# FOL: Linguaggio, Semantica e Calcolo

Integrazione materiale Brachman&Levesque

Matteo Palmonari

*Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione*
*Università di Milano-Bicocca*

# Composizionalità del significato

- FBF di L* → formule ben formate

  da proposzioni ATOMICHE a proposizioni COMPLESSE attraverso regole di formazione

***sintassi***

***semantica***

<u>COMPOSIZIONALITA' del SIGNIFICATO</u>

L'interpretazione delle proposizioni complesse deriva UNIVOCAMENTE dall'interpretazione :

...delle *formule atomiche* in esse contenute

...dei *connettivi logici e dei quantificatori*

→ *paradigma computazionale e atomismo logico*

# Il concetto di sistema formale (prospettiva del calcolo)

| LINGUAGGIO | CALCOLO |
|---|---|
| **ALFABETO**<br>Elementi base per formare gli enunciati | **ASSIOMI**<br>Enunciati scelti come punti di partenza del sistema<br>Ex. $p \to (q \to p)$ |
| **REGOLE DI FORMAZIONE**<br>Regole per la costruzione a partire dal vocabolario gli enunciati ammissibili | **REGOLE DI DERIVAZIONE**<br>Regole per passare da enunciati noti ad altri enunciati in modo corretto<br>In particolare, dagli *assiomi* ai *teoremi*<br>*Ex.* $P \to Q, P \succ Q$ |
| | **TEOREMI**<br>Proposizioni vere di un linguaggio<br>Ex. $(r \to p) \to ((p \to q) \to (r \to q))$ |

SEMANTICA

Rispetto a un SIGNIFICATO attribuito ai segni del linguaggio

# Inferenza: le dimostrazioni

$\Gamma \vdash F$ *"F è dimostrabile da $\Gamma$ "*

Una dimostrazione di F a partire da $\Gamma$ è una sequenza *finita* DIM

$$DIM=P_1,P_2,\ldots,P_n$$

dove

- $P_n=F$
- $P_i \in \Gamma$ oppure
- $P_i$ è ottenibile da $P_{i1},\ldots,P_{im}$ (con i1<i,.., im<i) applicando una **regola di inferenza**

**Un calcolo logico per L è un dimostratore di formule di L**

# Inferenza: e calcolo

Diversi approcci al calcolo logico:

Calcolo Assiomatico (assiomi + due sole regole d'inferenza)

Deduzione Naturale (più regole di inferenza)

Risoluzione (una regola d'inferenza)

[...]

$A \rightarrow B$

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n} \quad \text{AND-Introduzione}$$

$$\frac{A_1 \wedge \ldots \wedge A_n}{A_i} \quad \text{AND-Eliminazione}$$

Ma ora è anche disponibile una convincente analisi formale del concetto di "calcolo"...

TEORIA DELLA COMPUTABILITA'

Procedura meccanica di calcolo dei predicati!

# SISTEMI DEDUTTIVI PREDICATIVI

# SISTEMI DEDUTTIVI PREDICATIVI

http://www.youtube.com/watch?v=HGYNhtD8SWI

http://www.youtube.com/watch?NR=1&feature=endscreen&v=zr5RlNyzyNM

http://www.youtube.com/watch?v=u6GJAtLJ0Ks&feature=fvwrel

# SISTEMA HILBERTIANO PREDICATIVO

*L'insieme* AX-FOL *degli* **assiomi logici** *del sistema hilbertiano è l'insieme di tutte le formule che si ottengono sostituendo uniformemente formule al posto delle variabili A, B e C nei seguenti schemi:*

1. $(A \to (B \to A))$;
2. $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$;
3. $((B \to \neg A) \to ((B \to A) \to \neg B))$;
4. $\forall x A[x] \to A[t/x]$ *dove t è libero per x in A;*
5. $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$ *se A è una formula che non contiene occorrenze libere di x.*

# SISTEMA HILBERTIANO PREDICATIVO

L'insieme *degli assiomi logici e* delle *regole di inferenza* costituisce un sistema formale assiomatico, chiamato *sistema di Hilbert.*

*L'insieme delle* regole di inferenza *del sistema hilbertiano è costituito da:*

modus ponens (MP):

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

generalizzazione (Gen):

$$\frac{A}{\forall x A}$$

# Il paradigma logico formale: sintassi e semantica

*Sintassi*

*Linguaggio + calcolo*

***Simboli***
***FBF***
***ASSIOMI***
***Regole di inferenza***

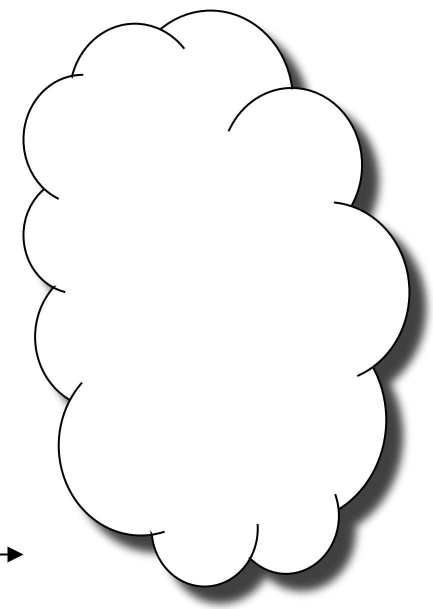
**S** $\vdash$ F

*Semantica*

***Funzione di interpretazione***

**S** $\models$ F

*Mondo*



Concetto di modello

???

# Interpretazioni, Soddisfacibilità, Validità

- $\Gamma$ **soddisfacibile** *sse* ci sono almeno un' interpretazione *I* e un assegnamento *s* che soddisfano $\Gamma$
  - Per enunciati (no variabili libere) → un'interpretazione *I* = (D,*i*)
  - $\Gamma$ **soddisfacibile** *sse* ha un **modello** (vedi: model checking)
- $\Gamma \cup \{\varphi\}$ soddisfacibile *sse* $\Gamma \not\models \neg\varphi$
- $\Gamma \models \varphi$ *sse* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **insoddisfacibile**
  - **$\Phi$ valida** *sse* $\{\} \models \varphi$ *sse* $\neg\varphi$ **insoddisfacibile**

# Validità e Dimostrazione, Soddisfacibilità e Coerenza

Con COMPLETEZZA e CORRETTEZZA del calcolo:

$\Gamma \vdash \varphi$ *sse* $\Gamma \models \varphi$

$\Gamma \vdash \varphi$ *sse* $\Gamma \models \varphi$

*sse* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **insoddisfacibile**

*sse* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **incoerente**

- Dimostrare che $\varphi$ è conseguenza logica di è equivalente a dimostrare che da $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ segue una contraddizione, ovvero, dal punto di vista semantico, che non esiste neanche un interpretazione che soddisfa $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
- $\Gamma$ **coerente** *sse* $\Gamma$ **soddisfacibile**

# Decidibilità di un predicato

- Il problema della decidibilità per un predicato P consiste nel chiedersi se esista una procedura finita (un **algoritmo**) per decidere, dato un elemento arbitrario *x* del dominio *D*, dell'appartenenza di *x* all'estensione di P , e cioè se
  - $x \in P$ ...oppure...
  - $x \notin P$

# Predicati e funzioni

- Predicati e funzioni:
  - **Funzione Caratteristica** di $P(\boldsymbol{x})$
    - $c^P(\boldsymbol{x}) = 1$ se $x \in P$
    - $c^P(\boldsymbol{x}) = 0$ se $x \notin P$
  - **Grafo** di una funzione $f(\boldsymbol{x})$
    - $P(\boldsymbol{x},y) : f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{y}$
- Possiamo dunque gettare un ponte tra decidibilità dei predicati (lato intuitivo) e funzioni ricorsive (formalizzazione) andando a vedere che tipo di funzioni sono le funzioni caratteristiche di tali predicati.

# Decidibilità e teoria della ricorsività

- Diciamo dunque che un predicato *P* è **decidibile**
  - sse per ogni x del dominio esiste un algoritmo per decidere se $x \in P$ o $x \notin P$
    - [se cioè ho una procedura che in un numero finito di passi termina dicendomi se x appartiene a P, o in caso contrario, che x non appartiene a P].
  - sse esiste una funzione ricorsiva tale che P(x)=1 se $x \in P$ **e** P(x)=0 se $x \notin P$ .
    - Ma questa funzione è esattamente la funzione caratteristica di P, perciò...
  - sse la sua funzione caratteristica $c^P$ è una funzione ricorsiva.

# Semidecidibilità e teoria della ricorsività

- Diciamo dunque che un predicato *P* è **semidecidibile**
  - sse per ogni x del dominio esiste un algoritmo per decidere almeno se $x \in P$
    - [se cioè ho una procedura che in un numero finito di passi termina dicendomi se x appartiene a P].
  - sse è il dominio di una funzione parziale ricorsiva (tale cioè che ho una procedura per calcolare il valore per ogni elemento per cui la funzione è definita).
  - sse è il codominio di una funzione ricorsiva e cioè se è un insieme ricorsivamente enumerabile (R.E.).
- Diciamo dunque che un predicato è **indecidibile se non è decidibile**
  - (quindi anche se è solo semidecidibile)

# Decidibilità per una logica

- Esiste un algoritmo che mi permetta di decidere, per ogni proposizione $\varphi$ del linguaggio se $\varphi$ è valida, se cioè $\models\varphi$ o $\not\models\varphi$?
- ovvero..
- ...dato un insieme di proposizioni $\Gamma$, esiste per ogni $\varphi$ un algoritmo per sapere se $\Gamma \models \varphi$ o $\Gamma \not\models \varphi$?
- ... ovvero, dato un insieme anche vuoto di assiomi $\Gamma$, cons($\Gamma$) è un insieme **decidibile**?

# Decidibilità per una logica

- ovvero..
- ...siano:
  - Cons(Γ) = insieme delle conseguenze logiche di Γ
  - Teor(Γ) = insieme delle formule dimostrabili da Γ
  - Sat(Γ) = insieme delle formule soddisfacibili di Γ
  - Coer(Γ) = insieme delle formule coerenti di Γ
- Una logica è decidibile
  - sse dato Γ (anche un insieme vuoto), Cons(Γ) è un insieme **decidibile**
  - sse dato Γ (anche un insieme vuoto), Teor(Γ) è un insieme **decidibile** sse
    - $c^{Teor(\Gamma)}(\varphi) = 1$ se $x \in$ Teor(Γ)
    - $c^{Teor(\Gamma)}(\varphi) = 0$ se $x \notin$ Teor(Γ) sse $x \in$ -Teor(Γ)

# Validità e Dimostrazione, Soddisfacibilità e Coerenza

Con COMPLETEZZA e CORRETTEZZA del calcolo:

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ \textit{sse} } \Gamma \models \varphi$$

$\Gamma \vdash \varphi$ *sse* $\Gamma \models \varphi$
*sse* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **insoddisfacibile**
*sse* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **incoerente**

- Dimostrare che $\varphi$ è conseguenza logica di è equivalente a dimostrare che da $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ segue una contraddizione, ovvero, dal punto di vista semantico, che non esiste neanche un interpretazione che soddisfa $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
- $\Gamma$ **coerente** *sse* $\Gamma$ **soddisfacibile**

# Logica Proposizionale e FOL

- La *logica proposizionale* è **decidibile**
- *FOL* è in generale **indecidibile**
  - Teor($\Gamma$) per FOL è un insieme solo **semidecidibile**
    - $\Gamma \vdash \varphi$ *sse* $\Gamma \models \varphi$

      *sse* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ incoerente
  - -Sat($\Gamma$) // -Coer($\Gamma$) per FOL sono **semidecidibili**.
  - Sat($\Gamma$) // Coer($\Gamma$) per FOL **non** sono **semidecidibili**.
- Non esiste in generale una procedura per determinare se un insieme di formule FOL sia coerente

# Dove sta la semantica?

+(3,4)=12

+(3,4)=12

*(3,4)=7

+(3,4)=12

*(3,4)=7

+(4,5)=9

# Dove sta la semantica?

$+(3,4)=12$

→ Interpretazione di “+” come la moltiplicazione aritmetica

$+(3,4)=12$

$*(3,4)=7$

→ Interpretazione di “+” come la moltiplicazione aritmetica e “*” come la somma aritmetica

$+(3,4)=12$

$*(3,4)=7$

$+(4,5)=9$

→ Qual’è l’interpretazione di “+”??

**...Come stabilisco qual’è l’interpretazione dei simboli adottata?**

**...Come restringo il numero di possibili interpretazioni?**

# Esempio
(Calvanese De Giacomo 2003 – ESSLI course)

## Let's start with an exercise ...

Requirements: We are interested in building a software application to manage filmed scenes for realizing a movie, by following the so-called "Hollywood Approach".

Every **scene** is identified by a code (a string) and it is described by a text in natural language.

Every scene is filmed from different positions (at least one), each of this is called a **setup**. Every setup is characterized by a code (a string) and a text in natural language where the photographic parameters are noted (e.g., aperture, exposure, focal length, filters, etc.). Note that a setup is related to a single scene.

For every setup, several **takes** may be filmed (at least one). Every take is characterized by a (positive) natural number, a real number representing the number of meters of film that have been used for shooting the take, and the code (a string) of the reel where the film is stored. Note that a take is associated to a single setup.

Scenes are divided into **internals** that are filmed in a theater, and **externals** that are filmed in a **location** and can either be "day scene" or "night scene". Locations are characterized by a code (a string) and the address of the location, and a text describing them in natural language.

# Esempio
(Calvanese De Giacomo 2003 – ESSLI course)

## Solution 1: ... use logic!!!

Alphabet:

$Scene(x), Setup(x), Take(x), Internal(x), External(x), Location(x), stp\_for\_scn(x,y), tk\_of\_stp(x,y), located(x,y), \ldots$

Axioms:

$\forall x, y.\ (Scene(x) \wedge code(x,y)) \supset String(y)$

$\forall x, y.\ (Scene(x) \wedge description(x,y)) \supset Text(y)$

$\forall x, y.\ (Setup(x) \wedge code(x,y)) \supset String(y)$

$\forall x, y.\ (Setup(x) \wedge photographic\_pars(x,y)) \supset Text(y)$

$\forall x, y.\ (Take(x) \wedge nbr(x,y)) \supset Integer(y)$

$\forall x, y.\ (Take(x) \wedge filmed\_meters(x,y)) \supset Real(y)$

$\forall x, y.\ (Take(x) \wedge reel(x,y)) \supset String(y)$

$\forall x, y.\ (Internal(x) \wedge theater(x,y)) \supset String(y)$

$\forall x, y.\ (External(x) \wedge night\_scene(x,y)) \supset Boolean(y)$

$\forall x, y.\ (Location(x) \wedge name(x,y)) \supset String(y)$

$\forall x, y.\ (Location(x) \wedge address(x,y)) \supset String(y)$

$\forall x, y.\ (Location(x) \wedge description(x,y)) \supset Text(y)$

$\forall x.\ Scene(x) \supset (1 \leq \sharp\{y \mid code(x,y)\} \leq 1)$

$\ldots$

$\forall x, y.\ stp\_for\_scn(x,y) \supset Setup(x) \wedge Scene(y)$

$\forall x, y.\ tk\_of\_stp(x,y) \supset Take(x) \wedge Setup(y)$

$\forall x, y.\ located(x,y) \supset External(x) \wedge Location(y)$

$\forall x.\ Setup(x) \supset 1 \leq \sharp\{y \mid stp\_for\_scn(x,y)\} \leq 1$

$\forall y.\ Scene(y) \supset 1 \leq \sharp\{x \mid stp\_for\_scn(x,y)\}$

$\forall x.\ Take(x) \supset 1 \leq \sharp\{y \mid tk\_of\_stp(x,y)\} \leq 1$

$\forall x.\ Setup(y) \supset 1 \leq \sharp\{x \mid tk\_of\_stp(x,y)\}$

$\forall x.\ External(x) \supset 1 \leq \sharp\{y \mid located(x,y)\} \leq 1$

$\forall x.\ Internal(x) \supset Scene(x)$

$\forall x.\ External(x) \supset Scene(x)$

$\forall x.\ Internal(x) \supset \neg External(x)$

$\forall x.\ Scene(x) \supset Internal(x) \vee External(x)$

# 1 – Linguaggio e ambiguità

E' sempre evidente come tradurre un enunciato dal linguaggio naturale (NL) nella logica dei predicati?

"Tutti i marinai amano una ragazza"

AMBIGUITA' Il linguaggio naturale è AMBIGUO

L'uso dei quantificatori permette di esprimere distinzioni per disambiguarlo...

1) Ciascun marinaio ha una ragazza che ama
2) C'è una ragazza che è amata da tutti i marinai

$$\forall x(Marinaio(x) \rightarrow \exists y(Ragazza(y) \rightarrow Ama(x,y)))$$

$$\exists y(Ragazza(y) \wedge \forall x(Marinaio(x) \rightarrow Ama(x,y)))$$

Forma grammaticale Vs Forma logica (Frege)

Struttura superficiale Vs Struttura profonda (Chomsky)

# 1 – Linguaggio e ambiguità (2)

Ma: è lecita una tale distinzione?

Non tutti i tipi di "ambiguità" di questo tipo...

Ex. "Vengo domani mattina", "La sedia è lì"...

Cosa significa? Quando è vero?

**Enunciati *indessicali***: significato dipendente dal contesto

Ex. "Marco è alto", "La minestra è buona", "C'è tanta gente"...

E' possibile partizionare la popolazione nell'insieme degli alti e dei non-alti? C'è tanta gente... quanta?

**Concetti *vaghi***: non si tratta di ambiguità, ma di *vaghezza,* con un suo ruolo specifico nella lingua

# 1 – Linguaggio: ricchezza (1)

"*Ma quando, quell'inverno, Graziano arrivò da Roma, dopo due anni che non si faceva vedere e sentire, raccontandole che aveva incontrato una ragazza del Nord e che voleva sposarla e tornare a vivere a Ischiano, il cuore le schizzò nel petto come una molla e la povera donna, che stava preparando le fettuccine, si schiantò a terra, svenuta, trascinandosi dietro tavolo, farina e mattarello*"

E' possibile tradurre il contenuto di questo testo in un insieme di enunciati del primo ordine conservandone il significato?

Diverse difficoltà...

Tempi verbali e dipendenza verbale delle proposizioni...

Metafore...

Verbi particolari (mangiare + oggetto Vs volere + verbo)

# 1 – Linguaggio: ricchezza (2)

Ancora esempi...

“Marco è seduto comodamente”

“Marco crede di venire alla festa ma non sa se viene anche Silvia”

“E’ possibile che Marco venga: è necessario riempire il frigo di birra!”

E’ possibile tradurre in maniera non ambigua (univoca) tali enunciati in un sistema formale?

Se si, con che significato e con che effetto sulla natura delle inferenze che li riguardano?

Elaborazione del linguaggio naturale

Rappresentazione della Conoscenza (KR)

Logica modale della necessità, logica delle credenze e logica della conoscenza, etc...

# 2 – Linguaggio e inferenza

Abbiamo delle procedure che descrivono adeguatamente come un ragionamento corretto deriva nuova conoscenza a partire da conoscenza data?

Alcuni problemi

- *Inferenze e strutture linguistiche particolari* (logiche per trattare spazio e tempo, possibilità e necessità, credenze e conoscenza).
- *Meccanizzazione dei processi inferenziali*: potenza e debolezza del calcolo (indecidibilità della logica dei predicati).
- *Processi inferenziali "corretti"*: la logica deduttiva cattura tutte le inferenze che siamo disposti a considerare parte di un ragionamento intelligente? (logica induttiva, logica non monotona, logica probabilistica, logica fuzzy)

KR TODAY…