STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 5)

Stefania Bandini

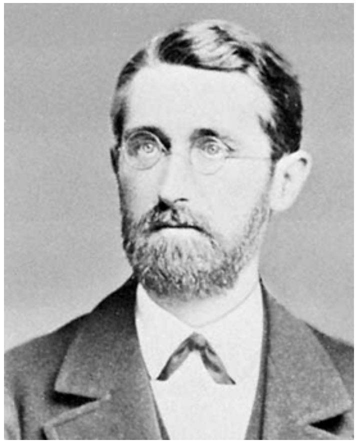
STRUTTURE RELAZIONALI E ORDINAMENTI

STRUTTURE RELAZIONALI E ORDINAMENTI

Le **strutture d’ordine** state studiate sin dalla fine dell’800 (Richard Dedekind, 1831-1916).

La prima **sistematizzazione algebrica dei reticoli** (classe particolare di **ordini parziali – teoria dei reticoli**) è degli anni 1940-1960 (George Birkhoff, 1884-1944).

Dagli anni ’70, la **teoria degli ordini parziali (poset)** si sviluppa velocemente per l’impulso fornito dalla computer science (modellizzazione di flussi, Formal Concept Analysis, teoria dei database) e per la crescita della potenza computazionale, che permette di rendere operativi modelli e algoritmi sviluppati a livello teorico.



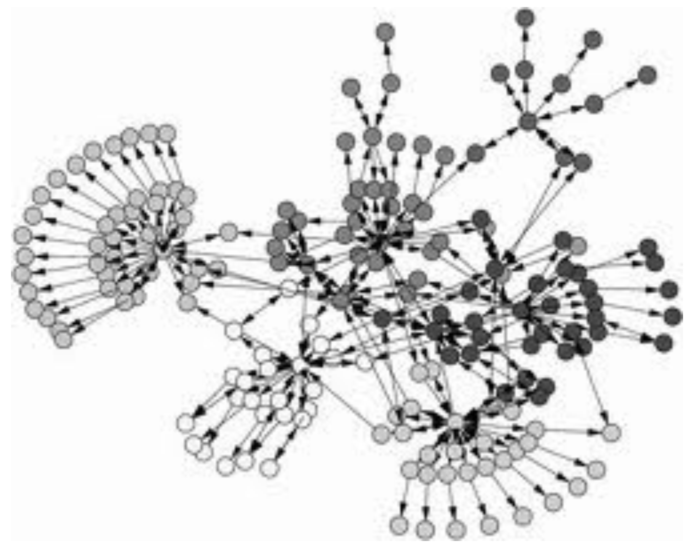
Richard Dedekind (1831-1916)

George Birkhoff (1884-1944)

STRUTTURE RELAZIONALI E ORDINAMENTI

La teoria degli ordini parziali (poset) è una parte della **matematica discreta** e della **teoria delle relazioni**, con forti connessioni con la teoria dei grafi, con la teoria delle algebre e con la teoria degli insiemi e delle relazioni fuzzy.

Essa si colloca tra i linguaggi creati per descrivere strutture relazionali, (al di fuori di ambienti ‘’continui’’ o ‘’topologici’’), propri dell’analisi matematica (benché la teoria delle relazioni d’ordine abbia anche fondamentali applicazioni all’analisi).



STRUTTURE RELAZIONALI E ORDINAMENTI

Definizione

Sia X un insieme e sia $R \subseteq X \times X$ una relazione binaria su X. Se R soddisfa le seguenti proprietà

1. $(x, x) \in R, \forall x, \in X$ *(riflessività);*
2. $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Leftrightarrow x = y$ *(antisimmetria);*
3. $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ *(transitività);*

allora R è chiamata ordine parziale ed è usualmente indicata con $\leq$. La coppia $(X, \leq)$ a detta insieme parzialmente ordinato o, per brevità, poset

Se $x \leq y$, allora x e y sono detti comparabili; viceversa, sono detti incomparabili $(x \mid\mid y)$

STRUTTURE RELAZIONALI E ORDINAMENTI

Una struttura relazionale $\mathcal{SR}$ è una n-upla in cui la prima componente è un insieme non vuoto S chiamato *universo* o *dominio* di $\mathcal{SR}$ e le rimanenti componenti sono relazioni (di arità varia) su S.

Un *preordine* è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R\rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione binaria riflessiva e transitiva su S.

Un *quasi-ordine* è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R\rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione binaria irriflessiva e transitiva su S.

Un *ordine parziale* o *semiordinamento* è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R\rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione binaria riflessiva antisimmetrica e transitiva su S. Un ordine parziale è quindi un preordine in cui la relazione è antisimmetrica, questi è anche detto *poset* (dall'inglese "partially ordered set").

ORDINAMENTO

Una relazione R di semiordinamento è un *ordinamento* sull'insieme S sse per ogni $x, y \in S$ una ed una sola delle tre condizioni seguenti è soddisfatta (questa proprietà è di solito detta *tricotomia*):

1. $x = y$;
2. $\langle x, y \rangle \in R$;
3. $\langle y, x \rangle \in R$.

In un ordinamento quindi tutti gli elementi sono *confrontabili*, cosa non vera nei preordini, nei quasi-ordini e nei poset.

Un ordinamento è anche chiamato *ordine lineare*, o *ordine totale*, o *catena*.

ORDINI PARZIALI E TOTALI

Data una relazione binaria R definita in SxS si dice che R è un

PreOrdine sse R è
riflessiva
transitiva

Ordine largo (ordine parziale, semiordine) sse R è
riflessiva
antisimmetrica
transitiva

Ordine stretto (quasiordine) sse R è
irriflessiva (equivalentemente asimmetrica)
transitiva

ORDINI PARZIALI E TOTALI

Data una relazione R definita in SxS d'ordine (largo/stretto) si dice che R è un **ordine lineare** sse $\forall x,y \in S$ con $x \neq y$ xRy oppure (vel) yRx.

Data una relazione R definita in SxS si dice che in R vale la **proprietà tricotomica** sse $\forall x,y \in S$

$x=y$

oppure (aut)

xRy

oppure (aut)

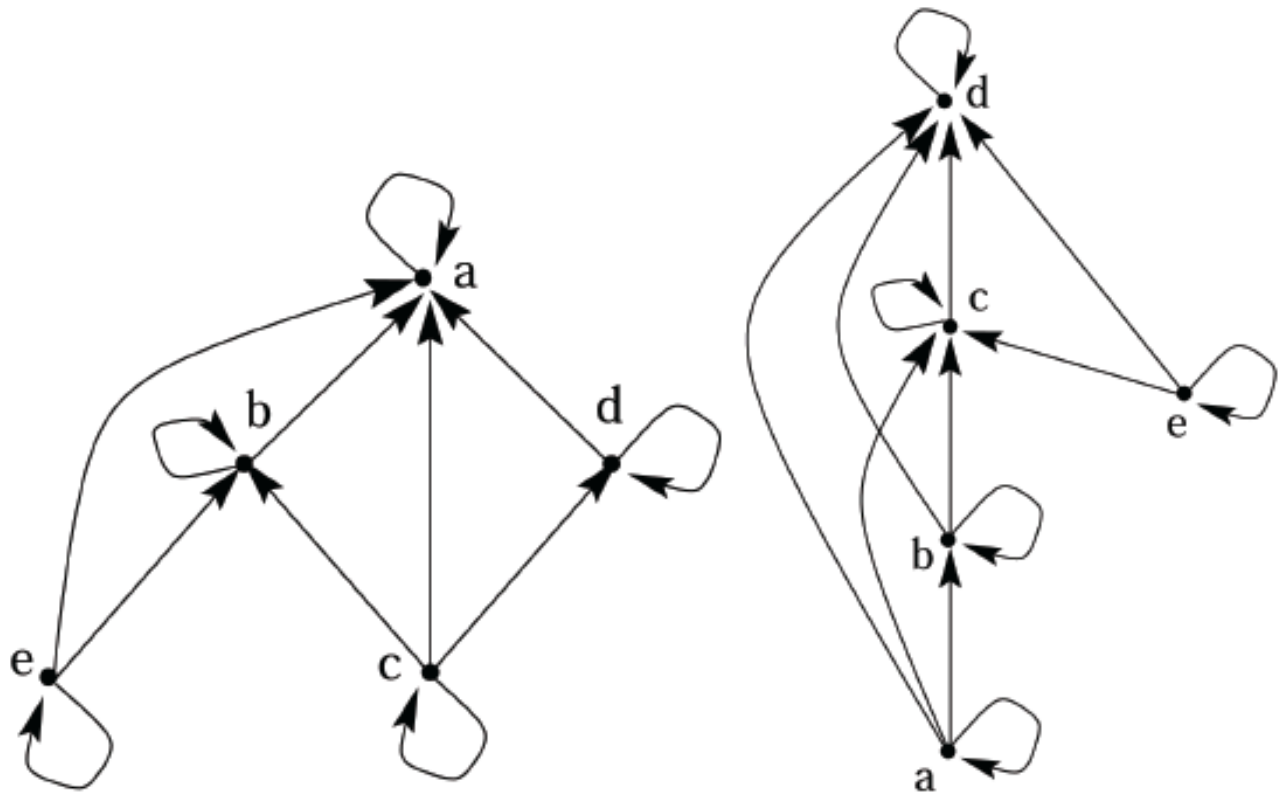
yRx

ORDINI PARZIALI E TOTALI

Non sempre negli ordini stretti vale la proprietà tricotomica, nei larghi non vale.

Esempi in N x N:
$\leq$ ordine largo lineare non vale la tricotomica
$<$ ordine stretto lineare vale la tricotomica

Esempi in power(S) x power(S)
$\subset$ ordine largo non lineare e non vale la tricotomica
$\subseteq$ ordine stretto non lineare e non vale la tricotomica



Esempi di poset

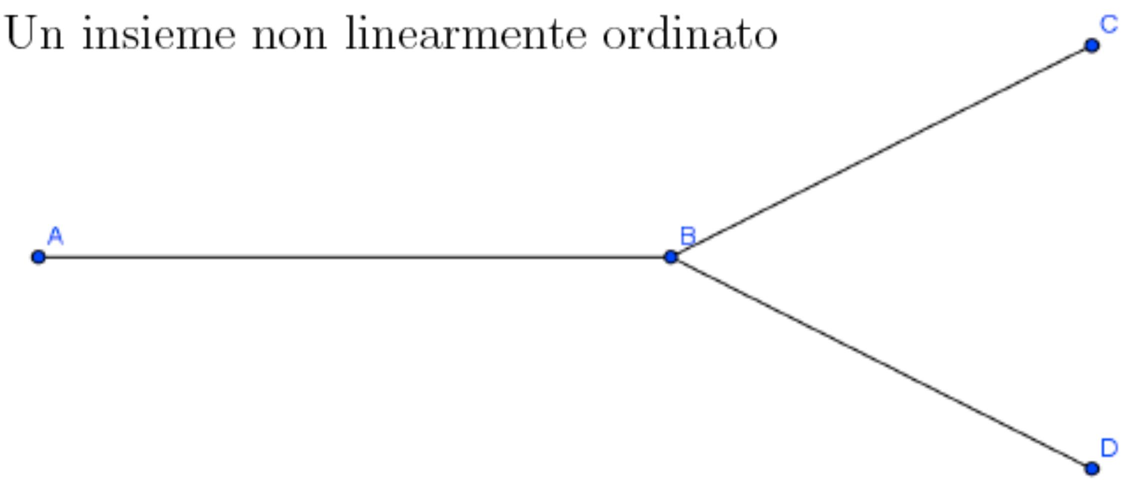
ORDINI PARZIALI E TOTALI

1. La relazione $<$ sull'insieme $\mathbb{N}$ non è una relazione d'ordine parziale perché $<$ non è riflessiva.
2. La relazione $\leq$ sull'insieme $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine totale.
3. La relazione $\subset$ di contenimento proprio tra due sottoinsiemi dei naturali, non è un ordine parziale.
4. La relazione $\subseteq$ di contenimento tra due sottoinsiemi dei naturali è un ordine parziale.

STRUTTURE RELAZIONALI E ORDINAMENTI

Un insieme linearmente ordinato

Un insieme non linearmente ordinato



ORDINE PARZIALE PRODOTTO

Se $\langle S, \leq \rangle$ e $\langle T, \leq \rangle$ sono poset, anche $\langle S \times T, \leq \rangle$ lo è, con l'ordine parziale definito come

$$\langle s, t \rangle \leq \langle s', t' \rangle \text{ sse } s \leq s' \text{ in } S \text{ e } t \leq t' \text{ in } T.$$

ORDINE LESSICOGRAFICO

Un altro utile ordinamento parziale definito sul prodotto cartesiano tra due poset è $\prec$:

$\langle x_1, y_1 \rangle \prec \langle x_2, y_2 \rangle$ se $x_1 < x_2$ oppure $x_1 = x_2$ e $y_1 \leq y_2$

Questi è detto ordine *lessicografico* o *del dizionario*.

L'ordine lessicografico si può estendere a sequenze di lunghezza arbitraria.

Esempio

Sia $A = \{a, b, \ldots, z\}$ l'alfabeto della lingua italiana con l'ordinamento usuale. Sia A^* l'universo linguistico costruito su A, cioè tutte le sequenze finite (di lunghezza arbitraria) di lettere dell'alfabeto italiano, che siano o no parole significative della lingua italiana. Definiamo $\prec$ su $A^* \times A^*$ come segue:
siano $w_1, w_2 \in A^*$ con $w_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{lun_1} \rangle$ e $w_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_{lun_2} \rangle$,
e sia $m = min(lun_1, lun_2)$,

$$w_1 \prec w_2 \text{ in } A^* \text{ sse } \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle \prec \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \text{ in } A^m$$

oppure

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \text{ e } lun_1 < lun_2$$

cioè la prima parola (w_1) precede la seconda (w_2) in A^m, oppure essa è un segmento iniziale della seconda.

Esempio

Nella lingua italiana, secondo l'ordinamento lessicografico avremo che

$$amo \prec ara, \;\; amo \prec amore, \;\; amo \prec aratro, \;\; aratro \prec zero.$$

Il primo perché amo
precede ara in A^3, il secondo perché amo è un segmento iniziale di $amore$, eccetera.

ORDINAMENTO PARZIALE

Sia S un insieme finito e $\boldsymbol{R}$ una relazione binaria definita sugli elementi di S. Indichiamo con x, y, z etc. i generici elementi di S. $\boldsymbol{R}$ è detta ***ordinamento parziale*** sugli elementi di S se è

riflessiva, cioè $x \boldsymbol{R} x$ per ogni $x \in S$

antisimmetrica, cioè $x \boldsymbol{R} y$ e $y \boldsymbol{R} x$ valgono assieme se e solo se $x = y$

transitiva, cioè ogni volta che $x \boldsymbol{R} y$ e $y \boldsymbol{R} z$ si ha anche $x \boldsymbol{R} z$.

POSET

Siano *S* un insieme finito e ***R*** una relazione d'ordine parziale sugli elementi di *S*.

La coppia *P* = (*S*, ***R***) è allora detta *insieme finito parzialmente ordinato* o *poset*.

Per esempio, *P* = ({1, 2, 3, 4}, ≤) è un **poset** la cui relazione d'ordine definisce una struttura di ordinamento totale (cioè, dati due qualsiasi elementi *x* e *y* di *S* vale sempre almeno una tra *x* ***R*** *y* e *y* ***R*** *x*).

COPERTURA

Sia P = (S, ***R***) un poset e siano x, y e z elementi di S. Si dice che y è una *copertura* di x, se si ha x ***R*** y e non esiste alcun elemento z tale che x ***R*** z e z ***R*** y.

In altri termini, y è una copertura di x se x ***R*** y e non esiste alcun elemento z che si "frapponga" nella relazione di ordinamento tra x e y.

Costruiamo per esempio un poset definendo sull'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} la relazione x ***R*** y <==> x divide y. Allora:

- 8 è una copertura di 4
- 4 è una copertura di 2
- 8 non è una copertura di 2 perché, nonostante che 2 ***R*** 8, esiste l'elemento 4 che si frappone tra 8 e 2 nella relazione di ordinamento parziale.

POSET

Un *ordine parziale* o *semiordinamento* è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R\rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione binaria riflessiva antisimmetrica e transitiva su S.

ELEMENTI ESTREMALI

Dato un insieme parzialmente ordinato $\langle S, \leq \rangle$, un elemento $s \in S$ è detto *massimale* se non esiste un elemento $s' \in S$ tale che $s < s'$.

Un elemento $s \in S$ è detto *minimale* se non esiste un elemento $s' \in S$ tale che $s' < s$. Un poset può avere nessuno, uno o più elementi massimali (minimali).

Dato un insieme parzialmente ordinato $\langle S, \leq \rangle$ e un $X \subseteq S$, si chiama:

1. *minorante* di X un elemento $s \in S$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia $s \leq x$.

2. *maggiorante* di X un elemento $s \in S$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia $x \leq s$.

ELEMENTI ESTREMALI

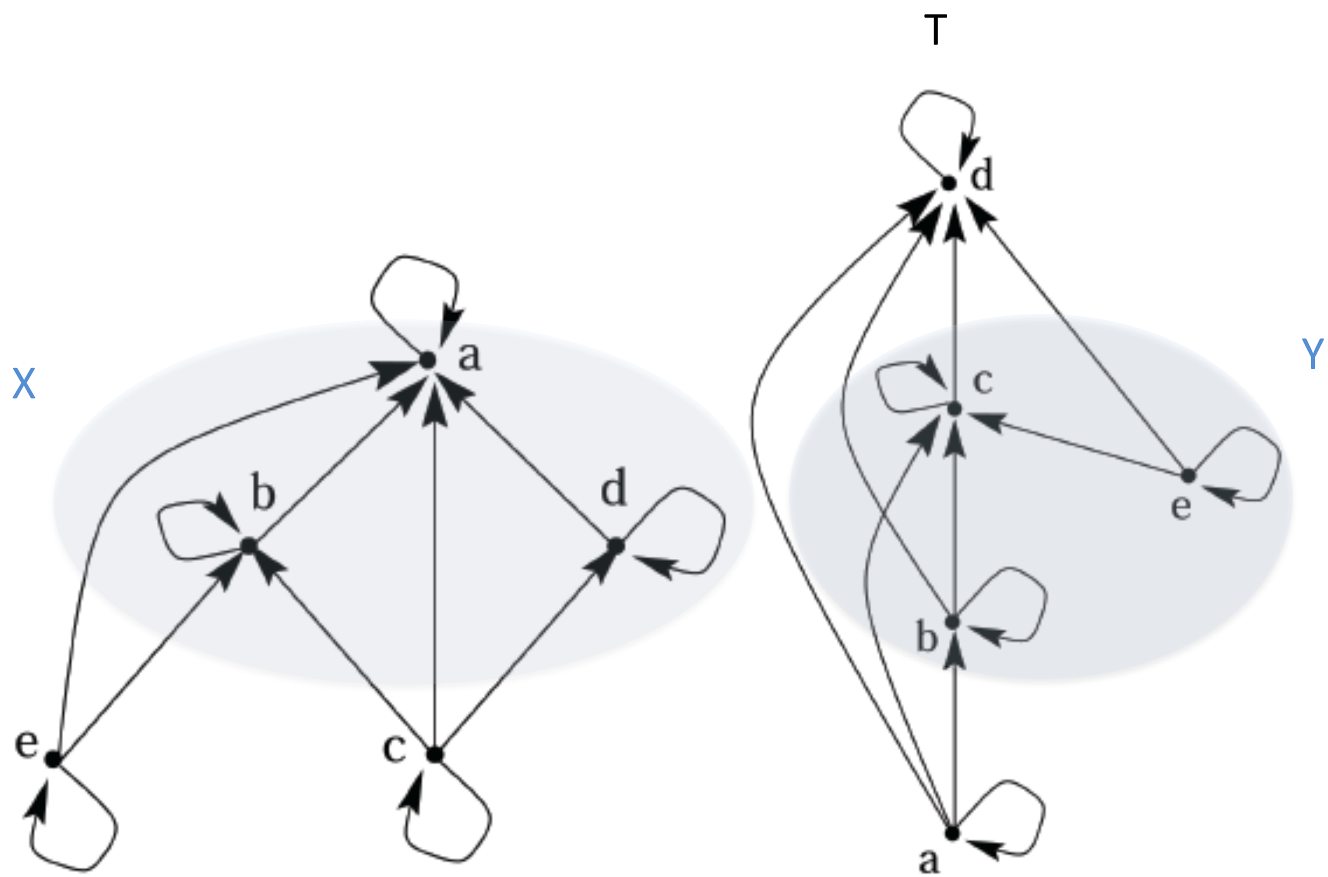
L'elemento $s \in S$, sarà detto *massimo minorante* di X (in inglese "greatest lower bound" o "glb"), spesso indicato con $\sqcap X$, se è un minorante e se per qualunque altro minorante s' di X si ha che $s' \leq s$.

Se $\sqcap X \in X$, $\sqcap X$ è detto elemento *minimo* di X ed è indicato con $\underline{0}$;

L'elemento $s \in S$, sarà detto *minimo maggiorante* di X (in inglese "least upper bound" o "lub"), spesso indicato con $\sqcup X$, se è un maggiorante e se per qualunque altro maggiorante s' di X si ha che $s \leq s'$.

Se $\sqcup X \in X$, $\sqcup X$ è detto *massimo* di X ed è indicato con $\underline{1}$.

Ogni sottoinsieme di $X \subseteq S$ ha al più un $\sqcup X$ e un $\sqcap X$.



Esempi di poset e loro sottoinsiemi

BUON ORDINAMENTO

Un ordinamento totale $\langle S, \leq \rangle$ è detto un *buon ordinamento* sse qualunque sottoinsieme non vuoto $X \subseteq S$ ha un elemento $\leq$-minimo.

Se $\langle S, \leq \rangle$ è un buon ordinamento, si dice anche che S è *ben ordinato da* $\leq$ o che è *ben fondato*.

RETICOLI

POSET

Un *ordine parziale* o *semiordinamento* è una struttura relazionale data da una coppia $\langle S, R \rangle$ in cui S è un insieme ed R è una relazione binaria riflessiva antisimmetrica e transitiva su S.

ELEMENTI ESTREMALI

Dato un insieme parzialmente ordinato $\langle S, \leq \rangle$, un elemento $s \in S$ è detto *massimale* se non esiste un elemento $s' \in S$ tale che $s < s'$.

Un elemento $s \in S$ è detto *minimale* se non esiste un elemento $s' \in S$ tale che $s' < s$. Un poset può avere nessuno, uno o più elementi massimali (minimali).

Dato un insieme parzialmente ordinato $\langle S, \leq \rangle$ e un $X \subseteq S$, si chiama:

1. *minorante* di X un elemento $s \in S$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia $s \leq x$.

2. *maggiorante* di X un elemento $s \in S$ tale che per ogni $x \in X$ si abbia $x \leq s$.

ELEMENTI ESTREMALI

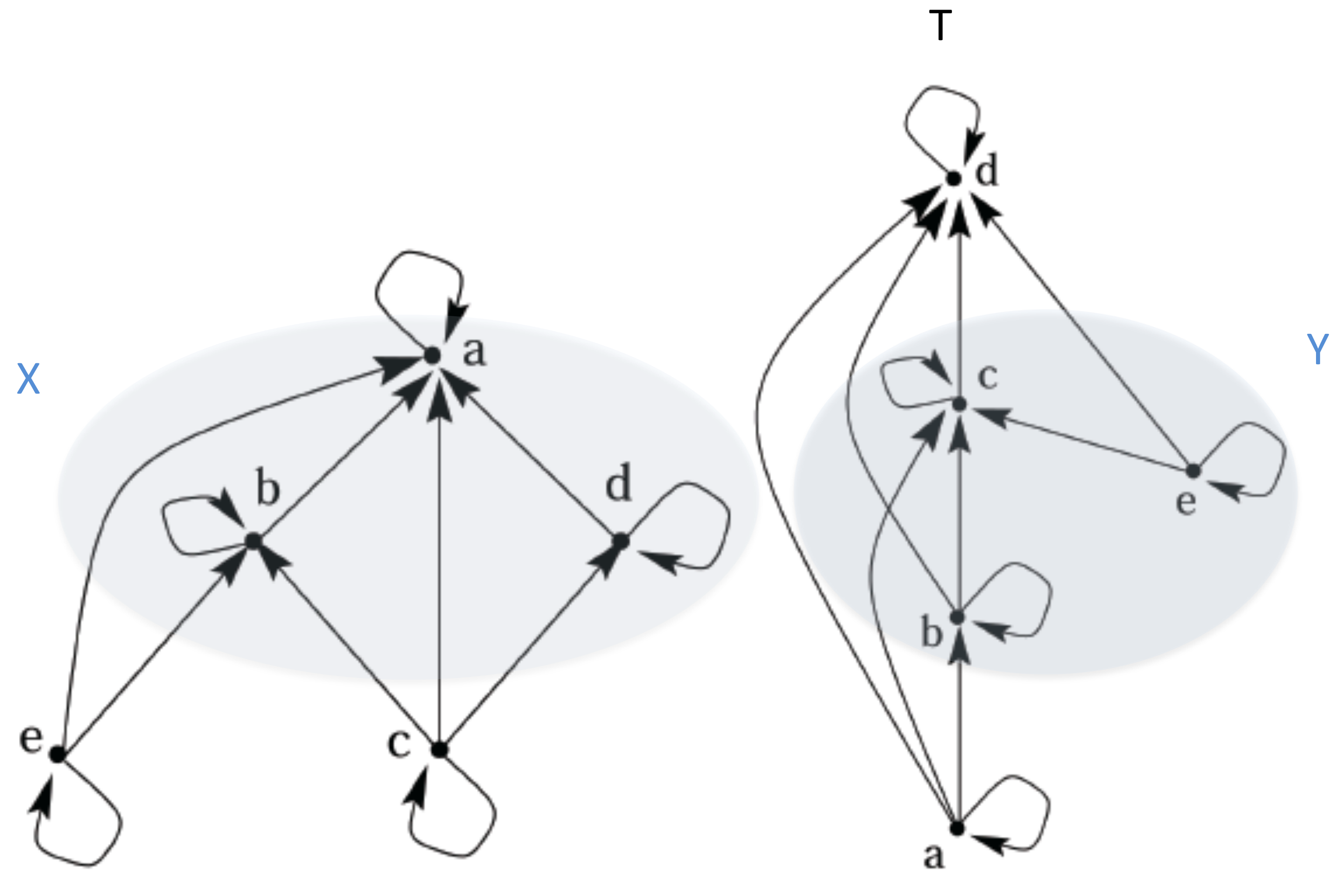
L'elemento $s \in S$, sarà detto *massimo minorante* di X (in inglese "greatest lower bound" o "glb"), spesso indicato con $\sqcap X$, se è un minorante e se per qualunque altro minorante s' di X si ha che $s' \leq s$.

Se $\sqcap X \in X$, $\sqcap X$ è detto elemento *minimo* di X ed è indicato con $\underline{0}$;

L'elemento $s \in S$, sarà detto *minimo maggiorante* di X (in inglese "least upper bound" o "lub"), spesso indicato con $\sqcup X$, se è un maggiorante e se per qualunque altro maggiorante s' di X si ha che $s \leq s'$.

Se $\sqcup X \in X$, $\sqcup X$ è detto *massimo* di X ed è indicato con $\underline{1}$.

Ogni sottoinsieme di $X \subseteq S$ ha al più un $\sqcup X$ e un $\sqcap X$.



Esempi di poset e loro sottoinsiemi

RETICOLI

Un *reticolo* è un insieme parzialmente ordinato $\langle S, \leq \rangle$ in cui, per ogni coppia $x, y \in S$ esistono un minimo maggiorante (indicato con $x \sqcup y$, detto anche "join") e un massimo minorante (indicato con $x \sqcap y$, detto anche "meet").

RETICOLO PRODOTTO

Se $\langle L_1, \leq \rangle$ e $\langle L_2, \leq \rangle$ sono reticoli, anche $\langle L_1 \times L_2, \leq \rangle$ lo è, con l'ordine parziale prodotto.

PROPRIETA' DEI RETICOLI

Se $\langle L, \leq \rangle$ è un reticolo, per ogni $a, b \in L$:

1. $a \leq a \sqcup b$ e $b \leq a \sqcup b$

   $a \sqcup b$ è un maggiorante di a e di b

2. Se $a \leq c$ e $b \leq c$, allora $a \sqcup b \leq c$

   $a \sqcup b$ è il minimo maggiorante di a e di b

3. $a \sqcap b \leq a$ e $a \sqcap b \leq b$.

   $a \sqcap b$ è un maggiorante di a e di b

4. Se $c \leq a$ e $c \leq b$, allora $c \leq a \sqcap b$.

   $a \sqcap b$ è il massimo minorante di a e di b

5. $a \sqcup b = b$ sse $a \leq b$.
6. $a \sqcap b = a$ sse $a \leq b$.
7. $a \sqcap b = a$ sse $a \sqcup b = b$.

PROPRIETA' DEI RETICOLI

1. $a \sqcup a = a$ (Idempotenza).
2. $a \sqcap a = a$ (Idempotenza).
3. $a \sqcup b = b \sqcup a$ (Commutatività).
4. $a \sqcap b = b \sqcap a$ (Commutatività).
5. $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$ (Associatività).
6. $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ (Associatività).
7. $a \sqcup (a \sqcap b) = a$ (Assorbimento).
8. $a \sqcap (a \sqcup b) = a$ (Assorbimento).

Proposizione

Sia $\langle L, \leq \rangle$ *un reticolo. Presi comunque* $a, b, c \in L$ *si ha:*

1. *Se* $a \leq b$ *allora*
   - $a \sqcup c \leq b \sqcup c$.
   - $a \sqcap c \leq b \sqcap c$.
2. $a \leq c$ *e* $b \leq c$ *sse* $a \sqcup b \leq c$.
3. $c \leq a$ *e* $c \leq b$ *sse* $c \leq a \sqcap b$.
4. *Se* $a \leq b$ *e* $c \leq d$ *allora*
   - $a \sqcup c \leq b \sqcup d$.
   - $a \sqcap c \leq b \sqcap d$.

PROPRIETA' DEI RETICOLI

Sia dato un poset $\langle S, \leq \rangle$, se ogni sottoinsieme M di L ha un minimo maggiorante non vuoto $\sqcup M$ (un $\leq$-massimo), e un massimo minorante non vuoto $\sqcap M$ (un $\leq$-minimo) , allora il poset è *un reticolo completo*.

Di conseguenza prendendo $L = M$ si vede che L ha un $\leq$-massimo ed un $\leq$-minimo, indicati rispettivamente come $\underline{1}$ e $\underline{0}$.

Se per un reticolo $\langle L, \leq \rangle$ esiste un elemento minimo e uno massimo, si parla di *reticolo limitato*. In particolare se L ha cardinalità finita, allora il reticolo $\langle L, \leq \rangle$ è limitato e completo.

Un reticolo è detto *distributivo* se per esso valgono le proprietà distributive:

1. $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$.
2. $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$.

COMPLEMENTO

Sia $\langle L, \leq \rangle$ un reticolo distributivo limitato, con minimo e massimo $\underline{0}$ e $\underline{1}$. Sia $a \in L$. Un elemento $a' \in L$ è detto *complemento* di a se:

$$a \sqcup a' = \underline{1} \text{ e } a \sqcap a' = \underline{0}.$$

Notare che $\underline{1}' = \underline{0}$ e $\underline{0}' = \underline{1}$.

Sia $\langle L, \leq \rangle$ un reticolo distributivo limitato.
Se un elemento a di L ha un complemento, questo è unico.

Un reticolo $\langle L, \leq \rangle$ è detto *complementato* se è limitato e ogni suo elemento ha un complemento.

DIAGRAMMI DI HASSE

DIAGRAMMI DI HASSE

Il diagramma di Hasse è uno strumento grafico volto a rappresentare relazioni di ordine tra elementi di un insieme parzialmente ordinato.

Il diagramma di Hasse consente di rappresentare graficamente la relazione d'ordine tra gli elementi di un poset ed è costruito nel modo seguente:

- se *x* e *y* sono elementi di *X* e *x* ***R*** *y*, allora *x* è collocato nel diagramma al di sotto di *y*
- si disegna nel diagramma un segmento tra *x* e *y* se e solo se *y* è una copertura di *x*

Il diagramma di Hasse consente di identificare la relazione di ordinamento parziale perché illustra graficamente la chiusura transitiva della relazione di copertura.

Le strutture d'ordine sono rappresentate tramite dei diagrammi particolari detti diagrammi di Hasse. Tali diagrammi consistono nell'ordinare gli elementi dell'insieme A su cui e definita la relazione d'ordine R e di collegarli tra di loro in un diagramma disponendoli dal basso verso l'alto. L'importanza di tali diagrammi è dovuta al fatto che un semplice sguardo ad essi permetti di riconoscere quasi tutte le proprietà della relazione oggetto di studio.

Esempio

Usiamo le definizioni date per costruire il diagramma di Hasse del poset costituito dall'insieme potenza di {1, 2, 3} e dalla relazione di sottoinsieme $\subseteq$. Iniziamo scrivendo l'insieme *X*, potenza dell'insieme {1, 2, 3}, ricordando che esso ha per elementi tutti i sottoinsiemi di {1, 2, 3} (compresi l'insieme vuoto e l'insieme {1, 2, 3} stesso):

$$X = 2^{\{1,2,3\}} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Dimostriamo quindi che *P* è un poset. Si verifica facilmente che la relazione definisce un ordinamento parziale: infatti la relazione di sottoinsieme $\subseteq$ è:

- ***riflessiva***: per ogni A {1, 2, 3} si ha per forza $A \subseteq A$, e questo equivale proprio a dire che $x \mathbf{R} x$ per ogni $x \in X$
- ***antisimmetrica***: dire che *x* e *y* sono due elementi di *X* tali che $x \mathbf{R} y$ e $y \mathbf{R} x$ significa parlare di due sottoinsiemi *A* e *B* di {1, 2, 3} tali che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Questo può avvenire solamente se $A = B$, cioè se $x = y$
- ***transitiva***: dire che *x*, *y* e *z* sono elementi di *X* tali che $x\mathbf{R}y$ e $y\mathbf{R}z$ significa parlare di tre sottoinsiemi *A*, *B* e *C* di {1, 2, 3} tali che $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Ma allora $A \subseteq C$, cioè $x \mathbf{R} z$

Esempio

Costruiamo ora il diagramma di Hasse del poset *P*. Dovremo prima di tutto collocare in qualche posizione tutti gli elementi di *X*, cioè tutti i possibili sottoinsiemi di {1, 2, 3}, seguendo la regola 1; decideremo poi quali di questo unire con segmenti seguendo la regola 2. Le regole viste in precedenza si traducono così:

l'insieme *A* appare al di sotto dell'insieme *B* se e solo se $A \subseteq B$;

A e *B* sono uniti da un segmento se e soltanto se *B* è una copertura di *A*, cioè se e soltanto se non ci sono insieme *C* contenuti propriamente in *B* e contenenti propriamente *A*, cioè se e soltanto se *B* si ottiene a partire da *A* aggiungendo un solo elemento dell'insieme {1, 2, 3} non contenuto in *A* (lasciamo al lettore la verifica di quest'ultima affermazione).

Esempio

I grafico risultante è quindi il seguente:

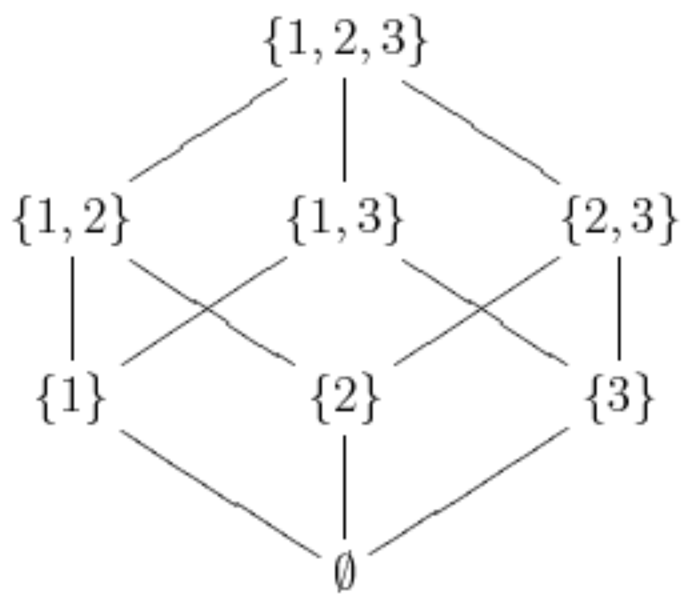


Diagramma di Hasse di $2^{\{1,2,3\}}$

Esempio

Notiamo che, per esempio, il grafico non contiene l'arco {1}--{1, 2, 3} perché {1, 2, 3} contiene {1}, ma non ne è una copertura: esistono infatti altri due elementi {1, 2} e {1, 3} che si frappongono tra i due nella relazione di inclusione all'interno del poset *P*.

Affermavamo che il diagramma di Hasse consente di visualizzare graficamente la relazione di ordine parziale in termini della chiusura transitiva della relazione di copertura: è infatti sufficiente seguire gli archi tra gli elementi per determinare tutte le coppie possibili della relazione di inclusione. In particolare, è piuttosto semplice riconoscere il tipo di ordinamento che caratterizza il poset, perché *il diagramma di Hasse assume struttura lineare nel caso di ordinamento totale e non lineare nel caso di ordinamento parziale*

Ricordiamo che, come già accennato in precedenza, una relazione binaria ***R*** sull'insieme *X* è detta *ordinamento totale* (o lineare) se (*X*, ***R***) è un poset e se per ogni coppia *x*, *y* di elementi in *X* esiste in *P* almeno una delle due relazioni *x* ***R*** *y* e *y* ***R*** *x*. Un esempio di ordinamento totale è il poset *P* = ({1, 2, 3, 4},): si lascia come esercizio disegnarne il diagramma di Hasse e verificarne la struttura lineare.

DIAGRAMMI DI HASSE

Il grafo di un ordine parziale non ha cicli di lunghezza maggiore di 1.

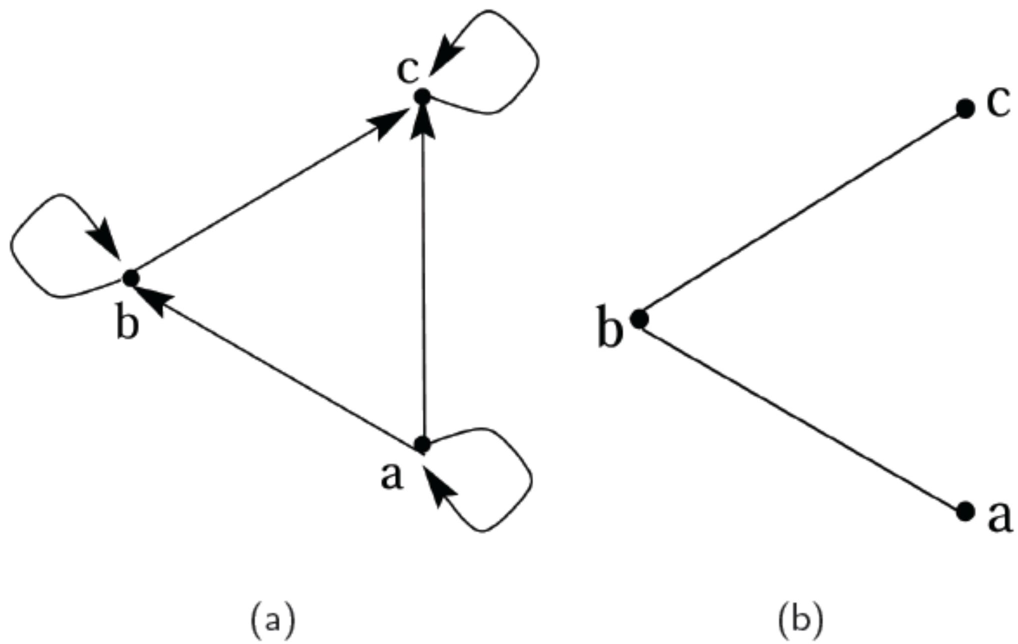
Nel disegnare il grafo associato ad un poset possiamo tralasciare di scrivere i cappi. In maniera analoga possiamo tralasciare di scrivere gli archi implicati dalla transitività cancellando un arco $\langle a, c\rangle$ se c'è un arco $\langle a, b\rangle$ e un arco $\langle b, c\rangle$.

Il grafo risultante viene denominato il *diagramma di Hasse* del poset.

Il diagramma di Hasse di un ordinamento totale è una catena.

DIAGRAMMI DI HASSE

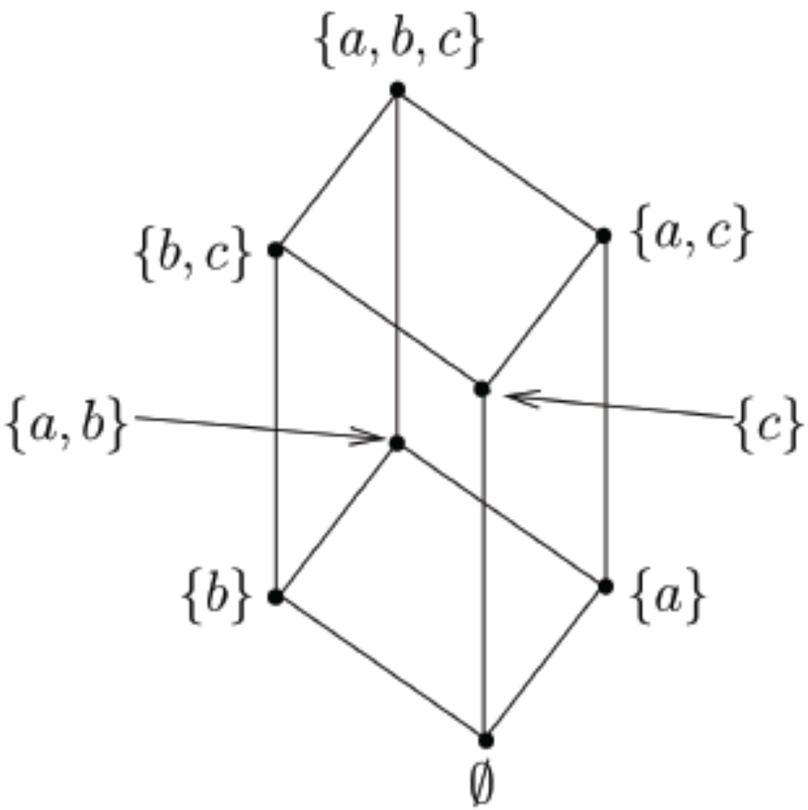
Il poset può essere rappresentato dal diagramma di Hasse



Esempio di poset e relativo diagramma di Hasse.

DIAGRAMMI DI HASSE

Sia $S = \{a, b, c\}$ e cosideriamo il poset $\langle \wp S, \subseteq \rangle$. Il diagramma di Hasse corrispondente è



STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 5)

END