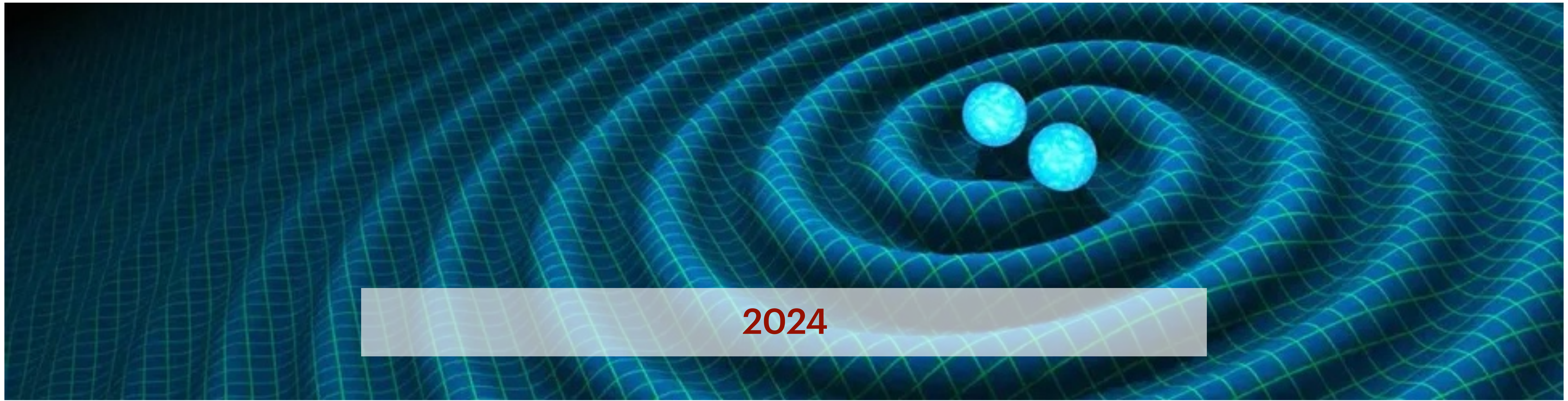
Relatividade geral linearizada

Universidade Federal do Espírito Santo

Davi C. Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, ES - Brazil

Cosmo-ufes
Center for Astrophysics and Cosmology
www.cosmo-ufes.org

- Parte da disciplina Relatividade Geral -



Perturbação em torno de Minkowski

- Consideraremos uma perturbação em torno de Minkowski.
- Consideraremos Minkowski (η_{ab}) e adicionamos uma perturbação γ_{ab} com a condição, em dado sistema de coordenadas, $|\eta_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}| = |\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$.
- Esta definição de perturbação é explicitamente dependente do sistema de coordenas. Depois trataremos da questão de transformação de coordenadas nesse contexto.
- Seja $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$
- **Exercício:** Verifique que $g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab} + O(\gamma^2)$, em que
  g^{ab} é a inversa de g_{ab}
  η^{ab} é a inversa de η_{ab}
  $\gamma^{ab} \equiv \eta^{ac}\gamma_{cd}\eta^{db}$
- No contexto de perturbações, <u>*é conveniente e padrão levantar e abaixar índices usando a métrica de fundo.*</u>

Símbolo de Christoffel linearizado

- Verifica-se que

$$\overset{(1)}{\Gamma}{}^{c}_{ab} = \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a \gamma_{bd} + \partial_b \gamma_{ad} - \partial_d \gamma_{ab})$$

- **Exercícios:**

  Considere Minkowski em coordenadas esféricas e verifique em detalhes a expressão para $\overset{(1)}{\Gamma}{}^{c}_{ab}$.

  Considere que a métrica de fundo é FRW sem curvatura espacial e encontre $\overset{(1)}{\Gamma}{}^{c}_{ab}$.

Tensores de Ricci e Einstein linearizados

- Para o tensor de Ricci,

$$\overset{(1)}{R}_{ab} = \partial_c \overset{(1)}{\Gamma}{}^c_{ab} - \partial_a \overset{(1)}{\Gamma}{}^c_{cb} = \partial^c \partial_{(b}\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma\,,$$

em que $\gamma \equiv \gamma^a_a$.

- E obtém-se, para o tensor de Einstein,

$$\overset{(1)}{G}_{ab} = \overset{(1)}{R}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\overset{(1)}{R}$$

$$= \partial^c\partial_{(b}\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b\gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}\left(\partial^c\partial^d\gamma_{cd} - \partial^c\partial_c\gamma\right)$$

Introduzindo $\bar{\gamma}_{ab}$

- Há uma simples, mas relevante, simplificação que é obtida introduzindo

$$\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$$

- O tensor de Einstein fica um pouco mais simples,

$$\overset{(1)}{G}_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} + \partial^c\partial_{(b}\bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd}$$

- **Exercícios:** i. Compare $\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}^a_a$ com γ.

  ii. Verifique em detalhes todas as passagens até chegar na equação de $\overset{(1)}{G}_{ab}$.

- Para chegarmos na equação de Einstein, falta especificar $\overset{(0)}{T}_{ab}$ e $\overset{(1)}{T}_{ab}$ (veremos em breve).

Transformações de coordenadas

- Estando fixada a métrica de fundo, há transformações de γ_{ab} que não têm impacto geométrico/físico, pois podem ser interpretadas como transformações de coordenadas da métrica de fundo (Minkowski).

- Perante mudanças de coordenadas (ou difeomorfismos) geradas por um campo vetorial ξ^μ, o fundo se transforma como

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathscr{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \,.$$

- Assumindo que o fundo está fixo num dado sistema de coordenadas, um difeomorfismo não alteraria $\eta_{\mu\nu}$, mas:

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

Calibre na eletrodinâmica

- Para eletrodinâmica, $A'_a = A_a + \partial_a \Lambda$ é uma transformação de calibre, sendo Λ campo escalar arbitrário.

- Essa transformação é uma invariância das equações de campo, pois F_{ab} é invariante perante essa transformação.

- É fácil ver que o calibre de Lorenz (ou Lorentz, ver 10.1109/MAP.1991.5672647), dado por $\partial^a A_a = 0$ é acessível, pois $\partial^a A'_a = \partial^a A_a + \Box \Lambda$, logo, fixando $\Box \Lambda = - \partial^a A_a$ encontra-se o calibre de Lorenz.

- Nota-se também que esse calibre deixa uma simetria residual. Embora dado um A^a arbitrário sempre exista Λ tal que $\partial^a A_a = 0$; essa solução para Λ não é única.

Calibre na eletrodinâmica

- Nota-se também que esse calibre deixa uma simetria residual. Embora dado um A^a arbitrário sempre exista Λ tal que $\partial^a A_a = 0$; essa solução para Λ não é única.
- A saber, considere $\Lambda' = \Lambda + \lambda$, em que $\Box \lambda = 0$. Logo $\Box \Lambda' = \Box \Lambda$.
- Mesmo para condições de contorno fixadas no infinito espacial, ou em alguma outra superfície, $\Box \lambda = 0$ possui soluções não triviais (ondas).
- O que é necessário para fixar Λ completamente?
- Para uma eq. de Laplace ou Poisson, basta providenciar as condições de contorno numa dada superfície fechada, mas isso não ocorre para a eq. de onda.
- Tal como num problema da corda vibrante, fornecer as condições de contorno nas extremidades não é suficiente para determinar sua posição em cada ponto e cada instante. Para obter uma solução específica, necessita-se também das condições iniciais, ou seja, especificar$\Lambda(t_0, x)$ e $\dot{\Lambda}(t_0, x)$

Calibre na eletrodinâmica

- No calibre de Lorenz, a condição $A_0 = 0$ só tem chance de fazer sentido se $J_0 = 0$, pois nesse calibre $\Box A_b \propto J_b$.
- Assumiremos que $J_0 = 0$ a partir de agora.
- Para qualquer A_0 que satisfaça a equação de campo $\Box A_0 = 0$, podemos usar a simetria de calibre residual para definir $A_0' = A_0 + \dot{\lambda}$. Nota-se que para qualquer λ teremos $\Box A_0' = 0$.
- Como A_0 e $\dot{\lambda}$ satisfazem a mesma equação diferencial, existe λ tal que $A_0' = 0$.
- A demonstração acima é suficiente para garantir a acessibilidade do calibre $\partial^i A_i = 0$ e $A_0 = 0$ (Calibre de radiação)
- Demonstra-se também que o calibre de radiação quebra (fixa) completamente a simetria de calibre no vácuo.

Calibre na eletrodinâmica

- Demonstra-se também que o calibre de radiação quebra (fixa) completamente a simetria de calibre no vácuo.
- Se um campo $f(x,t)$ satisfaz $\Box f = 0$, a solução explícita de $f(x,t)$ pode ser obtida dando:
  - i) condições de contorno em dada superfície no espaço (problema análogo ao da unicidade das soluções da eq. de Laplace);
  - ii) condições iniciais para f tais que especifiquem f e $\dot{f}$ em dado instante.
- Não lidamos explicitamente com as condições de contorno, mas estamos sempre assumindo que podem ser dadas. O procedimento de fixar λ que vimos fixa as condições iniciais de λ. A saber, num dado instante t_0 seja
  - $\dot{\lambda}(x,t_0) = -A_0(x,t_0)$. Logo $A_0'(x,t_0) = 0$. Consequentemente, devido ao calibre de Lorenz,
  - $\partial^i A_i'(x,t_0) = 0$ e $\partial^i \partial_i \lambda(x,t_0) = -\partial^i A_i(x,t_0) \implies \exists \lambda(x,t_0)$.
- Ou seja, o calibre de radiação fixa a solução de λ, logo fixa completamente a transformação de calibre.

Relatividade geral: Calibre transverso

- Sendo $\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$, verifica-se que o calibre transverso (que é às vezes referido como de Lorenz/Lorentz) é acessível, $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$.

- A verificação da acessibilidade é direta. O objetivo é demonstrar que existe um campo vetorial ξ^a tal que $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$. Verifica-se que ξ^a precisa satisfazer uma eq. de onda não-homogênea, logo é possível. **Exercício**: Verificar $\bar{\gamma}'_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \eta_{ab} \partial^c \xi_c$.

- Nota-se que $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} + \Box \xi_b$, logo $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$ requer $\Box \, \xi_b = - \, \partial^a \bar{\gamma}_{ab}$.

- Ressalta-se que o calibre transverso não fixa por completo a simetria de calibre, há uma simetria residual associada à parte homogênea da eq. diferencial que ξ^a deve satisfazer.

Relatividade geral: Calibre transverso

- Comentário sobre $\partial^a \gamma_{ab} = 0$.

  Nota-se que $\partial^a \gamma'_{ab} = \partial^a \gamma_{ab} + \Box \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a$,
  consequentemente a condição $\partial^a \gamma_{ab} = 0$ é possível desde que exista ξ_b que satisfaça

$$\Box\, \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a = -\, \partial^a \gamma_{ab}$$

- **Questão:** É possível garantir a existência de ξ^a que satisfaça a equação acima?

Relatividade geral: Calibre TT

- Impor também que $\bar{\gamma} = 0$.