INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 1)

Stefania Bandini

INSIEMI E MATEMATICA DISCRETA

NUMERI NATURALI

I numeri naturali dal latino *naturalis* (conforme alle leggi della natura, innato) sono i primi numeri che impariamo e nascono dall'attività del **contare**, la prima attività matematica che si riscontra nella storia dell'umanità: proprio per questo motivo sono detti naturali.

0, 1, 2 3, 4, …

Essi formano un ***insieme*** che viene **detto insieme dei numeri naturali** e viene indicato con il simbolo $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, n+1, ...\}$$

CONTARE

Contare significa passare da un numero al suo successivo e si costruisce così la successione dei numeri naturali.

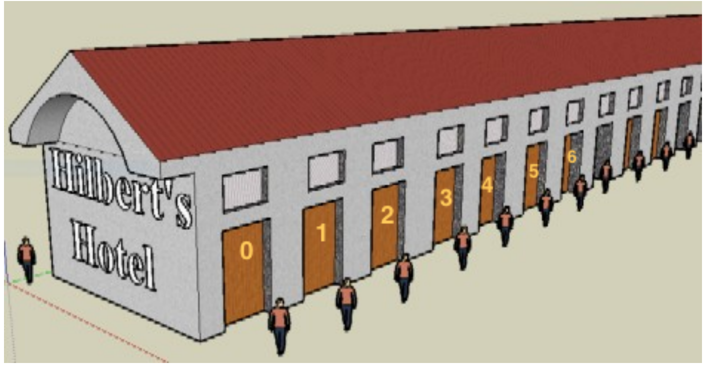
$\mathbf{N}$ è limitato inferiormente dallo 0, ma non ha un limite superiore (i numeri naturali sono infiniti).

PROPRIETA' DEI NUMERI NATURALI

Quando contiamo, partiamo dal numero zero e recitiamo i nomi dei numeri in successione.

Questa semplice descrizione ci indica quali siano le proprietà fondamentali dei numeri naturali:

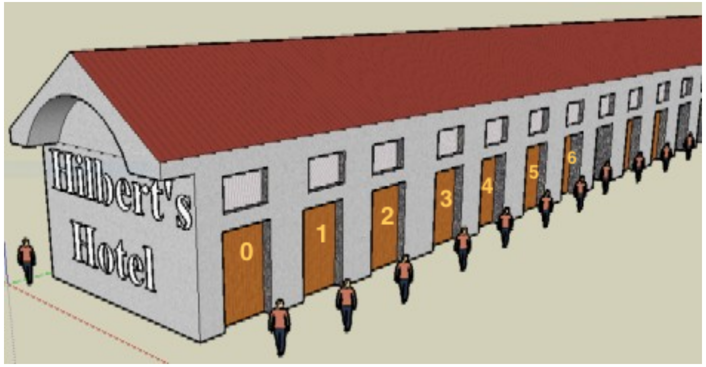
- l'insieme dei numeri naturali è infinito
- ogni numero naturale ha un successivo
- ogni numero naturale, eccettuato lo zero, ha un precedente
- lo zero è l'elemento minimo dell'insieme dei numeri naturali
- l'insieme dei numeri naturali non ha un elemento massimo



PROPRIETA’ DEI NUMERI NATURALI

L’idea base del ***principio di induzione*** per i numeri naturali

- *si parte con un primo numero naturale*
- *per ogni numero naturale, esiste il numero naturale successivo (successore)*
- *nessun numero naturale è il suo successore*
- *nessun numero naturale ha più di un successore*
- *nessun numero naturale è il successore di più di un numero naturale*



NUMERI INTERI RELATIVI

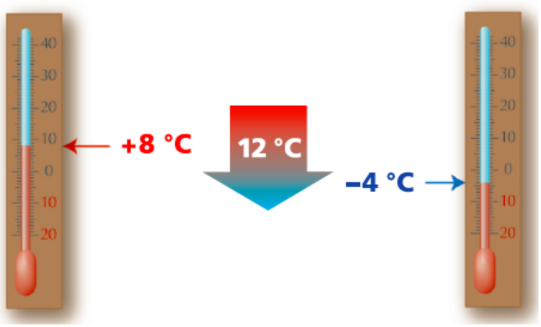
Si dice ***numero intero relativo*** (o semplicemente ***numero intero***) ogni numero naturale preceduto da un segno + o -

L'insieme dei numeri interi relativi viene indicato con il simbolo $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n-1, -n, \dots, -3, -2, -1, \mathbf{0}, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

I numeri interi preceduti dal segno + si dicono positivi, quelli preceduti dal segno - si dicono negativi.

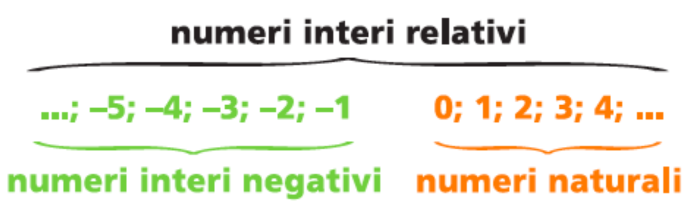
Due numeri interi che hanno lo stesso segno si dicono *concordi*; due numeri interi che hanno segni diversi si dicono *discordi*.
Ogni numero ha ancora un successore, ma non c'è più un primo numero: l'insieme degli interi non ha minimo.

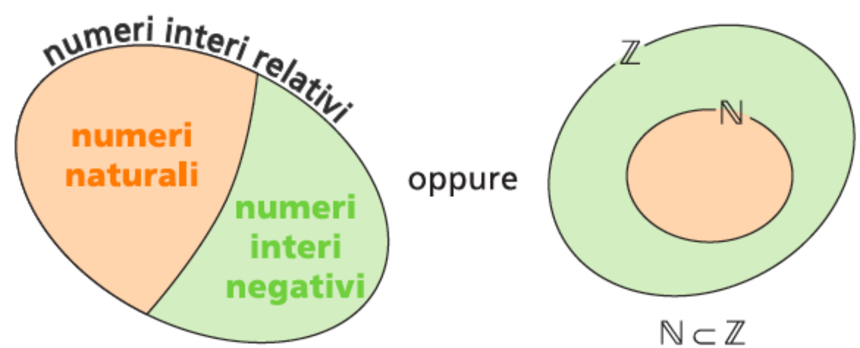


NUMERI INTERI RELATIVI

Il sottoinsieme di **Z** formato dai numeri interi positivi e dallo zero può essere identificato con l'insieme **N** dei numeri naturali (i numeri naturali possono essere considerati un sottoinsieme dei numeri interi)

L'insieme **Z** dei numeri interi relativi è un *ampliamento* dell'insieme **N** dei numeri naturali.

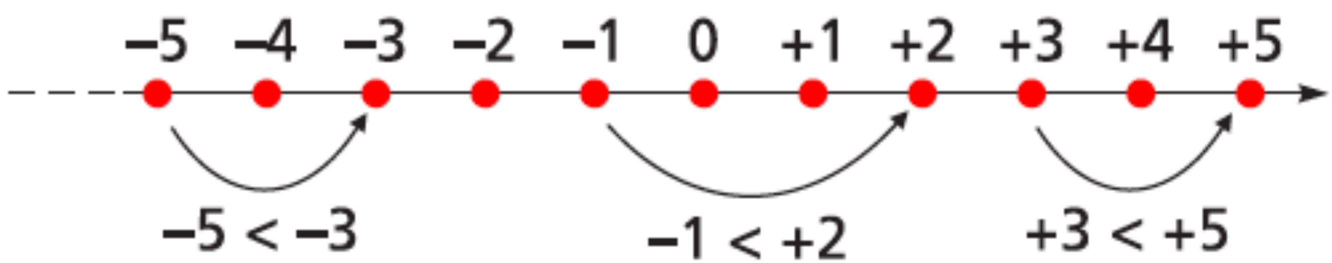




NUMERI INTERI RELATIVI

Si dice **valore assoluto** o **modulo** di un numero intero relativo, positivo o negativo, il numero stesso privato del suo segno.

Due numeri interi relativi con lo stesso valore assoluto e con segni diversi si dicono opposti.



NUMERI INTERI RELATIVI

Il valore assoluto di un numero *a* si indica scrivendo |*a*|.

0 è considerato privo di segno ed è possibile estendere la definizione di valore assoluto anche al numero 0, scrivendo |0| = 0.

L'**opposto** di un numero *a*, positivo o negativo, si ottiene cambiandogli il segno: se *a* è positivo il suo opposto è negativo; se a è negativo il suo opposto è positivo. L'opposto di un numero *a*, positivo o negativo, si indica con -, premettendo ad esso il segno -, cioè scrivendo –*a.*

Per convenzione, +0 = - 0 = 0, quindi si considera come opposto di 0 il numero 0 stesso. L'opposto dell'opposto di un numero è il numero stesso: - (-a) = a.

Definizione di valore assoluto di un numero *a*: $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \text{ è positivo} \\ -a & \text{se } a \text{ è negativo} \\ 0 & \text{se } a \text{ è uguale a zero} \end{cases}$

PROPRIETA' DEI NUMERI INTERI

proprietà di $\mathbb{Z}$
L'insieme dei numeri interi è infinito.
Ogni numero intero ha un successivo.
Ogni numero intero ha un precedente.
L'insieme dei numeri interi non ha un elemento minimo.
L'insieme dei numeri interi non ha un elemento massimo.

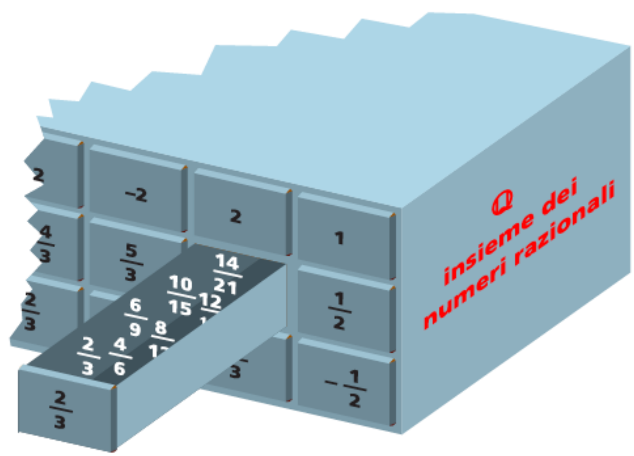
NUMERI RAZIONALI

La parola ***razionale*** deriva dall'aggettivo latino *rationalis*, che a sua volta deriva da ratio; questo termine significa «ragione», ma anche «rapporto», «proporzione».

I **numeri razionali** sono quelli che indicano un rapporto (un *quoto*), il risultato di una divisione. Vengono detti così perché sono esprimibili come rapporto di due numeri interi.

I numeri razionali sono le frazioni (i numeri decimali periodici).

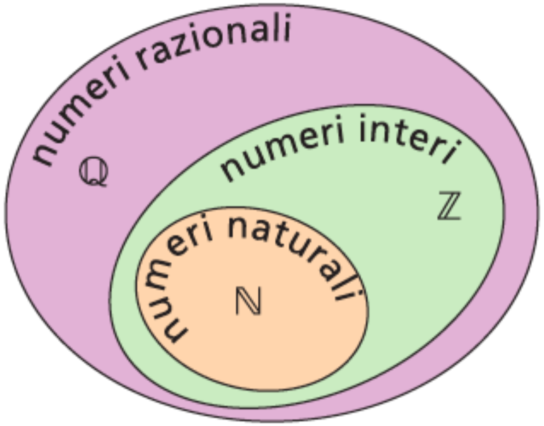
L'insieme dei numeri razionali viene indicato con il simbolo $\mathbb{Q}$, l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a una data frazione.



NUMERI RAZIONALI

Ogni frazione può essere rappresentata da un numero decimale finito o periodico. Viceversa, ogni numero che ha una rappresentazione decimale finita o periodica è razionale.

Nell'insieme Q dei numeri razionali è possibile eseguire le quattro operazioni aritmetiche, con l'unica eccezione della divisione per zero. L'insieme Q contiene come sottoinsieme l'insieme Z dei numeri interi relativi il quale, a sua volta, contiene come sottoinsieme l'insieme N dei numeri naturali.

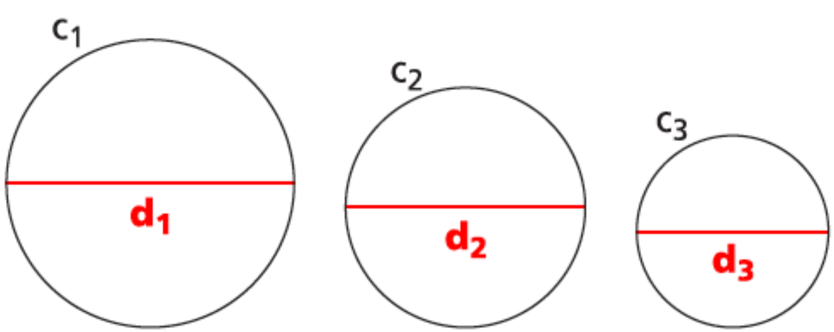


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

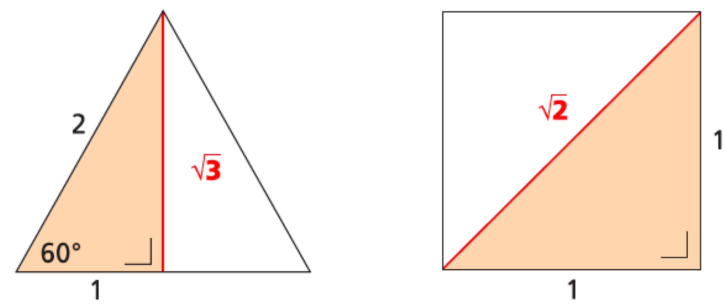
NUMERI IRRAZIONALI

I numeri irrazionali, ossia quei numeri che non possono essere espressi da frazioni come ad esempio

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \ldots,$$



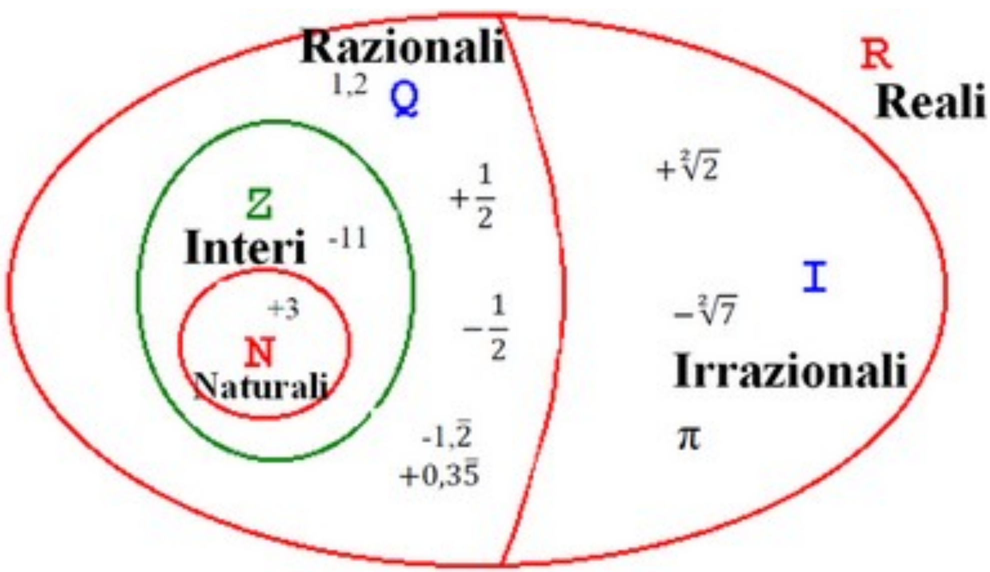
$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3} = \ldots = \pi = 3{,}1415\ldots$$



- **Numeri razionali**
  Sono i numeri che si possono esprimere mediante frazioni.
- **Numeri irrazionali**
  Sono i numeri che **non** si possono esprimere mediante frazioni.

NUMERI IRRAZIONALI

I numeri che ammettono una rappresentazione decimale finita oppure infinita e periodica sono i numeri razionali, quelli con forma decimale infinita non periodica sono i numeri irrazionali.

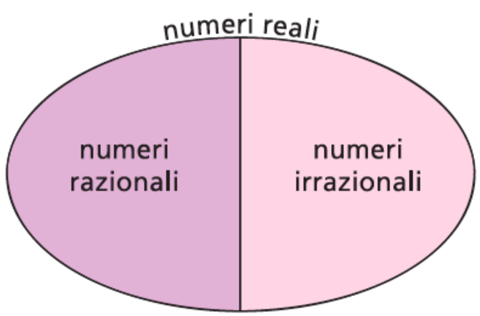


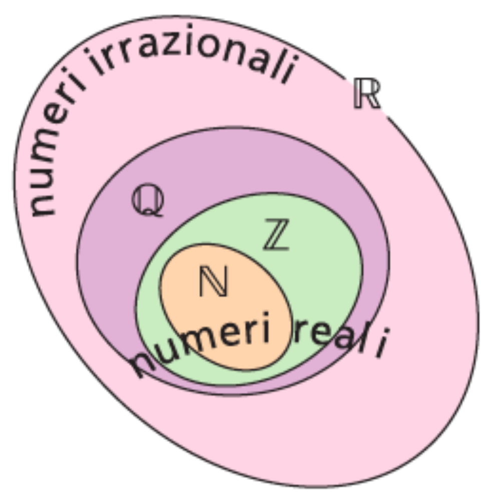
NUMERI REALI

I **numeri reali** sono tutti i numeri che ammettono una qualunque rappresentazione decimale.

L'insieme costituito dai numeri razionali e dai numeri irrazionali è detto **insieme dei numeri reali**.

L'insieme dei numeri reali viene indicato con il simbolo $\mathbf{R}$.





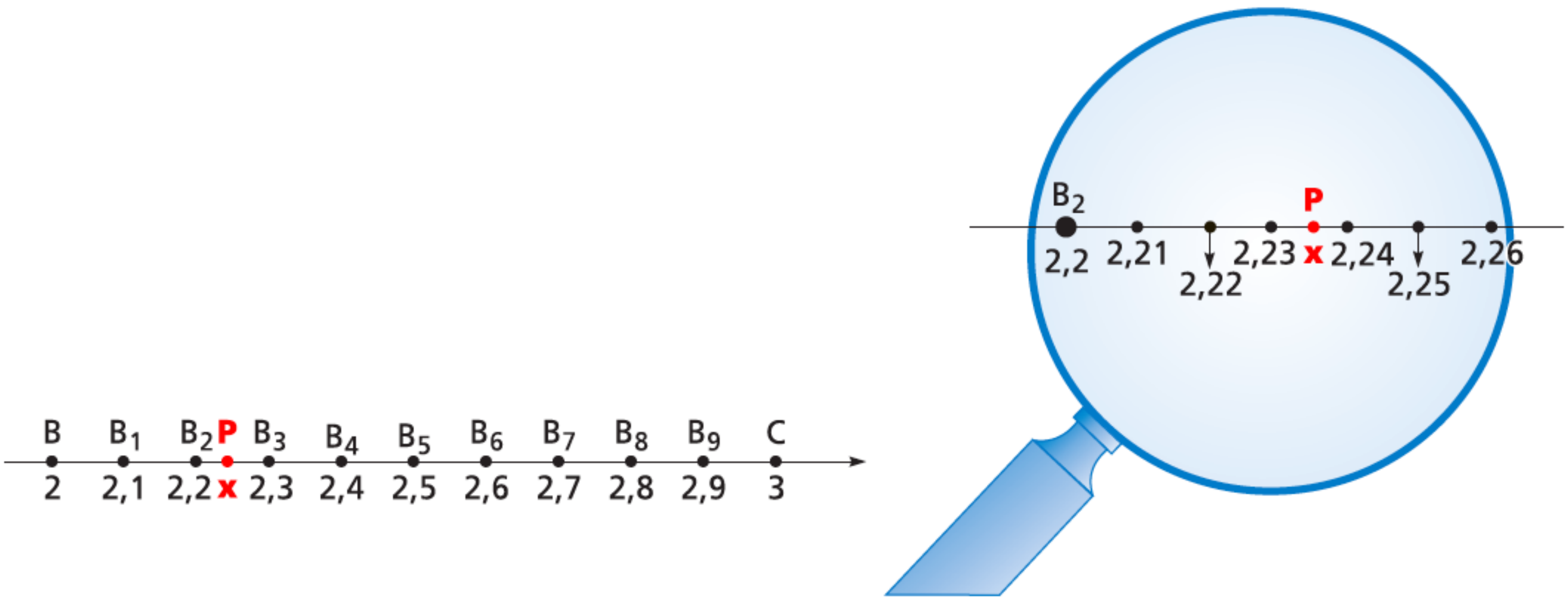
$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ insieme dei numeri irrazionali

LA RETTA REALE

L'insieme dei numeri reali puo` essere utilmente rappresentato su una retta.

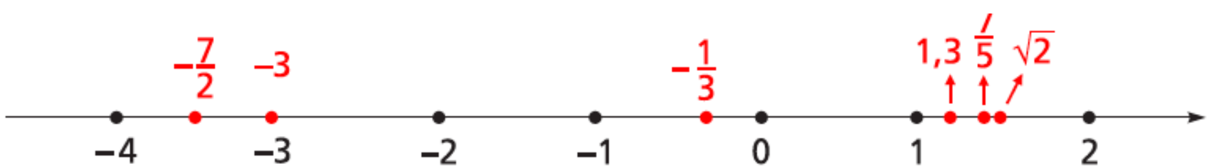


LA RETTA REALE

A ogni numero reale si può associare un punto della retta.

Resta così stabilita una corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta: a ogni punto della retta è associato un numero reale e a ogni numero reale è associato un punto della retta.

Quando su una retta è stabilita una tale corrispondenza biunivoca, diremo che sulla retta si è stabilito un **sistema di coordinate**; la retta stessa viene allora chiamata **retta reale**, o anche **asse reale**.



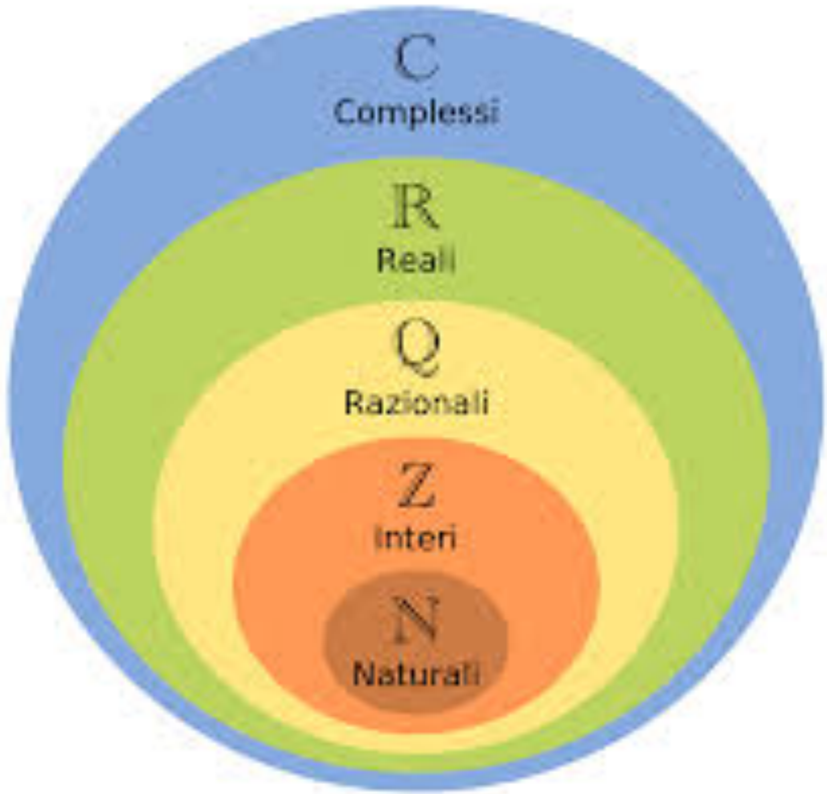
$$-\frac{7}{2} < -3 < -\frac{1}{3} < 1{,}3 < \frac{7}{5} < \sqrt{2}$$

NUMERI COMPLESSI

I numeri immaginari e i numeri complessi sono una estensione del concetto di numero che consente di eseguire operazioni in altro modo impossibili. Nell'insieme dei numeri reali tutte e quattro le operazioni di addizione sottrazione, moltiplicazione e divisione (con divisore non nullo) sono sempre definite. Ciò non può dirsi per l'estrazione di radice.

Ed è proprio questo fatto che ha indotto a generalizzare ulteriormente il concetto di numero, suggerendo l'introduzione di un insieme più vasto di quello dei numeri reali e precisamente quello dei numeri complessi.

L'insieme dei numeri razionali viene indicato con il simbolo **C**.

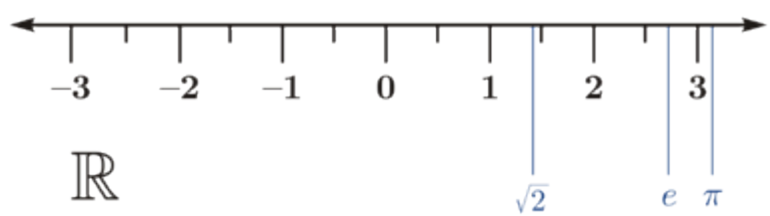


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

INSIEMI E MATEMATICA DISCRETA

Intuitivamente un insieme (o sistema) è considerato **discreto** se è costituito da elementi *isolati*, non contigui tra loro, mentre è considerato **continuo** se contiene infiniti elementi e se tra questi elementi non vi sono *spazi vuoti*.

Se ci si limita a considerare i sottoinsiemi dei numeri reali, tutti gli esempi di insieme discreto hanno cardinalità finita o al più numerabile.



Esempi:

- *ogni insieme finito {1, 2, 3, ..., n}*
- *numeri naturali {0, 1, 2, 3, ...}, che formano un insieme discreto e numerabile (infinito)*

INSIEMI

Nella Teoria ingenua degli insiemi (Teoria naïve) il concetto di insieme è assunto come *primitivo,* cioè non può essere spiegato in termini di concetti più semplici

Sinonimi del termine insieme sono: "collezione", "raccolta" o, nella letteratura più vecchia, "aggregato".

Esempio 1

Se consideriamo gli studenti del corso di Fondamenti dell'Informatica dell'Università di Milano-Bicocca che nell'AA 2011-2012 hanno superato l'esame, questo e sicuramente un insieme.

Esempio 2

Se consideriamo gli studenti del corso di Fondamenti dell'Informatica dell'Università di Milano-Bicocca che nell' AA 2011-2012 hanno superato "brillantemente" l'esame, questo NON è un insieme in quanto non è chiaro a partire da quale voto si debba intendere che l'esame può definirsi "brillantemente superato".

Deve essere possibile stabilire, senza ambiguità se un oggetto appartiene o no all'insieme

IL PARADOSO DEL BARBIERE

"In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso?"

Bertrand Arthur William Russell
(18 maggio, 1872, 2 febbrio 1970)

IL PARADOSO DEL BARBIERE

Se, come apparirebbe plausibile, il barbiere si radesse da solo, verrebbe contraddetta la premessa secondo cui il barbiere rade gli uomini che non si radono da soli. Se invece il barbiere non si radesse autonomamente, allora dovrebbe essere rasato dal barbiere, che però è lui stesso: in entrambi i casi si cade in una contraddizione.

Il villaggio del barbiere si potrebbe considerare diviso in due insiemi:
Quello degli uomini che si radono da soli (che è assimilabile alla categoria degli insiemi che appartengono a se stessi).
Quella degli uomini che, non radendosi da soli, vengono rasati dal barbiere (gli insiemi che non appartengono a se stessi).
Il problema è in quale insieme vada incluso il barbiere: infatti, sia che venisse incluso nel primo, sia che venisse incluso nel secondo, la situazione sarebbe contraddittoria.

Il barbiere è un insieme che appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

INSIEMI

Per denotare gli insiemi useremo generalmente le lettere latine maiuscole

$$A, B, \ldots, S, T, \ldots$$

Gli elementi di un insieme saranno denotati con lettere latine minuscole

$$a, b, \ldots, x, y, \ldots$$

Un insieme privo di elementi si dice insieme vuoto e si denota col simbolo

$$\varnothing$$

INSIEMI

$$x = y$$

denota che l'elemento *x* è uguale all'elemento *y*

$$x \neq y$$

denota che l'elemento *x* **non** è uguale all'elemento *y*

Per il simbolo = ci avvalliamo delle seguenti proprietà, dove A e B possono essere entità, insiemi ed enunciati:

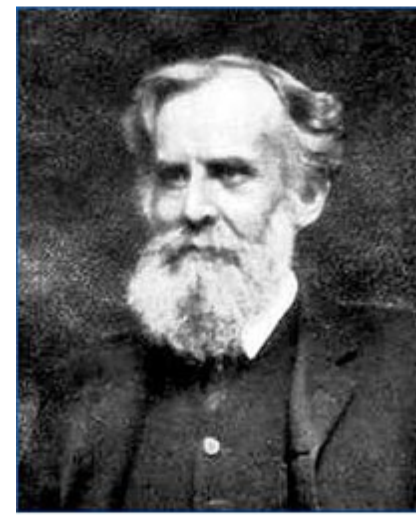
A = A	**RIFLESSIVITA'**
A = B sse B = A	**SIMMETRIA**
Se A = B e B = C allora A = C	**TRANSITIVITA'**

RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn

La rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn e di tipo grafico: si disegna un cerchio e al suo interno si collocano dei punti che rappresentano gli elementi.

Leonhard Euler – Eulero
(Basilea 15 aprile 1707, San Pietroburgo 18 settembre 1783)



John Venn
(4 agosto 1834, 4 aprile 1923)

RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Rappresentazione per elencazione: ESTENSIONALE

La rappresentazione per elencazione consiste nello scrivere esplicitamente gli elementi dell'insieme racchiusi fra parentesi graffe, una sola volta

$$\{x, y, z\}$$

In un insieme tutti gli elementi sono distinti e l'ordine in cui compaiono è irrilevante

$$\{x, y, x\} = \{x, y\}$$
$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

Per ogni elemento x esiste un insieme $\{x\}$ – *singoletto* - il cui unico elemento è x

DIFINIZIONE ESTENSIONALE DI INSIEMI

Esempi:

- {*rosso, giallo, arancio*} è l'insieme costituito da tre colori: *rosso, giallo* e *arancio*
- {*rosso, giallo, rosso*} è l'insieme costituito da due colori: *rosso* e *giallo*
- $\{\emptyset\}$ è l'insieme costituito da un unico elemento: $\emptyset$
- $\{0, 1, 2, \ldots\}$ è l'insieme dei numeri naturali

RAPPRESENTAZIONE DEGLI INSIEMI

Rappresentazione mediante proprietà caratteristica: **INTENSIONALE**

La rappresentazione mediante **proprietà caratteristica** consiste nel formulare una *proprietà* di cui godono tutti e soli gli elementi dell'insieme

- Se $\mathcal{P}$ denota la proprietà caratteristica, scriveremo:

$$S = \{x \mid \mathcal{P}\}$$

oppure

$$S = \{x : \mathcal{P}\}$$

che si leggono entrambe come "S è l'insieme di tutti e soli gli elementi per i quali vale la proprietà $\mathcal{P}$"

DEFINIZIONE INTENSIONALE DEGLI INSIEMI

Esempi:

- $S = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ e } x > 0\}$, S è l'insieme dei numeri interi postivi

- $S = \{x | x \in \{rosso, giallo, arancio\} \text{ e } x \text{ è un colore fondamentale}\}$, S è l'insieme $\{rosso, giallo\}$

- $\{x | x > 3 \text{ e } x \leq 100\} = \{4, 5, \ldots, 100\}$

- $S = \{x |\ Nonno\ (Alberto, x)\}$, S è l'insieme formato dai nipoti di Alberto

- $S = \{x |\ Fratello(Giovanni, x) \text{ oppure } Sorella(Giovanni, x)\}$, S è l'insieme formato dai fratelli e sorelle di Giovanni

- $S = \{x |\ \text{se } (Cubo(x) \text{ e } Rosso(x)) \text{ allora } SulTavolo(x)\}$, S è formato da tutti quegli oggetti che sono cubi e rossi allora stanno sul tavolo

APPARTENENZA

Se A è un insieme e a è un suo elemento scriveremo

$$a \in A$$

e leggeremo *"a appartiene ad A"* oppure *"a è un elemento di A"* o ancora *"a sta in A"*

Se invece a non è un elemento di A scriveremo

$$a \notin A$$

E' intuitivo che, dato un oggetto a e un insieme A, ***esattamente una sola*** delle seguenti situazioni si verifichi:

$$a \in A \qquad\qquad a \notin A$$

APPARTENENZA E INTENSIONALITA'

In una rappresentazione intensionale, la locuzione *"tutti e soli"* significa due cose:

- Se un elemento a gode della proprietà $\mathcal{P}$ allora esso appartiene a S.
- Se un elemento a appartiene a S allora gode della proprietà $\mathcal{P}$.

DEFINIZIONE INTENSIONALE DEGLI INSIEMI E OPERAZIONI VERO-FUNZIONALI

La definizione intensionale permette di specificare un insieme come tutti gli elementi che verificano un certo enunciato che è costruito combinando delle proprietà sulla base di operazioni ***vero-funzionali.***

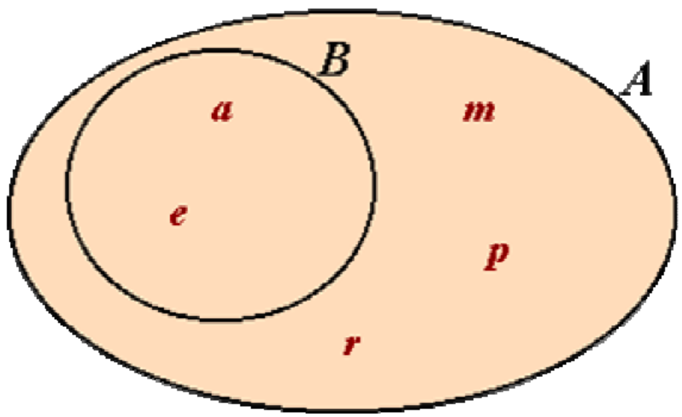
Esempio:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3 \text{ e } x < 5\}$, *la frase* $x > 3$ *e* $x < 5$ è un **enunciato vero-funzionale** che stabilisce una proprietà degli elementi x che appartengono ad A, in questo caso il numero 4.

La definizione intensionale di A sta per l'enunciato

$$x \in A \text{ sse } x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 3 \text{ e } x < 5$$

SOTTOINSIEMI



Un sottoinsieme *B* di *A* diverso da *A* e dall'insieme vuoto si dice **sottoinsieme proprio** e si scrive

$$B \subset A \text{ (oppure } A \supset B\text{)}$$

L'insieme vuoto ammette uno ed un solo sottoinsieme (improprio): $\emptyset$.

Un insieme costituito da un solo elemento, A = {a}, ammette due sottoinsiemi impropri, $\emptyset$ ed A stesso, e non ammette alcun sottoinsieme proprio.

SOTTOINSIEMI

Se S e T sono due insiemi e tutti gli elementi di S sono elementi di T, S è un *sottoinsieme* di T e scriviamo $S \subseteq T$. Se S e T hanno gli stessi elementi $S = T$:

$$S = T \stackrel{def}{=} T \subseteq S \text{ e } S \subseteq T \qquad (1)$$

Se $S \subseteq T$ e $S \neq T$, S è un *sottoinsieme proprio* di T e T è un *soprainsieme proprio* di S, e scriviamo $S \subset T$. $\subset$ è detto *contenimento stretto* ed è definito come segue

$$S \subset T \stackrel{def}{=} S \subseteq T \text{ e } S \neq T \qquad (2)$$

dove $S \neq T$ indica che S e T sono diversi, e per indicare che S non è sottoinsieme (proprio) di T scriviamo $S \not\subseteq T$ ($S \not\subset T$). Ogni insieme è sottoinsieme di sé stesso; $\emptyset$ è sottoinsieme di ogni insieme.

UGUAGLIANZA TRA INSIEMI

Due insiemi A e B sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

DEFINIZIONI INTENSIONALI PER $\subset$, =, $\subseteq$

1. $S \subset T = \{x \mid \text{se } x \in S \text{ allora } x \in T\}$

2. $(S = T) = \{x \mid x \in S \text{ sse } x \in T\}$

3. $S \subseteq T = \{x \mid S \subset T \text{ oppure } (S = T)$

Proprietà di $\subseteq$

Per $\subseteq$ valgono le seguenti proprietà:

1. $S \subseteq S$, per ogni insieme S *(Riflessività)*.
2. Se $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_3$ allora $S_1 \subseteq S_3$ *(Transitività)*.

PROPRIETA' DELL'INCLUSIONE

Siano A, B, C insiemi qualsiasi, si ha:

$A \subseteq A$ (proprietà riflessiva)

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$ (proprietà antisimmetrica)

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$ (proprietà transitiva)

Insieme Potenza

L'insieme *potenza* di un insieme S, scritto $\wp S$ – detto anche *insieme delle parti* di S – è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di S

$$\wp S = \{X \mid X \subseteq S\}.$$

Esempio

1. $\wp\emptyset = \{S | S \subseteq \emptyset\} = \{\emptyset\}$.
2. $\wp\{\emptyset\} = \{S | S \subseteq \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
3. $\wp\{x, y\} = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$.

Insieme potenza

Proposizione 1. *Se S è composto da n elementi (con $n \geq 0$), il numero di elementi in $\wp S$ è 2^n.*

INSIEME DELLE PARTI O INSIEME POTENZA

Sia A = {a, b, c},

si ha

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Se A contiene n elementi

allora

$\mathcal{P}(A)$ contiene 2^n elementi

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 1)

END