LOGICA 4

Stefania Bandini

SEMANTICA DELLA LOGICA PREDICATIVA

INTERPRETAZIONI E MODELLI

Nella logica proposizionale abbiamo introdotto delle funzioni di assegnazione che associano un **valore di verità** alle lettere proposizionali e quindi ricorsivamente agli enunciati. La nozione di interpretazione nella logica proposizionale ci serve per sapere se la rappresentazione della realtà che abbiamo dato per mezzo degli enunciati è **vera** o **falsa**.
Essa autorizza solo una rappresentazione superficiale in cui gli oggetti del linguaggio hanno un valore di verità, ma non è possibile determinare una corrispondenza tra oggetti sintattici e oggetti del mondo reale.

Nella logica del primo ordine abbiamo invece la possibilità di interpretare i simboli del linguaggio per mezzo di **strutture**.

Per potere caratterizzare il significato di *verità in una struttura* è necessario definire come vengono interpretate le variabili.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

Una **struttura del primo ordine** e un oggetto **matematico** che ci permette di tradurre formule, espresse nel linguaggio del primo ordine, in espressioni che hanno un significato specifico relativamente alla struttura, cioè la realtà che stiamo rappresentando. Per questo motivo una struttura è un oggetto formale più complesso di una interpretazione proposizionale, poiché è necessario individuare l'insieme degli **oggetti** su cui si quantifica e cosa denotano gli altri parametri del linguaggio, ovvero i predicati, le costanti e le funzioni.

Intuitivamente una struttura deve fornire una **funzione** he assegni al quantificatore $\forall$ un insieme non vuoto di elementi.

Questa funzione è la **funzione di interpretazione** e l'insieme non vuoto di elementi è il dominio di tale interpretazione.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

Una struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$ *è una coppia* $\mathfrak{A} = \langle D, I \rangle$ *dove*[3]*:*

- *D è un insieme non vuoto chiamato* dominio *di* $\mathfrak{A}$*;*
- *I è una funzione chiamata* interpretazione*. I associa:*
  - *a ogni simbolo di costante c un elemento $c^I \in D$;*
  - *a ogni simbolo di funzione n-aria f una funzione $f^I : D^n \to D$;*
  - *a ogni simbolo di predicato n-ario P una relazione n-aria $P^I \subseteq D^n$.*

La definizione precedente ci dice che l'interpretazione I assegna un preciso significato a ciascun parametro di $\mathcal{L}$. In particolare, il simbolo c è un nome per l'elemento c^I, che è un individuo (o un punto) di D; la formula atomica $P(t_1, \ldots, t_n)$ denota la n-upla di individui in D che sono a loro volta denotati da $t_1, \ldots, t_n$ e che stanno fra loro nella relazione P^I; la funzione $f(t_1, \ldots, t_k)$ denota l'operazione f^I in D sull'n-upla di individui denotati da $t_1, \ldots, t_k$. Osserviamo che è richiesto che il dominio sia non vuoto e che la funzione f^I sia definita su tutto il dominio. Il dominio D è il riferimento per l'interpretazione dei quantificatori: $\forall x$ significa per ogni elemento di D; $\exists x$ significa esiste un elemento di D. Come ovvio, I non fornisce un'interpretazione per $=$, $\top$ e $\perp$ in quanto sono simboli logici e non parametri del linguaggio, quindi la loro interpretazione è fissata.

[3] Il simbolo $\mathfrak{A}$, è la A maiuscola dell'alfabeto gotico.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

ESEMPIO: Interpretazioni

Supponiamo di avere il linguaggio puro dei predicati e il seguente enunciato:

$$\forall x \exists y P(x, y).$$

Sia D l'insieme degli esseri umani e P^I l'insieme delle coppie $\langle A, B\rangle$ tali che B è *padre* di A. Allora l'enunciato

Tutti gli esseri umani hanno un padre

è la corretta interpretazione dell'enunciato. Se consideriamo l'interpretazione I', tale per cui $P^{I'}$ è l'insieme delle coppie $\langle A, B\rangle$, tale che B è *madre* di A, abbiamo un enunciato analogo: "Tutti gli esseri umani hanno una madre". Sia ora D l'insieme dei numeri naturali e J una interpretazione tale che P^J sia interpretato come l'insieme delle coppie $\langle m, n\rangle$, tale che $m < n$, allora l'enunciato:

Per ogni numero naturale ne esiste uno maggiore

è la corretta interpretazione e l'enunciato è ancora intuitivamente vero.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

Sia $\mathcal{V}ar$ l'insieme delle variabili di un linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$, una assegnazione, *o ambiente, o* stato delle variabili η *in una struttura* $\mathfrak{A} = \langle D, I \rangle$ *è una funzione dall'insieme delle variabili $\mathcal{V}ar$ all'insieme D:*

$$\eta : \mathcal{V}ar \mapsto D.$$

Un'assegnazione η quindi è una maniera di associare un valore alle variabili del linguaggio $\mathcal{L}$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

A questo punto definiamo la nozione di *formula* A *vera in una struttura* $\mathfrak{A}$. Il significato intuitivo è che A è vera in una struttura $\mathfrak{A} = \langle D, I \rangle$ se e solo se è vera l'interpretazione di A in D ottenuta assegnando un valore alle variabili per mezzo di una assegnazione η.

Per dare una definizione precisa, è necessario prima estendere la funzione di interpretazione ai termini del linguaggio.

Definizione 7.12 *Sia* $\mathfrak{A} = \langle D, I \rangle$ *una struttura per* $\mathcal{L}$ *e sia* η *una assegnazione. Estendiamo tale assegnazione a una assegnazione* $\overline{\eta} = \langle I, \eta \rangle$ *sui termini, ricorsivamente come segue:*

- *Per ogni variabile* x, $x^{I,\eta} = x^{\eta}$;
- *Per ogni costante* c, $c^{I,\eta} = c^{I}$;
- *Se* $t_1, \ldots, t_n$ *sono termini ed* f *è una funzione* n*-aria, allora*

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{I,\eta} = f^{I}(t_1^{I,\eta}, \ldots, t_n^{I,\eta}).$$

INTERPRETAZIONI E MODELLI

ESEMPIO: Struttura dei numeri naturali

Sia $\mathcal{L}$ specificato da un simbolo di quantificatore $\forall$, da un simbolo di predicato binario $\leq$, da un simbolo di funzione unaria s, da un simbolo di funzione binaria $+$ e da un simbolo di costante $\emptyset$. Definiamo $\mathfrak{A}$ come segue:

$D = \mathbb{N}$;

$\leq^I = \{\langle m, n\rangle | m \leq n\}$;

s^I è la funzione successore s, cioè $s^I(n) = (n + 1)$;

$+^I$ è l'operazione di addizione;

$\emptyset^I = 0$.

Più semplicemente possiamo presentare la struttura $\mathfrak{A}$ come

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \langle \leq, s, +, 0\rangle\rangle \text{ o anche } \mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \leq, s, +, 0\rangle.$$

Dato $s(s(0)) + x$, un termine di $\mathcal{L}$, se fissiamo l'interpretazione η, tale che $x^\eta = 9$, allora $(s(s(0)) + x)^{I,\eta} = 11$. Se consideriamo il solo termine $s(s(0))$ questo è un termine chiuso e, dunque, il suo significato – che è 2 – è indipendente dall'assegnazione η che abbiamo utilizzato per interpretare la x in $\mathfrak{A}$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

SODDISFACIBILITA' DELLE FORMULE

A questo punto, definita una funzione che dà significato (cioè un valore) alle variabili, estesa quest'ultima ai termini del linguaggio, rispetto a una struttura in cui vengono interpretati predicati e funzioni, possiamo associare a ogni formula un valore di verità, quindi definire la nozione di soddisfacibilità e validità.

Lo facciamo introducendo una relazione di soddisfacibilità $\models$ tra struttura e formula, relativamente a una assegnazione η. La soddisfacibilità di una formula ϕ, in una struttura $\mathfrak{A}$ e rispetto a una assegnazione η alle variabili, è denotata con:

$$\mathfrak{A}, \eta \models \phi$$

che, intuitivamente, dice che la struttura $\mathfrak{A}$ soddisfa ϕ sse è vera l'interpretazione di ϕ determinata da $\mathfrak{A}$ e in cui una variabile x – ovunque occorra libera in ϕ – è valutata come x^η.

Definiamo, dunque, la relazione di soddisfacibilità $\models$ induttivamente come segue (dove "non $\models$" è scritto come "$\not\models$"):

INTERPRETAZIONI E MODELLI

SODDISFACIBILITA' DELLE FORMULE

Sia $\mathfrak{A} = \langle D, I \rangle$ una struttura per il linguaggio $\mathcal{L}$ e η una assegnazione in $\mathfrak{A}$.

1. $$(\mathfrak{A}, \eta) \models \top \text{ e } (\mathfrak{A}, \eta) \not\models \bot;$$
2. *se A è una formula atomica del tipo $P(t_1, \ldots, t_n)$, allora*
$$(\mathfrak{A}, \eta) \models P(t_1, \ldots, t_n) \text{ sse } \langle t_1^{I,\eta} \ldots t_n^{I,\eta} \rangle \in P^I;$$
3. *se A è una formula atomica del tipo $t_1 = t_2$ allora*
$$(\mathfrak{A}, \eta) \models t_1 = t_2 \text{ sse } t_1^{I,\eta} = t_2^{I,\eta};$$
4. $(\mathfrak{A}, \eta) \models \neg A$ *sse* $(\mathfrak{A}, \eta) \not\models A$;
5. $(\mathfrak{A}, \eta) \models A \wedge B$ *sse* $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$ *e* $(\mathfrak{A}, \eta) \models B$;
6. $(\mathfrak{A}, \eta) \models A \vee B$ *sse* $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$ *oppure* $(\mathfrak{A}, \eta) \models B$;
7. $(\mathfrak{A}, \eta) \models (A \rightarrow B)$ *sse* $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$ *implica che* $(\mathfrak{A}, \eta) \models B$;
8. $(\mathfrak{A}, \eta) \models (A \leftrightarrow B)$ *sse* $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$ *e* $(\mathfrak{A}, \eta) \models B$ *oppure* $(\mathfrak{A}, \eta) \not\models A$ *e* $(\mathfrak{A}, \eta) \not\models B$;
9. $(\mathfrak{A}, \eta) \models \forall x A$ *sse per ogni* $d \in D$ *è verificato che* $\mathfrak{A} \models A(\eta[d/x])$;
10. $(\mathfrak{A}, \eta) \models \exists x A$ *sse esiste un* $d \in D$ *per cui è verificato che* $\mathfrak{A} \models A(\eta[d/x])$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

MODELLI

Se per una formula $A \in \mathcal{L}$, $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$ *è verificato per ogni assegnazione alle variabili, allora scriviamo* $\mathfrak{A} \models A$ *e diciamo che* $\mathfrak{A}$ *è un* modello *di* A, *ovvero che* A *è* vera *in* $\mathfrak{A}$.

Una formula $A \in \mathcal{L}$ *è* valida *sse è vera in tutte le strutture di* $\mathcal{L}$ *e lo scriviamo* $\models A$.

Un insieme di formule Γ *è* soddisfacibile *se esiste una struttura* $\mathfrak{A}$ *ed una assegnazione* η *tale che* $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$ *per ogni* $A \in \Gamma$.

Sia Γ *un insieme di formule e* A *una formula. Allora* Γ implica logicamente A, *scritto* $\Gamma \models A$, *sse per ogni struttura* $\mathfrak{A}$ *del linguaggio e ogni assegnazione* η *alle variabili, tale che* $(\mathfrak{A}, \eta) \models B$ *per ogni* $B \in \Gamma$, *è verificato che* $(\mathfrak{A}, \eta) \models A$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

EQUIVALENZA SEMANTICA

Due formule P e Q si dicono semanticamente (*o* logicamente) equivalenti *se per tutte le strutture $\mathfrak{A}$ e tutte le assegnazioni η si ha che:*

$$\mathfrak{A}, \eta \models P \text{ sse } \mathfrak{A}, \eta \models Q.$$

In questo caso si scrive $P \equiv Q$.

1. $\forall x P \equiv \neg\exists x \neg P$
2. $\neg\forall x P \equiv \exists x \neg P$
3. $\exists x P \equiv \neg\forall x \neg P$
4. $\neg\exists x P \equiv \forall x \neg P.$

1. $\forall x \forall y P \equiv \forall y \forall x P$
2. $\exists x \exists y P \equiv \exists y \exists x P$
3. $\forall x P \equiv P$ *se* $x \notin var(P)$
4. $\exists x P \equiv P$ *se* $x \notin var(P)$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

EQUIVALENZE E DISTRIBUTIVITA' DEI CONNETTIVI

1. $\forall x(P_1 \wedge P_2) \equiv \forall x P_1 \wedge \forall x P_2$
2. $\exists x(P_1 \vee P_2) \equiv \exists x P_1 \vee \exists x P_2$
3. $\forall x(P_1 \vee P_2) \equiv \forall x P_1 \vee P_2$ *se* $x \notin var(P_2)$
4. $\exists x(P_1 \wedge P_2) \equiv \exists x P_1 \wedge P_2$ *se* $x \notin var(P_2)$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

EQUIVALENZE E QUANTIFICATORI

Indichiamo genericamente con $\mathcal{Q}$ un quantificatore: $\mathcal{Q} \in \{\forall, \exists\}$. Sui quantificatori valgono le seguenti equivalenze.

1. $\mathcal{Q}_1 x(P_1 \vee \mathcal{Q}_2 x P_2) \equiv \mathcal{Q}_1 x \mathcal{Q}_2 z(P_1 \vee P_2[z/x])$
2. $\mathcal{Q}_1 x(P_1 \wedge \mathcal{Q}_2 x P_2) \equiv \mathcal{Q}_1 x \mathcal{Q}_2 z(P_1 \wedge P_2[z/x])$

se $z \notin var(P_1) \cup var(P_2)$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

EQUIVALENZE, QUANTIFICATORI E IMPLICAZIONE

Sia P_2 una formula in cui x non occorre libera

1. $\forall x P_1 \rightarrow P_2 \equiv \exists x(P_1 \rightarrow P_2)$
2. $\exists x P_1 \rightarrow P_2 \equiv \forall x(P_1 \rightarrow P_2)$
3. $P_2 \rightarrow \forall x P_1 \equiv \forall x(P_2 \rightarrow P_1)$
4. $P_2 \rightarrow \exists x P_1 \equiv \exists x(P_2 \rightarrow P_1)$.

INTERPRETAZIONI E MODELLI

CONNETTIVI E OPERATORI INSIEMISTICI

Operatore vero funzionale	Operatore logico
non	$\neg$
e	$\wedge$
oppure	$\vee$
se $\cdots$ *allora*	$\rightarrow$
sse	$\leftrightarrow$

Per meglio illustrarla consideriamo un linguaggio dei predicati con i seguenti simboli di predicato unario S e T, interpretati con i predicati unari S^I e T^I in un dominio D. Ovviamente le estensioni dei predicati S^I e T^I sono dei sottoinsiemi di D, e le indichiamo rispettivamente con $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.

Avremo che

- $\neg S(x))$ corrisponde a $\overline{\mathcal{S}} = \{x | x \in D \; e \; x \; non \; \in \mathcal{S}\}$.
- $(S(x) \vee T(x))$ corrisponde a $\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = \{x | x \in \mathcal{S} \; oppure \; x \in \mathcal{T}\}$.
- $(S(x) \wedge T(x))$ corrisponde a $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{x | x \in \mathcal{S} \; e \; x \in \mathcal{T}\}$.
- $\forall x(S(x) \rightarrow T(x))$ corrisponde a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} = \{x | se \; x \in \mathcal{S} \; allora \; x \in \mathcal{T}\}$.
- $\forall x(S(x) \leftrightarrow T(x))$ corrisponde a $(\mathcal{S} = \mathcal{T}) = \{x | x \in \mathcal{S} \; sse \; x \in \mathcal{T}\}$.

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

Vediamo qui di seguito come descrivere delle realtà in logica del primo ordine, cioè diamo esempi di costruzioni di specifiche *teorie in logica primo ordine*.

Una teoria è un insieme di formule di un linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$. Definiamo una teoria a partire dalla relazione $\models$. Nelle logiche per cui esistano apparati deduttivi corretti e completi, come nel calcolo dei predicati (si veda il capitolo 8), le teorie possono equivalentemente essere introdotte in termini della nozione di deduzione $\vdash$.

Sia Σ un insieme di formule di $\mathcal{L}$ che chiameremo assiomi. *Talvolta questi assiomi vengono detti "propri"*[6] della teoria. *La* teoria generata da *Σ è l'insieme T_Σ delle formule ϕ di $\mathcal{L}$ tali che $\Sigma \models \phi$.*

Una teoria *T è un insieme di enunciati chiuso rispetto alla conseguenza logica*

$$T \models \phi \text{ implica } \phi \in T$$

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

Una teoria del primo ordine T si dice completa *se per ogni formula $\phi \in \mathcal{L}$ è verificata una e una sola delle due: $T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.*

Date due teorie, T in un linguaggio $\mathcal{L}$ e T' in un linguaggio $\mathcal{L}'$, con $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ e $T \subseteq T'$, si dice che T' è una estensione conservativa *di T se: $T \models \phi$ sse $T' \models \phi$ per tutte le formule $\phi \in \mathcal{L}$.*

Una teoria T si dice consistente *se non esiste un ϕ tale che $T \models \phi$ e $T \models \neg\phi$, o – equivalentemente – se esiste un ϕ tale che $T \not\models \phi$.*

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

Una teoria del primo ordine T si dice completa *se per ogni formula $\phi \in \mathcal{L}$ è verificata una e una sola delle due: $T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.*

Date due teorie, T in un linguaggio $\mathcal{L}$ e T' in un linguaggio $\mathcal{L}'$, con $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ e $T \subseteq T'$, si dice che T' è una estensione conservativa *di T se: $T \models \phi$ sse $T' \models \phi$ per tutte le formule $\phi \in \mathcal{L}$.*

Una teoria T si dice consistente *se non esiste un ϕ tale che $T \models \phi$ e $T \models \neg\phi$, o – equivalentemente – se esiste un ϕ tale che $T \not\models \phi$.*

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

TEORIA DELLE LISTE

Sia $\mathcal{A}$ un insieme non vuoto di simboli di costanti e sia $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ il linguaggio costruito su $\mathcal{A}$ e sul seguente alfabeto per le funzioni e i predicati: *cons* simbolo di funzione binaria, *car*, *cdr* simboli di funzioni binarie, *Atom* e *List* due simboli di predicato monadici e *nil* è un simbolo di costante. Gli assiomi sono i seguenti:

1. $\forall x(List(x) \rightarrow cons(car(x), cdr(x)) = x)$
2. $\forall x(Atom(x) \rightarrow List(cons(x, nil)))$
3. $\forall xy(Atom(x) \wedge List(y) \rightarrow car(cons(x, y)) = x)$
4. $\forall xy(Atom(x) \wedge List(y) \rightarrow cdr(cons(x, y)) = y)$
5. $Atom(nil) \wedge List(nil)$

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

TEORIA DEI GRAFI

Sia $\mathcal{L} = \{A\}$, A un simbolo di relazione binaria. Un grafo consiste di un insieme A di archi, dove ogni arco è una coppia di individui. Un arco $\langle v, w\rangle$ unisce due individui v e w. Consideriamo le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x \neg A(x,x) \\ 2. & \forall x \forall y (A(x,y) \rightarrow A(y,x)) \end{array} \tag{7.14}$$

Se è richiesto solo 1. allora abbiamo un grafo diretto irriflessivo, cioè nessun nodo ha un cappio (si vedano le definizioni a pagina 44). L'assioma 2 impone che il grafo sia simmetrico, cioè il grafo non ha semicammini.

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

TEORIA DEI NUMERI

1. $\forall x \neg(x < 0)$
2. $\forall xy(x < s(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$
3. $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y)))$
4. $\forall xy\ (x < y \rightarrow \neg(y < x)))$
5. $\forall xyz(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
6. $\forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x)$

TEORIE DEL PRIMO ORDINE

ARITMETICA DI PEANO

1. $\forall x \neg(s(x) = 0)$
2. $\forall xy(s(x) = s(y) \to x = y)$
3. $\forall xy(x < s(y) \to x < y \vee x = y)$
4. $\forall xy(x < y \vee x = y \vee y < x)$
5. $\forall x \neg(x < 0)$
6. $\forall x((x + 0) = x)$
7. $\forall xy(x + s(y) = s(x + y))$
8. $\forall x(x \times 0 = 0)$
9. $\forall xy(x \times s(y) = x \times y + x)$

10 $\forall x E(x, 0) = s(0)$

11 $\forall xy E(x, s(y)) = E(x, y \times x)$

LOGICA 4

END