

Linguaggi di Programmazione

DaveRhapsody

30 Settembre 2019

Indice

1	Introduzione al corso	3
1.1	Programma del corso	3
1.1.1	Logica Matematica e Linguaggi logici (Prolog)	3
1.1.2	Linguaggi funzionali e Lisp (et al.)	3
1.1.3	Linguaggi imperativi	3
1.2	Modalità d'esame	3
1.2.1	subsection name	3
1.2.2	Prove parziali	3
1.3	Appelli regolari	4
2	Il paradigma	5
2.1	Cos'è?	5
2.1.1	Storicamente	5
2.1.2	L'effetto collaterale	5
2.2	Logica del primo ordine	5
2.3	Linguaggi funzionali	5
2.4	Paradigma imperativo	6
2.4.1	Il concetto di variabile	6
2.5	Modello di Von Neumann	6
2.6	Stile prescrittivo	6
2.7	Concetto di programma	6
2.8	Perchè utilizzare paradigmi diversi?	7
2.9	Paradigma logico	7
2.10	Esempio di un programma Prolog	7
2.10.1	Esempio:	8
2.10.2	Esempio dell'ordine di una lista	8
2.11	Paradigma funzionale	8
2.11.1	Composizione di funzioni + ricorsione	9
2.12	LISP	9
2.12.1	Esempio di programma LISP	9
2.13	Ambienti RunTime di linguaggi logici funzionali e non	10
2.13.1	Activation frame	11
2.14	Activation Frame di una funzione	11
2.15	Heap e Garbage Collector	11
3	Logica e ragionamento	12
3.0.1	Regole di inferenza	12
3.1	Dimostrazione	13

3.2	Logica Proposizionale	13
3.3	Principio di risoluzione	14
3.4	Unit Resolution	14
3.4.1	Esempio di dimostrazione per assurdo	15
3.5	Ricapitolando	15
3.6	L'assioma	16
3.6.1	L'esempio dell'unicorno	16
3.6.2	Tautologie e modelli	17
3.7	La logica del primo ordine	17
3.7.1	Le Formule Ben Formate nella logica del primo ordine	18
3.7.2	Calcoli logici	19
3.8	Altre regole in Logica del Primo Ordine	20
4	Prolog	21
4.1	Programmazione logica	21
4.1.1	Logica Matematica	21
4.2	Cos'è ProLog	22
4.2.1	Ambiti di applicazione	22
4.2.2	Caratteristiche di Prolog	22
4.3	Formule Ben Formate e Forma Normale a clausole	22
4.3.1	Forma normale congiuntiva	22
4.3.2	Linguaggio dichiarativo	23
4.4	Sintassi Prolog	23
4.4.1	Le variabili (logiche)	26
4.4.2	Termini Composti	26
4.5	Le Regole	26
4.6	Regole di ricorsione	27
4.7	L'interprete prolog: Interrogazioni	27
4.8	Unificazione: introduzione	27
4.8.1	Most General Unifier	28
4.9	Le Liste in Prolog:	28
4.10	L'operatore 	28
4.11	La differenza tra Clausola semplice e Clausola di Horn	28
4.12	Un programma logico	29
4.13	Sostituzioni	30
4.14	Esecuzione di un programma	30
4.15	Risoluzione ad INPUT LINEARE (SLD)	31
4.16	Alberi di derivazione SLD	33
4.17	La regola di calcolo	35

Capitolo 1

Introduzione al corso

1.1 Programma del corso

Il corso è volto ad insegnare dei paradigmi di programmazione dei seguenti tipi:

1.1.1 Logica Matematica e Linguaggi logici (Prolog)

Termini, fatti(predicati), regole, unificazione, procedura di risoluzione

1.1.2 Linguaggi funzionali e Lisp (et al.)

Atomi, liste, funzioni e ricorsione

1.1.3 Linguaggi imperativi

Memoria, stato, assegnamenti, puntatori

Il concetto è che con questo corso si vanno a studiare paradigmi più evoluti, usati tutt'ora e comunque aventi un ampio approccio logico, oltretutto LISP è usato nelle pagine web (Si userà moltissimo la ricorsione, A I U T O)

1.2 Modalità d'esame

1.2.1 subsection name

- il voto finale sarà una media pesata dei voti conseguiti nell'esame relativo alla parte teorica e nell'esame del progetto
 - Occhio, il peso è a discrezione dei prof

1.2.2 Prove parziali

Le prove d'esame sono costituite da uno scritto di 6-10 domande, e da un progetto da consegnare entro una data prefissata

1.3 Appelli regolari

Gli appelli regolari sono composti da un progetto ed un esame scritto, che può essere seguito da un esame orale a discrezione del docente basato sui temi trattati durante il corso

NON C'E' POSSIBILITA' DI RECUPERI, infatti scritto, orale e progetto vanno sostenuti **NELLO STESSO APPELLO**

Progetto e scritto sono corretti separatamente

NON CI SARANNO ECCEZIONI Lo avete già letto nel passaggio precedente, ma lo ripeto lo stesso perchè deve essere chiaro che **N O N S I F A N N O E C C E Z I O N I**.

Capitolo 2

Il paradigma

2.1 Cos'è?

E' il metodo di soluzione ad un determinato problema, a seconda dei paradigmi si hanno diversi tipi di linguaggi di programmazione

2.1.1 Storicamente

Il primo paradigma è l'imperativo, cioè il paradigma basato sui tre costrutti di selezione, iterazione e sequenza.

Inoltre si mantiene il concetto di assegnamento di un valore ad una determinata variabile

2.1.2 L'effetto collaterale

Viene definito effetto collaterale quando, a seguito dell'esecuzione di un qualsiasi codice, il contenuto di un'area di memoria viene cambiato; per intenderci, anche solo l'istruzione " $x += 1$ " genera un effetto collaterale, poichè nell'area di memoria di x viene cambiato il valore. Perchè è importante tutto ciò, direte. Semplice: il paradigma puro funzionale si basa proprio sul fatto che un programma non generi mai, mai, *M A I*, effetti collaterali. Successivamente vedremo che in Prolog ci saranno parecchi problemi se provassimo ad assegnare direttamente un valore ad una variabile

2.2 Logica del primo ordine

Prolog è costituito da una serie di clausole derivanti dalla logica del primo ordine

2.3 Linguaggi funzionali

Questi si basano proprio sui concetti matematici di funzione, ad esempio si ragiona sui domini, sui codomini, sull'insiemistica, solite cose. La loro caratteristica è che ogni funzione, dato sempre lo stesso input, restituisce sempre lo stesso risultato. Cosa vuol dire questo? Che non dipende da variabili esterne (e da qui l'importanza degli effetti collaterali, evitati nei linguaggi funzionali).

2.4 Paradigma imperativo

Le caratteristiche essenziali dei linguaggi imperativi sono legate all'architettura di Von Neumann, costituita dai famosi due componenti **Memoria (componente passiva)** e **Processore (componente attiva)**

In pratica la principale attività che ha la cpu è quella di eseguire calcoli ed assegnare valori alle variabili, che sono delle celle di memoria.

Va considerato Il concetto di variabile è un'astrazione di una cella di memoria, per dire se giochi su assembly vai a toccare i veri e propri registri, mentre su C o Assembly si ragiona per nome di variabile, non vai di indirizzamento fisico

2.4.1 Il concetto di variabile

In Prolog e LISP cambia completamente il concetto di variabile, ma per come saranno presentati vedremo che non c'entra niente.

In matematica abbiamo il concetto di variabile? Sì, quella che sta dentro una funzione, in informatica è diciamo diverso, non è un'astrazione, ma lo vedremo in seguito

2.5 Modello di Von Neumann

Per manipolare la memoria utilizzo la variabile, simbolo che indica la cella di memoria, nei linguaggi funzionali sarà possibile usare il concetto di variabile matematica.

Alla fine il modello di Neumann è composto da I/O, Memoria e CPU con i suoi cicli di clock

2.6 Stile prescrittivo

Un programma scritto in un linguaggio imperativo prescrive le operazioni che la CPU deve eseguire per modificare lo stato di un sistema

Le istruzioni sono eseguite nell'ordine in cui queste appaiono, ad eccezione delle strutture di controllo

Realizzati sia attraverso interpretazione che compilazione, nati più per manipolazione numerica che simbolica.

2.7 Concetto di programma

Un programma è intendibile come un insieme di algoritmi e di strutture dati ma la struttura di un programma consiste in

- Una parte dichiarativa in cui son presenti le dichiarazioni di tutte le variabili del programma e del loro tipo

- Una parte che descrive l'algoritmo risolutivo utilizzato, mediante istruzioni del linguaggio

2.8 Perchè utilizzare paradigmi diversi?

Per esempio l'intelligenza artificiale si sviluppa su linguaggi di programmazione specifici, bisogna usare linguaggi che operino in un determinato modo, considerati tipo di Altissimo super mega galatticissifantastico livello infatti, utilizzabili pure da non programatori

Infatti son generati per manipolazione simbolica non numerica

2.9 Paradigma logico

Concetto primitivo: Deduzione logica, avente una base di logica formale e un obbiettivo, che è intendibile come formalizzazione del ragionamento

Programmare infatti significa descrivere il problema con frasi (Formule logiche) del linguaggio,
Interrogare il sistema, che effettua deduzioni in base alla "conoscenza rappresentata"

Ai lettori Mi rendo conto che non si capisca un cazzo, voi immaginatevi come mi stia sentendo al momento io mentre prendo appunti.. Perdonatemi

Prolog è un insieme di formule ben formate, ragiona con il linguaggio logico, con una descrizione della realtà di interesse, di fatto è una dimostrazione in un linguaggio logico che costituisce un programma. Più semplicemente ho una frase da dare al mio interprete, Prolog icchè fa? Semplicemente la realizza sotto forma di dimostrazione.

2.10 Esempio di un programma Prolog

Ci sono fondamentalmente:

- Asserzioni incondizionate (**fatti**) A.
- Asserzioni condizionate (**regole**) $A :- B, C, D, \dots, Z$.
 - A è la conclusione o conseguente (deve avere una sola clausola)
 - B, C, D, ..., Z sono le premesse o antecedenti
- Un'**interrogazione** ha la forma: $:- K, L, M, \dots, P$.

Ovviamente A, B, C, *TUTTE LE ALTRE*, sono semplicemente predicati
MI RACCOMANDO MASSIMA ATTENZIONE ALLA SINTASSI, ogni clausola Prolog termina con un punto.

La ',' si legge come AND

2.10.1 Esempio:

Due individui sono colleghi se lavorano per la stessa ditta/azienda **Regole** **Fatti** Interrogazione

```
collega(X, Y) :-
    lavora(X, Z),
    lavora(Y, Z),
    diverso(X, Y).
```

```
lavora(ciro, ibm)
lavora(ugo, ibm)
lavora(olivia, samsung)
lavora(ernesto, olivetti)
lavora(enrica, samsung)
```

```
:- collega(X, Y).
```

Programmare Prolog non è come scrivere in un linguaggio di programmazione, non si scrive un algoritmo, in questo caso abbiamo le famose clausole, (regole e fatti),

ATTENZIONE l'interrogazione non è una clausola, occhio a non confondersi

2.10.2 Esempio dell'ordine di una lista

- **Ordine prescrittivo:** Controlla se la lista è vuota, e dà come risultato la lista vuota stessa, altrimenti calcola una permutazione della lista e controlla se è ordinata, dando come risultato L_1 altrimenti fa una permutazione su L etc.

Il programmatore deve specificare le istruzioni che generano la sequenza di permutazioni della lista L $\left\{ \begin{array}{l} \text{il risultato dell'ordinamento di una lista vuota è la lista vuota} \\ \text{Il risultato dell'ordinamento di una lista } L \text{ è } L_1 \end{array} \right.$ Quindi,

lo stile prescrittivo presuppone che OGNI SINGOLO CASO venga considerato e programmato. non esiste il "ma è ovvio che debba fare questo", ogni singolo caso è tua responsabilità. Sì, tua, proprio tu che stai leggendo. Prolog si basa su questo tipo di ordine.

- **Stile Dichiarativo:** L'ambiente si fa carico di generare possibili permutazioni della lista L , secondo deduzione matematica

2.11 Paradigma funzionale

- Si basa sul concetto di funzione matematica, ossia una associazione tra due insiemi che relaziona ad ogni elemento di un insieme (dominio) un solo elemento di un altro insieme (codominio)
- La definizione di una funzione specifica dominio, codominio, e regola di associazione

- ESEMPIO:
Incr: $N \rightarrow N$
 $\text{Incr}(x) = x + 1$
- Dopo aver dato definizione, una funzione è applicabile ad un elemento del dominio (argomento) per restituire l'elemento del codominio ad esso associato (valutazione)
- $\text{incr}(3) \rightarrow 4$ L'unica operazione utilizzata nel funzionale è l'applicazione di funzioni
- Il ruolo dell'esecutore di un linguaggio funzionale si esaurisce nel calcolare l'applicazione di una funzione (il programma) e produrre un valore
- Nel paradigma funzionale puro il valore di una funzione è determinato dagli argomenti che riceve al momento della sua applicazione e non dallo stato del sistema rappresentato dall'insieme complessivo dei valori associati a variabili (e/o locazioni di memoria) in quel momento
- Oggettivamente si ha l'assenza di effetti collaterali

Attenzione Il concetto di variabile che utilizziamo è quello di "costante" matematica, in cui i valori NON sono mutabili, non ho nessun assegnamento

L'essenza della programmazione funzionale consiste nel combinare funzioni mediante composizione e uso della ricorsione

2.11.1 Composizione di funzioni + ricorsione

La struttura di un programma consiste nella definizione di un insieme di funzioni ricorsive mutualmente

L'esecuzione del programma consiste nella VALUTAZIONE dell'APPLICAZIONE di una funzione principale a una serie di argomenti

2.12 LISP

LISt Processing,

Il progetto originale era di creare un linguaggio funzionale puro, infatti nel corso degli anni sono stati sviluppati molti ambienti di sviluppo lisp di cui terremo in considerazione Common Lisp e Scheme, oltre che emacs etc.

2.12.1 Esempio di programma LISP

Controlla un elemento se appartiene ad una lista

```
(defun member (item list))
(cond ((null list) nil)
      ((equal item (first list)) T)
      (T (member item (rest list))))
(member 42 (list 12 34 42))
```

Dopo una parentesi tonda ci va per forza una funzione, è fondamentale, defun definisce una funzione infatti, dopo c'è il nome di tale funzione. In LISP la tabulazione è ESSENZIALE, AUGURI A DISTINGUERE DOVE PORTI LA QUINTA PARENTESI DELLE DODICI CHE HAI SCRITTO PIANGENDO SUL CODICE ALLE 2 DI NOTTE.

Gli elementi si separano con lo spazio NON con la virgola, mi raccomando.

La terza riga è la più ostica e dice: è uguale T al primo elemento della lista? E' molto incastrato ma si riesce a capire, associamo per esempio ad item = 2 (E' un esempio) e list = [1,2]

Noi ci arriviamo con la logica che c'è, ma in realtà cosa faremo? Ragioniamo per gradi

1. null list? **false**
2. è 2 = al primo elemento della lista? **False**
3. è 2 = al secondo elemento della lista? **True**

Se LISP trova T è come se scrivessimo **true**

2.13 Ambienti RunTime di linguaggi logici funzionali e non

- Richiami di nozioni di architettura e programmazione
- Per eseguire un programma di qualsiasi linguaggio il sistema operativo deve mettere a disposizione l'ambiente runtime che dia almeno due funzioni
 - Mantenimento dello stato della computazione(pc, limiti di memoria)
 - Gestione memoria disponibile (fisica e virtuale)
- L'ambiente runtime può essere una vera e propria macchina virtuale tipo la JVM di java
- In particolare la gestione di memoria avviene usando due aree concettualmente ben distinte con funzioni diverse
 - Lo stack, ambiente dell'ambiente runtime che serve per la gestione delle chiamate, a procedure metodi etc
 - L'heap dell'ambiente runtime serve per gestire strutture dinamiche
 - * Alberi
 - * Liste etc

2.13.1 Activation frame

- La valutazione di procedure avviene mediante la costruzione sullo stack di sistema di activation frames
- i parametri formali di una procedura vengono associati ai valori (si passa tutto per valore, non esistono effetti collaterali)
- E' un altro modo di chiamare i record di attivazione, via
- Il corpo della procedura viene valutato (ricorsivamente) tenendo questi legami in maniera statica

cioè il concetto è che bisogna capire cosa accade con variabili che risultino libere in una sottoespressione

2.14 Activation Frame di una funzione

Contiene:

- Return address
- Registri
- Static / Dynamic link (lo statico punta alle variabili globali)
- Argomenti
- Local definitions (RV)

Se si ha in mente come funziona oggettivamente lo stack (con i record di attivazione) è la stessa cosa

All'esame si potrebbe chiedere cos'è l'activation frame e a icchè serve

2.15 Heap e Garbage Collector

L'heap è l'area di memoria destinata alla memorizzazione delle strutture per i dati dinamiche, mentre invece il garbage collector ha il compito di accumulare lo schifo che si accumula tra variabili non deallocate etc, e le dealloca appunto.

Capitolo 3

Logica e ragionamento

Partiamo con le cose semplici, bisogna passare da quello che è un linguaggio parlato a una stesura di condizioni

Prendiamo un triangolo, vogliamo dimostrare che se due triangoli hanno i due lati uguali allora è isoscele

$$AB = BC \vdash \angle A \angle C$$

1. $AB = BC$ per ipotesi
2. $\angle ABH = \angle HBC$ per (3)
3. Il triangolo HBC è uguale al triangolo HBC ABH per (2)
4. $\angle A = \angle C$ per (1)

3.0.1 Regole di inferenza

Esempio di una regola di inferenza:

$$\frac{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n}{R}$$

1. Introduzione della congiunzione (L'AND)
2. Modus Ponens
3. Eliminazione della congiunzione

Come lavora il **Modus Ponens**:

E' semplice manipolazione sintattica, osservando la formula che ci vien data possiamo riscriverla scrivendo come base di conoscenza il conseguente, cioè in pratica prendo e sostituisco con il conseguente.

Per far si che le mie formule siano vere, se avessi un A or B può esser vera in ben tre casi diversi, non posso eliminare i due casi disgiunti, se voglio mantenere una solidità non posso, e quindi questa regola (disgiunzione) non esiste.

Attenzione in una dimostrazione non si può dare nulla per scontato, tutto ciò che noi diamo per assodato, un pc non lo dà, dobbiamo essere molto precisi nelle indicazioni, bisogna lavorare in un'ottica più precisa

cerchiamo ora di tradurre tutto in un linguaggio più formale SE $AB = BC$ E $BH = BH$ e $ABH = HBC$ allora il triangolo ABH è uguale a HBC ed abbiamo trasformato (1) in

SE triangolo ABH è uguale al triangolo HBC ALLORA $AB = BC$ e $BH = BH$ e $AH = HC$, E $ABH = HBC$ E $AHB = CHB$ E $A = C$

Da un punto di vista formale noi partiamo da un'ipotesi, noi vogliamo dimostrare che $A = C$.

La dimostrazione è un processo sintattico, non ragiono in termini di verità, perchè NON si sta parlando di interpretazione ma manipolazione delle formula

Ogni passo deve corrispondere ad una formula, e subito dopo le etichette

Differenza tra assiomi e ipotesi Gli assiomi sono conoscenza pregressa del dominio, mentre le ipotesi sono solo supposizioni iniziali, uno si specifica, l'altro no

3.1 Dimostrazione

E' una sequenza di passi dove il finale è la formula da dimostrare e abbiamo un insieme di passi intermedi che possono essere presi dalle conoscenze pregresse, oppure applicando regole di inferenza ai passi PRECEDENTI, solo precedenti mi raccomando.

Le regole di inferenza sono applicabili solo ai passi precedenti rispetto ad una formula

3.2 Logica Proposizionale

Nella logica proposizionale ci si occupa delle conclusioni che possiamo trarre da un insieme di proposizioni, abbiamo infatti un insieme P di proposizioni

Si introduce il concetto di **interpretazione** di un insieme di proposizioni, infatti all'insieme P si associa una funzione di verità (True e False)

Questa funzione associa un valore di verità ad ogni elemento di P , ad ogni proposizione. La valutazione è il ponte tra sintassi e semantica di un linguaggio
Posso derivare sintatticamente una formula, e se ho consistenza delle supposizione avere comunque una formula.

Chiaramente posso legare tra loro le proposizioni con \vee \wedge e \neg Una formula ben formata è un insieme di espressioni sintatticamente corrette di un linguaggio

In prolog le formule atomiche le chiameremo letterali, che possono esser positivi e negativi, e qui si richiamano i concetti di fondamenti della tabella di verità

Negli esercizi potremo usare

$$\frac{F_1, F_2, \dots, F_K}{R}$$

E' la forma generale di una regola, sopra hai l'insieme delle formule vere tra le formule ben formate e R è la formula generata da "inserire" in FBF.

L'esempio di inferenza che si usa di solito è il Modus Ponens:

$$\frac{p \rightarrow q, p}{p}$$

Se il conseguente appare come formula negata, si negherà anche la formula originaria

Esempio:

$$\frac{p \vee \neg q}{\text{vero}} \text{ Terzo escluso}$$

$$\frac{\neg \neg q}{q} \text{ eliminazione } \neg$$

$$\frac{p \wedge \text{vero}}{p} \text{ eliminazione } \vee$$

$$\frac{p \wedge \neg p}{q} \text{ contraddizione}$$

3.3 Principio di risoluzione

E' una regola di inferenza generalizzata semplice e facile da utilizzare ed implementare, in pratica opera su formule ben formate trasformate in forme normali congiunte, ed ognuno dei congiunti vien detto **clausola**

L'osservazione fondamentale alla base del principio di risoluzione è un'estensione della nozione di rimozione dell'implicazione su base della contraddizione

In pratica si usa per le dimostrazioni per assurdo.

3.4 Unit Resolution

E' un caso particolare di principio di soluzione;

Da un lato ho una formula ben formata disgiuntiva e dall'altro ho un letterale (o asserito), e una di queste formule è costituita da un solo letterale, per questo si chiama unit, è sintassi, non ci sto capendo più un cazzo pure. io, non so davvero che dirvi..

Spiegazione fornita da Jacopo De Angelis

Eccomi, arrivo da autore esterno a spiegare: prendiamo prima lo schemino semplice semplice

$P \leftarrow \neg \neg A \wedge B \wedge C \wedge D \dots$

Questo vuol dire che P è vera solo se tutte A, B, C e D sono vere. Ora, prendiamo nuovamente il codice prolog visto all'inizio:

`collega(X, Y) :-
 lavora(X, Z),
 lavora(Y, Z),
 diverso(X, Y).`

Cosa cambia dal dire questo o la regola sopra? La corrispondenza è semplicemente:

P è `collega(X, Y)` :-
 A è `lavora(X, Z)`,
 B è `lavora(Y, Z)`,
 C è `diverso(X, Y)`.

Questo vuol dire che la nostra unit, P, è vera solo se sono vere le altre. Fine del mio intervento, la linea di nuovo a Dave.

Esempio:

- `<non piove>`, `<piove o c'è il sole>`
- `<c'è il sole>`

La dimostrazione per assurdo di fatto funziona assumendo che la formula negata sia vera, se combinandola con le proposizioni in fbf ottengo una contraddizione, allora si può concludere con la verità della proposizione.

3.4.1 Esempio di dimostrazione per assurdo

Abbiamo una proposizione λ e dobbiamo dimostrare che essa sia vera:

Per dimostrarlo occorre porre per ipotesi che $\neg\lambda$ sia vera e **SE** FBF $\cup \neg\lambda$ genera una contraddizione, **ALLORA** λ è vera!

3.5 Ricapitolando

Quello che noi definiamo come "Calcolo Logico" delle proposizioni va a toccare

- Dal punto di vista della sintassi
 - Un insieme di proposizioni che chiameremo **P**
 - Un insieme di **FBF**, tale che $P \subseteq \text{FBF}$
 - Un sottoinsieme di assiomi $A \subseteq \text{FBF}$
 - Un insieme di regole di inferenza che ci permettono di incrementare **FBF**
- Dal punto di vista della Semantica
 - Una funzione di verità che consente di distinguere **true** e **false** rispetto alle tavole di verità o funzioni di interpretazione

3.6 L'assioma

Un assioma è una conoscenza che si dà per assodata, qualcosa di sicuramente vero, se vogliamo anche "scontato"

3.6.1 L'esempio dell'unicorno

Se l'unicorno è mitico, allora è immortale, ma se non è mitico allora è mortale. Se è mortale o immortale allora è cornuto. L'unicorno è magico se è cornuto.

L'unicorno:

- E' mitico?
- E' magico?
- E' cornuto?

Procedimento

1. Esprimere il problema in forma di logica delle proposizioni
2. Individuare i teoremi da dimostrare
3. Dimostrare i teoremi

Cioè concettualmente devo cercare di individuare i predicati, e porli in modo più logico (Tipo $\text{mitico}(x)$, $\text{magico}(x)$ e $\text{cornuto}(x)$), MA MI RACCOMANDO ATTENZIONE.

NON CONFONDERE I termini a disposizione, se qui hai mortale o "Immortale" stai parlando di qualcosa che è Mortale $\vee \neg$ Mortale.

Ora andiamo a risolvere questo esercizio, e si comincia con il dare un nome ai nostri predicati, che siccome sarebbero lunghi, saranno abbreviati in massimo 5 predicati

- UM = Mitico
- UI = Immortale
- UMag = Magico
- UC = Cornuto

Ritrascriviamo quindi la nostra frase iniziale:

$UM \rightarrow UI$,

$\neg UM \rightarrow \neg UI$,

$\neg UI \vee UI \rightarrow UC$

$UC \rightarrow \text{UMag}$

Mentre per quanto riguarda le domande poste:

1. $S \vdash UM$?
2. $S \vdash \text{UMag}$?

3. $S \vdash UC?$

Risolvendo l'esercizio otteniamo che Ora, il metodo per risolvere le \vdash potrebbe essere tramite negazione della nostra ipotesi. In che senso? Proviamo con il caso $S \vdash UC$

- P1: $\neg UI \vee UI \rightarrow UC$ (Da S)
- P2: $\neg UI \vee UI$ (Che era stato dimostrato in un passaggio precedente con la dimostrazione di $A \rightarrow (B \rightarrow C)$)
- P3: UC (Da P1, P2 e modus ponens)

Il compito avrà un esercizio di questo livello di difficoltà che consisterà in una dimostrazione, che ovviamente va per assurdo.

3.6.2 Tautologie e modelli

Una fbf che si verifica in ogni caso, è detta **Tautologia** (Fondamenti docet)

Una particolare **Interpretazione** V che rende vere tutte le formule in **S** viene detta **modello** di S

3.7 La logica del primo ordine

Se la logica proposizionale si dimostra utile, avente caratteristiche di computazione che da questo punto di vista sono chiare, c'è da dire che la semantica è chiara allo stesso modo, però purtroppo non ci permette di fare asserzioni in merito ad insieme di elementi in maniera concisa.

Ai lettori Cioè io sto capendo logica adesso e non l'ho capita a Fondamenti.. Meditiamo ragazzuoli, meditiamo.

Sono Jacopo, vi parlo dal terzo anno. Fondamenti si capisce SOLO tramite gli altri corsi.

Con la **Logica del primo Ordine** introduciamo modi diversi di esprimere le proposizioni, prendiamo per esempio Socrate (Ricordate Palmonari? Ecco)

- Tutti gli uomini sono mortali
- Socrate è un uomo
- dalle precedenti ipotesi si deduce che Socrate è mortale

C'è un problemino di fondo, non si può esprimere in alcun modo qualcosa del tipo "Tutti gli uomini sono mortali"

Un linguaggio logico del primo ordine è costituito da **termini** che in pratica si costruiscono con

- V: insieme di simboli di variabili
- C: insieme di simboli di costante
- R: insieme di simboli di relazione o predicati (di qualsiasi arietà)
- F: insieme di simboli di funzione (di qualsiasi arietà)

Ah, giusto L'arietà sarebbe il numero di argomenti di una relazione o predicato. (Chiaramente anche funzioni, in quanto caso particolare di relazione)

Inoltre si hanno i connettivi logici, ovvero \forall (Per ogni) e \exists (Esiste).

In Prolog ci sarà un uso implicito dei quantificatori, è implicita la congiunzione, l'universale non è specificato ma è sottointeso, tutte le formule valgono assumendosi la quantificazione universale.

Una sola causa E' quantificata in modo esistenziale, la query. Se Però questa è una cosa che si gestisce l'interprete, noi non ci si fa problemi da questo punto di vista

Attenzione, in prolog non bisogna usare in modo intercambiabile simboli di predicato con quelli di funzione, perchè supponiamo la funzione "successore di un numero". La funzione successore dato un valore numerico λ , successore mi darà $\lambda + 1$.

In questo caso ha simbolo di funzione, il predicato ti dà o vero o falso, pochi cazzi.

Se ho Successore(a, λ), questo mi dà true o false, è λ successore di a? Se sì mi dà true o altrimenti mi dà false. Questa è la differenza, oltre al fatto che un predicato ragiona sul singolo argomento.

Postilla simpatica: Quello che chiamo Modus Ponens, non è altro che un modo più simpatico di chiamare l'eliminazione dell'implicazione, che è quello che facevamo a fondamenti, ma chiamiamolo modus ponens, perchè sì.

Con la logica di primo ordina si ragiona diversamente, infatti il linguaggio è costruito ricorsivamente, ed i termini minimi sono detti **PREDICATI**

3.7.1 Le Formule Ben Formate nella logica del primo ordine

Qui si fa menzione della definizione **Ricorsiva** di Formula Ben Formata cioè:

$$FBF = \{t_j, r_{t_1, \dots, t_k}\}$$

Dove t_j è un termine elemento di C, di V, oppure un'applicazione di una funzione $f(t_1, \dots, t_s)$ mentre

$$r(t_1, \dots, t_k)$$

Che sarebbe un termine costituito da un predicato (dove le t derivano dai termini appartenenti alle FBF)

Contiamo che diversi elementi di FBF connessi dai connettivi $\forall, \exists, \neg, \rightarrow$ appartengono ad FBF

Si denota $t(t_1, \dots, t_s)$ tale combinazione di termini

Grazie alle definizioni precedenti possiamo andare a risolvere l'esempio di Socrate.

Iniziamo dalle cose semplici, definiamo chi sono le costanti (insieme C) \rightarrow

Socrate è una costante, pertanto apparterrà all'insieme C : $C = \{\text{Socrate}\}$, e poi possiamo definire quello che sono i predicati, che sono in questo caso uomo e mortale.

I predicati appartengono all'insieme R ; $R = \{\text{uomo. mortale}\}$

Benissimo, proviamo ora a realizzare la frase "Tutti gli uomini sono mortali":

Se tutti gli uomini son mortali, significa che per ogni elemento x tale che esso sia un uomo, si implica che x sia mortale.

Osservazione Quando dico "Sia un uomo" e "Sia mortale", intendo che la funzione $\text{uomo}(x)$ e $\text{mortale}(x)$ siano tendenzialmente delle booleane

Infatti ritrascrivendolo vien fuori: $\forall x, (\text{uomo}(x) \rightarrow \text{mortale}(x))$, tenendo conto che Socrate è un uomo, pertanto si dirà $\text{uomo}(\text{Socrate})$, che se pensate al booleano, sì, darà **true**.

3.7.2 Calcoli logici

Per ottenere il risultato è necessario che si utilizzino delle regole di calcolo

Regola di eliminazione del quantificatore universale

Il discorso è: Come si risolve il \forall ?

$$\frac{\forall x, T(\dots, x, \dots), c \in C}{T(\dots, c, \dots)}$$

Si ok, ma come lo realizziamo?

Con questa super mega iper formula possiamo finalmente derivare la nostra conclusione a partire dalle asserzioni iniziali.

1. $\text{uomo}(\text{Socrate})$
2. $\forall x, \text{uomo}(x) \rightarrow \text{mortale}(x)$
3. $\text{mortale}(\text{Socrate})$

Andiamo a scrivercela sostituendo alla formula \rightarrow

$$\frac{(\forall x, \text{uomo}(x) \rightarrow \text{mortale}(x)), \text{Socrate} \in C}{\text{uomo}(\text{Socrate}) \rightarrow \text{mortale}(\text{Socrate})}$$

Ora andiamo a togliere il quantificatore universale (\forall detto in modo figo)

$$\text{fracuomo}(\text{Socrate}), \text{uomo}(\text{Socrate}) \rightarrow \text{mortale}(\text{Socrate}) \text{mortale}(\text{Socrate})$$

Cosa notiamo? Il "denominatore" della prima formula è diventato il "numeratore" della seconda, infatti vedete come abbiamo $\text{uomo}(\text{Socrate}) \rightarrow \text{mortale}(\text{Socrate})$?

A questo punto bisogna togliere anche l'implicazione, o meglio risolverla. Riflettendoci $A \rightarrow B$ a cosa è uguale? $\neg A \vee B$, in questo modo abbiamo risolto l'implicazione.

3.8 Altre regole in Logica del Primo Ordine

Abbiamo risolto il \forall , ok, ma l' \exists ? Introduciamo quindi il quantificatore esistenziale:

$$\frac{T(\dots, c, \dots), c \in C}{\exists x, T(\dots, x, \dots)}$$

Per completezza possiamo dedurre il fatto che

$$\begin{cases} \text{Se } \exists x, \neg T(\dots, x, \dots) = \neg \forall x, T(\dots, x, \dots) \\ \text{Se } \forall x, \neg T(\dots, x, \dots) = \neg \exists x, T(\dots, x, \dots) \end{cases}$$

Spiegato peggio, se dico che esiste un elemento, per cui non si verifica una proprietà, allora non per ogni elemento essa si verifica.

Spiegato ancora peggio, se uno solo non si verifica, allora significa che non tutte si verificano

Nel secondo caso invece se dico che per ogni x una proprietà non si verifica, allora non esiste alcun x per cui si verifica

Precisazione In effetti negare il \forall si tradurrebbe in "non tutte le x ", mentre è molto più semplice per l' \exists in cui si dice "non esiste", lo specifico perchè io mi ci confondevo spesso.

Capitolo 4

Prolog

Prima ancora di cominciare: Siccome mi seccava scaricarmi tutto l'ambiente di sviluppo Swi-Prolog, vi lascio qui sotto il link per avere il compilatore direttamente online che OVVIAMENTE non è utilizzabile all'esame, però fa comodo, ve lo assicuro. Link al magico sito

Data questa confusissima introduzione giungiamo a trattare più nello specifico il linguaggio Prolog. Quando parliamo di Prolog, infatti, smettiamo di ragionare in modo **imperativo** per passare al paradigma di **programmazione logica**.

Premessa: C'è (come lo è stato per Prog 1) da scaricarsi l'interprete di Prolog, si consiglia SWI-Prolog, che si appoggia ad Emacs come editor di testo.

(Sia per la stesura di questi appunti che per gli esercizi io ho sempre usato Sublime Text MA all'esame molto probabilmente dovremo usare quel che ci impongono loro, pertanto, meglio abituarsi da subito ad Emacs.)

4.1 Programmazione logica

Se prolog utilizza il paradigma di **programmazione logica**, quest'ultima non è rappresentata solo da Prolog, ci sono ovviamente altri linguaggi che lo fanno. Perché scegliere Prolog?

- Il formalismo è più semplice
- E' un linguaggio ad alto livello
- La semantica è comprensibile

Quello che è il nostro programma diventa un **insieme di formule** ed ha un enorme potere espressivo, mantenendo come chiave il fatto che la computazione effettiva è costruzione di una dimostrazione di una affermazione (Definita anche come goal, obbiettivo, meta).

4.1.1 Logica Matematica

Definizione Davis e Putnam: Per logica matematica si intende la dimostrazione automatica di teoremi, secondo Davis e Putnam la logica matematica implica la dimostrazione dei teoremi

Definizione Kowalski: Interpretazione procedurale di formule. Quindi in pratica qua si entra già più nel concetto di un linguaggio di programmazione.

4.2 Cos'è ProLog

Nel titolo di questa sezione la L maiuscola non è a caso, perchè Pro-Log sarebbe acronimo di **PRO**gramming **LOG**ic, ed è un linguaggio che si basa su una restrizione della logica del primo ordine (FOL).

4.2.1 Ambiti di applicazione

Generalmente prolog è utilizzato come linguaggio per gestire i Database, tendenzialmente alcuni DBMS (Database Management System) sono programmati

4.2.2 Caratteristiche di Prolog

- Si basa su una restrizione della logica del primo ordine
- Ha uno stile dichiarativo
- E' usato per determinare quando una affermazione è vera e quali vincoli abbiano fatto da discriminante tipo i vincoli sui valori da dare alle variabili che han generato la risposta

4.3 Formule Ben Formate e Forma Normale a clausole

Qualsiasi formula ben formata può essere riscritta in forma normale a clausole. Esistono due forme normali a clausole:

1. Forma congiunta:

La formula è una congiunzione di disgiunzioni di predicati o negazioni di predicati (letterali positivi e letterali negativi)

$$\bigwedge_i (\bigvee_j L_{ij})$$

2. Forma disgiunta:

E' una disgiunzione di congiunzioni di predicati o negazioni di predicati (letterali positivi e letterali negativi)

$$\bigvee_j (\bigwedge_i L_{ij})$$

4.3.1 Forma normale congiuntiva

La clausole che hanno al più un solo letterale positivo (sia con che senza letterali negativi) si chiamano cause di **Horn**

Spiegato meglio, perchè così non è chiaro in effetti, in pratica prendete una clausola a caso: $A \wedge B \vee \neg C$, è una clausola di Horn perchè c'è UN SOLO TERMINE (Letterale) che NON è

Negativo. (O Negato)

Precisazione: Se abbiamo un solo letterale positivo, esso è clausola di Horn pure non c'è nemmeno un letterale negativo, ne basta uno solo positivo.

Però occhio: Non tutte le formula ben formate si riescono a far diventare un insieme di clausole di Horn, che per la cronaca compongono i programmi Prolog o meglio, **i programmi prolog son collezioni di clausole di Horn**

Le suddette clausole rappresentano (lo si analizzerà successivamente) fatti, regole o interrogazioni (query/goals).

4.3.2 Linguaggio dichiarativo

Uno dei punti di forza di Prolog è il fatto che sia un linguaggio dichiarativo, quindi è pressoché esente dall'avere istruzioni, contiene solo fatti e regole, che dal passaggio precedente sappiamo essere delle **clausole di Horn**.

Ricordiamo che: Un fatto è una asserzione vera nel contesto che si descrive, tipo assioma, mentre la regola è qualcosa che serve per dedurre dei nuovi fatti **partendo** da quelli esistenti.

Un programma scritto in Prolog ci dà informazioni su un sistema, e vien chiamato **base di conoscenza** (Il programma eh, non il sistema.)

Inoltre, (*già detto in precedenza ma va ripetuto perchè sicuramente anche io stesso quando andrò a studiare da qua mi sarò già dimenticato*) un programma Prolog **non si esegue**, ma si **interroga**.

Quali sono le possibili domande da fargli? Ad esempio:

- Questa serie di fatti è vera?
E la risposta sarà Sì o No, True o False, 1 o 0, "Si broh" o "No frate".

Più precisamente questo sì sarebbe un "Sì, ho dimostrato il mio teorema per assurdo", perchè appunto ricordiamo che qua si sta parlando comunque di dimostrazione di teoremi

4.4 Sintassi Prolog

- Fatto/Asserzione: **nomefatto**.
- Regole: $c :- b_1, \dots, b_n$.
- Goal/Query: $?-q_1, \dots, q_n$.

Inciso: Queste vanno scritte nel terminale, non nel programma. Sono tipo richieste che noi facciamo in base al momento per intenderci.

Quando l'interprete prolog si trova di fronte una query (o goal) esegue in sequenza la unit resolution andando in sequenza sulle sue clausole, dalla prima all'ultima, e le valuta tutte perchè potrei avere parecchie differenti soluzioni, posso dimostrare più teoremi.

Ogni lettera avente un pedice tipo p_λ o q_κ sono tutti termini composti, notare che in molte implementazioni il prompt Prolog è anche un operatore che chiede al sistema di valutare il [goal](#)

Ogni espressione Prolog diventa **TERMINE**, ne abbiamo diversi esempi:

- Atomi:
E' una semplice sequenza di caratteri che inizia con carattere **Minuscolo** e può avere il ' _ ', oppure è un numero, o qualcosa racchiusa tra apici (' ')
- Variabili
- COmposizioni di altri termini (Da qui termine composto)

NB. Tutto ciò riguarda la sintassi, questo elenco è legato al "Come si scrive questa determinata cosa in Prolog"

Precisazione Ogni istruzione finisce con il punto, avete presente quando la vostra fidanzata capite che è innervosita con voi e alla fine delle frasi ci mette un '.' che vi fa gelare il sangue? Ecco, se qui non mettete il punto dopo ogni istruzione, vedrete come vi gireranno i **Censura** ;))))

Eccovi esempi di comandi corretti:

Ecco un esempio di comandi validi

```

foo          hello
Hello        sam
sam          hello_Sam
hello-sam    40+2
quarantaquattro-4
'hello'      'Hello'
'Hello Sam'
a1           '1a'
X                        _hello
_234         hello(X)
f(a)         f(a, b, c)
f(hello, Sam) f( a, b, c )
p(f(a), b)
hello(1, hello(x, X, hello(sam)))
t(a, t(b, t(c, t(d, []))))

```

Come si nota sono un po' di comandi a caso, ma privi di errori sintattici

Vediamo ora invece un esempio di comandi NON validi

Non validi

```

hello Sam    Hello Sam
hello sam    1a
f(a, b       f(a,
f a, b)      f (a, b)
X(a, b)      1(a, b)

```

In questo caso come vedete sono errori che tendenzialmente era possibile fare pure su Java, non è che si tratti di chissà che di complesso.

4.4.1 Le variabili (logiche)

La variabile logica è una sequenza alfanumerica che però inizia con un carattere maiuscolo (oppure con l'Underscore `_`), e se son composte solo dal simbolo `_` prendono il nome di Indifferenza o anonime.

Vengono istanziate (legate ad un valore) con il procedere del programma (Nella dimostrazione del teorema)

4.4.2 Termini Composti

In cosa consiste una composizione di termini? In un **funtore** (Simbolo funzione, o predicato definito come atom) + una sequenza di termini racchiusi tra parentesi tonde e separati da virgole. Questi ultimi sono come gli argomenti dei metodi che facevamo in java, stesso identico concetto.

Non serve nemmeno essere uno spazio tra funtore e parentesi di sinistra, per via di caratteristiche del sistema di parsing di prolog

4.5 Le Regole

Sono utilizzabili per esprimere definizioni:

- Se X è un animale ed X ha le squame, X è un pesce

Ma in modo informale una regola alla fine è una formula ben formata, ed è composta da una testa e da un corpo (collegate da un operatore) quindi per ipotesi, una possibile regola potrebbe essere $A :- B$, concettualmente si legge A è implicata da B .

La testa di una regola è il conseguente di una implicazione logica, cioè quello che consegue dal corpo, che è appunto l'antecedente.

$A :- B$

si può tradurre in $B \rightarrow A$, ora proviamo a ritradurre il nostro esempio del pesce:

$\text{pesce}(X) :- \text{animale}(x), \text{ha_le_squame}(X)$

In cui la virgola ovviamente è un and (\wedge)

Attenzione: già questo esempio presenta una vulnerabilità, nel senso che per intenderci, essere un pesce implica di aver le squame, MA essere un animale ed avere le squame non implica essere un pesce.

4.6 Regole di ricorsione

Proviamo a definire il concetto di un antenato, che è l'esempio più semplice per capire come funzionano le formule ricorsive. Ci conviene ancora ragionare sulle nostre definizioni

```
antenato(X, Y) :- genitore(X, Y).
antenato(X, Y) :- genitore(Z, Y), antenato(X, Z).
```

Traducendolo:

La prima riga si legge: **SE** X è **genitore** di Y **ALLORA** X è **antenato** di X.

La seconda riga invece è appena appena più complessa, merita un ritorno a capo solo per lei:

SE X è **antenato** di Z **E** Z è **genitore** di Y **ALLORA** X è **antenato** di Y

4.7 L'interprete prolog: Interrogazioni

Come detto in precedenza possiamo chiamarle interrogazioni, query, goal, non sono altro che comunicazioni dirette all'interprete che una volta fatto partire ci presenterà true o false.

Un esempio di query:

```
?- libro(kowalski, prolog).
```

Prolog ti restituirà come abbian detto prima true o false, yes o no, insomma ci siamo capiti.

Volendo io posso interrogare anche il programma usando delle variabili esistenziali. In pratica tutte le variabili Prolog le istanzia quando prova a darti una risposta, e queste vengono mostrate nella tua risposta, per esempio:

libro(AUTORE, prolog) si legge come: CHI E' L'AUTORE DI PROLOG? (Un folle di sicuro, ma va be'.)

4.8 Unificazione: introduzione

L'operazione di istanziazione di variabili durante la prova di un predicato è il risultato di una procedura particolare detta **Unificazione**

Dati due termini, la procedura di unificazione crea un insieme di sostituzioni delle variabili, e questo insieme permette di rendere uguali i due termini.

Tradizionalmente la procedura di unificazione costruisce un insieme di sostituzioni che prende il nome di "Most general unifier (indicato con MgU)" (No, fan della F1 non c'entra nulla con l'MGU-K o H :C)

Noi non faremo unificazioni, ci pensa l'interprete Prolog, che usa le unificazioni appunto. L'interprete Prolog stupido, che esegue alitmicamente operazioni semplici, deve tenere

traccia di tutte le unificazioni, quindi rinomina le variabili che userà durante il processo,

Come testiamo questa cosa? Prendiamo le due espressioni che vogliamo testare, le poniamo con il simbolo uguale in mezzo, e ci darà il risultato. Possiamo chiedergli $42 = 42?$ e $42=x$ e ci dà yes in entrambi questi casi

4.8.1 Most General Unifier

E' il risultato finale della procedura di valutazione, o meglio, di prova del Prolog.

Il modo più comodo per vedere appunto come la procedura di unificazione funziona è di usare l'='

4.9 Le Liste in Prolog:

Si definisce una lista in Prolog racchiudendo gli elementi (termini e/o variabili logiche) della lista tra parentesi quadre e si separano con le virgole. Gli elementi di una lista in Prolog possono essere termini qualsiasi o liste.

[] indica la lista vuota.

Ogni lista non vuota può essere divisa in due parti, la testa e la coda, che sono rispettivamente il primo elemento e "tutti gli altri". Un po' come in F1, la testa è la Mercedes, la coda son tutte le altre squadre (O la Juve in Serie A negli ultimi anni).

4.10 L'operatore |

Si usa per separare e distinguere tra inizio e la coda di una lista. BONI, NON TRA LA TESTA E LA COSA, ma tra alcuni elementi e la nostra lista

Prolog lavora su strutture ad albero, infatti i programmi sono delle vere e proprie strutture per i dati, e sono manipolabili (mediante predicati extra-logici, cioè che vanno oltre a quelli del programma stesso)

Inoltre, già detto varie volte, Prolog è un linguaggio che sfrutta la **Ricorsione**, in cui manca una nozione semplice di assegnamento.

Se con gli algoritmi si studiava il metodo di soluzione di una serie di problemi, in questo caso ci si concentra direttamente sulla specifica del problema.

4.11 La differenza tra Clausola semplice e Clausola di Horn

Una possibile clausola può essere l'implicazione: $A \rightarrow B$, che è traducibile in $\neg(A \vee B)$ ed è leggibile in diversi modi, tutti coincidenti.

- B è **implicato** da A

- Se A allora B
- A implica B

Se invece di esserci A e B ci fossero due insiemi di κ e λ termini avremo che:

$$(A_1, A_2, \dots, A_\kappa) \wedge \neg(B_1, B_2, \dots, B_\lambda)$$

A e B assumono nome di **letterali**, e son positivi quando non presentano la negazione (\neg).

La clausola di Horn oggettivamente non è altro che una di queste clausole MA che ha MASSIMO, AL PIU', NON PIU' DI UN letterale positivo.

In Prolog alla fine quel che si verifica è questo:

- **Fatti:** A. (E' il caso limite in pratica)
- **Regole:** $A :- B_1, \dots, B_n$
- **Goals/Query/Interrogazioni:** $:- B_1, \dots, B_n$
Nella trasformazione di DeMorgan viene negato perchè è una clausola da aggiungere, per questo si presenta con questa notazione, ma noi programmatori scriveremo un letterale positivo od una congiunzione di letterali positivi
- **Contraddizioni:** fail

4.12 Un programma logico

Sì, ok, ma con questo fantasmagorico linguaggio ci si può fare almeno $c = a + b$?

Sì, si può, (ed è più semplice farlo in assembly), e si deve ragionare pensando alla funzione "successore", che è una funzione in N , che consentirà di sviluppare un programma di questo tipo:

```
sum(0, X, X).
sum(s(X), Y, s(Z)) :- sum(X, Y, Z).
```

's' sta per **successore**, proviamo a leggerlo (ricorsivamente):

Il programma verrà interrogato in questo modo:

$\exists X \text{ sum}(s(0), 0, X) \{X / s(0)\} \exists X \text{ sum}(s(s(0)), s(0), W) \{W / s(s(s(0)))\}$ MA Scritto in Prolog divente

```
:- sum(s(0), 0, N) {N s(0)}
:- sum(s(s(0)), 0, N) {W s(s(s(0)))}
```

Spiegazione: Il modo in cui va ragionato è ricorsivo, nel senso, siccome si è nel campo dei naturali si ha uno 0, un centro, ed il nostro caso base chi è? L'elemento neutro rispetto alla somma (0). $\forall x \in N \text{ sum}(0, X) = X$

Perchè ha 3 argomenti e non solo due? Semplicemente i primi due sono addendi ed il terzo è un risultato, nulla di che. Si legge così:

La somma di $X + Y$ è uguale a Z SE la somma del successore di $X + Y$ dà il successore di Z . Quindi? Se ho $3 + 4 = 7$, allora $4 + 4 = 8$. Cioè all'atto pratico richiami per Y volte il successore di X , che quindi chiamerà Y volte il successore di Z , e Z diventerà la somma effettiva dei nostri $X + Y$.

4.13 Sostituzioni

Già dall'esempio qui sopra si nota che $W / s(s(s(0)))$ e $N / s(0)$ sono due sostituzioni, ma in che senso? Praticamente ci dicono con quali valori (che potrebbero pure essere altre variabili) possiamo sostituire le variabili in un termine.

Di solito si denota una sostituzione con questo formalismo:

$$\sigma = \{X_1/v_1, X_2/v_2, \dots, X_\kappa/v_\kappa\}$$

Più nello specifico una sostituzione può essere considerata anche come *funzione* applicabile ad un termine: $\sigma : T \rightarrow T$ dove T è l'insieme di termini.

No, non è l'unico modo è un possibile modo, di fatto basta un comando del tipo `sum(X,Y):- S is X+Y` e ti fa la somma.

4.14 Esecuzione di un programma

Una computazione all'atto pratico è una dimostrazione (tramite le regole di risoluzione) del fatto che una formula sia verificabile (e che quindi sia un teorema).

Va determinata una sostituzione per le variabili della query per cui la query segue logicamente dal programma. Per esempio, se ho un programma **P** ed una query " $- p(t_1, t_2, \dots, t_m)$ " (Ricordandoci sempre che la query NON è dentro al programma, o comunque non è nel file sorgente del programma) allora:

$\left\{ \text{Se } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sono variabili che compaiono in } t_1, t_2, \dots, t_m \text{ ALLORA } \exists X_1, X_2, \dots, X_n. p(t_1, t_2, \dots, t_m) \right\}$

Ed il nostro obiettivo sarà quello di trovare una sostituzione del tipo:

$$s = \{X_1/s_1, X_2/s_2, \dots, X_n/s_n\}$$

Da dove cicciano fuori queste s ? Sono dei termini, per cui si ottiene che

$$P \vdash s[p(t_1, t_2, \dots, t_m)]$$

E P cos'è? Un programma. E un programma cos'è? Un'insieme di clausole di Horn. Ed una clausola di Horn cos'è? E' una formula avente al più UN letterale positivo.

- Dato un certo insieme di clause di Horn è possibile derivare la clausola vuota SE ce n'è almeno senza testa. **Tradotto:** Se abbiamo una query Q_0 da provare
- Si deve dimostrare che da $P \cup Q_0$ si possa derivare la clausola vuota \implies Sì, come al solito, mediante dimostrazioni per assurdo applicando il **Magico principio di risoluzione**

Sì, ok, ma come?

C'è un problema di fondo: Se provassi tutte le risoluzioni possibili per ogni passo e aggiungessi le clausole inferite all'insieme di partenza avresti un' **ESPLOSIONE** combinatoria.

Per evitarsi questo problema va adottata una strategia di soluzione che sia opportuna (No, ci sarà sempre tra le palle il **Magico principio di risoluzione** , solo più vincolato.

4.15 Risoluzione ad INPUT LINEARE (SLD)

Prolog dimostra la veridicità o meno di una query con una sequenza di passi di risoluzione (Sì, sequenza di passi, algoritmo, efficienza, $\Theta n \log n$)

Infatti in Prolog la risoluzione avviene sempre tra l'ultima query derivata in ciascun passo e una **clausola di programma**, ma non accade MAI tra due clausole di programma o fra una clausola ed un goal derivato precedentemente.

Riassumendo: Quello che si è appena descritto è definita **Definizione SLD** (Selection function for Linear and Definitie sentences Resolution; in cui le "frasi lineari" sono essenzialmente delle clausole di Horn).

Esempio di risoluzione SLD :

- Partendo dalla Query $Q_i \equiv ? - A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,m}$
- e dalla regola: $A_r : - B_{r,1}, B_{r,2}, \dots, B_{r,m}$
- se esiste un unificatore σ tale che $\sigma[A_r] = \sigma[A_{i,1}]$
Allora si otterrà una nuova query G_{i+1} tale che:

G_{i+1} si genera in pratica dal principio di risoluzione:

1. A_r
2. $\neg A_{i,1} \vee \neg A_{i,2} \vee \dots \vee \neg A_{i,m}$
3. $A_{i,1} \vee \neg B_1, \neg B_2, \dots, \neg B_m$
4. $\neg B_1 \vee \neg B_2 \dots \vee \neg B_n \vee \neg A_{i,2}, \vee \neg A_{i,2}, \dots, \vee \neg A_{i,2}$

$$G_{i+1} \equiv ? - B'_{e,1}, B'_{e,1}, \dots, B'_{e,1}, A'_{e,1}, A'_{e,1}, \dots, A'_{e,1}$$

E questo è solo **uno** dei passi di risoluzione eseguiti dal sistema Prolog, in cui

- Le A' e le B' sono risultati $\sigma[A] = A'$ e $\sigma[B] = B'$

Attenzione: La scelta di unificare la **prima** sottoQuery Q_i E' arbitraria (anche se comoda); Scegliere $A_{i,m} \vee A_{i,c}$ con $c \in [1, m]$ casuale sarebbe comunque accettato.

Se partissi invece dalla query $Q_i \equiv ? - A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,m}$ e dalla regola (dal fatto) A_r , se esiste un unificatore σ tale che $\sigma[A_r] = \sigma[A_{i,1}]$, allora ottieni una nuova query $G_{i+1} \equiv ? - A'_{e,1}, A'_{e,1}, \dots, A'_{e,1}$, ovvero, la nuova query ha dimensioni minori rispetto alla precedente, avendo m-1 sotto-query.

Come già detto infatti nella risoluzione SLD, il passo di risoluzione avviene tra l'ultima query e una clausola di programma.

Osservazione: Per coloro che usano anche le slide noteranno che questa parte non è altro che una riscrittura delle suddette a parole di uno che le sta studiando, per dirvi, quello che nelle slide si chiama Goal lo chiamo query, ma quando una spiega con le slide, un velo di copiatura ci sarà sempre.

Che si chiami goal query o interrogazione, è sempre e comunque un teorema.

Come può essere il risultato finale?

- **Successo**
Viene generata la clausola vuota, ovvero se per n finito Q_n è uguale alla clausola vuota $Q_n \equiv :-$
- **insuccesso finito** se per n finito Q_n non è uguale a $:-$ e non è più possibile derivare un nuovo **risolvente** da Q_n ed è una clausola di programma
- **insuccesso infinito** Se è sempre possibile derivare nuovi risolventi tutti diversi dalla clausola vuota

La sostituzione di risposta è la sequenza di unificatori usati; applicata alle variabili nei termini del goal iniziale dà la risposta finale.

Durante il processo di generazione di query intermedie si costituiscono delle varianti dei letterali e delle clausole coinvolte mediante la rinominazione di variabili

Una variante per una clausola C è la clausola C' ottenuta semplicemente rinominando le variabili di C (Renaming).

Esempio: $p(X) :- q(X, g(Z))$. è equivalente alla clausola con variabili con nomi diversi: $p(A) :- q(A, q(B))$. \rightarrow Cambiando il nome delle variabili non ottieni nulla di diverso (a meno che esse nel programma sono più volte usate, come in Java eh) MA il codice potrebbe fare schifo da leggere.

Infatti possono esserci più clausole utilizzabili per applicare la risoluzione della query corrente, nello specifico ci sono due strategie di ricerca diverse che si possono adottare.

- Depth first: (In profondità) Si sceglie una clausola e la si mantiene fissa finchè non si arriva alla clausola vuota o all'impossibilità di nuove risoluzioni, ed in quest'ultimo caso si riconsiderano le scelte fatte in precedenza.
- Breadth First: (In ampiezza) Si considerano in parallelo tutte le alternative

Prolog adotta una strategia di risoluzione in profondità con **Backtracing** cioè in pratica

- Permette risparmio di memoria MA
- NON è **completa** per le clausole di Horn

4.16 Alberi di derivazione SLD

Dato un programma logico P (Insieme di clausole), ed una query Q_0 con una regola di calcolo R, un **albero SLD** per $P \cup \{Q_0\}$ via R, è definito sulla base del processo di prova visto precedentemente

- Ciascun nodo dell'albero è una query (Possibilmente vuota)
- La **radice** dell'albero è la query Q_0 .
- Dato il nodo: $\text{:- } A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \dots, A_\kappa$, se A_m è il sottogoal **selezionato** dalla regola di calcolo R, allora questo nodo (genitore) ha un nodo figlio per ciascuna clausola del tipo:

- $C_i \equiv A_i \text{ :- } B_{i,1}, \dots, B_{i,q}$
- $C_\kappa \equiv A_\kappa$

Di P tale che A_i e A_m (A_κ e A_m) sono unificabili attraverso la sostituzione più generale σ

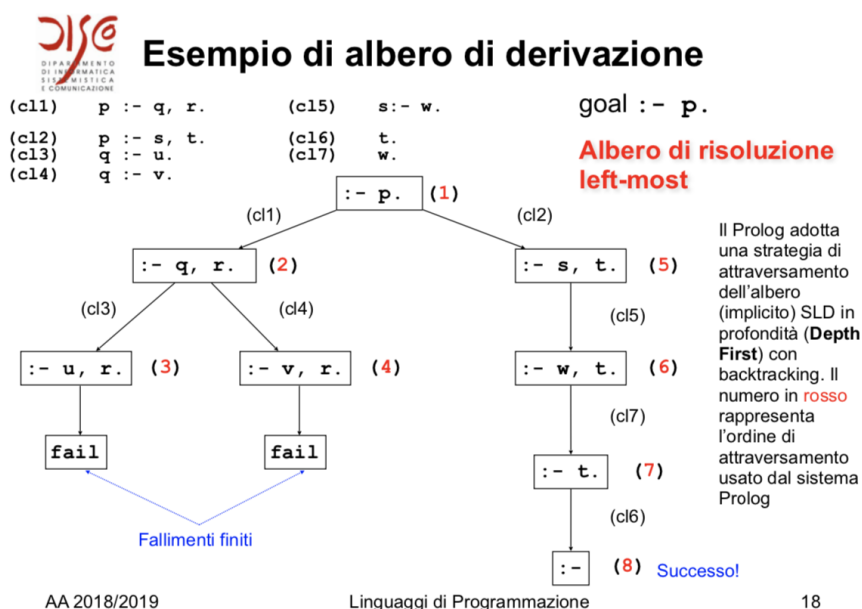
- Il nodo figlio è etichettato con la clausola goal
 $\text{:- } \sigma[A_1, \dots, A_{m-1}, B_{i,1}, \dots, B_{i,q}, A_{m+1}, \dots, A_\kappa] \text{ :- } \sigma[A_1, \dots, A_{m-1}, A_{m+1}, \dots, A_\kappa]$
 E il ramo dal nodo padre al figlio si etichetta sostituendo σ dalla clausola selezionata C_i, C_κ
- Il nodo vuoto indicato da :- non ha figli

Just a remainder: La regola R è variabile:

- Può essere scelta dalla sottoquery più a sinistra (se c'è) \rightarrow Left - most
- Può essere scelta dalla sottoquery più a destra (se c'è) \rightarrow Right - most
- Oppure può anche essere scelta da una sottoquery a caso
- Infine può essere scelta dalla sottoquery migliore

Prolog in pratica adotta la regola del Left Most, quindi considera la sottoquery più a sinistra e l'albero SLD (implicito) generato dal sistema Prolog ordina i figli di un nodo secondo l'ordine dall'alto verso il basso delle regole e dei fatti del programma **P**.

Illustrazione presa dalle slide

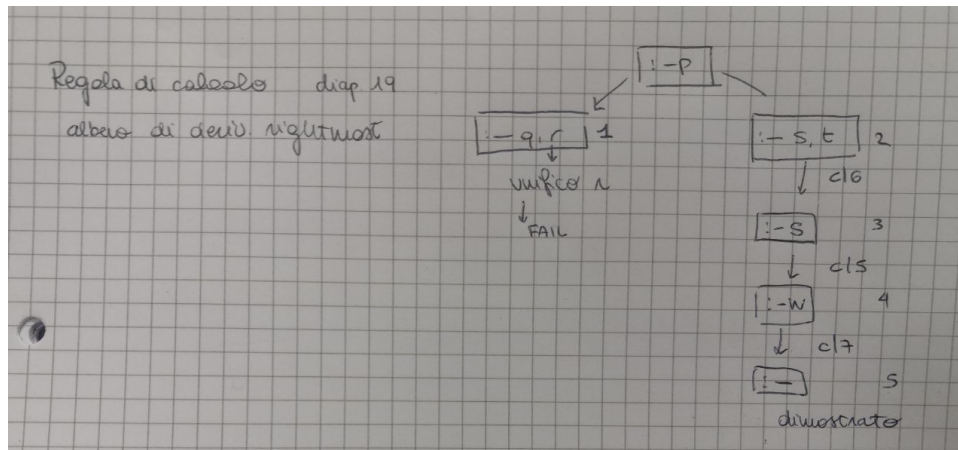


Cerchiamo di ragionare bene sull'albero visto nell'esempio qui sopra. Abbiamo una serie di clausole, sono le varie cl1, 2, 3, ..., 7. Ora, quello che accade è che da destra verso sinistra andiamo ad applicarle alla clausola principale.

Non so se è stato già detto, tutto questo casino è semplicemente quello che effettua Prolog per quando dimostra un teorema

Quindi quel che si verifica è proprio che si hanno due fail, e chiudiamo poi con una clausola vuota (:-) quindi quello che concludiamo è che tutto è andato a buon fine.

Stesso esercizio MA con tecnica Right-Most fatto da Giulia



4.17 La regola di calcolo

Per ogni ramo di un albero SLD corrisponde una derivazione SLD. In pratica ogni ramo che termina con il nodo vuoto $(:-)$

La regola di calcolo influisce sulla scrittura dell'albero per quanto concerne sia l'ampiezza che la sua profondità

La cosa che va garantita è che tutti i cammini di successo siano uguali concettualmente, (la parola regola si incontra per l'ennesima volta tra l'altro, prima son state la regola di inferenze e la regola di Prolog) Perciò alla domanda "quante accezioni del concetto di regola sono state menzionate", si risponderà: 3 Le regole di calcolo **NON** influisce su **correttezza** e **completezza**, pertanto qualunque sia R , il numero di cammini di successo (se finiti obv) è lo stesso in qualsiasi albero SLD costruibile per $P \cup \{G_0\}$