Teoria $f(Q)$

Vitor Petri Silva

PPGFis - Ufes

Outubro/2024

Sumário

Base

O espaço-tempo pode ser caracterizado por uma métrica e uma estrutura afim, determinados pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e uma conexão $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, respectivamente. São as estruturas responsáveis por definir geometrias.

A falha da conexão em ser compatível com a métrica é caracterizada pela não-metricidade

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu}, \tag{1}$$

e a anti-simetria define a torção

$$T^{\alpha}{}_{\mu\nu} \equiv 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\nu]}. \tag{2}$$

Contorção e deformação

Se a conexão é simétrica e compatível com a métrica, chamamos de conexão de Levi-Civita. Essas duas condições fazem a conexão de Levi-Civita ser dada pelo símbolo de Christoffel da métrica

$$\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right). \tag{3}$$

Uma conexão geral $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ pode ser convenientemente decomposta como

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu} + L^{\alpha}{}_{\mu\nu}, \tag{4}$$

com

$$K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T^{\alpha}{}_{\mu\nu} + T_{(\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu)}, \tag{5}$$

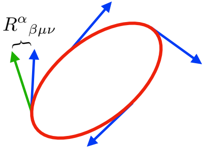
$$L^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Q^{\alpha}{}_{\mu\nu} - Q_{(\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu)}. \tag{6}$$

a contorção e a deformação, respectivamente.

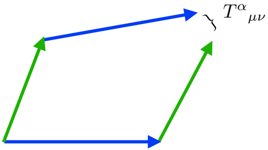
Trindade

Podemos então resumir os objetos geométricos que caracterizam nosso espaço-tempo:

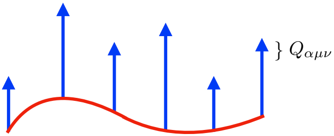
- Curvatura: Se o espaço é plano, $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma) = 0$. A curvatura mede a rotação experimentada por um vetor quando ele é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada.
- Torção: Se a conexão é simétrica, $T^{\alpha}{}_{\mu\nu}(\Gamma) = 0$. A torção mede o não fechamento de um paralelogramo formado por dois vetores infinitesimais quando são transportados paralelamente um ao longo do outro.
- Metricidade: Se a conexão é compatível com a métrica, $Q_{\alpha\mu\nu}(\Gamma, g) = 0$. A não-metricidade mede o quanto o comprimento dos vetores muda à medida que fazemos um transporte paralelo.



The rotation of a vector transported along a closed curve is given by the curvature: General Relativity.



The non-closure of parallelograms formed when two vectors are transported along each other is given by the torsion: Teleparallel Equivalent of General Relativity.



The variation of the length of a vector as it is transported is given by the non-metricity: Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity.

Definições

Do tensor de não-metricidade $Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu}$, deduzimos a deformação

$$L^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} Q^\alpha{}_{\mu\nu} - Q_{(\mu\nu)}{}^\alpha, \tag{7}$$

que mede a diferença da conexão Levi-Civita com a parte simétrica da conexão completa. É conveniente definirmos também o conjugado da não-metricidade, dado por

$$P^\alpha{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} L^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\left(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha\right) g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta^\alpha_{(\mu} Q_{\nu)}, \tag{8}$$

onde os dois traços independentes $Q_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\alpha\mu\nu}$ e $\tilde{Q}_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\mu\alpha\nu}$ da não-metricidade entram.

Definições

Introduzimos o escalar de não-metricidade como

$$Q = -Q_{\alpha\mu\nu}P^{\alpha\mu\nu}. \tag{9}$$

Perceba que que $P^{\alpha\mu\nu}$ satisfaz

$$P^{\alpha\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial Q_{\alpha\mu\nu}}. \tag{10}$$

Usamos então o escalar da não-metricidade para a ação

$$\mathcal{S} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}f(Q) + \mathcal{L}_M\right], \tag{11}$$

onde $\mathcal{L}_M$ é a lagrangiana de matéria.

Reparametrização

Como estamos trabalhando em um espaço plano e com um conexão sem torção, então podemos sair da conexão trivial para a atual através de uma mudança de coordenadas. A conexão pode ser parametrizada por

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\rho}} \partial_{\mu} \partial_{\beta} \xi^{\rho}. \tag{12}$$

$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x^{\mu})$ é uma relação inversível e $\partial x^{\alpha} / \partial \xi^{\rho}$ é o inverso do Jacobiano correspondente. Definimos então essas coordenadas de calibre coincidente e as quantidades calculadas sob esse calibre serão denotadas com um anel sobre elas $\mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0$.

Calibre coincidente

No calibre coincidente, o tensor de não-metricidade será dado por

$$\mathring{Q}_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \tag{13}$$

enquanto que em um calibre arbitrário temos

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\mu\nu} &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2\Gamma^\lambda{}_{\alpha(\mu} g_{\nu)\lambda} \\ &= \mathring{Q}_{\alpha\mu\nu} - 2\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\rho}\partial_\alpha \partial_{(\mu}\xi^\rho g_{\nu)\lambda}. \end{aligned} \tag{14}$$

Variando com relação a métrica

Variando a ação com relação a métrica temos as equações de campo dadas por

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}f_Q P^\alpha{}_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f$$
$$+f_Q\left(P_{\mu\alpha\beta}Q_\nu{}^{\alpha\beta}-2Q_{\alpha\beta\mu}P^{\alpha\beta}{}_\nu\right)=T_{\mu\nu}, \tag{15}$$

onde $f_Q=\partial f/\partial Q$. Levantando um dos índices chegamos em uma formulação mais compacta

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\nabla_\alpha\left(\sqrt{-g}f_Q P^{\alpha\mu}{}_\nu\right)+\frac{1}{2}\delta^\mu_\nu f+f_Q P^{\mu\alpha\beta}Q_{\nu\alpha\beta}=T^\mu{}_\nu\,. \tag{16}$$

Variando com relação a conexão

Notando que a variação da conexão com relação a ξ^α é equivalente a realizar um difeomorfismo de modo que

$$\delta_\xi \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} = -\mathcal{L}_\xi \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} = -\nabla_\mu \nabla_\beta \xi^\alpha, \tag{17}$$

onde usamos que a conexão é plana e livre de torção. Assim, na ausência de hipermomento, as equações do campo da conexão são dadas por

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \left(\sqrt{-g} f_Q P^{\mu\nu}{}_\alpha \right) = 0. \tag{18}$$

Das equações de campo da métrica e da conexão, pode-se verificar que $\mathcal{D}_\mu T^\mu{}_\nu = 0$, onde $\mathcal{D}_\mu$ é a derivada covariante, como deveria em virtude da invariância do difeomorfismo.

Difeomorfismo

Para mostrar a conservação de setor de matéria e nas identidades de Bianchi, vamos fazer um difeomorfismo dado por $x^\mu \to x^\mu + \zeta^\mu$, o escalar de não-metricidade muda com

$$\delta_\zeta Q = \frac{\partial Q}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} \delta_\zeta g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial Q}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\zeta g_{\mu\nu} + \frac{\partial Q}{\partial \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}} \delta_\zeta \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}. \tag{19}$$

O primeiro termo é dado por

$$\frac{\partial Q}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} \delta_\zeta g_{\mu\nu,\alpha} = 2P^{\alpha\mu\nu} \mathcal{L}_\zeta \mathring{Q}_{\alpha\mu\nu}, \tag{20}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\zeta \mathring{Q}_{\alpha\mu\nu} = \quad & \zeta^\rho \partial_\rho \partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\alpha \zeta^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + 2\partial_\alpha g_{\rho(\mu} \partial_{\nu)} \zeta^\rho \\ & + 2 g_{\rho(\mu} \partial_{\nu)} \partial_\alpha \zeta^\rho. \end{aligned} \tag{21}$$

Difeomorfismo

O último termo é dado por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}}\delta_\zeta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \frac{\partial Q}{\partial Q_{\alpha\beta\gamma}}\frac{\partial Q_{\alpha\beta\gamma}}{\partial \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}}\mathcal{L}_\zeta \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} \\
&= -2P^{\alpha\beta\gamma}\left(-2\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{(\beta}g_{\gamma)\lambda}\right)\left(-\nabla_\mu\nabla_\nu\zeta^\lambda\right) \\
&= -4P^{\alpha\beta\gamma}g_{\lambda(\beta}\nabla_{\gamma)}\nabla_\alpha\zeta^\lambda. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

É possível então mostrar que o escalar de não-metricidade varia sob um difeomorfismo com

$$
\delta_\zeta Q = \frac{\partial Q}{\partial Q_{\alpha\mu\nu}}\mathcal{L}_\zeta Q_{\alpha\mu\nu} + \frac{\partial Q}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_\zeta g_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_\zeta Q, \qquad (23)
$$

e então a ação é invariante sob um difeomorfismo.

Difeomorfismo

No entanto, quando fixamos o calibre coincidente, a ação não é mais invariante sob um difeomorfismo. Temos

$$\begin{aligned} \delta_\zeta \mathring{\mathcal{S}} = \quad & -2 \int d^4x \zeta^\lambda \Big[\sqrt{-g} \left(\partial_\alpha \partial_\gamma f_Q\right) \mathring{P}^{\alpha\gamma}{}_\lambda \\ & +2 \left(\partial_{(\alpha} f_Q\right) \left(\partial_{\gamma)} \sqrt{-g} \mathring{P}^{\alpha\gamma}{}_\lambda\right) \Big]. \end{aligned} \tag{24}$$

Tiramos a derivada total e usamos a identidade

$$\partial_\alpha \partial_\mu (\sqrt{-g} \mathring{P}^{\alpha\mu}{}_\nu) = 0. \tag{25}$$

Portanto, somente quando $f_{QQ} = 0$ a ação é invariante sob um difeomorfismo.

Background

Abordando a cosmologia a nível de background, ela não se difere das teorias $f(T)$. Considerando a métrica de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2, \tag{26}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. Fixando o calibre de coincidência, temos que o escalar de não metricidade se torna

$$Q = 6H^2, \tag{27}$$

onde $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Assumindo que a matéria é um fluido perfeito com tensor energia-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{28}$$

onde p e ρ são a pressão e a densidade de energia do fluido, respectivamente, e u_μ é a quadri-velocidade que obedece a normalização $u_\mu u^\mu = -1$.

Dinâmica

As equações cosmológicas dinâmicas serão

$$6f_Q H^2 - \frac{1}{2}f = \rho \tag{29}$$

$$\left(12H^2 f_{QQ} + f_Q\right)\dot{H} = -\frac{1}{2}(\rho + p). \tag{30}$$

As teorias $f(Q)$ têm a propriedade especial de manter uma *residual time-reparameterisation invariance*, e por isso os campos de matéria satisfazem a equação da continuidade

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \tag{31}$$

Classes

Há uma classe de teorias que nos dão uma evolução de *background* idêntica à RG. Essas classes são obtidas impondo

$$Qf_Q - \frac{1}{2}f = \frac{Q}{16\pi G}, \tag{32}$$

cuja solução é

$$f = \frac{1}{8\pi G}\left(Q + M\sqrt{Q}\right), \tag{33}$$

onde M alguma escala de massa. Chegamos em RG quando $M = 0$, porém existe uma grande classe de teorias que a evolução do *background* equivale à RG.

Classes

Por outro lado, a *Symmetric Teleparallel Equivalent of GR* (STEGR) com uma lei de potência, dada por

$$f = \frac{1}{8\pi G}\left[Q - 6\lambda M^2\left(\frac{Q}{6M^2}\right)^{\alpha}\right], \tag{34}$$

com α e λ sendo parâmetros adimensionais, dão várias soluções aplicáveis tanto ao Universo tardio quanto ao Universo primordial. Para esses modelos, as equações de Friedmann são modificadas para

$$H^2\left[1 + (1-2\alpha)\lambda\left(\frac{H^2}{M^2}\right)^{\alpha-1}\right] = \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{35}$$

Para $\alpha = 1/2$ nós voltamos para RG.

Exemplos

Exemplo 1: $8\pi G f(Q) = Q - \frac{1}{36}(Q/m)^2$.
Nesse caso, a equação de Friedmann se torna

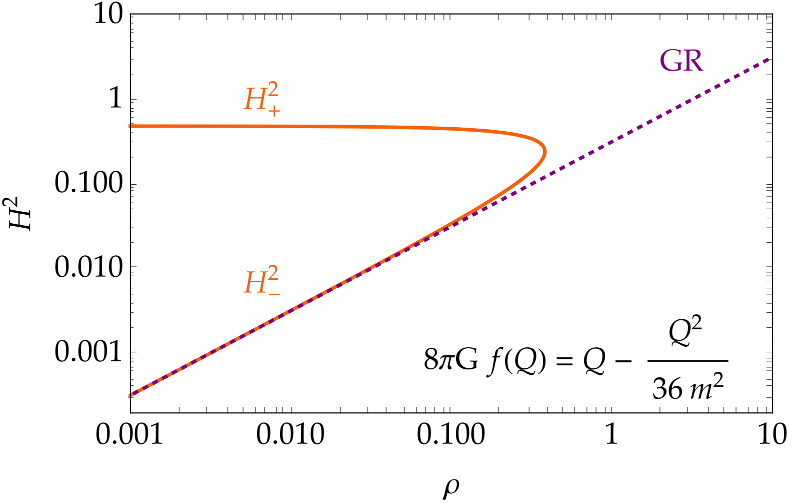
$$3H^2\left(1 - \frac{H^2}{2m^2}\right) = 8\pi G\rho, \tag{36}$$

que resolvido para H^2,

$$H_\pm^2 = m^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16\pi G\rho}{3m^2}}\right). \tag{37}$$

A característica mais notável desta cosmologia é a existência de uma densidade máxima permitida no universo dada por $8\pi G\rho_{\text{max}} = \frac{3}{2}m^2$, que é reforçada pela raiz quadrada.

Exemplos



10
1
0.100
0.010
0.001
H^2
0.001
0.010
0.100
1
10
ρ
GR
H_+^2
H_-^2
$8\pi G\, f(Q) = Q - \dfrac{Q^2}{36\, m^2}$

Exemplos

Exemplo 2: $8\pi G f(Q) = Q + M^4/Q$.
A equação de Friedmann se torna

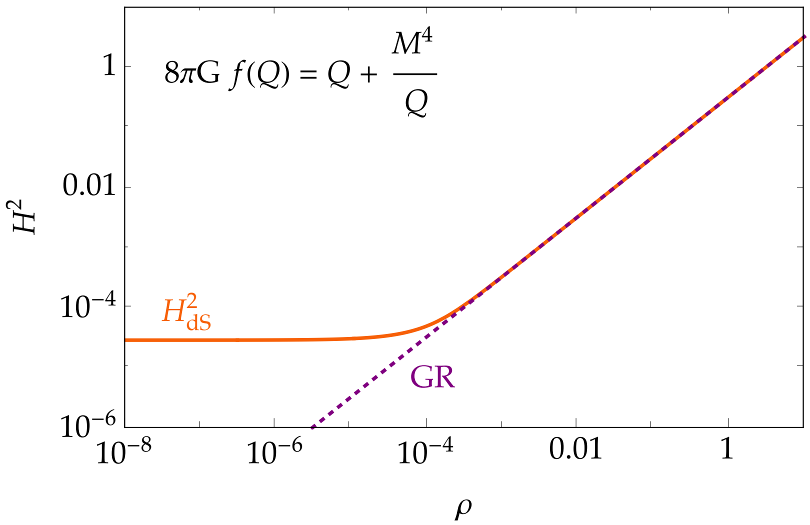
$$H^2\left(1 - \frac{M^4}{12H^4}\right) = 8\pi G\rho, \tag{38}$$

com soluções para H^2,

$$H_{\pm}^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{3M^4}{64\pi^2 G^2\rho^2}}\right). \tag{39}$$

A parte negativa não é física pois nos da $H_{-}^2 < 0$. A parte física retorna a equação de Friedmann quando $\rho >> M^2 M_{\mathrm{Pl}}^2$, equanto que para baixas densidades H^2 se aproxima da constante $H_{\mathrm{dS}}^2 = \frac{M^2}{2\sqrt{3}}$ correspondendo a uma solução de de Sitter assintótica.

Exemplos


$8\pi G\, f(Q) = Q + \frac{M^4}{Q}$
H^2
ρ
$H^2_{\rm dS}$
GR
1
0.01
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
0.01
1

Conclusão

- Vimos do que se trata a teoria de gravidade modificada baseada na não-metricidade, conhecida como STEGR.
- Modelos de não-metricidade não se diferenciam dos modelos de torção no nível de *background*.
- Diferente de modelos $f(T)$, não há problemas de *couplings* em STEGR em *background* de FLRW.
- É o modelo menos explorado, porém em comparação com modelos de torção, há diversas vantagens.

Referências

Jimenez, J. B., Heisenberg, L., & Koivisto, T. S. (2019).
The geometrical trinity of gravity.
1903.06830.

Jiménez, J. B., Heisenberg, L., & Koivisto, T. (2018).
Coincident general relativity.
Physical Review D, 98(4).

Jiménez, J. B., Heisenberg, L., Koivisto, T., & Pekar, S. (2020).
Cosmology in f(Q) geometry.
Physical Review D, 101(10).