regioni**, cioè i **due semipiani** (figura 1.a);
- con **due rette**, si ottengono **tre regioni** se le **rette** sono **parallele**, altrimenti si ottengono **quattro regioni** per rette **non parallele**, come mostrato in figura 1.b ed in figura 1.c. Però l'enunciato del problema indica che le rette non devono essere a due a due parallele; pertanto, poiché dobbiamo supporre che non ci siano coppie di rette parallele, si dovrà considerare solo il

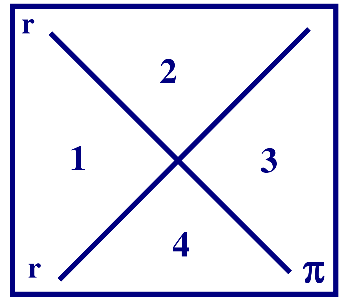
caso mostrato nella figura 1.c;



(figura - 1.a)

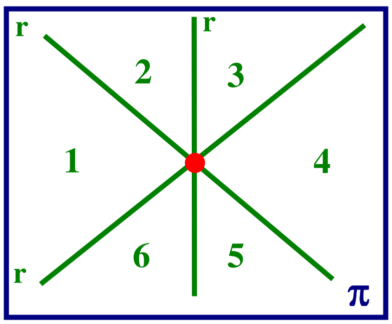


(figura - 1.b)

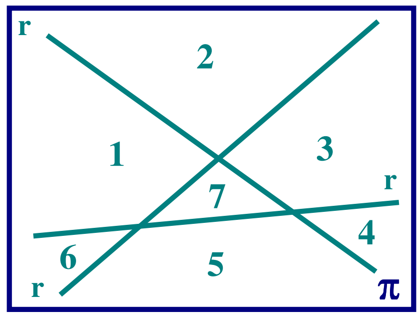


(figura - 1.c)

- con **tre rette**, il piano viene così diviso in **sei regioni** se le **rette** si **intersecano tutte nello stesso punto**, mentre si ottengono **sette regioni in caso contrario**, come mostrato in figura 1.d ed in figura 1.e. L'enunciato del problema indica che **non ci devono essere più di due rette che si intersecano in un punto**; pertanto, si dovrà considerare solo il caso mostrato nella figura 1.e;



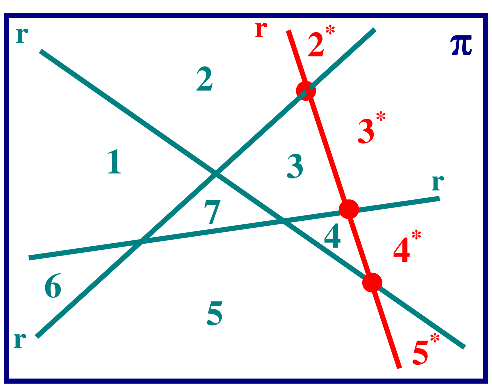
(figura - 1.d)



(figura - 1.e)

Si tratta ora di generalizzare la procedura e l'analisi al caso di "**n**" **rette**.

1. **l'enunciato è vero per n = 0**; infatti è: $[(n^2 + n + 2)/2]_{(n=0)} = 1$
   l'enunciato è vero per n = 1; infatti è: $[(n^2 + n + 2)/2]_{(n=1)} = 2$
2. **supponiamo,** ora, **che** "**n**" **rette dividano** il **piano** in $(n^2 + n + 2)/2$ **regioni**, e dimostriamo che "**n + 1**" **rette lo dividono in** $[(n+1)^2 + (n+1) + 2)/2]$ **regioni.**
   Infatti quando viene tracciata la **(n+1)_esima retta**, poiché **non è parallela** ad alcuna delle rette precedentemente tracciate, **interseca** ciascuna di esse **dando luogo** a **'n' punti** di **intersezione**, e nessuno di questi è a sua volta intersezione di altre rette, come mostrato in figura 1.f. Pertanto la **(n+1)_esima retta genera (n + 1) nuove regioni.** Il numero totale delle regioni è definito da:



(figura - 1.f)

$$N_{reg} = \frac{n^2 + n + 2}{2} + (n+1) =$$
$$= \frac{n^2 + n + 2 + 2 \cdot (n+1)}{2} =$$
$$= \frac{(n^2 + 2n + 1) + 1 + n + 2}{2} =$$
$$= \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (6) in cui (**n+1**) sostituisce **n**, ovvero:

$$N_{reg}\Big|_{(n+1)} = \frac{n^2+n+2}{2}\Bigg|_{(n+1)} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$$

Risultano così verificate le due condizioni stabilite dall'enunciato del Principio di Induzione, pertanto resta dimostrata la validità dell'asserto, ovvero: **"n rette che non siano a due a due parallele e che non siano a tre a tre secanti nello stesso punto, dividono il piano in un numero di regioni definito da: $N_{reg} = (n^2 + n + 2)/2$"**.

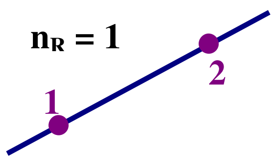
ESERCIZIO 1.7: Verificare, mediante il principio di induzione, l'asserto seguente:
"premesso che per quattro punti del piano, di cui tre non siano mai allineati, passano sei rette distinte, allora nel caso di 'n' punti le rette sono date dalla relazione $n_R = n\cdot(n-1)/2$" **(7)**

Ricordiamo, sebbene ovvio, che il **numero minimo** di punti richiesti per tracciare una retta è dato da **n = 2**. Pertanto, la relazione di cui si deve verificare la validità è da intendersi definita per **n ≥ 2**.
La dimostrazione mediante il principio di induzione si effettua in due passi:

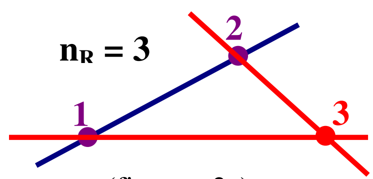
1.1 **l'enunciato è vero per n = 2**, così come mostrato in figura 2, ottenendo un numero di rette dato da: $n_R = 2\cdot(2-1)/2 = 1$;

1.2 **l'enunciato è vero per n = 3**, come evidenziato in figura 2a, ottenendo un numero di rette dato da: $n_R = 3\cdot(3-1)/2 = 3$

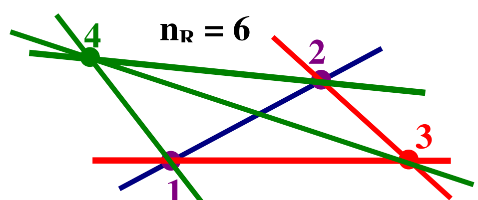
1.3 **l'enunciato è vero per n = 4**, come evidenziato in figura 2b, ottenendo un numero di rette dato da: $n_R = 4\cdot(4-1)/2 = 6$



(figura - 2)



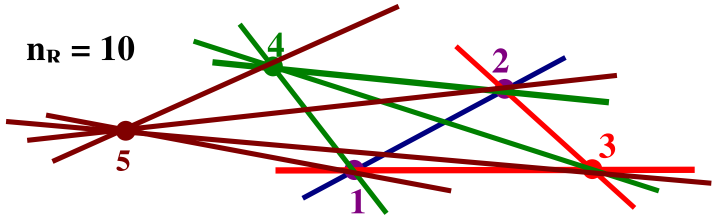
(figura - 2a)



(figura - 2b)

Dall'ispezione delle figure si evince che l'aggiunta d'un ulteriore punto, che non sia allineato con gli altri già preesistenti, costituisce un incremento del numero delle rette pari al numero dei punti che sono stati collocati antecedentemente all'inserimento dell'ultimo punto stesso.

2.0 dimostriamo ora che **il fatto che la (7) sia vera per un certo n > 2, implica necessariamente che sia vera anche per il suo successore (n + 1)**. Quanto premesso, osserviamo che:
l'aggiunta dello **(n + 1)_esimo** punto del piano **incrementa** il ***numero di rette*** già tracciate di una quantità pari a '**n**', così come mostrato in figura 2c.
Pertanto, il ***numero complessivo*** di rette nel caso di **(n + 1)** punti è dato da:



(figura - 2c)

$$n_R = \frac{n\cdot(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

da cui si ottiene la relazione:

$$n_R = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (7) in cui (**n+1**) sostituisce **n**, ovvero:

$$n_r\Big|_{(n+1)} = -\frac{n\cdot(n-1)}{2}\Bigg|_{(n+1)} = \frac{(n+1)\cdot(n+1-1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

Risultano così verificate le **due condizioni** stabilite dall'enunciato del **Principio** di **Induzione**, per tanto resta dimostrata la validità dell'asserto.

ESERCIZIO 1.8: Verificare, mediante il principio di induzione, l'asserto seguente:

"per ogni n > 2 è vera la disuguaglianza $n^2 > 2n + 1$" **(8)**

La dimostrazione mediante il principio di induzione si effettua in due passi:

1. **l'enunciato è vero per n = 3**, ed è banale verificare che: $3^2 > 2\cdot 3 + 1$; ovvero: **9 > 7**;
2. dimostriamo ora che **il fatto che la (8) sia vera per un certo n > 2, implica necessariamente che sia vera anche per il suo successore (n + 1**). Quanto premesso, osserviamo che:

   $$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n+1) + 2n + 1 > 2(n+1) + 2n$$

   Poiché per **ipotesi** deve **essere n > 2**, sarà vero, a **maggior ragione**, che: **2n > 1**. Considerando quanto detto, si ottiene la seguente disuguaglianza:

   $$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1$$

   Ma l'espressione ottenuta coincide con la relazione assegnata (8) nella quale la scrittura (**n+1**) sostituisce "**n**".

Risultano, allora, **verificate** le **due condizioni stabilite** dall'**enunciato** del **Principio di Induzione**, pertanto resta **dimostrata la validità dell'asserto**, **"per ogni n > 2 risulta vera la disuguaglianza $n^2 > 2n + 1$".**

ESERCIZIO 1.9: Verificare, mediante il principio di induzione, l'asserto seguente:

"per ogni n > 4 è vera la disuguaglianza $2^n > n^2$" **(9)**

La dimostrazione mediante il principio di induzione si effettua in due passi:

1. **l'enunciato è vero per n = 5**, ed è banale verificare che: $2^5 > 5^2$; ovvero: **32 > 25**;
2. dimostriamo ora che **il fatto che la (9) sia vera per un certo n > 4, implica necessariamente che sia vera anche per il suo successore (n + 1**). Atteso quanto premesso, si osservi che, moltiplicando per **2** ambo i membri della (9) si ottiene:

   $$2\cdot 2^n > 2\cdot n^2 \Rightarrow \quad 2^{(n+1)} > 2\cdot n^2 \Rightarrow \quad 2^{(n+1)} > n^2 + n^2$$

   Ricorrendo alla posizione, già verificata per ogni **n > 2** nell'esercizio precedente, **$n^2 > 2n + 1$**, si ottiene la relazione seguente:

   $$2^{(n+1)} > n^2 + n^2 > n^2 + (2n+1) \Rightarrow \quad 2^{(n+1)} > (n+1)^2$$

   Ma l'espressione ottenuta coincide con la relazione assegnata (9) nella quale la scrittura (**n+1**) sostituisce "**n**".

Risultano, così, **verificate** le **due condizioni stabilite** dall'**enunciato** del **Principio di Induzione**, pertanto resta **dimostrata** la **validità dell'asserto**, **"per ogni n > 4 risulta vera la disuguaglianza $2^n > n^2$**.

ESERCIZIO 1.10: Dimostrare, mediante il principio di induzione, la posizione seguente:

Per ogni n ≥ 1, la somma dei termini relativi alla seguente relazione vale:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots\ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

1. **l'enunciato è vero per n = 1**; infatti è:

$$1 \cdot 2 = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}\right) = 2$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1**). Se:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots\ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} \qquad (10)$$

allora, è pure vera la relazione di seguito riportata:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots\ldots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) =$$

$$= (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{n}{3} + 1\right) = (n+1) \cdot (n+2) \cdot \left(\frac{n+3}{3}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (10) in cui (**n+1**) sostituisce **n**; infatti:

$$\left[\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}\right]\Bigg|_{(n+1)} = \left[\frac{(n+1) \cdot (n+1+1) \cdot (n+1+2)}{3}\right] =$$

$$= \left[\frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{3}\right]$$

Sono così soddisfatte le **condizioni** imposte dal **principio di induzione** e, pertanto, la relazione risulta dimostrato. ***Se accettiamo il principio di induzione matematica dobbiamo concludere che la (10) è vera per tutti gli n ≥1***.

ESERCIZIO 1.11: Dimostrare, mediante il principio di induzione, che per ogni n ≥ 1, vale la posizione seguente:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2^n} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)$$

1. **l'enunciato è vero per n = 1**; infatti è:

$$\frac{1}{2} = \left(2 - \frac{1+2}{2^1}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1**). Se:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{2^n} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) \qquad (11)$$

allora, è pure vera la relazione di seguito riportata:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots\ldots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$$

$$=2-\left(\frac{n+2}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)=2-\left[\frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}}\right]=2-\left(\frac{2n+4-n-1)}{2^{n+1}}\right)=$$

$$=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (**11**) in cui (**n+1**) sostituisce **n**; infatti:

$$\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)\Bigg|_{(n+1)}=\left(2-\frac{n+1+2}{2^{n+1}}\right)=\left(2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)$$

Sono così soddisfatte le **condizioni** imposte dal **principio di induzione** e, pertanto, la relazione risulta dimostrata. ***Se accettiamo il principio di induzione matematica dobbiamo concludere che la (11) è vera per tutti gli n ≥1***.

ESERCIZIO 1.12: Dimostrare, mediante il principio di induzione, che ∀x ≠ 1, ∀h ∈ N, vale la posizione seguente:

$$1+x+x^2+x^3+.......+x^n = \sum_{h=0}^{n} x^h = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

1. **l'enunciato è vero per n = 0**; infatti è:

$$1=x^0=\frac{1-x^{0+1}}{1-x}=\frac{1-x^1}{1-x}=\frac{1-x}{1-x}=1$$

l'enunciato è vero per n=1; infatti è:

$$(1+x)=\sum_{h=0}^{1} x^h=\frac{1-x^{1+1}}{1-x}=\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{1-x}=(1+x)$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1**). Se: si considera la scrittura di seguito riportata:

$$\sum_{h=0}^{n} x^h=1+x+x^2+.......+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \textbf{(12)}$$

allora, discente l'ovvia relazione:

$$\sum_{h=0}^{n+1} x^h=1+x+x^2+.....+x^n+x^{n+1}=\left(\sum_{h=0}^{n} x^h\right)+x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1}$$

da cui, procedendo con le necessarie semplificazioni algebriche, si ricava;

$$\sum_{h=0}^{n+1} x^h=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+x^{n+1}=\frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x}=$$ ovvero, semplificando:

$$\sum_{h=0}^{n+1} x^h=\frac{1-\cancel{x^{n+1}}+\cancel{x^{n+1}}-x^{n+1+1}}{1-x}=\frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (12) in cui (**n+1**) sostituisce **n**; infatti:

$$\left.\left(\sum_{h=0}^{n} x^h = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\right|_{(n+1)} = \sum_{h=0}^{n+1} x^h = \frac{1-x^{n+1+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Sono così soddisfatte le **condizioni** imposte dal **principio di induzione** e, pertanto, la relazione risulta dimostrata. ***Se accettiamo il principio di induzione matematica dobbiamo concludere che la (12) è vera, supposto x ≠1, per tutti gli interi n ≥0.***

ESERCIZIO 1.13: Dimostrare mediante il principio d'induzione matematica che ∀n∈ N_O vale l'asserto seguente:

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + ...+ n\cdot n! = \sum_{k=1}^{n}(k\cdot k!) = (n+1)! - 1$$

1. **l'enunciato è vero per n = 1**; infatti è:

   $$1\cdot 1! = [(1+1)! - 1] = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$

2. dimostriamo ora che **se l'enunciato è vero per un certo n, allora è vero anche per (n + 1)**. Se: si considera la scrittura di seguito riportata:

   $$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + ...+ n\cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad (13)$$

   allora, è pure vera la relazione che di seguito si riporta con le relative necessarie elaborazioni:

   $$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + ...+ n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)! =$$
   $$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 =$$
   $$= (n+2)! - 1$$

   Ma l'espressione ottenuta coincide con il secondo membro della citata relazione (**13**) in cui (**n+1**) sostituisce **n**; infatti:

   $$\left.(n+1)! - 1\right|_{(n+1)} = \left[(n+1+1)! - 1\right] = (n+2)! - 1$$

Sono così soddisfatte le **condizioni** imposte dal **principio di induzione** e, pertanto, la relazione risulta dimostrata. ***Se accettiamo il principio di induzione matematica dobbiamo concludere che la (13) è vera per tutti gli n ≥1***.