Applicazioni scorrette del Principio di Induzione

Riportiamo qui di seguito classiche applicazioni *sbagliate* del Principio di Induzione. Siete pregati di rifletterci su e di trovare l'errore. Gli enunciati sono chiaramente falsi, ma sottolineano il fatto che usando impropriamente il Principio di Induzione si riescono a dimostrare affermazioni piuttosto singolari.

Esempio 1. (G. Pòlya) *Se in un gruppo di ragazze bionde almeno una ha gli occhi azzurri allora tutte hanno gli occhi azzurri.*

Dimostrazione. Per provare l'affermazione usiamo il Principio di Induzione.

Indichiamo con $\mathcal{P}(n)$ l'enunciato "date n ragazze bionde, se almeno una di esse ha gli occhi azzurri allora tutte hanno gli occhi azzurri".

Ora è chiaro che $\mathcal{P}(1)$ è vera, proviamo che supposta vera $\mathcal{P}(n)$ risulta vera $\mathcal{P}(n+1)$.

Consideriamo quindi un gruppo di $(n+1)$ ragazze bionde $B_1, \ldots, B_{n+1}$ di cui una, diciamo B_2, abbia gli occhi azzurri. Allora i sottogruppi $\{B_1, \ldots, B_n\}$ e $\{B_2, \ldots, B_{n+1}\}$, sono costituiti da n ragazze bionde di cui una con gli occhi azzurri, quindi per l'ipotesi induttiva tutte le ragazze componenti i due sottogruppi hanno gli occhi azzurri. Ne segue che $B_1, \ldots, B_{n+1}$ hanno tutte gli occhi azzurri e di conseguenza $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

In conclusione, per il Principio di Induzione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n e quindi l'affermazione è dimostrata. □

Dall'esempio precedente si deduce che *tutte* le ragazze bionde hanno gli occhi azzurri poiché è facile sincerarsi che ne esiste almeno una bionda con gli occhi azzurri!

In maniera del tutto simile si dimostra il seguente paradosso.

Esempio 2. (Tarskii) *Tutti i numeri reali sono uguali.*

Per mettere in evidenza un'altra tipologia di errori che si possono commettere ci "limiteremo" a dimostrare che tutti i naturali sono uguali a 0.

Esempio 3. (M. Dedò) *Se il massimo tra due numeri naturali è un numero naturale allora i due numeri sono uguali fra loro. Ossia se $a, b \in \mathbb{N}$ e $\max\{a, b\} \in \mathbb{N}$ allora $a = b$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{P}(n)$ la proposizione "$a, b \in \mathbb{N}$ e $\max\{a, b\} = n$, allora $a = b$".

Chiaramente $\mathcal{P}(0)$ è vera, supponiamo $\mathcal{P}(n)$ vera e proviamo che allora è vera pure $\mathcal{P}(n+1)$.

Infatti, siano $a, b \in \mathbb{N}$ con $\max\{a, b\} = n+1$, allora $\max\{a-1, b-1\} = n$ e per l'ipotesi induttiva $a - 1 = b - 1$, da cui $a = b$.

Quindi, $\mathcal{P}(n+1)$ è vera e per il Principio di Induzione l'affermazione è dimostrata. □

Naturalmente, da ciò si deduce che tutti i naturali sono uguali a 0, in particolare $1 = 0$!