INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 4)

Stefania Bandini

RELAZIONI BINARIE

Una *relazione binaria* R tra due insiemi S e T è un insieme di coppie ordinate $\langle x, y\rangle$ con $x \in S$ e $y \in T$: $R \subseteq S \times T$).

Il *dominio* di R, indicato con $dom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti x tali che $\langle x, y\rangle \in R$ per qualche y.

Il *codominio* di R, indicato con $codom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti y tali che $\langle x, y\rangle \in R$ per qualche x.

L'unione del dominio e del codominio di una relazione R si chiama il *campo* di R oppure *estensione*.

FUNZIONI

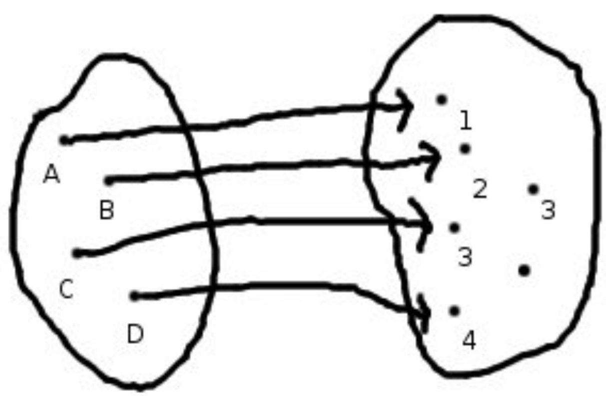
Tra le relazioni binarie, alcune hanno particolare importanza: le ***funzioni*** (o ***applicazioni***) sono relazioni tra gli elementi di un insieme *S* e gli elementi di un insieme *T* tali che ***ad ogni*** elemento dell'insieme *S* corrisponde al più un elemento di *T* (esattamente uno, se la funzione è totale).

Una corrispondenza tra gli elementi di S e quelli di T è una funzione quando:

1. Ogni elemento di *S* ha al più una corrispondenza in *T*
2. (Ovvero) nessun elemento di *S* ha più di una corrispondenza in *T*

FUNZIONI

Una relazione R⊆S × T si dice *funzione* (o *applicazione*) se per ogni x∈S esiste al massimo *un* y∈T tale che <x, y>∈R.



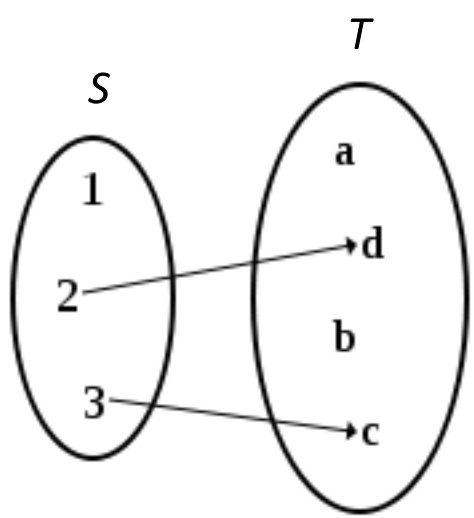
FUNZIONI

Sia f una relazione $f \subseteq S \times T$

f è una *funzione* se per ogni $x \in dom(f)$ esiste un *unico* y per cui $\langle x, y \rangle \in f$.

Se $x \in S$ è nel dominio di f allora si dice che $f(x)$ è definito.

Se il dominio di f coincide con S si dice che f è *totale*, altrimenti f è detta *parziale*.



Funzione parziale

FUNZIONI

Dati S e T, se f è una *funzione* da S in T scriviamo

$$f : S \mapsto T$$

per indicare che il dominio di f è contenuto in S e che il codominio di f è contenuto in T: $dom(f) \subseteq S$ e $codom(f) \subseteq T$.

Esempio

1. Sia U l'insieme degli esseri umani. La relazione binaria sottoinsieme di $U \times U$ che lega ogni individuo a sua madre è una funzione.
2. Sia $tr \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la relazione binaria che è vera per quelle coppie $\langle r, i \rangle$ in cui i è la parte intera del numero reale r. tr è una funzione.

Esempio: Immagine inversa

l'insieme $f^{-1}(y) = \{x \mid y = f(x)\}$ si chiama (l'insieme) *immagine inversa* di f in y.

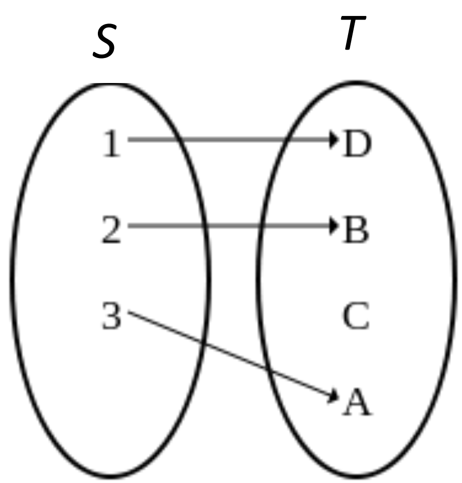
Sia tr la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ introdotta precedentemente.
L'immagine inversa di un numero intero i è l'insieme di tutti i numeri reali r tali che $tr(r) = i$.

L'immagine inversa del codominio di una funzione è il suo dominio:

$$dom(f) = \bigcup_{y \in codom(f)} f^{-1}(y).$$

FUNZIONE INIETTIVA

Una **funzione iniettiva** (detta anche **funzione ingettiva** oppure **iniezione**) è una funzione che porta **elementi distinti** del dominio in **elementi distinti** dell'immagine.



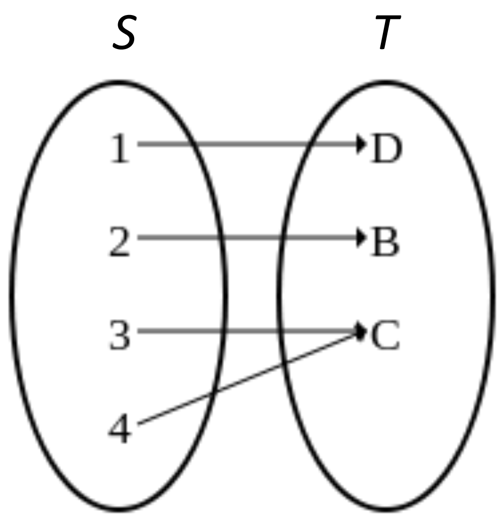
Funzione iniettiva

Una funzione $f : S \mapsto T$ è *iniettiva* se per ogni $x, y \in S$ con $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$. Esempio

1. Sia tr la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ introdotta precedentemente; tr non è iniettiva.
2. La funzione doppio $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = 2 \times x$ è iniettiva.

FUNZIONE SURRIETTIVA

Una funzione da un insieme S a un insieme T si dice **suriettiva** (o **surgettiva**, o una **suriezione**) quando ogni elemento di T è immagine di **almeno un elemento** del dominio, ovvero quanto codom(f)=T.



Funzione suriettiva

Una funzione è *suriettiva* se per ogni $y \in T$ esiste un x in S tale che $f(x) = y$, in tal caso $f(S) = T$. Esempio

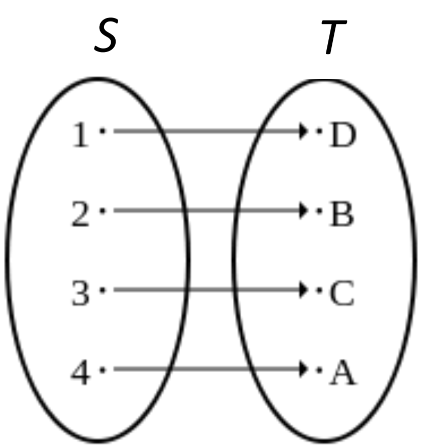
1. Sia tr la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$ introdotta precedentemente. tr è suriettiva.
2. La funzione doppio $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = 2 \times x$ non è suriettiva.
3. La funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x) = x \div 10$ (dove $x \div y$ indica il quoziente della divisione tra x e y) non è iniettiva
4. La funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^+$, $f(x) = x + 1$ è iniettiva e suriettiva.

FUNZIONE BIUNIVOCA

Una **corrispondenza biunivoca** tra due insiemi *S* e *T* è una relazione binaria tra *S* e *T*, tale che ad ogni elemento di *S* corrisponda *uno ed un solo* elemento di *T*, e viceversa ad ogni elemento di *T* corrisponda uno ed un solo elemento di *S*.

Lo stesso concetto può anche essere espresso usando le funzioni: una funzione è una **biiettiva**, **bigettiva** o **biunivoca** se per ogni elemento *y* di *T* vi è uno e un solo elemento *x* di *S* tale che $f : S \longrightarrow T$.

Una tale funzione è detta anche **biiezione** o **bigezione**.



Una funzione è biiettiva se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

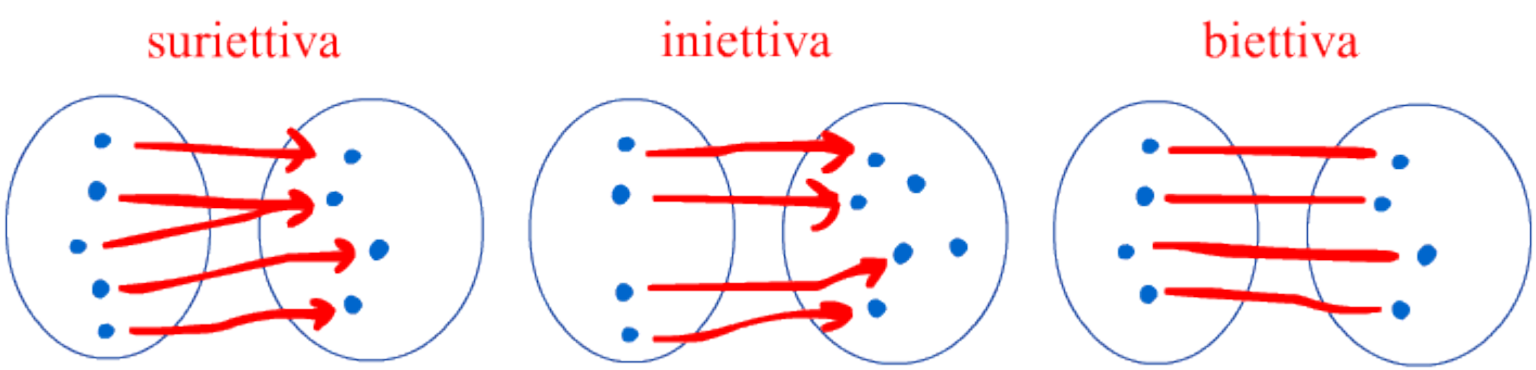
Funzioni biunivoche

Una funzione totale suriettiva e iniettiva è detta *biiettiva* o *biunivoca* o anche *uno-a-uno*. Esempio

1. Sia op la funzione da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ che associa ad ogni numero intero il suo opposto (op è spesso indicata con il simbolo '-' prefisso); op è totale, iniettiva e suriettiva, quindi è uno-a-uno.
2. La funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^+$, $f(x) = x + 1$ è totale, iniettiva e suriettiva, cioè è biunivoca.

FUNZIONI

Dominio: l'insieme su cui una funzione è definita.
Immagine/codominio: l'insieme di valori che una funzione assume, ovvero gli elementi *b* del codominio per i quali esiste almeno un elemento *a* del dominio A tale che f(*a*)=*b*
Funzione biiettiva: o corrispondenza biunivoca, è una funzione che a ogni elemento del dominio corrisponde uno e un solo elemento del codominio, e a ogni elemento del codominio corrisponde uno e un solo elemento del dominio.
Funzione suriettiva: quando l'immagine coincide con l'insieme all'interno del quale è definito il codominio.
Funzione iniettiva: quando elementi distinti del dominio hanno un'immagine distinta, cioè ogni elemento del codominio corrisponde a un solo o a nessun elemento del dominio.
una funzione allo stesso tempo iniettiva e suriettiva è biiettiva



Funzioni Parziali

Definizione: Siano A e B due insiemi, una *funzione parziale* $F : A \to B$ è un insieme di coppie $\langle a, b\rangle$ (con $a \in A$ e $b \in B$) in cui ogni elemento di A è in coppia con al più un elemento di B.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$

Funzioni Totali

Definizione: Siano A e B due insiemi, una *funzione totale* $F : A \longrightarrow B$ è una funzione parziale che associa ad ogni elemento di A un elemento di B.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$

$$\wedge$$

$$\forall a \in A(\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(associa ad ogni elemento di } A \text{ uno di } B\text{)}$$

$$\equiv$$

$$\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(funz. totale)}$$

Funzioni Iniettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \longrightarrow B$ è *iniettiva* se per ogni $b \in Im(F)$ esiste al più un a tale che $\langle a, b\rangle \in F$.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall b \in B((\exists a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(iniettività)}$$

Funzioni Suriettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \longrightarrow B$ è *suriettiva* se $Im(F) = B$.
Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists ! b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall b \in B(\exists a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(suriettività)}$$

Funzioni Biiettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \rightarrow B$ è *biiettiva* se è totale, iniettiva e suriettiva.

Formalizzazione:

$$\begin{array}{ll}
\forall a \in A(\exists! b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F) & \text{(funz. totale)} \\
\wedge & \\
\forall b \in B((\exists a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F)) & \text{(iniettività)} \\
\wedge & \\
\forall b \in B(\exists a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F) & \text{(suriettività)}
\end{array}$$

$$\equiv$$

$$\begin{array}{ll}
\forall a \in A(\exists! b \in B \ \ \langle a, b\rangle \in F) & \text{(funz. totale)} \\
\wedge & \\
\forall b \in B(\exists! a \in A \ \ \langle a, b\rangle \in F) & \text{(iniettività e suriettività)}
\end{array}$$

PUNTO FISSO

Un **punto fisso** per una funzione definita da un insieme in sé è un elemento coincidente con la sua immagine.

Un punto fisso per una funzione $f : S \rightarrow S$ definita su un insieme S è un elemento x in S tale che:

$$x = f(x)$$

Punto fisso

Sia $f : S \mapsto S$; chiamiamo *punto fisso* o *punto unito* di f un elemento $x \in S$ tale che $f(x) = x$.

Esempio

1. La funzione op introdotta precedentemente ha un solo punto fisso: lo 0.
2. La funzione identità i su un insieme S definita come
$$i(x) = x \qquad \text{per } x \in S.$$
ha come punti fissi tutti gli elementi di S.
3. La funzione doppio sui naturali^{+} non ha punti fissi.

Esempio

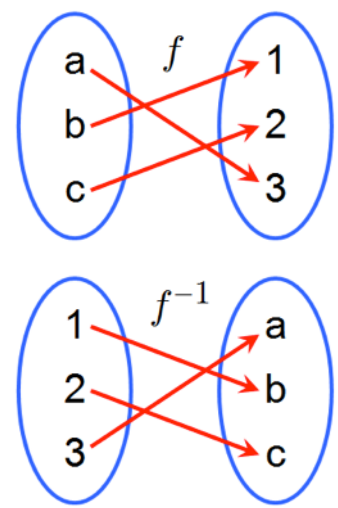
1. La divisione intera è un'operazione binaria su $\mathbb{Z}$; essa è parziale perché non è definita per quelle coppie il cui secondo elemento è 0.
2. L'operazione che sceglie l'elemento i da un insieme di n elementi, è l'operazione di *proiezione* f_i: $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$; essa è un'operazione totale.
3. L'addizione è un'operazione da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.
4. Per ogni insieme S, $\cup$ è un'operazione da $\wp S \times \wp S$ in $\wp S$.
5. La funzione op, introdotta precedentemente , è una operazione su $\mathbb{Z}$.
6. La funzione op, introdotta precedentemente ristretta a $\mathbb{N}$ non è un'operazione su $\mathbb{N}$.

FUNZIONE INVERSA

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **invertibile** se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che

$$g(f(x)) = x \quad \text{per ogni} \quad x \in X$$

$$f(g(y)) = y \quad \text{per ogni} \quad y \in Y$$



f^{-1} mappa 3 in *a* poiché *f* mappa *a* in 3

Funzione inversa, composizione di funzioni

Una funzione $f : S \mapsto T$ ammette una *funzione inversa* $f^{-1} : T \mapsto S$ sse f è iniettiva.

Esempio

1. La funzione somma $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(x, y) = x + y$ non è iniettiva, quindi non è invertibile; infatti, dato un elemento $n \in \mathbb{N}$, esistono più coppie di numeri naturali $\langle x, y \rangle$ tali che $x + y = n$.
2. La funzione op introdotta precedentemente . è invertibile e $op^{-1} = op$.
3. La funzione $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^{+}$, $f(x) = x + 1$, introdotta precedentemente è invertibile; la funzione inversa è $f^{-1}(y) = y - 1$.

Proprietà di funzioni inverse

Sia $f : A \mapsto B$ invertibile, con funzione inversa f^{-1}:

1. f^{-1} è totale sse f è suriettiva;
2. f è totale sse f^{-1} è suriettiva.

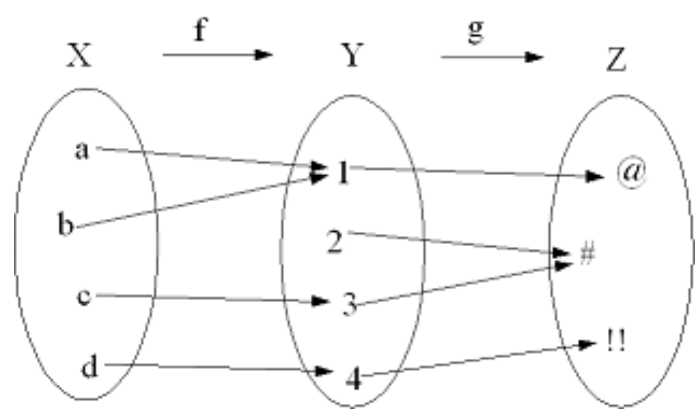
COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

La **composizione di funzioni** è l'applicazione di una funzione al risultato di un'altra funzione. Più precisamente, una funzione *f* tra due insiemi *X* e *Y* trasforma ogni elemento di *X* in uno di *Y*: in presenza di un'altra funzione *g* che trasforma ogni elemento di *Y* in un elemento di un altro insieme *Z*, si definisce la composizione di *f* e *g* come la funzione che trasforma ogni elemento di *X* in uno di *Z* usando prima *f* e poi *g*.

Formalmente, date due funzioni $f: X \to A$ e $g: B \to Z$ con $f(A) \subseteq B$ definiamo la funzione composta

$$g \circ f : X \to Z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \; \forall x \in X$$



COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

La composizione di funzioni è sempre associativa. In altre parole, se f, g e h sono tre funzioni con domini e codomini opportuni, allora $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Per questo motivo si possono omettere le parentesi nella composizione di più funzioni.

La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva, e di due funzioni suriettive è suriettiva. Quindi la composizione di due funzioni biiettive è biiettiva.

Composizione di funzioni

Date $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto U$ la *composizione* di f e g è la funzione $g \circ f : S \mapsto U$ tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in S$.

La funzione composta $(g \circ f)(x)$ è definita sse sono definite entrambe $g(f(x))$ e $f(x)$.

Proposizione 2. *Siano $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ invertibili. Allora $g \circ f$ è invertibile e la sua inversa è $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

FUNZIONE CARATTERISTICA

Nella teoria degli insiemi, se ***A*** è un sottoinsieme dell'insieme ***X*** , la **funzione indicatrice**, o **funzione caratteristica** di ***A*** è quella funzione da ***X*** all'insieme **{0, 1}** che sull'elemento $x \in X$ vale 1 se ***x*** appartiene ad *A*, e vale 0 in caso contrario.

Funzione caratteristica di sottoinsiemi

Sia U l' universo. La *funzione caratteristica* di un sottoinsieme $S \subseteq U$ è così definita:

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in S \\ 0 & \text{per } x \notin S. \end{cases}$$

Proposizione 3.

1. $f_{S \cap T} = f_S \times f_T$;
2. $f_{S \cup T} = f_S + f_T - f_S \times f_T$;
3. $f_{S \triangle T} = f_S + f_T - 2 \times f_S \times f_T$.

Esempio

Sia $U = \mathbb{N}$. La funzione caratteristica dei numeri pari è

$$f_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{sse } (x \ mod\ 2) = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove mod è il resto della divisione intera.

Proprietà delle funzioni

$f : X \mapsto Y$	se $x = y$ allora $f(x) = f(y)$
funzione iniettiva	se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$,
funzione suriettiva	per ogni $y \in Y$, esiste un $x \in X$ tale che $f(x) = y$
funzione biettiva	suriettiva e iniettiva
funzione totale	$dom(f) = X$

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 4)

END