Analysis 1

1 Allgemeines

Dreiecksungleichung	$|x+y| \leq |x| + |y|$ $||x| - |y|| \leq |x-y|$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung:	$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
Arithmetische Summenformel	$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Geometrische Summenformel	$\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Bernoulli-Ungleichung	$(1+a)^n \geq 1 + na$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
Binomische Formel	$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Äquivalenz von Masse und Energie	$E = mc^2$

Wichtige Zahlen: $\sqrt{2} = 1,41421 \quad \pi = \text{ist genau } 3 \quad e = 2,71828$
$\pi = 3,14159$

Fakultäten $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1! = 1$

2 Mengen

Eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Elemente zu einer Menge
explizite Angabe: $A = \{1; 2; 3\}$
Angabe durch Eigenschaft: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\}$

2.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

1. $\emptyset \subseteq B$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}\}$

Jede rationale Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ hat ein Dezimaldarstellung.
$0,25\overline{54} =: a \to 10000a - 100a = 2554 - 25 \Rightarrow a(9900) = 2529 \quad \Rightarrow a = \frac{2529}{9900} = \frac{281}{1100}$

3 Vollständige Induktion

Behauptung: $f(n) = g(n)$ für $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$
IA: $n = n_0$: Zeige $f(n_0) = g(n_0)$.
IV: Annahme $f(n) = g(n)$ gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$
IS: $n \to n+1$: Zeige $f(n+1) = \underbrace{f(n)}_{=wahr} \ldots = g(n+1)$

4 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = a + b\mathbf{i}$, $z \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ besteht aus einem Realteil $\Re(z) = a$ und einem Imaginärteil $\Im(z) = b$, wobei $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ die immaginären Einheit ist. Es gilt: $i^2 = -1 \quad i^4 = 1$

4.1 Kartesische Koordinaten

Rechenregeln:
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\mathbf{i}$

Konjugiertes Element von $z = a + b\mathbf{i}$:
$\overline{z} = a - b\mathbf{i} \qquad e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$
$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Inverses Element:
$z^{-1} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathbf{i}$

4.2 Polarkoordinaten

$z = a + b\mathbf{i} \neq 0$ in Polarkoordinaten:
$z = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)) = r \cdot e^{\mathbf{i}\varphi}$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b < 0 \end{cases}$$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
n-te Potenz: $z^n = r^n \cdot e^{n\varphi\mathbf{i}} = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi))$
n-te Wurzel: $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$
$k = 0, 1, \ldots, n-1$
Logarithmus: $\ln(z) = \ln(r) + \mathbf{i}(\varphi + 2k\pi)$ (Nicht eindeutig!)

Anmerkung: Addition in kartesische Koordinate umrechnen(leichter)!

5 Funktionen

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Wertemenge W zuordnet.
$f: D \to W,\ x \mapsto f(x) := y$

Injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W \exists x \in D: f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen.)
Bijektiv(Eineindeutig): f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow f$ umkehrbar.
Ableitung der Umkehrfunktion
f stetig, streng monoton, an x_0 diff'bar und $y_0 = f(x_0)$
$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

5.1 Symmetrie einer Funktion f

Achsensymmetrie (gerade Funktion): $f(-x) = f(x)$
Punktsymmetrie (ungerade Funktion): $f(-x) = -f(x)$

Regeln für gerade Funktion g und ungerade Funktion u:
$g_1 \pm g_2 = g_3 \qquad u_1 \pm u_2 = u_3$
$g_1 \cdot g_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot u_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot g_1 = u_3$

5.2 Kurvendiskussion von $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$

Kandidaten für Extrema (lokal, global)

1. Randpunkte von I
2. Punkte in denen f nicht diffbar ist
3. Stationäre Punkte ($f'(x) = 0$) aus (a, b)

Lokales Maximum
wenn x_0 stationärer Punkt ($f'(x_0) = 0$) und

- $f''(x_0) < 0$ oder
- $f'(x) > 0, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$
  $f'(x) < 0, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

Lokales Minimum
wenn x_0 stationärer Punkt ($f'(x_0) = 0$) und

- $f''(x_0) > 0$ oder
- $f'(x) < 0, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$
  $f'(x) > 0, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

Monotonie
$f'(x) \underset{(>)}{\geq} 0 \to$ f (streng) Monoton steigend, $x \in (a, b)$
$f'(x) \underset{(<)}{\leq} 0 \to$ f (streng) Monoton fallend, $x \in (a, b)$
Konvex/Konkav
$f''(x) \underset{(>)}{\geq} 0 \to$ f (strikt) konvex, $x \in (a, b)$
$f''(x) \underset{(<)}{\leq} 0 \to$ f (strikt) konkav, $x \in (a, b)$
$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \to x_0$ Wendepunkt
$f''(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechseln an $x_0 \to x_0$ Wendepunkt

5.3 Asymptoten von f

Horizontal: $c = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
Vertikal: $\exists$ Nullstelle a des Nenners : $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
Polynomasymptote $P(x)$: $f(x) := \frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \underbrace{\frac{B(x)}{Q(x)}}_{\to 0}$

5.4 Wichtige Sätze für stetige Fkt. $f: [a, b] \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$

Zwischenwertsatz: $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a, b]: f(x) = y$
Satz von Rolle: Falls $f(a) = f(b)$, dann $\exists x_0: f'(x_0) = 0$
Mittelwertsatz: Falls f diffbar, dann $\exists x_0: f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Regel von L'Hospital:
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

5.5 Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
Lösungen für $ax^2 + bx + c = 0$

Mitternachtsformel:	Satz von Vieta:
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

5.6 Trigonometrische Funktionen

$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0)$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} + e^x) \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$$

Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \qquad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	`	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	`	0

5.7 Potenzen/Logarithmus

$$\ln(u^r) = r \ln u$$

6 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R},\ n \to a(n) =: a_n$
explizite Folge: (a_n) mit $a_n = a(n)$
rekursive Folge: (a_n) mit $a_0 = f_0,\ a_{n+1} = a(a_n)$

6.1 Monotonie

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie.
Für **(streng) monoton fallend** gilt:

1. $a_{n+1} - a_n \underset{(<)}{\leq} 0$
2. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \underset{(>)}{\geq} 1 \quad \vee \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{(<)}{\leq} 1$
3. Vollständige Induktion: $\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n$

6.2 Konvergenz

(a_n) ist *Konvergent* mit *Grenzwert* a, falls: $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0: |a_n - a| < \epsilon\ \forall n \geq N$
Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl a: $(a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$

Es gilt:

- Der Grenzwert a einer Folge (a_n) ist eindeutig.
- Ist (a_n) Konvergent, so ist (a_n) beschränkt
- Ist (a_n) unbeschränkt, so ist (a_n) divergent.
- *Das Monotoniekriterium*: Ist (a_n) beschränkt und monoton, so konvergiert (a_n)
- *Das Cauchy-Kriterium:* Eine Folge (a_n) konvergiert gerade dann, wenn:
  $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0: |a_n - a_m| < \epsilon\ \forall n, m \geq N$

Regeln für konvergente Folgen $(a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ und $(b_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$:
$(a_n + b_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a + b \qquad (a_n b_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} ab \qquad (\frac{a_n}{b_n}) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$
$(\lambda a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda a \qquad (\sqrt{a_n}) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sqrt{a} \qquad (|a_n|) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} |a|$

Grenzwert bestimmen:

- Wurzeln: Erweitern mit binomischer Formel
- Brüche: Zähler und Nenner durch den Koeffizient höchsten Grades teilen
- Rekursive Folgen: Fixpunkte berechnen. Fixpunkte sind mögliche Grenzwerte. Monotonie durch Vergleich a_{n+1} und a_n zeigen. Beschränktheit mit Induktion beweisen.

6.3 Wichtige Regeln

$$a_n = q^n \quad \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \pm\infty & q < -1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

$a_n = \frac{1}{n^k} \to 0 \qquad \forall k \geq 1$
$a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \to e^c$
$a_n = n\left(c^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln c$
$a_n = \frac{n^2}{2^n} \to 0 \qquad (2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4)$
$\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

6.4 Limes Inferior und Superior

Der Limes superior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ ist der größte Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n

Der Limes inferior einer Folge $x_n \subset \mathbb{R}$ der kleinste Grenzwert konvergenter Teilfolgen x_{n_k} der Folge x_n

7 Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$
Harmonische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$
Geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent}, & \alpha > 1 \\ \text{divergent}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

7.1 Konvergenzkriterien

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $a_n \not\to 0$ oder
Minorante:$\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n (divergiert) \quad \wedge \quad a_n \geq b_n \quad \forall n \geq n_0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert, if (a_n) monoton fallende Nullfolge (Leibnitz)
oder Majorante: $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$

Absolute Konvergenz($\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = a$ konvergiert), falls:
1. Majorante: $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$
2. Quotienten und Wurzelkriterium (BETRAG nicht vergessen!)

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \vee \quad \rho := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \forall n > N$$

$$\text{Falls} \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ \rho = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Jede absolute konvergente Reihe ($\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$) ist konvergent ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$)

8 Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$$

8.1 Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R = \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$f(x) \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & |x-c| < R \\ \text{divergiert} & |x-c| > R \\ \text{keine Aussage möglich} & |x-c| = R \end{cases}$$

Bei reellen Reihen gilt:
$\Rightarrow x$ konvergiert im offenen Intervall $I = (c-R, c+R)$
$\Rightarrow$ Bei $x = c-R$ und $x = c+R$ muss die Konvergenz zusätzlich überprüft werden.

Substitution bei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{\lambda n}$
$w = x^\lambda \to x = w^{\frac{1}{\lambda}} \to R = (R_w)^{\frac{1}{\lambda}}$

8.2 Wichtige Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

9 Ableitung und Integral

f diffbar, falls f stetig und $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ exist.

9.1 Ableitungsregeln:

Linearität: $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Potenzreihe: $f : \underbrace{]-R+a, a+R[}_{\subseteq D} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$
Tangentengleichung: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

9.2 Newton-Verfahren:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert x_0

9.3 Integrationsmethoden:

- Anstarren + Göttliche Eingebung
- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t}) \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$
- Logarithmische Integration: $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)|$
- Integration von Potenzreihen: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$
  Stammfunktion: $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1}$
- Brechstange: $t = \tan(\frac{x}{2}) \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$
  $\sin(x) \to \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) \to \frac{1-t^2}{1+t^2}$

9.4 Integrationsregeln

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2 \right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x\,\mathrm{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2 \right\rvert$	$\mathrm{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1}$	$\sinh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x^2-1}$	$\cosh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + x\tanh^{-1}(x)$	$\tanh^{-1}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

9.5 Rotationskörper

Volumen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x$
Oberfläche: $O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$

9.6 Uneigentliche Integrale

$$\int_{\text{ok}}^{\text{böse}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\text{böse}} \int_{\text{ok}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Majoranten-Kriterium: $|f(x)| \leq g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Cauchy-Hauptwert

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{CHW} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x \right)$$

9.7 Laplace-Transformation von $f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ s \mapsto f(s)$

$$\mathcal{L}\ f(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$$

9.8 Integration rationale Funktionen

Gegeben: $\int \frac{A(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x \qquad A(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$

1. Falls, $\deg A(x) \geq \deg Q(x) \Rightarrow$ Polynomdivision:
   $\frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$ mit $\deg B(x) < \deg Q(x)$
2. Zerlege $Q(x)$ in unzerlegbare Polynome
3. Partialbruchzerlegung $\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{(x-a_n)} + \ldots + \frac{\dots}{\dots}$
4. Integriere die Summanden mit folgenden Funktionen

mit $\lambda = x^2 + px + q, \quad \beta = 4q - p^2$ und $p^2 < 4q$!

$$\int \frac{1}{(x-a)^m}\mathrm{d}x \begin{cases} \ln|x-a|, & m = 1 \\ \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(\lambda)^m}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\beta}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{\beta}}, & m = 1 \\ \frac{2x+p}{(m-1)(\beta)(\lambda)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(\beta)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(\lambda)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(\lambda)^m}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{B}{2}\ln(\lambda) + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda}, & m = 1 \\ \frac{-B}{2(m-1)(\lambda)^{m-1}} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{\mathrm{d}x}{(\lambda)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$

Häufige Integrale nach Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| \qquad \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{a+x}\mathrm{d}x = \ln|a+x| \qquad \int \frac{1}{(a+x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a+x}$$

$$\int \frac{1}{a-x}\mathrm{d}x = -\ln|a-x| \qquad \int \frac{1}{(a-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a-x}$$

9.9 Paratialbruchzerlegung

$$\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{(x-x_0)} + \ldots + \frac{\dots}{\dots}$$

Ansatz

- n-fache reelle Nullstelle x_0: $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \ldots$
- n-fache komplexe Nullstelle: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}$

Berechnung von $A, B, C, \ldots$

- Nullstellen in x einsetzen (Terme fallen weg)
- Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

10 Taylor-Entwicklung

Man approximiert eine m-mal diffbare Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ mit dem m-ten Taylorpolynom:

$$T_m(x_0; x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Taylor-Entw. von Polynomen/Potenzreihen sind die Funktionen selbst.
Für $m \to \infty$: Taylorreihe.
Konvergenzradius: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

10.1 Das Restglied - die Taylorformel

Für $(m+1)$-mal stetig diffbare Funktionen gilt $\forall x \in I$:
$R_{m+1}(x) := f(x) - T_{m,f,x_0}(x) =$
$= \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^m f^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t$ (Integraldarst.)
$= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} \quad \xi \in [x, x_0]$ (Lagrange)
Fehlerabschätzung: Wähle ξ und x so, dass $R_{m+1}(x)$ maximal wird.

11 Landau-Notation

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = O(g(x))$ für $x \to a \Leftrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|$ für $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ u. $C > 0$
  oder $0 \leq \limsup\limits_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

Bei *Taylor-Entwicklung*:

- $R_{m+1,f,x_0}(h) = f(x_0+h) - T_{m,f,x_0}(h) = o(h^m)$
  f muss m-mal differenzierbar sein
- $R_{m+1,f,x_0}(h) = f(x_0+h) - T_{m,f,x_0}(h) = O(h^{m+1})$
  f muss $(m+1)$-mal differenzierbar sein

11.1 Rechenregeln

- $f = O(f)$
- $f = o(g) \quad \Rightarrow \quad f = O(g)$
- $f_1 = o(g)$ u. $f_2 = o(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = o(g)$
- $f_1 = O(g)$ u. $f_2 = O(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = O(g)$
- $f_1 = O(g)$ u. $f_2 = O(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$
- $f_1 = O(g)$ u. $f_2 = o(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$

11.2 Elementarfunktionen

- Exponentialfunktion
  $e^x = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + O(x^{m+1})$
- Trigonometrische Funktionen
  $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2m+3})$
  $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2m+2})$
- Logarithmusfunktion
  $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + O(x^{m+1})$

12 Kurven

Eine Kurve ist ein eindimensionales Objekt.

$\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ (Funktionenvektor)

- $\mathcal{C}^0$-Kurve: Positionsstetigkeit (geschlossene Kurve)
- $\mathcal{C}^1$-Kurve: Tangentialstetigkeit (stetig diffbar)
- $\mathcal{C}^2$-Kurve: Krümmungsstetigkeit (2 mal stetig diffbar)
- regulär, falls $\forall t \in [a, b] : \dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$ (Keine Knicke)

Besondere Punkte von Kurven:

- Singulär, falls $\dot{\gamma}(t) = \vec{0}$ (Knick)
- Doppelpunkt, falls $\exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \ \wedge\ \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
- Horizontaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0 \ \wedge\ \dot{\gamma}_2(t) = 0$
- Vertikaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) = 0 \ \wedge\ \dot{\gamma}_2(t) \neq 0$

Bogenlänge einer Kurve: $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t$

Umparametrisierung γ nach Bogenlänge ($\tilde{\gamma}$):

- Bogenlängenfunktion: $s(t) = \int\limits_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$
  $s : [a, b] \to [0, L(\gamma)], t \mapsto s(t)$
- $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) \qquad \left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\right\| = 1 \forall t$

Tangenteneinheitsvektor an $\gamma(t) : T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

Krümmung von γ: $\kappa(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}\right\| = \frac{\left\|\dot{T}(t)\right\|}{s'(t)}$

Vereinfachung im $\mathbb{R}^2 \qquad \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \,\mathrm{d}t \qquad \tilde{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn γ nach der Bogenlänge umparametrisiert, gilt

$$\tilde{\kappa}(t) = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$$

13 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ordnet jedem Vektor eines Vektorraums einen Wert zu.
$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ Teilmengen von $\mathbb{R}^n$: $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
Offene Kugelmenge vom Radius r: $B_r(x_0)$
Topologische Begriffe für $D \subseteq \mathbb{R}^n$

- Das Komplement D^C von D: $D^C := \mathbb{R}^n \setminus D$
- innerer Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Inneren $\mathring{D}$ von D, falls $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$
- Die Menge D heißt offen, falls $D = \mathring{D}$
- Randpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Rands ∂D von D, falls $\forall \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset \ \wedge\ B_\varepsilon(x_0) \cap D^C \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \partial D = \partial D^C$
- Abschluß $\overline{D}$ von D: $\overline{D} = D \cup \partial D$
- Die Menge D ist abgeschlossen, falls $\partial D \subseteq D$
- beschränkt, falls $\exists \mu \in \mathbb{R} \forall x \in D : \|x\| < \mu$
- kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Es gilt: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist D^C abgeschlossen.
$\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

Revision History

- v1.0 (06.02.2015): Erstellung
- v1.1 (23.07.2017): Diverse Fehler korrigiert (u.a. 145, 144, 143, 138, 152)
- v1.2 (12.01.2018): Kleine Korrektur 9.8 Integration rationale Funktionen, Häufige Integrale nach Partialbruchzerlegung