INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 5)

Stefania Bandini

I numeri cardinali

I **numeri cardinali** sono un tipo generalizzato di numeri utilizzati per indicare la grandezza di un insieme.

Mentre per gli insiemi finiti la grandezza è indicata da un numero naturale, e cioè il numero di elementi, i numeri cardinali (***la cardinalità***) classificano oltre a questi anche diversi tipi di infinito.

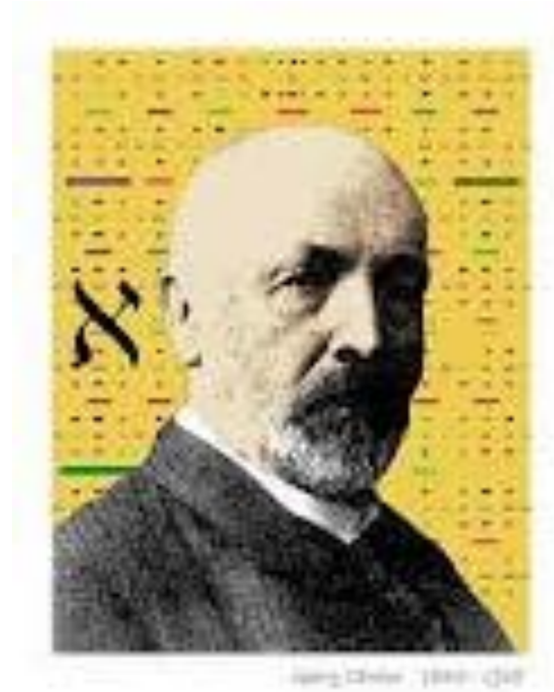
Il concetto di **cardinalità** è utilizzato in molti settori della matematica, tra cui nella teoria degli insiemi.

I numeri cardinali

I numeri cardinali furono definiti da Georg Cantor mentre stava sviluppando la teoria degli insiemi oggi chiamata teoria ingenua degli insiemi nel periodo 1874–1884.

Cantor utilizzò il concetto di **corrispondenza biunivoca** per mostrare che due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi. In seguito trasferì il concetto agli insiemi infiniti, come per esempio l'insieme dei numeri naturali **N** = {1, 2, 3, ... }.

Chiamò questi numeri cardinali numeri **cardinali transfiniti**, e definì **insiemi numerabili** tutti gli insiemi in corrispondenza biunivoca con **N**.



I numeri cardinali

Al numero cardinale transfinito che corrisponde alla cardinalità di **N** Cantor diede il nome di $\aleph_0$ **aleph zero** (aleph è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).

Provò che l'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri naturali è numerabile, e in seguito che l'insieme di tutti i numeri algebrici lo è.

Nel 1874, si chiese se *tutti gli insiemi infiniti* fossero numerabili, rendendo così di poca utilità la definizione di cardinalità. Invece Cantor riuscì a dimostrare che esistono numeri cardinali più grandi utilizzando una tecnica che ha preso il nome di "argomento diagonale di Cantor".

Cantor sviluppò poi una teoria generale dei numeri cardinali, dimostrando che $\aleph_0$ è il più piccolo numero cardinale transfinito, e che per ogni numero cardinale ne esiste uno più grande ($\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$,….).

Cardinalità di insiemi

$S \sim T$ (S e T sono *equipotenti*) se esiste una funzione biunivoca f che mette in corrispondenza S e T.

Sia $N = \{1, 2, \dots n\}$, se un insieme S è equipotente a N si dice che la *cardinalità* o *potenza* di S è n e si scrive $|S| = |N| = n$. In questo caso si dice che S è *finito* .

I numeri naturali n sono detti *numeri cardinali finiti*, gli altri cardinali sono detti *transfiniti*.

Esempio

1. L'insieme dei giorni della settimana è finito e ha cardinalità 7.
2. L'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano è finito e ha cardinalità 5.
3. L'insieme delle cifre nel sistema di numerazione decimale è finito e ha cardinalità 10.

Esempio

Considerato un triangolo qualsiasi, l'insieme *A* dei suoi lati e l'insieme *B* delle sue mediane sono equipotenti.

Per verificare tale affermazione è sufficiente considerare la relazione $R \subseteq A \times B$ che ad ogni lato di $a \in A$ fa corrispondere la mediana $b \in B$ avente per estremi il vertice opposto al lato *a* ed il punto medio dello stesso lato *a*.

La relazione *R* è una **funzione**: infatti ad ogni lato del triangolo corrisponde, nella relazione introdotta, una ed una sola mediana.

Questa funzione è inoltre surriettiva, dato che ogni mediana è corrispondente in R a un lato (quello avente come punto medio l'estremo della mediana non coincidente con un vertice del triangolo).

Questa funzione è anche iniettiva, in quanto a due lati distinti corrispondono due distinte mediane (i loro estremi non coincidenti con un vertice sono i punti medi di due lati distinti): *R* è quindi una funzione biiettiva, e *A* e *B* sono equipotenti.

Cardinalità dei naturali

La cardinalità dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è denotata con $\aleph_0$ (alef con zero).

$\aleph_0$ è il più piccolo cardinale transfinito.

Per ogni cardinale finito n si ha che $n < \aleph_0$. Un insieme di potenza $\aleph_0$ è detto *numerabile*.

Un insieme S è *numerabile* se è equipotente all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Esempio

1. L'insieme dei numeri pari è numerabile.
2. L'insieme dei numeri interi è numerabile.
3. Il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Principio di addizione

Proposizione 4. *Se* S *e* T *sono insiemi finiti allora* $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

Proposizione 5. *Se* S, T *e* Q *sono insiemi finiti allora* $|S \cup T \cup Q| = |S| + |T| + |Q| - |S \cap T| - |T \cap Q| - |S \cap Q| + |S \cap T \cap Q|$.

Ipotesi del continuo

$2^{\aleph_0}$ viene chiamato la *cardinalità del continuo* e denotato con $\mathbf{c}$, oppure con $\aleph_1$.

Un'ipotesi comunemente accettata in matematica è che non esistano cardinalità intermedie tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$, questa è detta *ipotesi del continuo*.

Dobbiamo dimostrare che $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$ siano effettivamente due cardinalità distinte, cioè $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

TECNICA DI DIAGONALIZZAZIONE: tentativo di costruire una biiniezione tra un insieme *S*, di cui si vuole provare la non numerabilità e N e nel verificare che qualche elemento di *S* sfugge alla biiniezione..

Teorema di Cantor

Teorema 6. [CANTOR] $2^{\aleph_0}$ *è strettamente maggiore di* $\aleph_0$.

Dimostrazione. Mostriamo che non esiste una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\wp\mathbb{N}$, da cui si deduce che $\wp\mathbb{N}$ non è numerabile e che $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Supponiamo che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\wp\mathbb{N}$. Sia $\mathcal{F}$ la funzione biunivoca $\mathcal{F} : \mathbb{N} \mapsto \wp\mathbb{N}$. Definiamo l'insieme $Z \subseteq \mathbb{N}$ come segue

$$Z = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \mathcal{F}(x)\}.$$

Z è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Essendo $\mathcal{F}$ biunivoca, deve esistere un elemento $x \in \mathbb{N}$ che è in corrispondenza biunivoca con Z, cioè $\mathcal{F}(x) = Z$. Ma per costruzione otteniamo la seguente contraddizione

$$x \in Z \text{ sse } x \notin \mathcal{F}(x) \text{ sse } x \notin Z.$$

Quindi, $\mathcal{F}$ non può essere una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\wp\mathbb{N}$.

$\wp$ Insieme potenza o insieme delle parti: l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi si un insieme

Principio della piccionaia

Teorema 7. [PRINCIPIO DELLA PICCIONAIA] *Per ogni numero naturale n non esiste una funzione biunivoca tra un insieme di cardinalità n ed un qualunque suo sottoinsieme proprio.*

Il teorema prende il nome dalla semplice osservazione che se in una piccionaia ci sono n buchi, non c'è modo di collocarvi $n+1$ piccioni, a meno che due piccioni non stiano nello stesso buco.

Proposizione 8. *Siano S e T due insiemi finiti. Se $f : S \mapsto T$ è una funzione biunivoca allora $|S| = |T|$.*

Esempio

1. Scegliendo comunque otto persone, ce ne sono (almeno) due che sono nate nello stesso giorno della settimana.
2. Scegliendo comunque 5 numeri da 1 a 8, ce ne sono due che danno come somma 9. Consideriamo tutti gli insiemi di due cifre tra 1 e 8 che danno somma 9. Essi sono 4, e cioè:

   $$A_1 = \{1, 8\} \quad A_2 = \{2, 7\} \quad A_3 = \{3, 6\} \quad A_4 = \{4, 5\}.$$

   Consideriamo le cifre da 1 a 8 come piccioni e gli insiemi A_i come buchi, e assegniamo ogni cifra all'insieme A_i che la contiene. Scegliendo comunque cinque cifre, due staranno nello stesso A_i, quindi daranno come somma 9.

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 5)

end