INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 3)

Stefania Bandini

INSIEMI ORDINATI

Quanto finora studiato a proposito del concetto di **insieme** non fa riferimento all'ordine con cui gli elementi di un insieme sono elencati.

E' però utile, in determinati casi, specificare un particolare **ORDINAMENTO** all'interno di un dato insieme

Coppia ordinata

Una *coppia ordinata* è una collezione di due oggetti tale che uno può distinguersi come il *primo elemento* e l'altro come il *secondo elemento*. Una coppia ordinata con primo elemento x e secondo elemento y si scrive $\langle x, y \rangle$.

Proprietà 1. $\langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle$ *sse* $x = z$ *e* $y = t$.

Notare che $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ e che $\langle x, x \rangle$ denota la coppia in cui il primo e il secondo elemento sono uguali tra di loro.

Una rappresentazione insiemistica di $\langle x, y \rangle$ è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Coppia ordinata cont.

L'enunciato che x è il primo elemento di una coppia ordinata $\{\{x\},\{x,y\}\}$ è formulato come segue:

$$\text{per ogni } Y \in \{\{x\},\{x,y\}\}\text{: } x \in Y \tag{3}$$

L'enunciato che y è il secondo elemento di una coppia ordinata $\{\{x\},\{x,y\}\}$ è formulato come segue:

$$\begin{aligned}&(\text{esiste un } Y,\ Y \in \{\{x\},\{x,y\}\}, \text{ tale che } y \in Y) \text{ e}\\&(\text{per ogni } Y_1,\ Y_1 \in \{\{x\},\{x,y\}\}, \text{ e per ogni } Y_2,\ Y_2 \in \{\{x\},\{x,y\}\},\\&\quad \text{se } Y_1 \neq Y_2 \text{ allora } (y \notin Y_1 \text{ oppure } y \notin Y_2)).\end{aligned} \tag{4}$$

$\langle x,x\rangle$ è rappresentata come $\{\{x\},\{x,x\}\} = \{\{x\}\}$.

Esempio

Vogliamo verificare che $\{\{x\},\{x,y\}\}$ è una buona definizione di coppia ordinata, mentre $\{x,y\}$ non lo è.

$$
\begin{aligned}
\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \quad & \equiv \\
& (\quad (\{a\} = \{c,d\} \text{ e } \{a,b\} = \{c\}) \text{ oppure} \\
& \qquad (\{a\} = \{c\} \text{ e } \{a,b\} = \{c,d\}) \\
&).
\end{aligned}
$$

Se $\{a\} = \{c,d\}$, sostituendo otteniamo $\{\{c,d\},b\} = \{c\}$, quindi c sarebbe uguale ad un insieme di cui è elemento, contraddizione.

$\Rightarrow$

Esempio cont.

Quindi $(\{a\} = \{c\}$ e $\{a, b\} = \{c, d\})$. Quindi $a = c$, e $b = c$ oppure $b = d$. Se $a \neq b$ ne segue che $b = d$, altrimenti $a = b = c = d$.

Abbiamo mostrato che la definizione $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ verifica la proprietà 1.

La definizione $\{x, y\}$ non verifica la proprietà 1, perché non vi è alcun ordinamento sugli elementi di un insieme, $\{x, y\} = \{y, x\}$.

n-upla ordinata

Una *n-upla* ordinata di oggetti $x_1, \ldots, x_n$ è definita come

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

dove $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$ è una (n-1)-upla ordinata.

PRODOTTO CARTESIANO

Dati due insiemi non vuoti *S* e *T* si definisce prodotto cartesiano

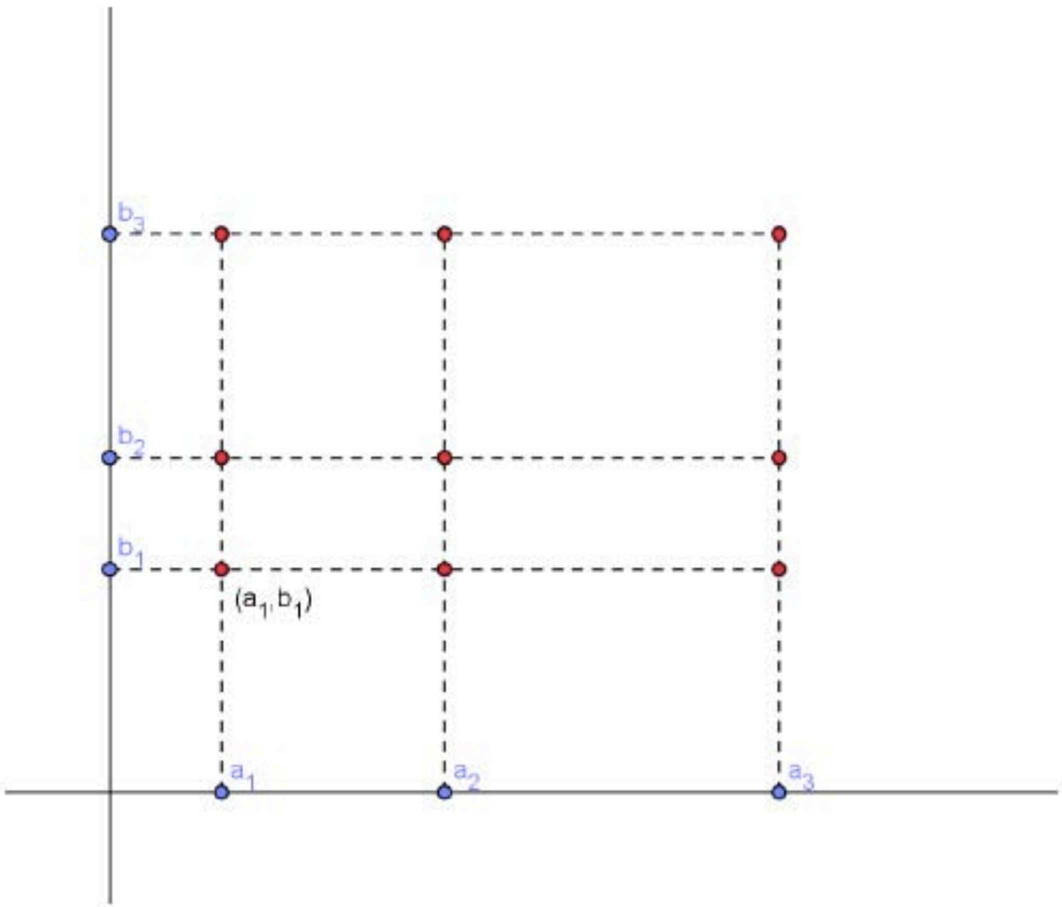
$$S \times T = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in S, y \in T \}$$

dove il simbolo <x, y> denota una coppia ordinata, cioè un insieme di due elementi nel quale specifichiamo chi è il primo elemento e chi è il secondo.

Nel caso in cui almeno uno dei due insiemi *S* o *T* sia vuoto, il loro prodotto Cartesiano è **l'insieme vuoto**.

In generale $S \times T \neq T \times S$. Nel caso in cui $S = T$ il prodotto $S \times T$ si denota anche con S^2.

PRODOTTO CARTESIANO



Una rappresentazione grafica del prodotto Cartesiano di due insiemi.

Prodotto Cartesiano e sequenze

Dati due insiemi S e T, possiamo formare l'insieme $S \times T$ di tutte le coppie $\langle x, y \rangle$ per le quali $x \in S$ e $y \in T$. L'insieme $S \times T$ è chiamato *il prodotto cartesiano* di S e T.

S^n è l'insieme di tutte le n-uple di elementi di S, per esempio, per $n = 4$, $S^4 = (((S \times S) \times S) \times S)$.

Dato un insieme S, σ è una *sequenza finita* di elementi di S se $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ per qualche intero positivo n e ciascun $s_i \in S$.

Un *segmento* di una sequenza finita $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ è una sequenza finita $\sigma' = \langle s_k, s_{k+1} \ldots, s_{m-1}, s_m \rangle$, dove $1 \leq k \leq m \leq n$. Se $k = 1$ il segmento è detto *iniziale*.

DAL PRODOTTO CARTESIANO ALLE RELAZIONI

Se a $S \times T$ *appartengono* tutte le coppie ordinate costituite da un primo elemento tra *S* e da un secondo elemento tratto da *T*,

ogni sottoinsieme di $S \times T$ potrà essere considerato come una **RELAZIONE** tra gli elementi di *S* e quelli di *T*, esplicitata da specifiche proprietà

ESEMPIO

Consideriamo gli insiemi:
S = {Arno, Po, Tevere} e *T* = {Firenze, Pisa, Torino}

Consideriamo il loro prodotto cartesiano

S × *T* = {<Arno, Firenze>, <Arno, Pisa>, <Arno, Torino>, <Po, Firenze>, <Po, Pisa>, <Po, Torino>, <Tevere, Firenze>, <Tevere, Pisa>, <Tevere, Torino>}

Tra tutte le coppie aventi per primo elemento un elemento di S (un fiume) e per secondo un elemento di T (una città), individuiamo quelle costituite dal nome di un fiume e da quello di una città bagnata da quel fiume

R = {<Arno, Firenze>, <Arno, Pisa>, <Po, Torino>}

DAL PRODOTTO CARTESIANO ALLE RELAZIONI

Il sottoinsieme R di $S \times T$ è caratterizzato esattamente dalla proprietà che tutte (e soltanto) le coppie ad esso appartenenti sono costituite *da un fiume e da una città bagnata da esso.*

Il sottoinsieme R è uno dei possibili sottoinsiemi di $S \times T$

Altri sottoinsiemi possono essere individuati mediante la definiziene di altre relazioni denotate da specifiche proprietà

DAL PRODOTTO CARTESIANO ALLE RELAZIONI

Se si considera la coppia <x, y> appartenente a un dato sottoinsieme R di $S \times T$, si dice che l'elemento $x \in S$ ha come corrispondente $y \in T$ nella relazione R, oppure, più semplicemente, che

x è in relazione con y

Una relazione, come ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano fra insiemi, può essere rappresentata graficamente con una tabella

	Arno	Po	Tevere
Torino		•	
Pisa	•		
Firenze	•		

RELAZIONI BINARIE

Una *relazione binaria* R tra due insiemi S e T è un insieme di coppie ordinate $\langle x, y \rangle$ con $x \in S$ e $y \in T$: $R \subseteq S \times T$).

Il *dominio* di R, indicato con $dom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti x tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche y.

Il *codominio* di R, indicato con $codom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti y tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche x.

L'unione del dominio e del codominio di una relazione R si chiama il *campo* di R oppure *estensione*.

RELAZIONI *n*-ARIE

Una relazione n-aria su un insieme S è un sottoinsieme di S^n, $n \geq 1$. Se $n = 1$ la relazione R su S si dice *unaria*.

Se $n = 2$ la relazione R su S si dice *binaria*.

Se $n = 3$ la relazione R su S si dice *ternaria*.

$\ldots$

OPERAZIONI SU RELAZIONI

$R_1 \cup R_2$ è una relazione su $S \times T$, ed è costituita da tutte le coppie che appartengono a R_1 o a R_2.

$R_1 \cap R_2$ è la relazione costituita da quelle coppie che appartengono a entrambe R_1 e R_2.

$\overline{R} = \{\langle x, y\rangle |\ \langle x, y\rangle \notin R\} \subseteq S \times T$ è la relazione *complementare* di R.

$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\} \subseteq T \times S$ è la relazione *inversa* di R.

Proprietà di relazioni

Siano $R_1 \subseteq S \times T$ e $R_2 \subseteq S \times T$ due relazioni; valgono le seguenti proprietà:

1. se $R_1 \subseteq R_2$ allora $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;
2. se $R_1 \subseteq R_2$ allora $\overline{R_2} \subseteq \overline{R_1}$;
3. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ e $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R^{-1} \cup R_2^{-1}$;
4. $\overline{(R_1 \cap R_2)} = \overline{R_1} \cup \overline{R_2}$ e $\overline{(R_1 \cup R_2)} = \overline{R_1} \cap \overline{R_2}$.

Esempio

1. $\{\langle x, x\rangle \mid x \in S\}$ è una relazione binaria su S.
2. $\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2$ e x è minore o uguale a $y\}$ è *la relazione d'ordine naturale* su $\mathbb{N}$: $x \leq y$.
3. $\{\langle x, y, z\rangle \mid \langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3$ e $x^2 + y^2 = z^2\}$ è il *luogo geometrico* dei punti in $\mathbb{R}^3$ che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

Esempio cont.

1. Sia $D = \{a, b\}$, $R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$ ed $R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle a, a\rangle\}$:

   $R_1 \cap R_2 = \{\langle a, b\rangle\}$, $R_1 \cup R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle\}$.

   $\overline{R_1 \cap R_2} = \overline{R_1} \cup \overline{R_2} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\} \cup \{\langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\} = \{\langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.

   $\overline{R_1} \cap \overline{R_2} = \overline{R_1 \cup R_2} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\} \cap \{\langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\} = \{\langle b, b\rangle\}$.

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 3)

END