

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA DE LA TIERRA Y ASTROFÍSICA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Código de TFG: FTA30

Elaboración de un modelo numérico de interior estelar

Development of a stellar-interior numerical model

Supervisor: Nicolás Cardiel

David Fernández Gil

Grado en Física

Curso académico 2019-20

Convocatoria ordinaria

Resumen:

Hoy en día el uso de modelos numéricos para describir sistemas físicos complejos es un procedimiento ampliamente empleado, y las estrellas no son una excepción. En este trabajo se describirá la construcción de un modelo realizado en Python que proporciona las magnitudes termodinámicas principales necesarias para describir el interior estelar. Con él, se podrá caracterizar una estrella con una masa y composición química determinadas, obtener sus propiedades más importantes, su clase y su posición en el diagrama HR. Finalmente se comprobará que los resultados proporcionados son coherentes con los procesos físicos que ocurren en su interior y se usará el modelo con parámetros ligeramente diferentes para ver cómo se comportan las nuevas soluciones y si están relacionadas.

Abstract:

Nowadays the use of numerical models to describe complex physical systems is a widely employed approach, and stars are not an exception. This work will describe the construction of a Python model that provides the main thermodynamical magnitudes necessary to describe stellar interiors. With it, a star with given mass and chemical composition will be studied, obtaining its most important properties, its class and its position in the HR diagram. Lastly, the coherence of the results with the physical processes occurring inside the star will be checked and the model will be used with slightly different parameters to see how the new solutions behave and if they are related.

Índice

1. Introducción	2
2. Objetivos	2
3. Fundamentos teóricos	2
4. Procedimiento computacional	3
4.1. Introducción	3
4.2. Algoritmo predictor-corrector	3
4.3. Fases de cálculo desde la superficie	4
4.4. Fases de cálculo desde el centro	4
4.5. Búsqueda de los parámetros T_c , L_{tot} y R_{tot} óptimos	5
4.6. Estructura del código programado	5
4.7. Problemas encontrados en el desarrollo del modelo	6
5. Resultados principales para la estrella asignada	7
5.1. Usando parámetros arbitrarios	7
5.2. Búsqueda de los parámetros óptimos	8
5.3. Modelo con los parámetros óptimos	9
6. Resultados adicionales	11
6.1. Densidad	12
6.2. Opacidad	12
6.3. Ritmo de producción de la energía	13
6.4. Temperatura efectiva y longitud de onda de emisión máxima	14
6.5. Magnitud absoluta	14
7. Comprobación de la validez de algunas de las aproximaciones iniciales	15
7.1. Ionización total	15
7.2. Material no degenerado	15
8. Clasificación de la estrella	16
9. Variación de la masa y comprobación de las relaciones de homología entre es- trellas de la secuencia principal	17
9.1. Luminosidad y masa	17
9.2. Radio y masa	18
10. Variación de la composición química	18
11. Conclusión	19

1. Introducción

El campo de la astrofísica estelar se ha revolucionado con la aparición de modelos hidrodinámicos complejos con una alta potencia computacional que pueden reproducir resultados cuantitativos del interior de las estrellas a muy alta precisión. Sin embargo, el uso de modelos computacionales se lleva realizando desde el s. XX con el objetivo de tener un entendimiento cualitativo de cuáles son las propiedades más importantes de las estrellas, el comportamiento de sus magnitudes principales y su papel en determinar las características fundamentales de la estrella en la que se encuentran [2]. En este trabajo se va a implementar y explotar lo máximo posible un modelo de este tipo.

2. Objetivos

Usando algoritmos simples basados en bucles y ecuaciones simplificadas de la hidrostática estelar, se construye en el entorno de Jupyter Notebook un modelo sencillo, pero cualitativamente correcto, que proporciona perfiles radiales de las magnitudes más importantes de una estrella dados sus parámetros iniciales. Se tratará de hallar más propiedades de la estrella usando estos resultados, y relacionarlos con las características globales de esta como su clase y su posición en el diagrama HR.

3. Fundamentos teóricos

Para el estudio del interior de una estrella es imprescindible el uso de la física de un sistema hidrostático en equilibrio que está generando y propagando energía en su interior. En concreto, todo modelo debe satisfacer y resolver las 4 ecuaciones fundamentales de estado del interior estelar [1]:

Continuidad de la masa:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1)$$

Equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad (2)$$

Equilibrio energético:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (3)$$

Transporte de energía, que puede ser radiativo (4) o convectivo (5):

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{-3}{16\pi ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L(r)}{r^2} \quad (4)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -0.4 \frac{T}{P} \frac{GM(r)}{r^2} \rho \quad (5)$$

Para una mayor simplicidad en el desarrollo del modelo, se han asumido ciertas aproximaciones como que la estrella es isótropa (simétrica en todos los ángulos, por lo que todas las dependencias son con el radio), la composición química es uniforme, el material está completamente ionizado, los gases no están degenerados y el transporte de energía se divide en dos capas bien definidas: una interior convectiva y adiabática que transporta la energía generada en las reacciones nucleares; y una exterior radiativa. También se ha asumido que la producción de energía se realiza únicamente mediante los ciclos PP (protón-protón) y CNO (Carbono-Nitrógeno-Oxígeno) [1].

Finalmente, se ha hecho elección de unas unidades concretas, proporcionadas en la tabla (2) del gui3n, para que los valores num3ricos con los que se trabaja y se representan en los gr3ficos tengan un orden de magnitud razonable. A lo largo de este trabajo, si no se especifica lo contrario, los valores de las magnitudes ser3n dados en dichas unidades.

4. Procedimiento computacional

4.1. Introducci3n

Inicialmente los 3nicos datos conocidos de la estrella son la masa y la composici3n qu3mica, que se consideran constantes. Estos par3metros son los 3nicos necesarios para determinar el resto de las magnitudes y propiedades de la estrella, como se ver3. Para realizar el modelo, se divide la estrella en varias capas esf3ricas (del orden de un centenar) y en cada una se aplican varios algoritmos para calcular las magnitudes termodin3micas principales: presi3n, temperatura, luminosidad y masa (se asume que las magnitudes no var3an dentro de la propia capa). Las dos primeras son variables intensivas, lo que significa que se obtiene el valor local de esa capa, mientras que las dos 3ltimas son extensivas, es decir, se halla el valor de la magnitud en la regi3n interior encerrada por la capa. En capas interiores tambi3n se comprueba si el transporte de energ3a se produce mediante convecci3n o radiaci3n y, de haber producci3n de energ3a, se calcula el ritmo y el ciclo usado (el m3s eficiente entre el PP y el CNO) [1].

El modelo usa un procedimiento mixto: por un lado, se calculan capas desde la superficie (realmente se comienza en una capa un poco inferior debido a posibles problemas de convergencia) hacia dentro usando como valores iniciales la masa, luminosidad y radio totales (M_{tot} , L_{tot} y R_{tot}); y por otro lado se calculan desde el centro hacia fuera tomando como valor inicial la temperatura central T_c . Estas dos soluciones deben coincidir en un punto intermedio, que ser3 precisamente la frontera entre la capa convectiva y la radiativa. Se empieza usando valores arbitrarios para los par3metros iniciales, y el mejor ajuste ser3 aquel en el que las dos curvas coincidan suavemente. Para ello, se var3an los par3metros iniciales y se recalcula la curva desde el centro para cada nueva combinaci3n hasta conseguir el menor error entre ambas. Los par3metros usados en ese c3lculo ser3n los par3metros 3ptimos para la estrella [1]. Este proceso se realiz3 previamente con una estrella de prueba proporcionada por el tutor, para comprobar la validez del modelo antes de aplicarlo a la estrella que se va a tratar en el trabajo.

4.2. Algoritmo predictor-corrector

Hay varios algoritmos diferentes en el modelo que sirven para regiones determinadas, cada uno usando ecuaciones f3sicas diferentes. Sin embargo, todos se basan en el algoritmo iterativo predictor-corrector, que usa el m3todo de integraci3n por diferencias para calcular las diferentes magnitudes en cada capa. La estructura general de este proceso es la siguiente [1]:

1. Se parte de las magnitudes y sus derivadas halladas en la 3ltima capa del algoritmo anterior.
2. Con ellas se usa el algoritmo predictor (Ec. (30) del gui3n) para calcular las magnitudes y derivadas de las siguientes capas.
3. Estos valores se refinan con el algoritmo corrector (Ec. (31) del gui3n).

4. Se comprueba si los valores proporcionados por los dos algoritmos coinciden dentro de la precisión deseada (se usa como criterio que si dos valores tienen un error relativo menor a 0.0001, estos coinciden).
5. Si no coinciden, se vuelve a empezar el bucle usando como valores iniciales para el predictor los hallados en la iteración anterior por el corrector. Si lo hacen, la solución ha convergido y se finaliza el bucle.

4.3. Fases de cálculo desde la superficie

- **Fase Inicial:** Se comienza el cálculo desde una capa cercana a la superficie ($0,9R_{tot}$) y se calculan las magnitudes y sus derivadas de las 3 primeras capas. En este caso no se usa el algoritmo predictor-corrector ya que no se tienen valores anteriores para inicializarlo, sino que se calculan directamente a partir de los valores iniciales M_{tot} , L_{tot} y R_{tot} usando las ecuaciones de estado (Ecs. (35) y (36) del guión) y se asume que la masa y luminosidad se mantienen constantes e igual a las totales.
- **Fase A.1.1:** Envoltura radiativa con masa y luminosidad constantes. Se calcula la presión y temperatura de cada capa usando el algoritmo predictor-corrector y estos se usan para calcular la masa estimada. Mientras esta sea igual a M_{tot} , la suposición inicial de masa constante es correcta y se pasa a calcular la siguiente capa de la estrella siguiendo el mismo procedimiento. Cuando la masa difiere de M_{tot} , los cálculos de esa capa ya no son válidos y hay que pasar a la siguiente fase.
- **Fase A.1.2:** Envoltura radiativa con masa variable y luminosidad constante. El algoritmo para esta fase es muy similar al anterior, con la diferencia de que la masa de cada capa ya no es constante y ahora se calcula también la luminosidad, comprobando si coincide con L_{tot} . Cuando deje de hacerlo, se pasa a la siguiente fase.
- **Fase A.1.3:** Envoltura radiativa con masa y luminosidad variables. En este caso todas las magnitudes son calculadas usando el algoritmo predictor-corrector. Adicionalmente se calcula el parámetro $n+1$, que es un indicador del método más eficiente de transporte de energía. Mientras $n+1$ sea mayor a 2.5 la forma más eficiente es mediante radiación, pero cuando se obtiene un valor menor el transporte pasará a ser convectivo y la fase actual finaliza. Aunque los valores de la última capa no son válidos, sí se usan para calcular la constante K' del polítropo, que se considera constante y se utilizará en la siguiente fase.
- **Fase A.2:** Núcleo convectivo. Ahora el cálculo de la presión es más sencillo, ya que se puede calcular directamente a partir de la temperatura con la relación del polítropo (se asume un índice adiabático). El resto de magnitudes se calculan como en la fase anterior. Se continúa así hasta llegar al centro de la estrella. Es muy probable que usando los parámetros iniciales L_{tot} y R_{tot} (elegidos arbitrariamente), los resultados del centro de la estrella no tengan mucho sentido físico (por ejemplo, pueden aparecer masas y temperaturas negativas). Esto es porque los parámetros usados están lejos de ser óptimos y los errores van propagándose y aumentando a medida que el cálculo se aleja de la superficie. Por ello en el modelo final se descartan los resultados de esta última fase y se usan en su lugar los calculados desde el centro.

4.4. Fases de cálculo desde el centro

- **Fase inicial:** Al igual que en el caso desde la superficie, se necesita calcular las 3 primeras capas manualmente, esta vez usando como parámetro inicial la temperatura central T_c y usando las ecuaciones (43) y (46) del guión.

- Fase A.2: Se usa el mismo algoritmo que el usado en la fase A.2 desde la superficie, pero recorriendo las capas en la dirección inversa. Este cálculo prosigue hasta alcanzar la capa de la frontera entre el transporte radiativo y el convectivo.

4.5. Búsqueda de los parámetros T_c , L_{tot} y R_{tot} óptimos

Para comprobar el grado de éxito del modelo calculado, se comparan los valores obtenidos en la frontera radiativa-convectiva integrando desde la superficie con los obtenidos integrando desde el centro y se calcula el error relativo entre los valores de cada magnitud individual. Finalmente se suman todos para hallar el error relativo total en forma porcentual.

Los parámetros arbitrarios usados inicialmente proporcionan errores altos, lo que indica que no son los adecuados para la estrella con la que se está trabajando. Se debe encontrar los que proporcionen el menor error posible entre los dos cálculos. Para ello se crea una serie de diferentes valores de R_{tot} y L_{tot} y se prueban diferentes combinaciones introduciéndolas de nuevo en el modelo, calculando la T_c que mejor ajuste los datos para cada combinación. Este proceso se repite para todos los pares de valores y los errores proporcionados se van representando en un gráfico 2D de color. Así se puede ver fácilmente para qué valores de cada parámetro se obtiene el error mínimo. Para afinar, se puede definir de nuevo una serie de valores con variaciones más pequeñas centradas en torno al mínimo de error, hasta obtener los parámetros óptimos.

4.6. Estructura del código programado

Se puede acceder al código completo en formato propio de Jupyter Notebook y html a través del siguiente enlace: [7] (Se tiene que acceder conectado a una cuenta de la UCM). Tiene tres partes principales: una donde se definen todas las funciones cortas numeradas en el guión, otra donde se escriben funciones más largas para calcular partes específicas del modelo y pueden usar algunas de las funciones cortas definidas anteriormente, y finalmente un último bloque donde se programa el grueso del modelo. Se comenta a continuación más en detalle.

1. Definición de funciones numeradas

Son las funciones que calculan las magnitudes de cada capa y sus derivadas. Se numeran de la misma forma que en el guión. Muchas de ellas aparecen en más de un algoritmo, aunque a veces en órdenes diferentes o ligeramente variadas, con lo que se han añadido letras minúsculas a su número para distinguirlas (por ejemplo, función 6 y 6b). En casi todas las funciones se utiliza el método de diferencias de derivadas para calcular las magnitudes. Se toman las magnitudes y derivadas de las capas anteriores (denotando a los de la capa anterior con un subíndice i (T_i) y a los de dos capas anteriores con un subíndice i anterior ($T_{ianterior}$)). Las derivadas de cada magnitud se denotan con un subíndice f (T_f) y las diferencias de derivadas con un *Delta* (T_{Delta}). Finalmente, si la magnitud de la nueva capa se ha calculado usando la fórmula del predictor, se añade un subíndice *est* (T_{est}), de estimada; mientras que si se ha usado la fórmula del corrector el subíndice es *cal* (T_{cal}), de calculada.

2. Creación de funciones más largas

Se crean varias funciones que no vienen numeradas en el guión, cada una con un propósito específico:

- **INICIAL_SUP**: Como su nombre indica, esta es la función que arranca el modelo desde la superficie calculando las tres primeras capas directamente a partir de las condiciones iniciales y usando solamente las ecuaciones físicas (sin usar el algoritmo predictor-corrector).
- **INICIAL_CENTRO**: Análoga a la anterior, pero para iniciar el cálculo desde el centro.
- **NUCLEAR**: Calcula el ritmo de generación de energía para cada capa en función de la temperatura (sólo si está dentro del rango de temperaturas en los que se producen). Para comprobar qué ciclo es el responsable de generación se calculan siempre los dos y se comparan. El que más energía aporte es el ciclo que se da en la capa, ya que son ciclos excluyentes, nunca ocurren los dos a la vez [1].
- **INTEGRACION_DESDE_EL_CENTRO**: Esta función realiza todo el proceso de cálculo de las magnitudes desde el centro tomando una T_c como variable de entrada. Además calcula el error relativo entre los valores de la frontera calculados en esta función y los calculados desde la superficie (que se habrán calculado antes de llamar a esta función).
- **CALCULO_ERROR_REL_Y_TC_OPTIMA**: Esta función calcula las magnitudes desde la superficie tomando como variables de entrada R_{tot} y L_{tot} . Una vez hecho esto, llama a la función anterior y la ejecuta varias veces, introduciendo un valor de T_c diferente cada vez y guardando el error relativo proporcionado. Finalmente compara todos los errores y devuelve la T_c para la que se obtuvo el error mínimo, es decir, la T_c óptima para el par de valores R_{tot} y L_{tot} dados. Esta es la función que se usa para calcular el error proporcionado por cada combinación de esos parámetros.

3. Desarrollo del modelo

Finalmente se programa una función llamada **MODELO_COMPLETO**, que simplemente calcula todas las capas tanto desde la superficie como desde el centro con los parámetros dados, sin comprobar si son los óptimos ni calcular el error. En cada fase del cálculo, las magnitudes de cada capa se van guardando en una lista de Python. Al acabar, se ordenan de forma que se puedan imprimir en una lista mostrando los valores de cada capa desde la superficie hasta el centro. También se generan gráficos en función del radio (en este caso se representan todos los valores a la inversa, desde el centro hasta la superficie). Esta función está pensada para ser usada tanto al principio con los parámetros arbitrarios (para ver las irregularidades obtenidas en los resultados), como una vez se conozcan los valores óptimos de la estrella para ver finalmente el modelo completo.

4.7. Problemas encontrados en el desarrollo del modelo

Como todo modelo numérico, a lo largo de su programación se fueron encontrando fallos o aspectos que había que pulir. Uno de los problemas más importantes fue el hecho de que inicialmente se obtenían valores erróneos para las magnitudes cercanas al centro en el cálculo desde la superficie, llegando a ser negativas. Aunque es obvio que físicamente no tienen sentido, no se intentó corregirlas debido a que se iban a desechar los valores de ese cálculo de todas formas. Lo que no se vio

es que esos valores negativos eran usados en una función posterior que los introducía en una raíz. Por lo tanto, se obtenían valores complejos que daban error, aunque el origen del error se tardó en ver. Para solucionarlo simplemente se añadieron condicionales que comprobaban el signo de las magnitudes y en el caso de ser negativas, las reseteaban a cero. Otra dificultad que se encontró fue en la precisión, especialmente a la hora de imponer condiciones numéricas a una magnitud para finalizar un bucle (un bucle que termine solo cuando cierta magnitud sea mayor que un valor constante, por ejemplo). En ocasiones, la magnitud calculada tenía un valor extremadamente cercano al límite, pero no lo suficiente como para cumplir la condición. Sin embargo, Python redondeaba el valor calculado al valor límite, acabando el bucle antes de tiempo y proporcionando resultados erróneos. Para solucionar este problema, se aumentó ínfimamente el valor del límite (en un decimal muy pequeño) para que así, aunque Python redondeara el valor calculado, este todavía quedara por debajo y el bucle continuara.

5. Resultados principales para la estrella asignada

Una vez construido el modelo, sólo falta aplicarlo a la estrella que se quiere estudiar. En este caso, se tiene una estrella cuyos únicos parámetros conocidos son la masa y la composición química.

$$M_{tot} = 4.8 (10^{33} g) \quad X = 0.8 \quad Y = 0.16$$

donde X es la fracción en masa de Hidrógeno e Y de Helio.

5.1. Usando parámetros arbitrarios

Se comienza usando unos valores arbitrarios para el resto de parámetros:

$$R_{tot} = 11.5 (10^{10} cm) \quad L_{tot} = 30.0 (10^{33} erg/s) \quad T_c = 1.5 (10^7 K)$$

Para demostrar que el error realmente empieza siendo muy elevado si se usan parámetros arbitrarios, se va a mostrar en la Figura 1 el comportamiento de las magnitudes calculadas en función del radio, representadas todas en un mismo gráfico normalizado para poder compararlas fácilmente.

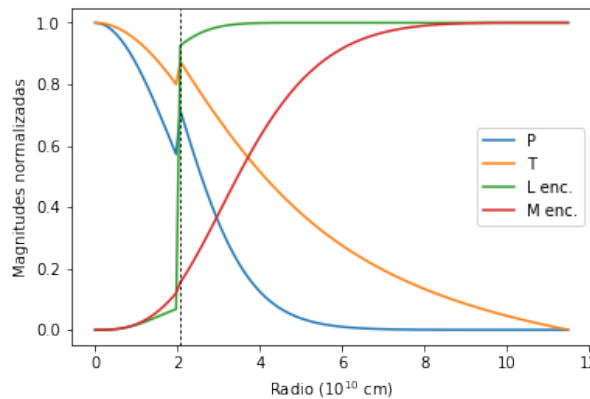


Figura 1: Magnitudes normalizadas de la estrella obtenidas utilizando los parámetros iniciales arbitrarios. La línea discontinua indica el lugar de la frontera radiativa-convectiva.

Se escribe la coletilla *enc.* a la luminosidad y masa para recordar que son magnitudes extensivas y lo que se representa es la cantidad encerrada dentro de ese radio. También se indica la posición

de la frontera entre el transporte radiativo (en el exterior) y convectivo (en el interior). Se puede ver claramente que el comportamiento de las curvas no es regular en este punto. La presión y la temperatura tienen picos importantes, pero es la luminosidad y su enorme discontinuidad la que domina el error relativo, que asciende a un valor de 96.77 %.

5.2. Búsqueda de los parámetros óptimos

A continuación se buscan unos parámetros más adecuados para la estrella usando el procedimiento explicado anteriormente. Se toman 11 valores de cada parámetro, 5 a cada lado de los arbitrarios iniciales. La variación entre cada valor es $\delta L = 3$ para la luminosidad y $\delta R = 0.5$ para la masa (en sus respectivas unidades). Utilizando la función **CALCULO_ERROR_REL_Y_TC_OPTIMA** para todas las combinaciones de los dos parámetros, se obtiene un gráfico de color con los errores.

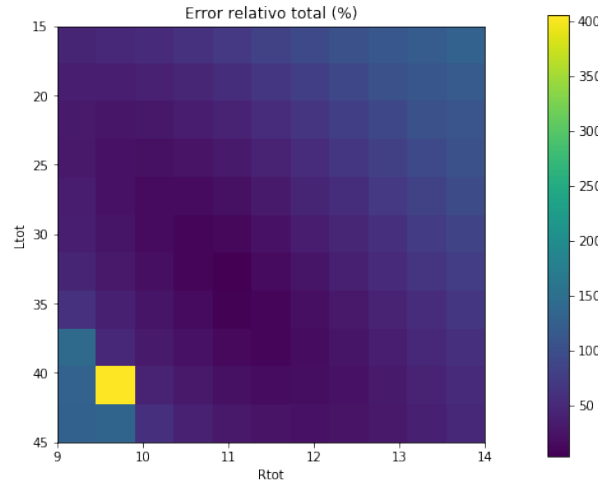


Figura 2: Gráfico de color con los errores obtenidos para distintas combinaciones de L_{tot} y R_{tot} .

Se puede ver en la Figura 2 que el error mínimo está en torno a los valores $L_{tot} = 33$ y $R_{tot} = 11$. Se vuelve a generar una serie de valores esta vez centrados en esa región y con una variación más pequeña ($\delta L = 0.1$ y $\delta R = 0.05$).

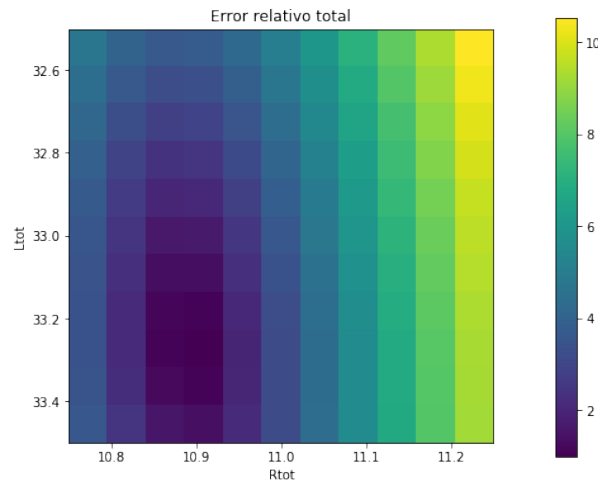


Figura 3: Gráfico de color con los errores obtenidos para distintas combinaciones de L_{tot} y R_{tot} , esta vez centrado en la zona del mínimo de la figura anterior.

Tras este segundo ajuste mostrado en la Figura 3, se toman como parámetros óptimos $R_{tot} = 10.9$ y $L_{tot} = 33.3$ y se calcula la temperatura central óptima para esta combinación, que es $T_c = 1.83$. (Nótese que aquí se han escrito las magnitudes en las unidades especificadas en la tabla (2) del guión).

5.3. Modelo con los parámetros óptimos

Finalmente se utiliza la función **MODELO_COMPLETO** con los parámetros obtenidos para tener los resultados completos de todas las capas de la estrella . (Aquí ya se expresan en sus respectivas unidades).

$$M_{tot} = 4.8 \quad X = 0.8 \quad Y = 0.16$$

$$R_{tot} = 10.9 \quad L_{tot} = 33.3 \quad T_c = 1.83$$

E	fase	i	r	P	T	L	M	n+1
--	^^^^^	-11	10.88910	0.0000000	0.0004819	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-10	10.79100	0.0000000	0.0048628	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-9	10.69290	0.0000000	0.0093241	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-8	10.59480	0.0000003	0.0138680	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-7	10.49670	0.0000009	0.0184968	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-6	10.39860	0.0000023	0.0232130	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-5	10.30050	0.0000050	0.0280190	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-4	10.20240	0.0000099	0.0329174	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-3	10.10430	0.0000181	0.0379110	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-2	10.00620	0.0000309	0.0430024	33.3000000	4.8000000	
--	^^^^^	-1	9.90810	0.0000502	0.0481947	33.3000000	4.8000000	
--	INICIO	0	9.81000	0.0000782	0.0534908	33.3000000	4.8000000	
--	INICIO	1	9.71190	0.0001177	0.0588939	33.3000000	4.8000000	
--	INICIO	2	9.61380	0.0001722	0.0644073	33.3000000	4.8000000	
--	A.1.1	3	9.51570	0.0002464	0.0700426	33.3000000	4.8000000	
--	A.1.1	4	9.41760	0.0003450	0.0758070	33.3000000	4.8000000	
--	A.1.1	5	9.31950	0.0004742	0.0816972	33.3000000	4.8000000	
--	A.1.2	6	9.22140	0.0006413	0.0877141	33.3000000	4.7991269	
--	A.1.2	7	9.12330	0.0008551	0.0938590	33.3000000	4.7985344	
--	A.1.2	8	9.02520	0.0011256	0.1001358	33.3000000	4.7978158	
--	A.1.2	9	8.92710	0.0014651	0.1065482	33.3000000	4.7969522	
--	A.1.2	10	8.82900	0.0018878	0.1131006	33.3000000	4.7959231	
--	A.1.2	11	8.73090	0.0024102	0.1197978	33.3000000	4.7947061	
--	A.1.2	12	8.63280	0.0030517	0.1266444	33.3000000	4.7932767	
--	A.1.2	13	8.53470	0.0038351	0.1336458	33.3000000	4.7916083	
--	A.1.2	14	8.43660	0.0047865	0.1408066	33.3000000	4.7896723	
--	A.1.2	15	8.33850	0.0059365	0.1481327	33.3000000	4.7874374	
--	A.1.2	16	8.24040	0.0073206	0.1556295	33.3000000	4.7848699	
--	A.1.2	17	8.14230	0.0089797	0.1633030	33.3000000	4.7819336	
--	A.1.2	18	8.04420	0.0109612	0.1711590	33.3000000	4.7785894	
--	A.1.2	19	7.94610	0.0133197	0.1792042	33.3000000	4.7747956	
--	A.1.2	20	7.84800	0.0161182	0.1874446	33.3000000	4.7705071	
--	A.1.2	21	7.74990	0.0194294	0.1958873	33.3000000	4.7656758	
--	A.1.2	22	7.65180	0.0233367	0.2045391	33.3000000	4.7602503	
--	A.1.2	23	7.55370	0.0279360	0.2134073	33.3000000	4.7541757	
--	A.1.2	24	7.45560	0.0333376	0.2224994	33.3000000	4.7473935	
--	A.1.2	25	7.35750	0.0396680	0.2318232	33.3000000	4.7398411	
--	A.1.2	26	7.25940	0.0470720	0.2413868	33.3000000	4.7314524	
--	A.1.2	27	7.16130	0.0557158	0.2511984	33.3000000	4.7221570	
--	A.1.2	28	7.06320	0.0657895	0.2612668	33.3000000	4.7118802	
--	A.1.2	29	6.96510	0.0775105	0.2716008	33.3000000	4.7005430	
--	A.1.2	30	6.86700	0.0911274	0.2822098	33.3000000	4.6880619	
--	A.1.2	31	6.76890	0.1069240	0.2931033	33.3000000	4.6743488	
--	A.1.2	32	6.67080	0.1252243	0.3042912	33.3000000	4.6593108	
--	A.1.2	33	6.57270	0.1463976	0.3157836	33.3000000	4.6428502	
--	A.1.2	34	6.47460	0.1708648	0.3275912	33.3000000	4.6248647	
--	A.1.2	35	6.37650	0.1991051	0.3397247	33.3000000	4.6052469	
--	A.1.2	36	6.27840	0.2316632	0.3521953	33.3000000	4.5838846	
--	A.1.2	37	6.18030	0.2691582	0.3650144	33.3000000	4.5606608	
--	A.1.2	38	6.08220	0.3122930	0.3781937	33.3000000	4.5354540	
--	A.1.2	39	5.98410	0.3618643	0.3917454	33.3000000	4.5081381	
--	A.1.2	40	5.88600	0.4187743	0.4056818	33.3000000	4.4785828	
--	A.1.2	41	5.78790	0.4840435	0.4200154	33.3000000	4.4466540	
--	A.1.2	42	5.68980	0.5588245	0.4347590	33.3000000	4.4122139	
--	A.1.2	43	5.59170	0.6444170	0.4499258	33.3000000	4.3751221	
--	A.1.2	44	5.49360	0.7422842	0.4655288	33.3000000	4.3352357	
--	A.1.2	45	5.39550	0.8540706	0.4815816	33.3000000	4.2924105	
--	A.1.2	46	5.29740	0.9816204	0.4980975	33.3000000	4.2465017	
--	A.1.2	47	5.19930	1.1269979	0.5150901	33.3000000	4.1973651	
--	A.1.2	48	5.10120	1.2925073	0.5325730	33.3000000	4.1448582	
--	A.1.2	49	5.00310	1.4807150	0.5505597	33.3000000	4.0888422	
--	A.1.2	50	4.90500	1.6944701	0.5690635	33.3000000	4.0291831	
--	A.1.2	51	4.80690	1.9369265	0.5880976	33.3000000	3.9657538	
--	A.1.2	52	4.70880	2.2115626	0.6076750	33.3000000	3.8984365	
--	A.1.2	53	4.61070	2.5222001	0.6278081	33.3000000	3.8271248	
--	A.1.2	54	4.51260	2.8730199	0.6485091	33.3000000	3.7517263	

-- A.1.2	55	4.41450	3.2685743	0.6697895	33.3000000	3.6721654	
-- A.1.2	56	4.31640	3.7137932	0.6916600	33.3000000	3.5883866	
PP A.1.3	57	4.21830	4.2139847	0.7141307	33.2939727	3.5003577	3.9369450
PP A.1.3	58	4.12020	4.7748254	0.7372106	33.2892884	3.4080728	3.9124432
PP A.1.3	59	4.02210	5.4023412	0.7609079	33.2829917	3.3115564	3.8861522
PP A.1.3	60	3.92400	6.1028745	0.7852293	33.2745672	3.2108664	3.8579441
PP A.1.3	61	3.82590	6.8829994	0.8101803	33.2633513	3.1061031	3.8274007
PP A.1.3	62	3.72780	7.7495228	0.8357648	33.2484967	2.9974031	3.7950026
PP A.1.3	63	3.62970	8.7094170	0.8619855	33.2289298	2.8849409	3.7603044
PP A.1.3	64	3.53160	9.7696330	0.8888435	33.2033034	2.7689422	3.7230243
PP A.1.3	65	3.43350	10.9369912	0.9163382	33.1699434	2.6496833	3.6830186
PP A.1.3	66	3.33540	12.2180430	0.9444672	33.1267917	2.5274910	3.6401123
PP A.1.3	67	3.23730	13.6188883	0.9732263	33.0721806	2.4027442	3.5940997
PP A.1.3	68	3.13920	15.1449715	1.0026095	33.0043096	2.2758742	3.5447702
PP A.1.3	69	3.04110	16.8008619	1.0326093	32.9195360	2.1473634	3.4919036
PP A.1.3	70	2.94300	18.5900161	1.0632165	32.8145722	2.0177434	3.4352689
PP A.1.3	71	2.84490	20.5145315	1.0944204	32.6856578	1.8875913	3.3746260
PP A.1.3	72	2.74680	22.5748984	1.1262093	32.5286699	1.7575245	3.3097283
PP A.1.3	73	2.64870	24.7697600	1.1585709	32.3391948	1.6281943	3.2403247
PP A.1.3	74	2.55060	27.0956939	1.1914925	32.1126414	1.5002780	3.1661631
PP A.1.3	75	2.45250	29.5470250	1.2249618	31.8455251	1.3744691	3.0869952
PP A.1.3	76	2.35440	32.1156866	1.2589677	31.5361820	1.2514669	3.0025814
PP A.1.3	77	2.25630	34.7911416	1.2935008	31.1824675	1.1319640	2.9126985
PP A.1.3	78	2.15820	37.5603774	1.3285549	30.7823371	1.0166342	2.8171485
PP A.1.3	79	2.06010	40.4079854	1.3641284	30.3348870	0.9061188	2.7157698
PP A.1.3	80	1.96200	43.3163345	1.4002254	29.8405054	0.8010134	2.6084509
PP CONVEC	81	1.86390	46.2272788	1.4363786	29.1119914	0.7071975	2.495147
PP CONVEC	82	1.76580	49.2221576	1.4729020	28.5321169	0.6144638	
PP CONVEC	83	1.66770	52.2233100	1.5081876	27.9236006	0.5283860	
CN CONVEC	84	1.56960	55.2112624	1.5421289	27.2577861	0.4491757	
CN CONVEC	85	1.47150	58.1656551	1.5746218	26.3710985	0.3769709	
CN CONVEC	86	1.37340	61.0654553	1.6055648	25.1576499	0.3118337	
CN CONVEC	87	1.27530	63.8891919	1.6348600	23.5914403	0.2537487	
CN CONVEC	88	1.17720	66.6152093	1.6624131	21.6579745	0.2026223	
CN CONVEC	89	1.07910	69.2219353	1.6881347	19.3681024	0.1582831	
CN CONVEC	90	0.98100	71.6881598	1.7119402	16.7718685	0.1204829	
CN CONVEC	91	0.88290	73.9933182	1.7337505	13.9619691	0.0888992	
CN CONVEC	92	0.78480	76.1177733	1.7534930	11.0702196	0.0631383	
CN CONVEC	93	0.68670	78.0430881	1.7711012	8.2557582	0.0427391	
CN CONVEC	94	0.58860	79.7522729	1.7865157	5.6854058	0.0271784	
CN CONVEC	95	0.49050	81.2299696	1.7996834	3.5086239	0.0158765	
CN CONVEC	96	0.39240	82.4624562	1.8105566	1.8313618	0.0082038	
CN CONVEC	97	0.29430	83.4369068	1.8190845	0.6593541	0.0034874	
-- CENTRO	98	0.19620	84.1365482	1.8251707	0.2943250	0.0010199	
-- CENTRO	99	0.09810	84.5545856	1.8287927	0.0367906	0.0001275	
-- CENTRO	100	0.00000	84.6942077	1.8300000	0.0000000	0.0000000	

Error rel. tot. = 0.998 %

Cada columna indica, respectivamente: ciclo de producción de energía, fase del cálculo, número de capa, radio, presión, temperatura, luminosidad, masa (en sus respectivas unidades) y parámetro $n+1$ (para comprobar el tipo de transporte energético). Al final también viene el error relativo obtenido con los parámetros usados, que como se ve es muy bajo.

En la Figura 4 se muestran de nuevo las magnitudes normalizadas, esta vez con un comportamiento suave en la frontera que demuestra que el modelo se ha realizado con éxito. Como comprobación de que lo representado tiene sentido, se puede estudiar el comportamiento cualitativo de las magnitudes. Como cabría esperar, las dos magnitudes extensivas (masa y luminosidad), que representan la cantidad contenida dentro del radio, son cero en el centro de la estrella y tienden a los valores totales a medida que nos acercamos a la superficie (la luminosidad alcanza su valor total antes). En cambio, las magnitudes intensivas (presión y temperatura) empiezan siendo máximas en el centro (la temperatura empieza siendo T_c) y van disminuyendo a medida que alcanzan la superficie, donde la temperatura tiene un valor muy cercano a cero (en las unidades usadas, pero sigue siendo del orden de 10^3 K) y la presión se anula exactamente, de acorde a lo esperado. También se representa cada magnitud por separado en la Figura 5, para poder ver el rango de valores que toma cada una.

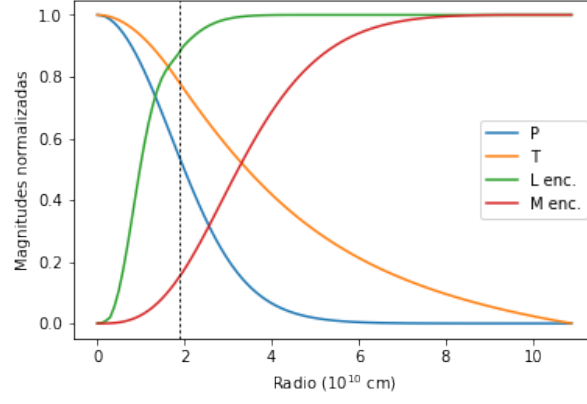
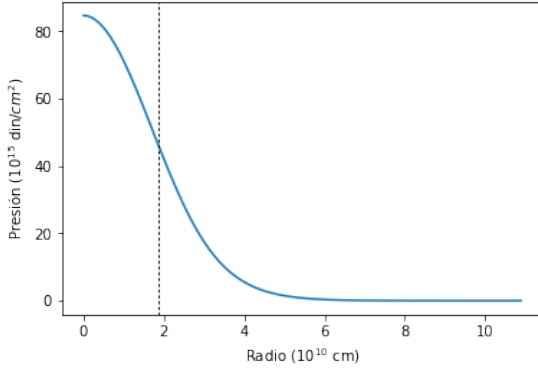
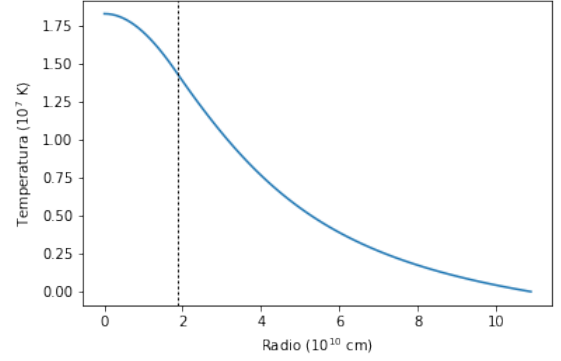


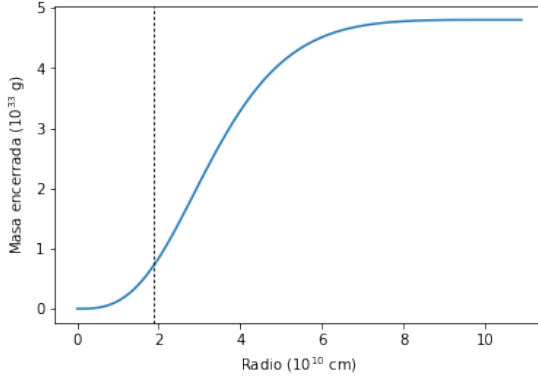
Figura 4: Magnitudes normalizadas de la estrella obtenidas utilizando los parámetros iniciales óptimos. La línea discontinua indica el lugar de la frontera radiativa-convectiva.



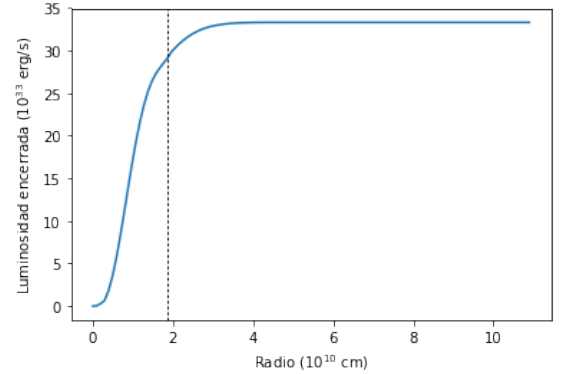
(a) Presión



(b) Temperatura



(c) Masa encerrada



(d) Luminosidad encerrada

Figura 5: Magnitudes termodinámicas principales de la estrella en función del radio. Las líneas discontinuas muestran la frontera radiativa-convectiva.

6. Resultados adicionales

Además de las magnitudes termodinámicas más importantes mostradas anteriormente, también se van a representar varios resultados secundarios como la densidad del material estelar, su opacidad

y el ritmo de generación de energía en función del radio y se intentará buscar posibles relaciones entre estas magnitudes y las mostradas anteriormente. Finalmente, se hallan otras propiedades no termodinámicas de la estrella como su temperatura efectiva, color y magnitud absoluta.

6.1. Densidad

La densidad del material estelar juega un papel fundamental a la hora de determinar las siguientes dos magnitudes. Debido a la aproximación de material no degenerado, para obtenerla basta con usar la ecuación de estado de los gases perfectos (Ec. (6) del gui3n), con lo que tiene una dependencia del resto de magnitudes de la forma $\rho \propto \frac{P}{T}$.

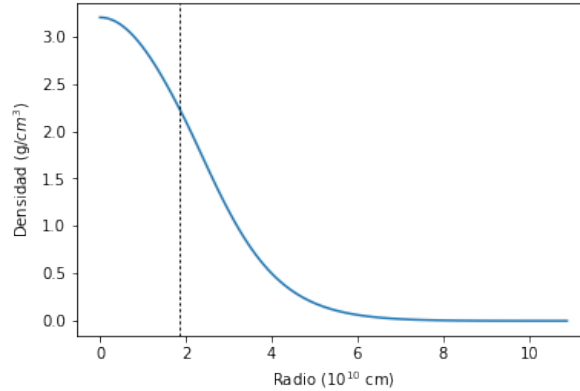


Figura 6: Densidad estelar en función del radio. La línea discontinua indica el lugar de la frontera radiativa-convectiva.

La Figura 6 muestra que la densidad está lejos de ser uniforme, siendo prácticamente nula a partir de radios intermedios. Su comportamiento está claramente dominado por la presión, ya que las curvas de las dos magnitudes disminuyen de la misma manera, anulándose aproximadamente en el mismo punto. En el núcleo la presión tan elevada a la que es sometido el material eleva también su densidad, mientras que en las capas más exteriores esto no ocurre. Esto supone que la mayoría de la masa de la estrella se concentra en las capas más interiores, como efectivamente se puede observar la Figura 5, donde la masa encerrada prácticamente alcanza su valor total en la mitad interior de la estrella.

6.2. Opacidad

La opacidad muestra el grado de dificultad que tiene la radiación para atravesar el material estelar. Una mayor opacidad suele estar relacionada con una menor temperatura, ya que entonces los átomos tienen todos sus electrones ligados, y estos son susceptibles de absorber fotones pasando a un estado más energético o incluso ionizándose completamente [3]. Para el caso de estrellas con una fracción de elementos pesados superior al 2% (como es el caso de la estrella asignada), la opacidad está dominada por procesos bound-free, es decir, electrones ligados a los átomos que absorben fotones y pasan a estar libres [1]. Sin embargo, la densidad también juega un papel muy importante ya que, independientemente de la temperatura, a mayor densidad de material, más se queda bloqueada la radiación.

La opacidad bound-free puede calcularse mediante la Ley de Kramer, usando la ecuación (8) del gui3n, con lo que queda una dependencia de la forma $\frac{\rho}{T^{3.5}}$. El factor g_{bf} es conocido como el factor *Gaunt*, que proviene de tener en cuenta procesos cuánticos en el cálculo clásico. Si el cálculo es

aplicado a muchos electrones pasando al continuo, como es este caso, entonces las aproximaciones de la física clásica son válidas y este factor es cercano a la unidad [3]. El factor t es otro factor de corrección llamado *de guillotina*, también cercano a la unidad [4], por lo que ambos se pueden ignorar.

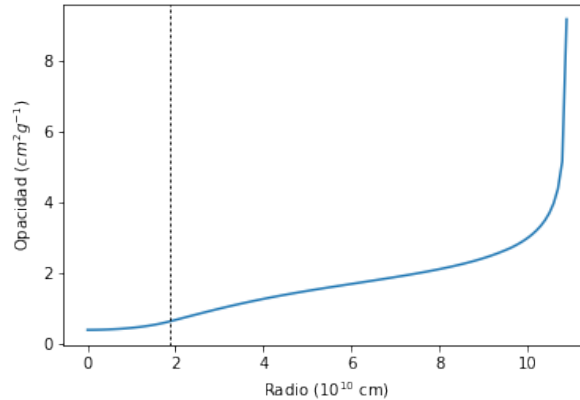


Figura 7: Opacidad del material estelar en función del radio. La línea discontinua indica el lugar de la frontera radiativa-convectiva.

En la Figura 7 se puede ver que en este caso es la temperatura la que domina el comportamiento de esta magnitud. Debido a las altas temperaturas y la ionización del material, la opacidad se mantiene bastante baja en casi toda la estrella. Sin embargo al llegar a las capas más exteriores la temperatura cae a valores muy pequeños, permitiendo la existencia de átomos neutros que absorben la radiación.

6.3. Ritmo de producción de la energía

El ritmo de producción de energía se define como la energía generada por unidad de masa y tiempo en las reacciones nucleares de la estrella. Estas reacciones pueden ocurrir mediante dos procesos diferentes: el ciclo PP (Protón-Protón) o el ciclo CNO (Carbono-Nitrógeno-Oxígeno). El primero se suele dar con temperaturas menores y el segundo con mayores. En el modelo se fue comprobando en cada capa qué ciclo proporcionaba un mayor ritmo de producción de energía, ya que únicamente ocurre el que sea más eficiente. Para calcularlo, se usó la fórmula (9) del guión, donde ϵ_1 y ν toman valores diferentes para el ciclo PP y CNO respectivamente, y también dependen del rango de temperatura. Estos valores se pueden sacar de la tabla (1) del guión. Los parámetros X_1 y X_2 también varían dependiendo del ciclo, siendo $X_1 = X_2 = X$ en el caso del ciclo PP y $X_1 = X$, $X_2 = Z/3$ en el caso del ciclo CNO (X es la fracción en masa de Hidrógeno y Z de elementos pesados).

En la Figura 8 se puede ver que la mayor parte de la energía se genera en la capa convectiva cercana al núcleo mediante el ciclo CNO. Este ciclo es mucho más poderoso, pero la temperatura umbral a la que ocurre es muy alta, por lo que sólo se da en las zonas con las temperaturas más elevadas. A partir de la frontera, la temperatura disminuye por debajo de este umbral y las reacciones vienen dadas por el ciclo PP, que aporta mucha menos energía, hasta que ya no hay ninguna reacción. Esta es la razón por la cual la luminosidad encerrada alcanza su valor máximo tan pronto, ya que fuera de la zona de generación de energía la luminosidad se mantiene constante. En [11] se afirma que la generación de energía mayormente mediante ciclo CNO sólo ocurre para estrellas con una $M > 1 M_{\odot}$, que se cumple en el caso de la estrella estudiada ($M_{tot} = 2.41 M_{\odot}$).

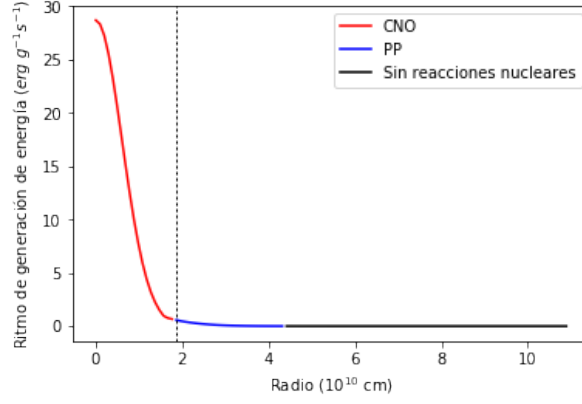


Figura 8: Ritmo de generación de energía en función del radio y el ciclo por el que se genera (CNO en rojo y PP en azul). La línea discontinua indica el lugar de la frontera radiativa-convectiva.

6.4. Temperatura efectiva y longitud de onda de emisión máxima

Para calcular la temperatura efectiva, se asume que la estrella está radiando como un cuerpo negro y se usa la Ley de Stefan-Boltzmann,

$$\frac{L_{tot}}{4\pi R_{tot}^2} = \sigma T_{eff}^4 \quad (6)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann y tiene un valor de $5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$. Si se introducen los parámetros en unidades del Sistema Internacional, se obtiene que la temperatura efectiva de la estrella es:

$$T_{eff} = 7959.53 K$$

También se puede calcular la longitud de onda en la que emite un flujo más intenso usando la ley de Wienn,

$$\lambda_{max} T_{eff} = 2.8976 \cdot 10^6 \text{ nm K} \quad (7)$$

de donde se obtiene el siguiente valor:

$$\lambda_{max} = 364 \text{ nm}$$

Se tiene una estrella caliente cuyo pico de emisión está en el ultravioleta cercano. Esto significa que visualmente se observará con un color azul o blanquecino. En comparación, los valores para el Sol son $T_{eff} = 5780 \text{ K}$ y $\lambda_{max} = 500 \text{ nm}$ [5], que es una estrella más fría y roja.

6.5. Magnitud absoluta

Usando la ley de Pogson, se puede relacionar la luminosidad de la estrella con la solar para obtener la magnitud absoluta de la estrella.

$$M - M_{\odot} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L_{tot}}{L_{\odot}} \right) \quad (8)$$

Usando $L_{\odot} = 3.9 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$ y $M_{\odot} = 4.77$ [5], se obtiene para la estrella:

$$M = 2.44 \text{ mag}$$

Por lo que es una estrella más luminosa que el Sol.

7. Comprobación de la validez de algunas de las aproximaciones iniciales

Antes de pasar a la clasificación de la estrella en base a los resultados obtenidos, se puede realizar una pequeña comprobación de algunas de las aproximaciones iniciales que se tomaron para facilitar los cálculos del modelo. En concreto se puede ver si realmente es cierto que la estrella está totalmente ionizada y que su material no está degenerado.

7.1. Ionización total

La temperatura característica para la ionización del Hidrógeno desde el nivel fundamental está en torno a los $10^4 K$, y para la ionización del segundo electrón del Helio en torno a $4 \times 10^4 K$ [6]. Aunque los metales tienen una temperatura de ionización más elevada, al tener una presencia tan pequeña se pueden ignorar y se puede asumir con bastante certeza que el material estará completamente ionizado para temperaturas superiores a los órdenes mencionados. En el gráfico de la temperatura de la Figura 5 se puede observar como esta es superior a $10^6 K$ hasta prácticamente la superficie, con lo cual esta aproximación es válida. Esto, junto con la suposición de que la composición química es constante, permite calcular el peso molecular medio de la estrella con la siguiente aproximación [1]:

$$\mu = \frac{1}{2X + 0.75Y + 0.6Z} = 0.57 \quad (9)$$

Donde $Z = 1 - X - Y$ es la fracción en masa de los metales pesados. El valor de μ es imprescindible para la mayoría de los cálculos físicos de las magnitudes, y fue ese valor el que se usó (se considera constante). El peso molecular medio indica el peso medio que tiene una partícula típica del medio estelar. Las partículas que lo componen son los iones de Hidrógeno, Helio, y los metales más pesados, y todos los electrones libres. Como la media viene influida también por la cantidad de partículas que contribuyen con cada peso, el hecho de que su valor sea menor que uno indica que todos los electrones ionizados, cuyo peso molecular es prácticamente cero, son los que más contribuyen a la media total. Esto refuerza de nuevo la validez de la aproximación de ionización total.

7.2. Material no degenerado

Para comprobar que el material realmente está en forma de gas ideal no degenerado, se pueden calcular las expresiones para la presión de un gas ideal y de un gas degenerado (no relativista) y comparar cuál es mayor. Si la presión del gas ideal domina, su comportamiento será ideal [6].

$$P_{deg} = 1.004 \times 10^7 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{5/3} \text{ dyn/cm}^2 \quad (10)$$

$$P_{no deg} = \frac{k\rho T}{\mu H} \text{ dyn/cm}^2 \quad (11)$$

Donde k es la constante de Boltzmann y H es la masa del protón. Normalmente la degeneración se suele dar en el núcleo, ya que es ahí donde P_{deg} es mayor, así que se van a evaluar las dos expresiones para el centro de la estrella. Los valores que se obtienen son:

$$P_{deg} = 1.8 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}^2 \quad P_{no deg} = 8.7 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}^2$$

La presión del gas no degenerado es unas cinco veces mayor en el núcleo, y esta diferencia sólo irá incrementando a medida que se comprueba en radios más externos. Esto demuestra que la aproximación de material no degenerado es correcta. Como referencia, estas fórmulas evaluadas en el núcleo del Sol proporcionan valores similares, con una $P_{no deg} \approx 8 P_{deg}$, mientras que en el núcleo altamente degenerado de una enana blanca se puede tener hasta $P_{deg} \approx 10^5 P_{no deg}$ [4].

8. Clasificación de la estrella

Se han ido obteniendo varios parámetros y propiedades que permiten conocer el tipo de estrella con la que se ha trabajado, determinar su posición en el diagrama HR e identificarla con alguna estrella real. Antes de proceder con la clasificación se vuelven a escribir los parámetros más importantes, esta vez en unidades solares para tener una mejor idea de su escala.

$$R_{tot} = 1.57R_{\odot} \quad L_{tot} = 8.63L_{\odot} \quad M_{tot} = 2.41M_{\odot} \quad T_{eff} = 7959 K$$

$$M = 2.44 \text{ mag} \quad X = 0.8 \quad Y = 0.16 \quad Z = 0.04$$

En la Figura 9 se toma un diagrama HR estándar, con los ejes en unidades solares, donde se puede localizar fácilmente la posición de la estrella estudiada.

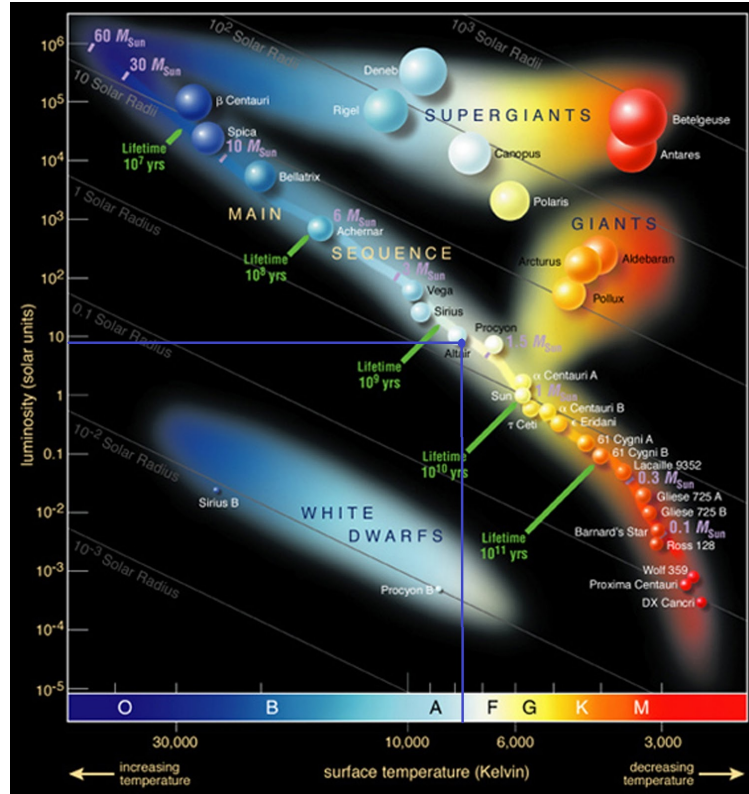


Figura 9: Estrella clasificada en el diagrama HR. El diagrama se tomó de [8].

Se trata de una estrella ubicada en la secuencia principal. Tiene un tamaño similar al Sol, pero es más caliente y blanca, por lo que está en una posición más elevada. También tiene una metalicidad relativamente alta ($Z = 0.04$). Estrellas con estas características suelen ser más jóvenes, ya que se tuvieron que formar en el universo reciente cuando el material interestelar es más rico en metales. Además al ser más luminosas, queman los elementos del núcleo más rápido que en otras estrellas más frías y rojas y el tiempo de vida es más corto, por lo que todas las estrellas observadas de este tipo suelen tener una edad menor que la del Sol. Además, en el caso de la estrella estudiada la fracción en masa de Hidrógeno es bastante elevada ($X = 0.8$) lo que indica que todavía no ha pasado mucho tiempo fusionándolo en el núcleo.

Las estrellas se clasifican en diferentes clases espectrales según su temperatura y luminosidad. La estrella asignada pertenece a la clase A7V [9], es decir, una estrella blanca de la secuencia principal caliente pero no muy luminosa. Una estrella real con características similares es Altair [10].

9. Variación de la masa y comprobación de las relaciones de homología entre estrellas de la secuencia principal

Las estrellas de la secuencia principal, a pesar de tener parámetros muy diferentes, están sometidas a los mismos procesos globales interiores (fusión de Hidrógeno en el núcleo, capa convectiva y capa radiativa...). Por lo tanto una buena aproximación es suponer que las magnitudes de estrellas diferentes escalan proporcionalmente de la misma manera (siguen unas determinadas relaciones) [11]. En esta sección se varía ligeramente la masa total introducida en el modelo para obtener nuevas estrellas y se comprueba si entre ellas se cumplen estas relaciones de homología. Se van a generar dos nuevas estrellas, una con una masa mayor y otra con una masa menor que la original (sin variar la composición química). Para cada una de ellas se vuelve a ejecutar el modelo y se obtiene el resto de parámetros óptimos, que se muestran a continuación (en las unidades propias y en las solares).

Estrella	$M_{tot} (M_{\odot})$	$R_{tot} (R_{\odot})$	$L_{tot} (L_{\odot})$
1	4.5 (2.25)	10.4 (1.49)	23.8 (6.17)
Original	4.8 (2.41)	10.9 (1.57)	33.3 (8.63)
2	5.1 (2.56)	11.4 (1.64)	45.6 (11.82)

Cuadro 1: Valores de los parámetros de tres estrellas diferentes obtenidos con el modelo. Primero se da el valor en las unidades propias y luego entre paréntesis en las solares.

Se puede ver que el radio no varía demasiado con el cambio de masa, mientras que la luminosidad es muy sensible y varía considerablemente. Esto es debido a que, dentro de la secuencia principal, aumentar la masa equivale a moverse a lo largo de la secuencia en dirección ascendente. Las líneas de radio constante en un diagrama HR son prácticamente paralelas a la región central de la secuencia principal, por lo que moverse en esa dirección no aumenta demasiado el radio. Sin embargo, al estar ascendiendo en el eje vertical de luminosidades en escala logarítmica, este parámetro sí se incrementa notablemente.

9.1. Luminosidad y masa

Para estrellas de la secuencia principal con masas entre $1 M_{\odot}$ y $10 M_{\odot}$ existe una relación entre la luminosidad y la masa de la forma [11]:

$$L \propto M^{\alpha} \quad (12)$$

Para comprobar si esto se cumple para las estrellas generadas con el modelo, se representan en un gráfico los distintos valores de la masa y la luminosidad en forma logarítmica. Si los puntos forman una recta, la relación se satisface y la pendiente de esa recta será precisamente el valor del exponente α . En la Figura 10 se puede comprobar que esta relación efectivamente se cumple. Las distintas estrellas forman una recta con una pendiente de 5.35, por lo que en este caso se tiene que:

$$\alpha = 5.35$$

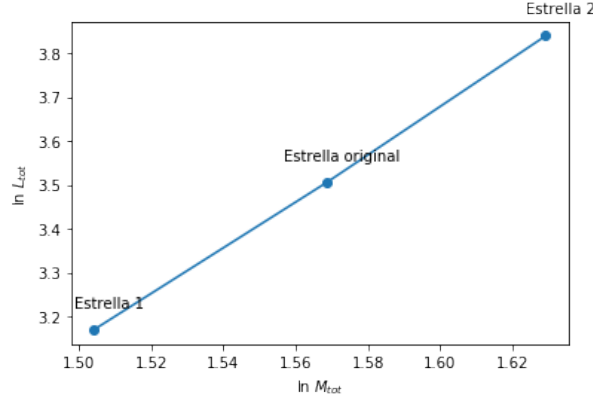


Figura 10: Logaritmos de las luminosidades frente a logaritmos de las masas. Se obtiene una línea recta cuya pendiente es precisamente el factor α de la relación homóloga.

9.2. Radio y masa

Análogamente al caso anterior, también existe una relación entre el radio y la masa de la forma [11]:

$$R \propto M^\beta \quad (13)$$

De nuevo se representan las dos variables logarítmicamente para comprobar si forman una recta. La Figura 11 muestra otra recta con pendiente de 0.77, por lo que se cumple la relación y el factor del exponente es:

$$\beta = 0.77$$

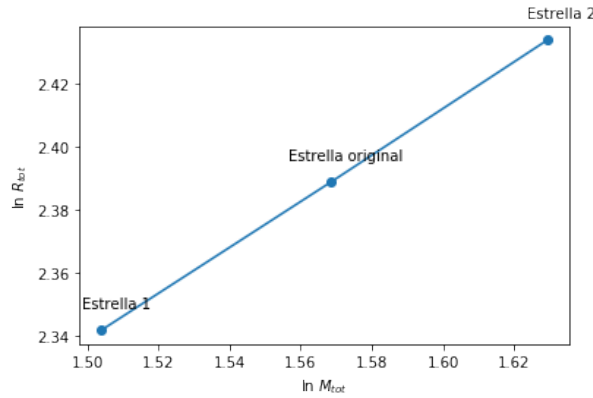


Figura 11: Logaritmos de los radios frente a logaritmos de las masas. Se obtiene una línea recta cuya pendiente es precisamente el factor β de la relación homóloga.

10. Variación de la composición química

Finalmente se prueba a variar ligeramente la composición química, dejando la masa constante, para ver cómo cambian las soluciones. En concreto, se va a disminuir la fracción de Hidrógeno y aumentar la de Helio. Los nuevos parámetros elegidos son:

$$M_{tot} = 4.8 = 2.41 M_{\odot} \quad X = 0.7 \quad Y = 0.25$$

Y los parámetros óptimos calculados por el modelo son:

$$R_{tot} = 11.33 = 1.63 R_{\odot} \quad L_{tot} = 47.80 = 12.39 L_{\odot} \quad T_c = 1.88$$

Comparando estos valores con los de la estrella original, se puede ver que el radio ha aumentado un 4 %, la luminosidad un 44 % y la temperatura central un 3 %. Estos cambios pueden explicarse por el hecho de que disminuir la fracción de Hidrógeno y aumentar la de Helio implica aumentar la edad de la estrella (a mayor edad, mayor Hidrógeno consumido y Helio creado). A medida que el Hidrógeno se va agotando en el núcleo, las reacciones nucleares comienzan a darse en capas más exteriores y la presión disminuye. Esto hace que la fuerza gravitatoria domine temporalmente, contrayendo el núcleo. Pero esta contracción vuelve a encender las reacciones nucleares con más fuerza, aumentando el flujo de energía que sube a la superficie y expandiendo la envoltura de la estrella (su radio total), mientras que la temperatura permanece aproximadamente constante [4]. El aumento del radio hace que la luminosidad también aumente, y de forma más extrema ya que $L_{tot} \propto R_{tot}^2$. Debido a esto, durante la etapa de vida de una estrella en la secuencia principal esta no permanece inmutable sino que va evolucionando lentamente en el diagrama HR hacia posiciones más elevadas en la franja de la secuencia principal, como se muestra en la Figura 12.

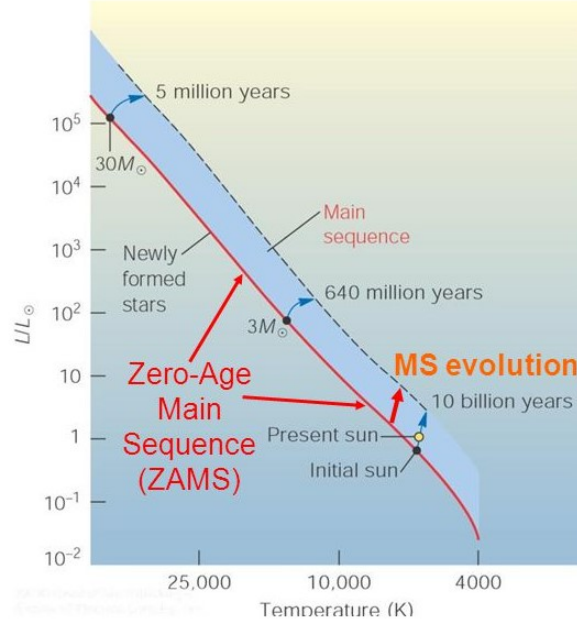


Figura 12: Evolución de una estrella en el diagrama HR dentro de la secuencia principal. Imagen tomada de [12].

11. Conclusión

A lo largo del trabajo se ha podido ver cómo la implementación de un modelo numérico sencillo que usa las ecuaciones fundamentales de la astrofísica estelar describe correctamente el comportamiento de las magnitudes termodinámicas del interior de una estrella, junto con varias de sus propiedades más importantes. Se han podido obtener resultados adicionales que añadían más información sobre la estrella estudiada, además de poder comprobar que varias de las aproximaciones usadas inicialmente eran coherentes con los resultados obtenidos. Finalmente se ha jugado con el modelo para

ver si este cumplía determinadas relaciones entre estrellas con parámetros diferentes, y se han dado los motivos físicos que hay detrás de estas relaciones. Poder extrapolar los procesos astrofísicos que ocurren en diferentes estrellas demuestra con certeza el éxito del modelo.

La parte computacional del TFG fue de las más exigentes ya que para programar todo el modelo se han requerido muchas horas de ensayo y error, especialmente debido a que Python era un lenguaje cuya sintaxis era desconocida para el autor del presente trabajo. Poco a poco y con ayuda de la página web [13], el uso se fue haciendo más familiar y finalmente se ha podido explotar al máximo, obteniendo todos los resultados deseados y creando gráficos en diferentes formatos y con diferentes funciones (usando la útil herramienta de Matplotlib y su web [14]).

Referencias

- [1] Cardiel, Nicolás. (2020). Guión para el TFG *Elaboración de un modelo numérico de interior estelar*.
- [2] Cox, A. Bowers, D. Brownlee, R.. (1960). A Method of Computing Stellar Interior Models.. The Astronomical Journal. 65. 486. 10.1086/108169.
- [3] Bychkov, Konstantin. (1975). Martin Harwit. Astrophysical Concepts. Soviet Astronomy. 18. 667.
- [4] Clayton, Donald. (1984). Principle of Stellar Evolution and Nucleosynthesis. Bibliovault OAI Repository, the University of Chicago Press.
- [5] Simon Schuster Macmillian Publishing. (1996). The Sun. Macmillian Encyclopedia of Earth Sciences New York.
- [6] Hansen, Carl Kawaler, Steven Trimble, Virginia. (1994). Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution. Physics Today - PHYS TODAY. 48. 10.1063/1.2808173.
- [7] <https://drive.google.com/drive/folders/1OjsskqZnW5ksmyD0eQAToNudE0B4YmE-?usp=sharing>
- [8] https://es.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Hertzsprung-Russell#/media/Archivo:Hertzsprung-Russel_StarData.png
- [9] <https://sites.uni.edu/morgans/astro/course/Notes/section2/spectraltemps.html>
- [10] <https://earthsky.org/brightest-stars/altair-the-bluish-jewel-of-the-eagle>
- [11] <http://personal.psu.edu/rbc3/A534/lec18.pdf>
- [12] <https://slideplayer.com/slide/3581680/>.
- [13] <https://stackoverflow.com/>
- [14] <https://matplotlib.org/>