LOGICA 1

Stefania Bandini

LOGICA PROPOSIZIONALE

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Introduciamo in questo paragrafo la nozione di *linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}_\Sigma$ costruito su un alfabeto Σ. Iniziamo con la definizione di alfabeto.

Un alfabeto Σ *è costituito da*

- *I connettivi proposizionali* $\neg$ *(unario) e* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *e* $\leftrightarrow$ *(binari);*
- *Le costanti proposizionali* $\top$, $\bot$ *(per denotare il vero e il falso);*
- *Un insieme non vuoto (finito o numerabile) di simboli proposizionali* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots, P, Q, \ldots\}$;
- *I simboli separatori '(' e ')'.*

Nel seguito scriveremo $\mathcal{L}$ quando Σ è chiaro dal contesto. Definiamo ora le formule di $\mathcal{L}$.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

L'insieme PROP *delle* formule ben formate *o* formule *del linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è l'insieme definito induttivamente come segue.*

1. *Le costanti e i simboli proposizionali sono formule;*
2. *Se* A *è una formula* $(\neg A)$ *è una formula;*
3. *Se* $\circ$ *è un connettivo binario (cioè* $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*) e se* A *e* B *sono due formule,* $(A \circ B)$ *è una formula.*

Le costanti e i simboli proposizionali sono anche detti *atomi*, le loro negazioni sono dette *atomi negati*. Gli atomi e gli atomi negati sono anche detti *letterali*. Gli atomi negati sono talvolta detti *letterali negativi*. Una formula del linguaggio proposizionale è anche detta *proposizione* o *enunciato proposizionale*.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Sia A una formula di PROP, *l'insieme delle* sottoformule *di A è definito come segue.*

1. *Se A è una costante o un simbolo proposizionale allora A stessa è la sua sola sottoformula.*
2. *Se A è una formula del tipo $(\neg A')$ allora le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di A'; $\neg$ è detto* connettivo principale *e A'* sottoformula immediata *di A.*
3. *Se A è una formula del tipo $B \circ C$ dove $\circ$ è un connettivo binario (cioè $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), e B e C due formule, le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di B e C; $\circ$ è detto* connettivo principale*; B e C* sottoformule immediate *di A.*

PRECEDENZA TRA CONNETTIVI

Le parentesi si possono eliminare con l'introduzione di un'opportuna precedenza tra i connettivi. Per le formule proposizionali si usa la seguente convenzione:

la massima precedenza a $\neg$, poi, nell'ordine, ai connettivi $\wedge, \vee$, $\rightarrow$ e infine a $\leftrightarrow$.

Questo significa che, in assenza di parentesi, una formula ben formata, va parentetizzata privilegiando Ie sottoformule i cui connettivi principali hanno precedenza più alta.
A parità di precedenza, cioè se siamo in presenza di pin occorrenze dello stesso connettivo, si assume che esso associ a destra.

Esempio

La formula $A \rightarrow B \rightarrow C$ viene parentetizzata come $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$;
la formula $\neg A \wedge \neg B \rightarrow C \wedge D \wedge E$ come $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \wedge (D \wedge E)))$;
la formula $\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C) \wedge D \wedge E$ come $((\neg A) \wedge ((\neg B) \rightarrow C) \wedge (D \wedge E))$.

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Il *sistema di valutazione* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O}p \rangle$ della logica proposizionale è definito da

1. $\mathcal{B} = \{0, 1\}$;
2. $\mathcal{T} = \{1\}$;
3. $\mathcal{O}p = \{\mathcal{O}p_{\neg}, \mathcal{O}p_{\wedge}, \mathcal{O}p_{\vee}, \mathcal{O}p_{\rightarrow}, \mathcal{O}p_{\leftrightarrow}\}$ uno per ognuno dei connettivi del linguaggio $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, con $\mathcal{O}p_{\neg} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ e $\mathcal{O}p_{\circ} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

La funzione $\mathcal{O}p_\neg$ della logica proposizionale è definita come segue: $\mathcal{O}p_\neg(1) = 0$ e $\mathcal{O}p_\neg(0) = 1$. Questo è di solito espresso in maniera concisa come: $\neg(0) = 1$ e $\neg(1) = 0$, cioè la funzione di valutazione associata a un connettivo viene indicata col simbolo stesso del connettivo e viene definita in forma tabellare mediante la *tavola* o *tabella dei valori di verità* per il connettivo

	$\neg$
1	0
0	1

TABELLA DEI VALORI DI VERITA’

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Congiunzione

Il connettivo di *congiunzione* $\wedge$ viene definito in modo che $A \wedge B$ è vero sse sia A che B (i due *congiunti*) sono veri, quindi $\mathcal{O}p_{\wedge} = min$.

		$\wedge$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Disgiunzione

Il connettivo di *disgiunzione* $\vee$ viene definito in modo che $A \vee B$ è vero sse A oppure B (uno dei due *disgiunti*) sono veri, quindi $\mathcal{O}p_{\vee} = max$.

		$\vee$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Implicazione

La definizione della semantica del connettivo di *implicazione* $A \to B$ (detta *implicazione materiale*, in cui A è detto *premessa* e B *conseguenza*) è in un certo senso meno intuitiva. Innanzi tutto si noti che, con la definizione data, si ha che $A \to A$ è sempre vero, qualunque sia il valore di verità di A; questo corrisponde alla nostra intuizione. Possiamo quindi accettare il fatto che affinché $A \to B$ sia vero basta che B sia vero, indipendentemente dal valore di verità di A. Questo di fatto ci dice che, se B è vero e $B \to B$ è vero, possiamo "rafforzare" la premessa sostituendo a B un qualunque A e l'implicazione resta vera.

Ovviamente, se la premessa è vera e la conseguenza è falsa, l'implicazione e falsa. Si noti che con questa definizione è difficile immaginare un nesso di causa-effetto tra premessa e conseguenza. Infatti in un opportuno linguaggio proposizionale avremmo anche che *"Se il Presidente della Repubblica si chiama Filippo, allora oggi ho vinto alla Lotteria di Capodanno"* è un'implicazione vera, anche se sia la premessa che la conseguenza sono false (a oggi) ed è difficile immaginare un nesso di causa-effetto tra le due.

		$\to$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Doppia Implicazione

La definizione della semantica del connettivo di *doppia implicazione* è del tutto intuitiva: il valore di verità di $A \leftrightarrow B$ è vero se i valori di verità di A e B coincidono.

		$\leftrightarrow$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

LOGICA

END