LOGICA 0

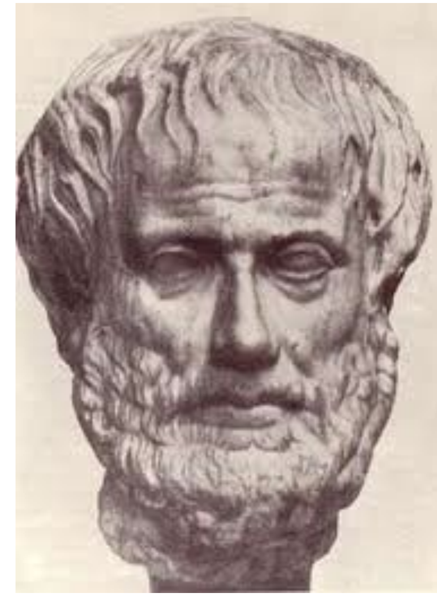
Stefania Bandini

LOGICA

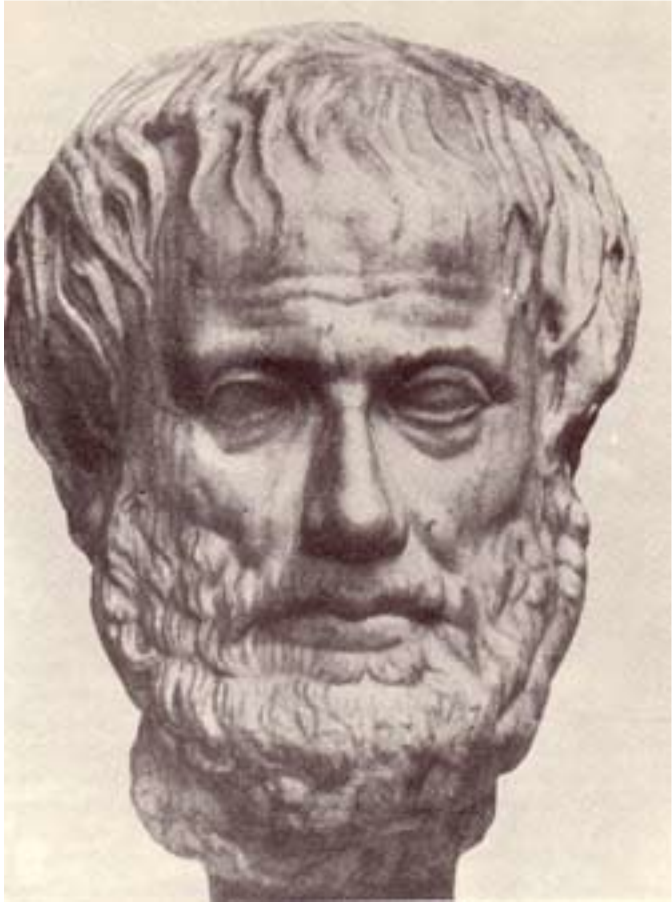
La **logica** è lo studio del ragionamento e dell'argomentazione e, in particolare, dei procedimenti inferenziali, rivolto a chiarire quali procedimenti di pensiero siano validi e quali non validi.

Fanno parte degli studi della logica anche quelli per le espressioni verbali dell'analisi logica della proposizione e dell'analisi logica del periodo.

La parola "logica" deriva dal greco *logos*, ovvero "parola, pensiero, idea, argomento, ragione".



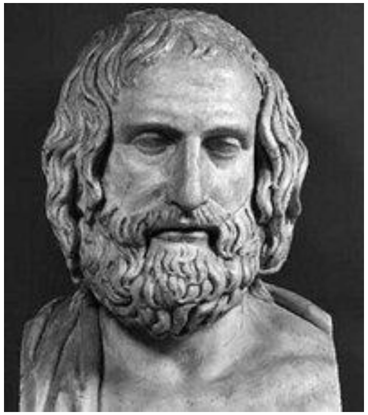
LOGICA Vs LOGICA MATEMATICA



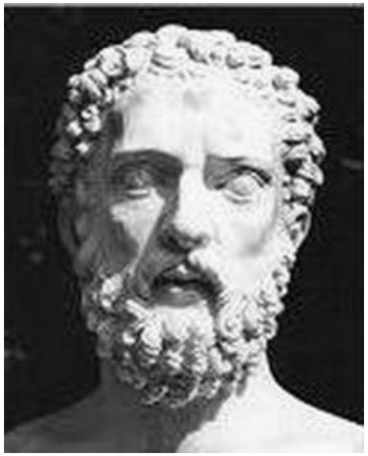
DIALETTICA
PARADOSSI
DIMOSTRAZIONI

RETORICA – DIALETTICA

SOFISTI



Protagora
Abdera 486 a.C. - Mar Ionio 411 a.C.



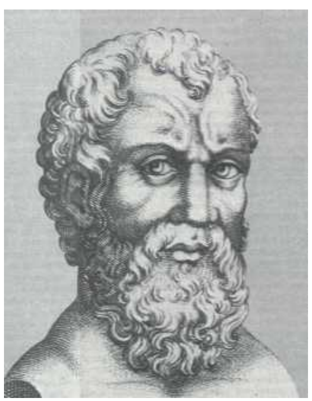
Gorgia
Lentini ca. 485 a.C. - Larissa ca. 375 a.C.

PARADOSSI

MENTITORE

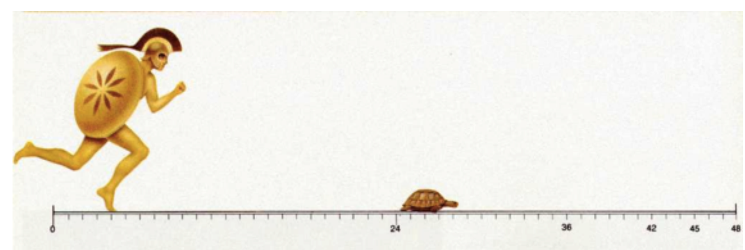
Epimenide (+ EUBULIDE)
(Cnosso VIII/VII a.C.)

TUTTI I CRETESI SONO BUGIARDI

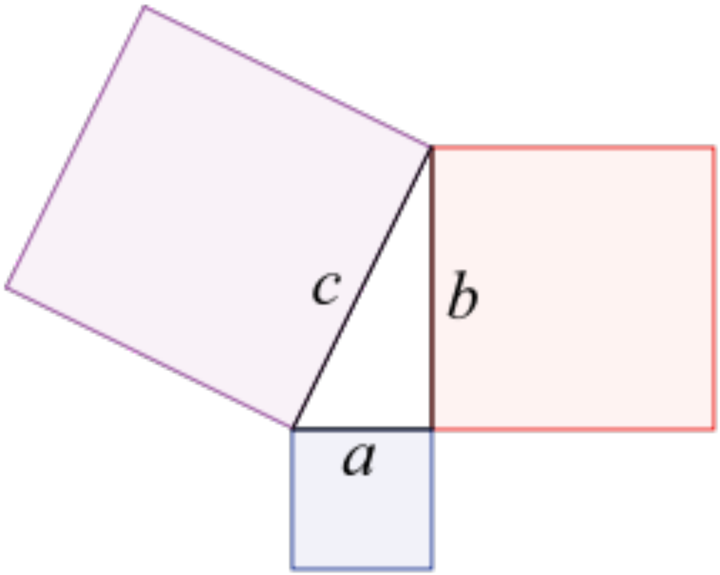


ACHILLE E LA TARTARUGA

Zenone
(Elea 489 a.C. – Larissa 431 a.C.)



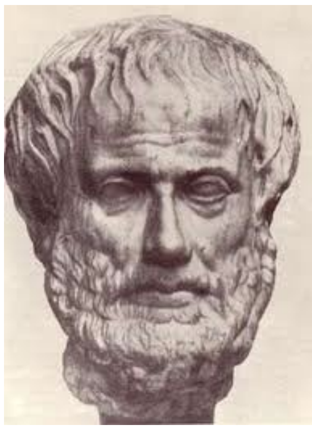
DIMOSTRAZIONI



«La matematica e la logica, dal punto di vista storico, sono state due discipline completamente distinte. Comunque tutte e due si sono sviluppate nell'età moderna: la logica diventando sempre più matematica e la matematica sempre più logica. La conseguenza è che ora è completamente impossibile tracciare tra le due discipline una linea di demarcazione; sostanzialmente le due sono in realtà una disciplina sola» (Russell, 1970)

«Il rapporto fra logica e matematica si risolve nella cultura greca in termini di reciproca indipendenza tecnica e dipendenza metodologica della matematica dalla logica, nel senso che l'edificazione teorica della prima ha bisogno dei metodi e degli strumenti della seconda» (Freguglia, 1978).

DIMOSTRAZIONE



Il termine "dimostrazione" ha, secondo il dizionario, almeno 5 significati:

1 - esempio, testimonianza
2 - spiegazione, argomentazione, ragionamento
3 - conferma, attestazione, prova
4 - presentazione, performance
5 - manifestazione, corteo, comizio

Una dimostrazione consiste nel verificare, nel senso di mostrarne la ragionevole verità rendendo innegabile un'affermazione.

Aristotele (384 a.C.-322 a.C.) fu il primo ad analizzare e definire il concetto di dimostrazione: attraverso varie forme di ragionamenti si arriva a provare un'affermazione.

Averroè (filosofo, medico, matematico e giurista arabo/spagnolo 1126-1198) portò avanti questo concetto distinguendo fra dimostrazione dell'esistenza e quella dell'essenza.

DIMOSTRAZIONI

Dimostrazione come impegno a verificare le conoscenze attraverso l’esperienza e la continuità; la volontà di imparare dagli errori; la disponibilità ad abbracciare il dubbio, il paradosso e l’incertezza.

Secondo Galileo Galilei (fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano 1564-1642) ogni fatto, evento o fenomeno naturale va compreso e analizzato passandolo al vaglio dell’esperimento, cioè quel metodo di verifica che permette di accertare concretamente ed empiricamente l’esattezza delle teorie fisiche. Quanto più si riuscirà a riprodurre concretamente il fenomeno previsto dalle teorie, tanto più verrà certificato il dominio sul fenomeno stesso, quindi non solo la capacità di replicarlo a piacere e di prevederlo con esattezza.

LOGICA Vs INFORMATICA

LOGICA E INFORMATICA

La logica e lo studio delle forme del ragionamento, con l'obiettivo principale di riconoscere e individuare le forme dei ragionamenti corretti, e distinguerle da quelli scorretti. Per questo motivo essa viene a volte chiamata logica "formale", o anche "simbolica", perché le "forme" del ragionamento vengono espresse mediante l'uso di simboli, che consentono di astrarre dal contenuto dei ragionamenti stessi.

Astrarre significa semplificare: sbarazzandosi dei dettagli, si guardano oggetti diversi da uno stesso punto di vista, e gli si può dare un trattamento uniforme.

LOGICA E INFORMATICA

Si considerino ad esempio questi i due ragionamenti:

a) Se nevica, la temperatura è di $0^o C$.
Nevica.
Quindi la temperatura è di $0^o C$.

b) Se la matematica è un'opinione, allora $1 + 1 = 0$.
La matematica è un'opinione.
Quindi $1 + 1 = 0$.

LOGICA E INFORMATICA

I due ragionamenti hanno evidentemente la stessa **forma**, anche se essi riguardano concetti diversi e diverso e il contenuto di verità delle proposizioni in essi coinvolte.

Possiamo identificare la loro forma comune utilizzando simboli, A e B, al posto delle proposizioni:

Se A allora B.
A.
Quindi B.

LOGICA E INFORMATICA

Per quel che riguarda l'impatto della logica sull'informatica, essa è innanzitutto uno strumento di base per la meta-informatica: ha portato, a definire la nozione di **calcolabilità**, ai risultati di **indecidibilità**, alla **classificazione dei problemi** secondo la loro **complessità**.

La logica ha fornito all'informatica molti concetti fondamentali, come quello di **semantica formale**, che e alla base **della semantica denotazionale dei linguaggi di programmazione**, e metodologie generali come il **trattamento assiomatico di informazioni**, che trova applicazione, ad esempio, nella **dimostrazione di proprietà di programmi**.

LOGICA E INFORMATICA

La logica svolge un ruolo interno e pratico rispetto all'informatica, dove trovano applicazione i suoi metodi e gli strumenti da essa forniti. La logica è infatti il formalismo fondamentale per la rappresentazione della conoscenza in **intelligenza artificiale**, dove trovano applicazione i **metodi automatici per la dimostrazione di teoremi**, studiati e realizzati prima ancora della loro applicazione nella costruzione di sistemi di informatica e intelligenza artificiale.

Inoltre, i **linguaggi di specifica formale** e la **specifica algebrica di tipi astratti di dati** si fondano su metodologie logiche.

Uno dei terreni in cui la logica gioca un ruolo pratico essenziale e relativo ai paradigmi di calcolo: i due fondamentali sono quelli della **risoluzione** e della **riduzione**, associati rispettivamente alla **programmazione logica** (es. **PROLOG**) e alla **programmazione funzionale** (es. **LISP**).

LOGICA

FORMULE BEN FORMATE

Diamo qui di seguito una definizione induttiva dell'insieme delle formule ben formate $\mathcal{F}$ di un linguaggio $\mathcal{L}$. Questa costruzione risulterà utile quando tratteremo di sistemi formali e logiche

Introduciamo un insieme finito non vuoto $\mathcal{A}tom$, detto insieme degli atomi e un insieme finito non vuoto Op di operatori (o connettivi) che, per semplicità, supponiamo unari (li indichiamo con "$\star$" prefisso) e binari (li indichiamo con "$\circ$" infisso). Sia $\mathcal{L} = \mathcal{A}tom \cup Op \cup \{(,)\}$.

L'insieme $\mathcal{F}$ delle formule ben formate *costruite su un insieme $\mathcal{L}$ è l'insieme definito induttivamente come segue*

1. *Se A è un elemento di $\mathcal{A}tom$ allora $A \in \mathcal{F}$;*
2. *Se $A \in \mathcal{F}$ e $\star$ è un operatore unario allora $(\star A) \in \mathcal{F}$;*
3. *Se $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ e $\circ$ è un operatore binario allora $(A \circ B) \in \mathcal{F}$.*

PRINCIPIO DI INDUZIONE STRUTTURALE

Un'importante conseguenza del fatto che l'insieme delle formule ben formate sia stato definito induttivamente è che per esso vale un principio di induzione strutturale. Un tale principio si rivela molto utile nel verificare che una data proprietà vale per tutti gli elementi dell'insieme: esso riconduce la verifica al caso base e al caso induttivo della costruzione degli oggetti appartenenti all'insieme.

Per dimostrare che una proprietà Q vale per ogni formula A di $\mathcal{F}$ basta dimostrare

- *Passo base*
  - *Q vale per ogni formula A di $Atom$;*
- *Passo induttivo*
  - *Se la proprietà Q vale per A allora vale per $(\star A)$, per ogni operatore unario $\star$;*
  - *Se la proprietà Q vale per B e C, allora vale per $(B \circ C)$, per ogni operatore binario $\circ$.*

PRINCIPIO DI INDUZIONE STRUTTURALE

È chiaro che non tutte le stringhe di $\mathcal{L}$ sono formule ben formate, tuttavia, data una formula A possiamo considerare A come una stringa di simboli di $\mathcal{L}$. Ad esempio se $A = (\star(B \circ (\star(C \circ D))))$, con $B, C, D \in Atom$, possiamo considerare A come la sequenza di simboli $\langle (, \star, (, B, \circ, (, \star, (, C, \circ, D,),),),) \rangle$, o anche come la stringa: $(\star(B \circ (\star(C \circ D))))$.

PRINCIPIO DI RICORSIONE STRUTTURALE

ogni formula ben formata non atomica comincia con "(" e termina con ")".

In base a tale caratteristica, le parentesi si possono omettere imponendo una precedenza fra i connettivi. Ad esempio, in una logica in cui i connettivi siano: $\neg, \rightarrow, \wedge$ si può convenire che il connettivo $\neg$ leghi più strettamente del connettivo $\wedge$, e che il connettivo $\wedge$ a sua volta leghi più strettamente del connettivo $\rightarrow$.

Supponiamo di avere la formula senza parentesi $\neg A \wedge \neg B \rightarrow C \wedge D \wedge E$.
La formula è univocamente letta nel seguente modo $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \wedge (D \wedge E)))$.

UNICITÀ DELLA SCOMPOSIZIONE

Per ogni formula ben formata A di $\mathcal{F}$ vale una (e una sola) delle seguenti proprietà:

1. $A \in \mathcal{A}tom$;
2. *Esiste un unico operatore unario* $\star$ *e un'unica formula* B *tale che* A *ha la forma* $(\star B)$;
3. *Esiste un unico operatore binario* $\circ$ *e due formule uniche* B *e* C *tali che* A *ha la forma* $(B \circ C)$.

Nel primo caso si dice che A è una formula *atomica* o un *atomo*, nel secondo che $\star$ è il suo *operatore principale* (o *connettivo principale*) e che B è la sua (unica) *sottoformula immediata*, nel terzo caso si dice che $\circ$ è il suo *operatore principale* e che B e C sono le sue (uniche) *sottoformule immediate*.

ALBERO SINTATTICO

Un albero sintattico $\mathcal{T}_s$ *è un albero binario coi nodi etichettati da simboli di* $\mathcal{L}$, *che rappresenta la scomposizione di una formula ben formata* X *come segue.*

1. *Se* X *è una formula ben formata atomica, l'albero binario che la rappresenta è costituito dal solo nodo etichettato con* X.

2a. *Se* $X = A \circ B$, X *è rappresentata dall'albero binario che ha la radice etichettata con* $\circ$ *e i cui figli sinistro e destro sono rispettivamente la rappresentazione di* A *e di* B.

2b. *Se* $X = \star A$, X *è rappresentata dall'albero binario che ha la radice etichettata con* $\star$ *e un unico figlio che è la rappresentazione di* A.

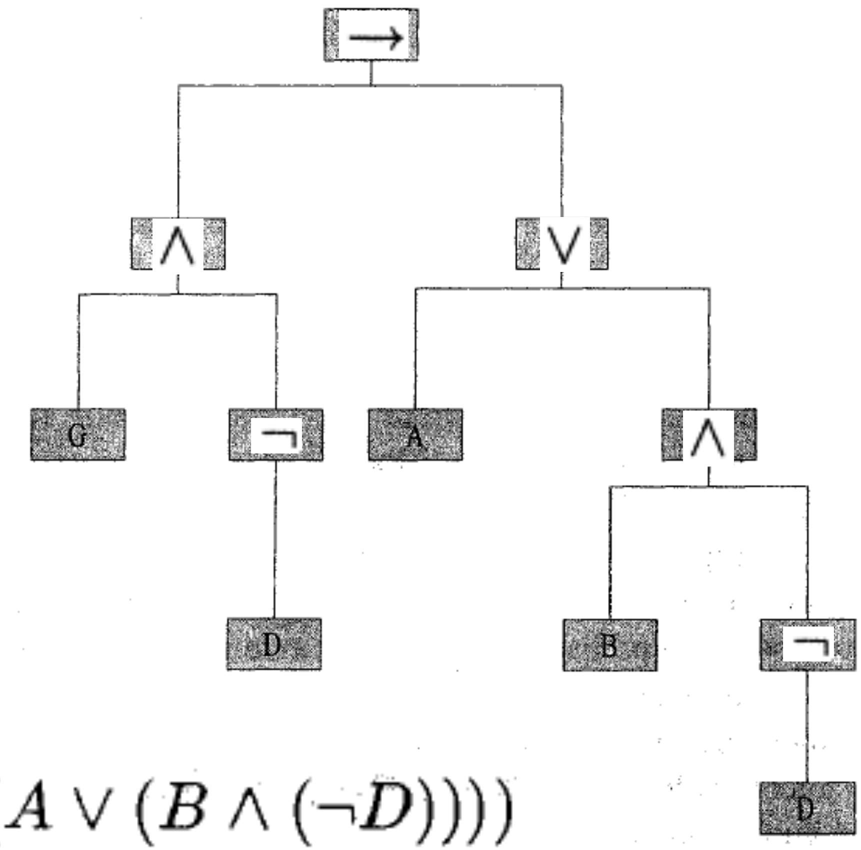
ESEMPIO: ALBERO SINTATTICO

Sia $Y = ((G \wedge (\neg D)) \rightarrow (A \vee (B \wedge (\neg D))))$, l'albero sintattico che rappresenta la scomposizione di Y è illustrato in figura Il nodo radice dell'albero è etichettato dal connettivo principale di Y, cioè $\rightarrow$. Il sottoalbero sinistro è etichettato dal connettivo principale della sottoformula $(G \wedge (\neg D))$, cioè $\wedge$. Il sottoalbero destro è etichettato dal connettivo principale della sottoformula $(A \vee (B \wedge (\neg D)))$, cioè $\vee$. Scomponendo la formula ricorsivamente e ponendo i connettivi delle sottoformule come etichette delle radici dei sottoalberi ad esse associati, si arriva alle foglie

$$foglie = \{G, D, A, B, D\}$$

Il principio di induzione strutturale permette di definire funzioni sull'insieme $\mathcal{F}$ delle formule ben formate ricorsivamente.

ESEMPIO: ALBERO SINTATTICO



$$((G \wedge (\neg D)) \rightarrow (A \vee (B \wedge (\neg D))))$$

Da questa definizione emerge come la struttura dell'albero binario rappresenta in maniera univoca la struttura della formula; inoltre tutti i nodi intermedi sono etichettati con operatori, e i nodi foglia con atomi.

SISTEMA FORMALE - SISTEMA LOGICO - LOGICA

Una logica Λ *è definita da*

- *Un insieme non vuoto (finito o al più numerabile)* $\mathcal{A}$ *di simboli, detto* alfabeto *di* Λ. *Una sequenza finita di elementi di* $\mathcal{A}$ *è detta* espressione *di* Λ.
- *Un sottoinsieme* $\mathcal{F}$ *delle espressioni di* Λ *chiamato l'insieme delle* formule ben formate *(o più semplicemente* formule) *di* Λ.
- *Un sottoinsieme* Ax *di* $\mathcal{F}$, *detto insieme degli* assiomi logici *o* assiomi *di* Λ.
- *Un insieme finito* $\mathcal{R}$ *di relazioni* $R_1, \ldots, R_n$ *tra formule di* Λ, *dette* regole di inferenza. *Per ciascuna* R_i *di* $\mathcal{R}$ *esiste un unico intero positivo* j *tale che, per ogni insieme costituito da* j *formule e per ogni formula* A, *si può effettivamente decidere se le* j *formule sono in relazione* R_i *con* A. *In caso positivo,* A *è detta* conseguenza diretta *delle* j *formule date mediante* R_i.

LINGUAGGIO E SEMANTICA

L'insieme $\mathcal{F}$ delle formule ben formate costituisce il *linguaggio* $\mathcal{L}$ della logica. Generalmente $\mathcal{F}$ viene definito in modo induttivo

La costruzione induttiva dell'insieme delle formule ben formate ci garantisce una proprietà chiamata *composizionalità* del linguaggio che è molto importante per associare un significato alle formule.

Normalmente ogni linguaggio (pensiamo all'italiano piuttosto che all'inglese o a un linguaggio di programmazione) associa al suo insieme di simboli iniziali un significato. Ad esempio in Pascal l'insieme dei simboli iniziali è l'insieme delle parole riservate $\{$**while**, **until**, $\ldots\}$ e a ciascun simbolo è associato un comando. Così in italiano, come in tutte le lingue parlate, possiamo considerare le parole (il vocabolario) come l'insieme dei simboli iniziali e, ovviamente, ogni parola assume un significato rispetto al mondo reale. Tuttavia, quando mettiamo insieme le parole e con esse costruiamo una frase, per mezzo di opportuni costruttori linguistici, l'interpretazione della frase dipende non solo dal significato delle parole ma dalla costruzione stessa della frase.

LINGUAGGIO E SEMANTICA

Pertanto, quando parliamo di "interpretazione" di un linguaggio ci riferiamo sia al significato associato ai suoi simboli iniziali sia all'estensione di tale significato alle frasi del linguaggio, per mezzo dei costruttori del linguaggio. In tal modo anche l'interpretazione ha un carattere composizionale.

Nel caso di un sistema formale, individuare il significato dei simboli iniziali ed estendere tale significato, mediante i costruttori del linguaggio, alle formule ben formate vuol dire fornire il sistema formale di una *semantica*. Associare ad una frase una semantica significa determinare il contesto di interpretazione della frase; a tale scopo viene fornito un insieme $\mathcal{B}$, detto *insieme dei valori di verità*, che contiene almeno due elementi e un insieme $\mathcal{T}$, sottoinsieme proprio di $\mathcal{B}$ ($\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$), detto *insieme designato a rappresentare il vero*. La semantica per le frasi verrà fornita definendo un'opportuna funzione (detta *funzione di interpretazione*) che le mappa in $\mathcal{B}$.

LINGUAGGIO E SEMANTICA

Solitamente $\mathcal{B}$ contiene esattamente due elementi $\mathcal{B}=\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$ (in tal caso la logica è detta "a due valori di verità": $\mathbf{t}$ sta per il vero, $\mathbf{f}$ sta per il falso), ma può anche contenerne tre, quattro, o un qualunque numero finito o infinito (anche non numerabile, come nel caso delle logiche "fuzzy"[3]); $\mathcal{T}$ è l'insieme dei valori che designano il vero. Nel caso della logica a due valori di verità, cioè nel caso $\mathcal{B}=\{\mathbf{t},\mathbf{f}\}$, si avrà $\mathcal{T}=\{\mathbf{t}\}$.

Alternativamente alle funzioni di interpretazione, si può studiare il significato di una formula in una "struttura" matematica o "realtà": invece di una notazione funzionale si adotta una notazione relazionale, basata sulla relazione di *soddisfacibilità* $\models$, dove $\models\subseteq \mathcal{M}\times\mathcal{F}$; $\mathcal{M}$ è una struttura e $\mathcal{M}\models A$ si legge "$\mathcal{M}$ modella A". In questo contesto una frase si dirà valida sse $\mathcal{M}\models A$ vale per ogni $\mathcal{M}$.

APPARATO DEDUTTIVO

Vediamo ora come è possibile manipolare una logica Λ utilizzando categorie formali o nozioni metalogiche, come regole di inferenza e assiomi, e mediante questi definire un sottoinsieme interessante di formule ben formate, cioè i teoremi di Λ. Introdurremo prima la nozione di dimostrazione, poi quella di teorema.

Le regole di inferenza di $\mathcal{R}$ spesso vengono scritte nella seguente forma:

$$\frac{A_1 \cdots A_n}{A}$$

dove le formule scritte al di sopra della riga orizzontale vengono chiamate *premesse* della regola e la formula scritta al di sotto della riga è detta la sua *conclusione*.

L'insieme Ax degli assiomi di una logica Λ può essere vuoto, finito o infinito. Particolarmente interessante è il caso in cui Ax è finito o descrivibile in maniera finita, cioè è decidibile.

Talvolta gli assiomi vengono scritti come regole di inferenza senza premesse, cioè se $A \in Ax$ scriveremo:

$$\overline{A}$$

APPARATO DEDUTTIVO

Dimostrazione

Una sequenza finita di formule $A_1, \cdots, A_n$ *di* Λ *è detta una* dimostrazione *o* prova *in* Λ *se, per ogni* i *compreso tra* 1 *ed* n, *o* $A_i \in Ax$, *cioè è un assioma di* Λ, *oppure è una conseguenza diretta, mediante una delle regole di* $\mathcal{R}$, *di alcune delle formule che la precedono nella sequenza.*

Teorema

Una formula A *di* Λ *è detta un* teorema *di* Λ *se esiste una dimostrazione di* Λ *che ha* A *come ultima formula. Tale dimostrazione è detta* una dimostrazione di A *in* Λ.

Indicheremo con $\vdash A$ il fatto che A è un teorema di Λ. In caso di ambiguità scriveremo $\vdash_\Lambda A$ oppure $\vdash_\mathcal{R} A$ a sottolineare che A ha una dimostrazione in Λ, oppure che A ha una dimostrazione mediante regole di $\mathcal{R}$. $\vdash_\Lambda A$ si legge anche: A è derivabile in Λ; $\vdash_\mathcal{R} A$ si legge anche: A è derivabile mediante $\mathcal{R}$.

APPARATO DEDUTTIVO

Conseguenza Logica

Sia Γ un insieme di formule, cioè $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$. Diciamo che una formula A è una conseguenza di Γ (lo scriviamo $\Gamma \vdash A$, che si legge "A si deriva da Γ") se esiste una sequenza di formule $A_1, \ldots, A_n$ tale che A è A_n, e per ciascun i compreso tra 1 e n si ha che o $A_i \in Ax$, o $A_i \in \Gamma$ o A_i è conseguenza diretta di alcune delle formule che la precedono nella sequenza.

Tale sequenza è detta una *derivazione* o *prova di A da Γ in Λ*. Gli elementi di Γ sono detti le *premesse*, o *ipotesi*, o anche *assunzioni* di A. Se Γ è un insieme finito $B_1, \ldots, B_n$ scriviamo indifferentemente $\{B_1, \ldots, B_n\} \vdash A$ oppure $B_1, \ldots, B_n \vdash A$.

Si noti come un teorema altro non è se non una formula derivabile "per via di logica"

APPARATO DEDUTTIVO

Chiusura Deduttiva

Sia Γ *un insieme di formule. La* chiusura deduttiva *di* Γ*, denotata con* $Cn(\Gamma)$*, è l'insieme di tutte le formule che sono conseguenza di* Γ *(cioè* $Cn(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\}$*).*

Consistenza

Sia Γ *un insieme di formule.* Γ *è* consistente *sse* $Cn(\Gamma)$ *è un sottoinsieme proprio di* $\mathcal{F}$ *(cioè* $Cn(\Gamma) = \{A | \Gamma \vdash A\} \subset \mathcal{F}$*).*

APPARATO DEDUTTIVO

Conseguenza Logica: Proprietà

La nozione di conseguenza in una logica Λ può godere di una o più delle seguenti proprietà.

- Se $A \in \Gamma$ allora $\Gamma \vdash A$, o anche se $A \in \Gamma$ allora $A \in Cn(\Gamma)$, dunque $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$ (questa proprietà è detta *inclusione*);
- Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash A$ allora $\Delta \vdash A$, o anche $Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$ (questa proprietà è detta *monotonia*);
- $\Gamma \vdash A$ se e solo se esiste un sottoinsieme finito Δ di Γ tale che $\Delta \vdash A$ (questa proprietà è detta *compattezza*);
- Se $\Delta \vdash A$ e per ogni B di Δ si ha che $\Gamma \vdash B$ allora si ha che $\Gamma \vdash A$ (questa proprietà è detta *taglio sulle premesse*).

APPARATO DEDUTTIVO

In una logica in cui sia presente un operatore di implicazione può inoltre valere un *teorema di deduzione*, cioè

$$\Gamma \vdash A \to B \text{ sse } \Gamma, A \vdash B$$

Notare che in logica un *teorema* è una formula derivabile *nel* linguaggio. Una *proprietà del* linguaggio e delle sue formule non è quindi un teorema, ma un *metateorema*. Le proprietà che abbiamo sopra enunciato, nel caso valgano per una logica Λ, sono metateoremi per Λ.

Nel seguito la parola "dimostrazione" verrà usata con un duplice significato: una "dimostrazione" in una logica Λ è una sequenza di formule di Λ che porta ad un teorema di Λ

E una "dimostrazione" di un metateorema che concerne una logica Λ è una sequenza di argomentazioni usata per provare una proprietà di cui la logica Λ gode.

SISTEMI FORMALI

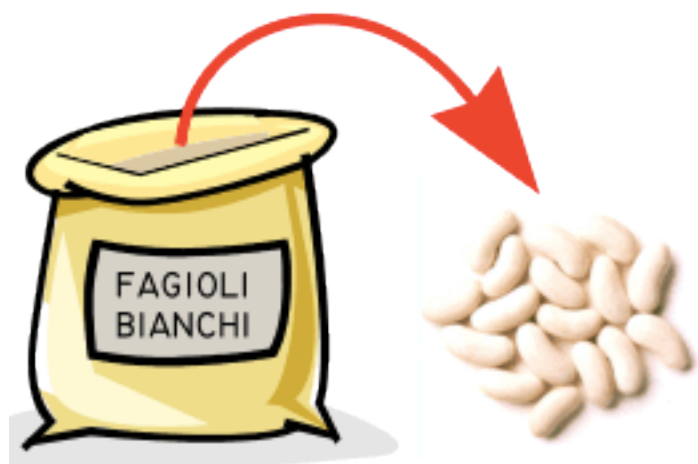
In genere le formule di un insieme Γ sono intese rappresentare una data realtà. In questo caso tutte le strutture in cui le formule di Γ sono verificate sono dette *modelli di* Γ e l'insieme Γ è detto l'insieme degli *assiomi propri* associati a tali modelli. Quindi, rappresentare una data realtà in un sistema formale Λ significa individuare un insieme di formule di Λ (detti gli assiomi propri, nel senso che sono "propri" di quella realtà) che hanno quella realtà a modello, non sempre – anzi di rado – modello esclusivo.

Abbiamo visto che una logica si può definire tramite un linguaggio, un insieme di assiomi e un insieme di regole di inferenza. Stabilire, per mezzo degli assiomi e delle regole di inferenza, quali sono le formule "interessanti" della logica, ovvero i teoremi, significa fare "deduzione". I passi necessari a stabilire se una formula è un teorema della logica possono essere espressi tramite un algoritmo e quindi meccanizzati. Possiamo dire che, in questo modo, stiamo utilizzando il sistema formale come un *sistema di deduzione* e, quindi, non siamo effettivamente interessati al significato delle formule del linguaggio ma, piuttosto, al modo in cui mettiamo insieme tali formule per costruire una prova diretta oppure, come vedremo spesso in seguito, una *refutazione*, cioè una prova che la negazione di una certa formula è in contraddizione con gli assiomi e le ipotesi fatte.

SISTEMA DI DEDUZIONE

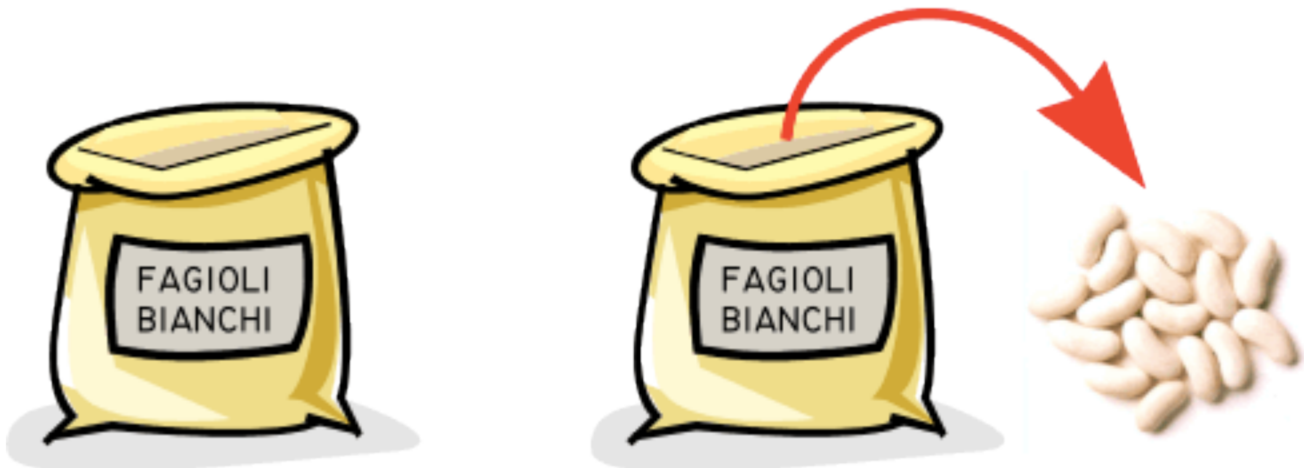
Un sistema di deduzione è un sistema di calcolo, in quanto esso ci permette di "calcolare" le conclusioni che seguono da premesse date.

E' in questo senso che la logica **proposizionale** e la logica predicativa – sono dette rispettivamente "calcolo proposizionale" e "calcolo predicativo (dei predicati)".



SISTEMI INFERENZIALI

DEDUZIONE: INFERENZA CHE TRAE DELLE CONSEGUENZE

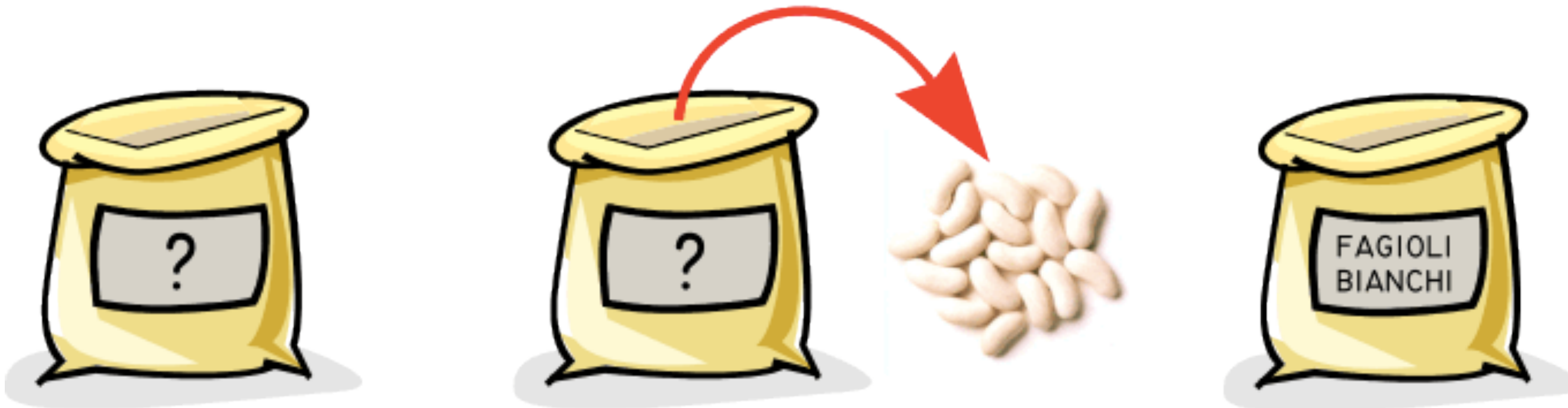


Regola: tutti i fagioli del sacco sono bianchi
Fatto: i fagioli provengono dal sacco
Risultato: i fagioli sono bianchi (**sicuramente**)

Il ragionamento deduttivo non aumenta la conoscenza; d'altro canto però le conclusioni sono vere.

SISTEMI INFERENZIALI

INDUZIONE: INFERENZA CHE GENERALIZZA I DATI



Fatto dato: i fagioli provengono dal sacco
Risultato verificato: i fagioli sono bianchi
Regola ipotizzata: tutti i fagioli odel sacco sono bianchi (**probabilmente**)

Il ragionamento induttivo permette di allargare la nostra conoscenza mediante un processo di generalizzazione: l'induzione
però può essere sggetta ad errori.

SISTEMI INFERENZIALI

ABDUZIONE: INFERENZA CHE FORMULA UNA IPOTESI ESPLICATIVA

Regola: tutti i fagioli del sacco sono bianchi
Fatto verificato: i fagioli sono bianchi
Fatto ipotizzato: i fagioli provengono dal sacco (**forse**)
Il ragionamento abduttivo tende a fornire ipotesi esplicative. Ovviamente anche l'abduzione non è esente da errori.

SISTEMI FORMALI

Il fatto che i passi di una dimostrazione possano essere posti in forma di un algoritmo e meccanizzati non significa che possiamo sempre avere una risposta se una formula è un teorema oppure no, né significa che per costruire una prova non occorra alcuna creatività. Che una procedura di prova *termini* con una risposta positiva o negativa (a seconda che la formula in questione sia un teorema o meno) dipende dalla logica. Se tale procedura esiste, cioè se l'insieme dei teoremi di una logica è decidibile, diremo che *la logica è decidibile*.

Abbiamo visto che un linguaggio ha un significato. Possiamo essere interessati a un sistema formale dal punto di vista "del significato" invece che da un punto di vista deduttivo. In altri termini il linguaggio può servirci per caratterizzare delle strutture. In tal caso siamo interessati alla *teoria dei modelli*. L'aspetto interessante della teoria dei modelli è che ci porta a dare una caratterizzazione precisa di cos'è la nozione di *verità* in una struttura.

SISTEMI FORMALI

Correttezza

Un apparato deduttivo $\mathcal{R}$ *è* corretto *se per ogni formula* $A \in \mathcal{F}$, $\vdash_{\mathcal{R}} A$ *implica* $\models A$.

Completezza

Un apparato deduttivo $\mathcal{R}$ *è* completo *rispetto a una classe di formule* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, *se per ogni formula* $A \in \Gamma$, $\models A$ *implica* $\vdash_{\mathcal{R}} A$.

Risultano di particolare interesse le logiche Λ e le definizioni di semantiche per cui si possa dimostrare un teorema di correttezza e completezza, ossia una coincidenza tra la nozione semantica di conseguenza (cioè quella basata sui modelli) e quella sintattica (basata sulle dimostrazioni). Tale metateorema talvolta si esemplifica scrivendo: $\vdash \; \equiv \; \models$.

Il teorema di correttezza e completezza stabilisce una stretta relazione tra il livello sintattico (della deduzione) e quello semantico (dei modelli) per un sistema formale, e stabilisce una stretta analogia tra le nozioni introdotte ai due livelli.

LOGICA 0

END