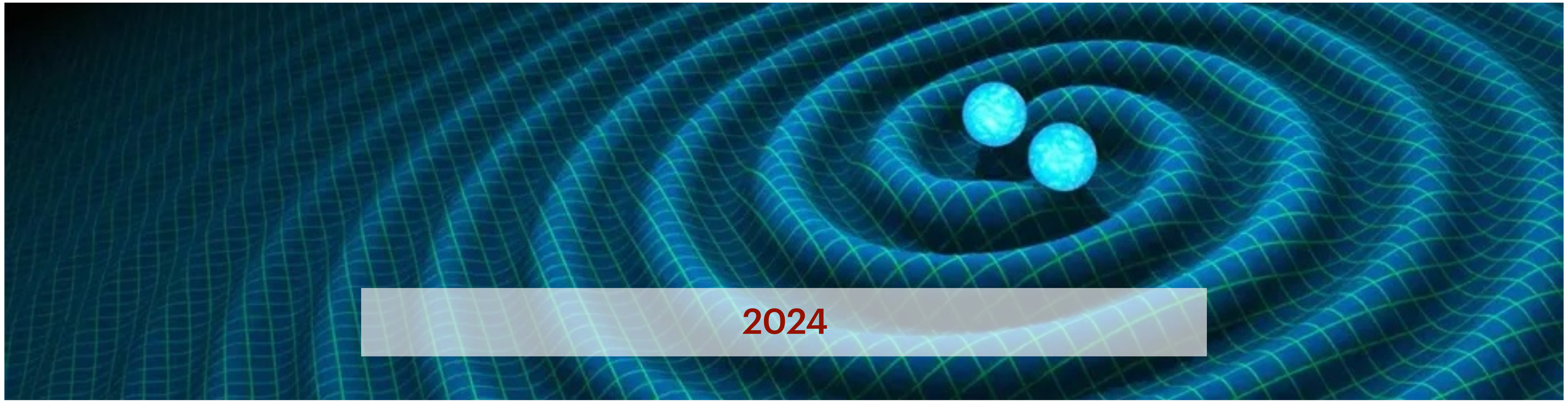
Calibre de radiação na gravitação

Universidade Federal do
Espírito Santo

Davi C. Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, ES - Brazil

Cosmo-ufes
Center for Astrophysics and Cosmology
www.cosmo-ufes.org

- Parte da disciplina Relatividade Geral -



O caso da eletrodinâmica

- Para eletrodinâmica, $A'_a = A_a + \partial_a \Lambda$ é uma transformação de calibre, sendo Λ campo escalar arbitrário.

- Essa transformação é uma invariância das equações de campo, pois F_{ab} é invariante perante essa transformação.

- É fácil ver que o calibre de Lorenz (ou Lorentz, ver 10.1109/MAP.1991.5672647), dado por $\partial^a A_a = 0$ é acessível, pois $\partial^a A'_a = \partial^a A_a + \Box \Lambda$, logo, fixando $\Box \Lambda = -\partial^a A_a$ encontra-se o calibre de Lorenz.

- Nota-se também que esse calibre deixa uma simetria residual. Embora dado um A^a arbitrário sempre exista Λ tal que $\partial^a A_a = 0$; essa solução para Λ não é única.

O caso da eletrodinâmica

- Nota-se também que esse calibre deixa uma simetria residual. Embora dado um A^a arbitrário sempre exista Λ tal que $\partial^a A_a = 0$; essa solução para Λ não é única.
- A saber, considere $\Lambda' = \Lambda + \lambda$, em que $\Box \lambda = 0$. Logo $\Box \Lambda' = \Box \Lambda$.
- Mesmo para condições de contorno fixadas no infinito espacial, ou em alguma outra superfície, $\Box \lambda = 0$ possui soluções não triviais (ondas).
- O que é necessário para fixar Λ completamente?

- Para uma eq. de Laplace ou Poisson, basta providenciar as condições de contorno numa dada superfície fechada, mas isso não ocorre para a eq. de onda.
- Tal como num problema da corda vibrante, fornecer as condições de contorno nas extremidades não é suficiente para determinar sua posição em cada ponto e cada instante. Para obter uma solução específica, necessita-se também das condições iniciais, ou seja, especificar $\Lambda(t_0, x)$ e $\dot{\Lambda}(t_0, x)$

O caso da eletrodinâmica

- No calibre de Lorenz, a condição $A_0 = 0$ só tem chance de fazer sentido se $J_0 = 0$, pois nesse calibre $\Box A_b \propto J_b$.
- Assumiremos que $J_0 = 0$ a partir de agora.

- Para qualquer A_0 que satisfaça a equação de campo $\Box A_0 = 0$, podemos usar a simetria de calibre residual para definir $A_0' = A_0 + \dot{\lambda}$. Nota-se que para qualquer λ teremos $\Box A_0' = 0$.
- Como A_0 e $\dot{\lambda}$ satisfazem a mesma equação diferencial, existe λ tal que $A_0' = 0$.
- A demonstração acima é suficiente para garantir a acessibilidade do calibre $\partial^i A_i = 0$ e $A_0 = 0$ (Calibre de radiação)
- Demonstra-se também que o calibre de radiação quebra (fixa) completamente a simetria de calibre no vácuo.

O caso da eletrodinâmica

- Demonstra-se também que o calibre de radiação quebra (fixa) completamente a simetria de calibre no vácuo.
- Se um campo $f(x, t)$ satisfaz $\Box f = 0$, a solução explícita de $f(x, t)$ pode ser obtida dando:
  - i) condições de contorno em dada superfície no espaço (problema análogo ao da unicidade das soluções da eq. de Laplace);
  - ii) condições iniciais para f tais que especifiquem f e $\dot{f}$ em dado instante.
- Não lidamos explicitamente com as condições de contorno, mas estamos sempre assumindo que podem ser dadas. O procedimento de fixar λ que vimos fixa as condições iniciais de λ. A saber, num dado instante t_0 seja
  - $\dot{\lambda}(x, t_0) = -A_0(x, t_0)$. Logo $A_0'(x, t_0) = 0$. Consequentemente, devido ao calibre de Lorenz,
  - $\partial^i A_i'(x, t_0) = 0$ e $\partial^i \partial_i \lambda(x, t_0) = -\partial^i A_i(x, t_0) \Longrightarrow \exists \lambda(x, t_0)$.
- Ou seja, o calibre de radiação fixa a solução de λ, logo fixa completamente a transformação de calibre.

Contexto e Definições

- Consideraremos expansão me primeira ordem em γ (campo fraco) em que $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$
- Estando fixada a métrica de fundo, há transformações de γ_{ab} que não tem impacto geométrico/físico, pois podem ser interpretadas como transformações de coordenadas da métrica de fundo (Minkowski).
- Perante mudanças de coordenadas (ou difeomorfismos) geradas por um campo vetorial ξ^μ, o fundo se transforma como
  $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathscr{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$.
- Assumindo que o fundo está fixo num dado sistema de coordenadas, um difeomorfismo não alteraria $\eta_{\mu\nu}$, mas: $\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$
- Sendo $\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$, verifica-se que o calibre transverso (que é às vezes referido como de Lorenz/Lorentz) é acessível, $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$.

Calibre transverso

- Sendo $\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$, verifica-se que o calibre transverso (que é às vezes referido como de Lorenz/Lorentz) é acessível, $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$.

- A verificação da acessibilidade é direta. O objetivo é demonstrar que existe um campo vetorial ξ^a tal que $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$. Verifica-se que ξ^a precisa satisfazer uma eq. de onda não-homogênea, logo é possível.

- **Exercício:** Encontre explicitamente a eq. que ξ^a deve satisfazer (a resolução está logo a seguir…)

- Ressalta-se que o calibre transverso não fixa por completo a simetria de calibre, há uma simetria residual associada à parte homogênea da eq. diferencial que ξ^a deve satisfazer.

Calibre transverso

- Nota-se que $\partial^a \gamma'_{ab} = \partial^a \gamma_{ab} + \Box \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a$, consequentemente a condição $\partial^a \gamma_{ab} = 0$ é possível desde que exista ξ_b que satisfaça

$$\Box\, \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a = -\, \partial^a \gamma_{ab}$$

- É possível garantir isso a partir da equação acima?
  É mais conveniente trabalharmos com $\bar{\gamma}_{ab}$.

- Nota-se que $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} + \Box \xi_b$, logo $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$ requer $\Box\, \xi_b = -\, \partial^a \bar{\gamma}_{ab}$