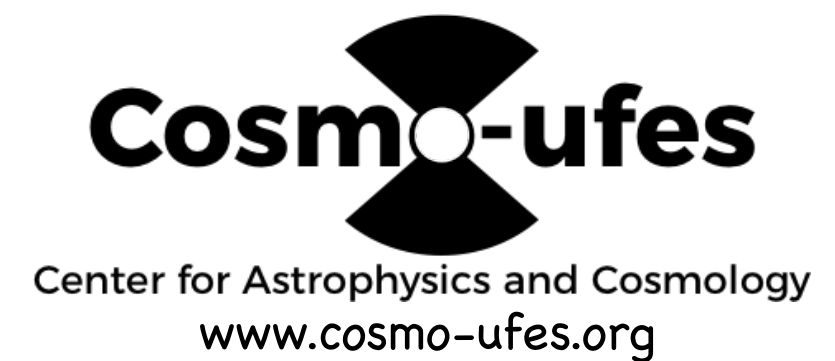


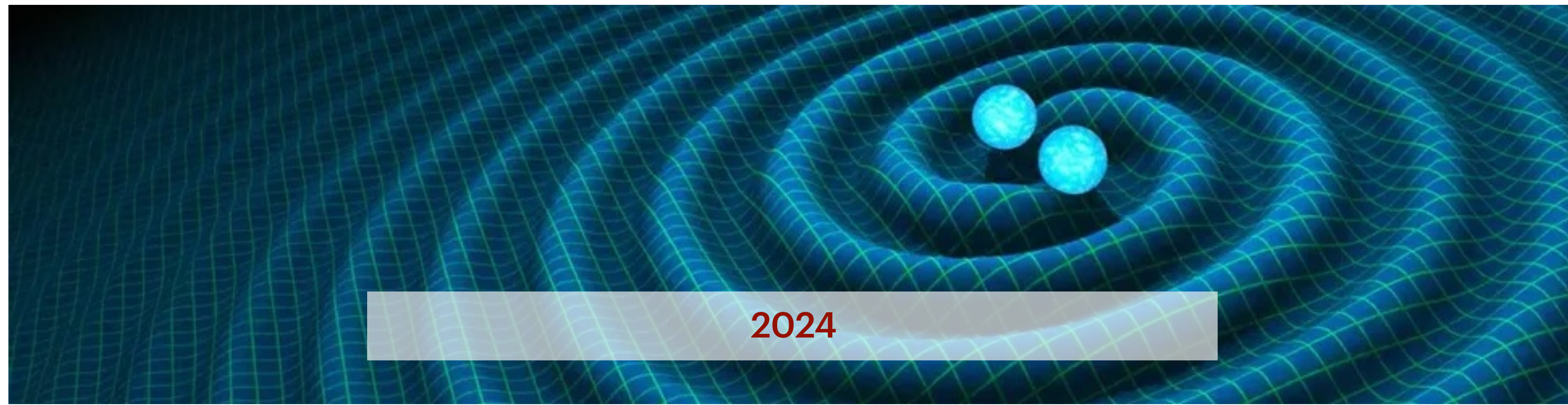
Relatividade geral linearizada



Davi C. Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, ES - Brazil



- Parte da disciplina Relatividade Geral -



2024

Perturbação em torno de Minkowski

- Consideraremos uma perturbação em torno de Minkowski.
- Consideraremos Minkowski (η_{ab}) e adicionamos uma perturbação γ_{ab} com a condição, em dado sistema de coordenadas, $|\eta_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}| = |\gamma_{\mu\nu}| \ll 1$.
- Esta definição de perturbação é explicitamente dependente do sistema de coordenadas. Depois trataremos da questão de transformação de coordenadas nesse contexto.
- Seja $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$
- **Exercício:** Verifique que $g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab} + O(\gamma^2)$, em que
 g^{ab} é a inversa de g_{ab}
 η^{ab} é a inversa de η_{ab}
 $\gamma^{ab} \equiv \eta^{ac}\gamma_{cd}\eta^{db}$
- No contexto de perturbações, é conveniente e padrão levantar e abaixar índices usando a métrica de fundo.

Símbolo de Christoffel linearizado

- Verifica-se que

$$\Gamma_{ab}^{(1)c} = \frac{1}{2} \eta^{cd} (\partial_a \gamma_{bd} + \partial_b \gamma_{ad} - \partial_d \gamma_{ab})$$

- **Exercícios:**

Considere Minkowski em coordenadas esféricas e verifique em detalhes a expressão para $\Gamma_{ab}^{(1)c}$.
Considere que a métrica de fundo é FRW sem curvatura espacial e encontre $\Gamma_{ab}^{(1)c}$.

Tensores de Ricci e Einstein linearizados

- Para o tensor de Ricci,

$${}^{(1)}R_{ab} = \partial_c {}^{(1)}\Gamma_{ab}^c - \partial_a {}^{(1)}\Gamma_{cb}^c = \partial^c \partial_{(b} \gamma_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma ,$$

em que $\gamma \equiv \gamma_a^a$.

- E obtém-se, para o tensor de Einstein,

$$\begin{aligned} {}^{(1)}G_{ab} &= {}^{(1)}R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} {}^{(1)}R \\ &= \partial^c \partial_{(b} \gamma_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^c \partial^d \gamma_{cd} - \partial^c \partial_c \gamma) \end{aligned}$$

Introduzindo $\bar{\gamma}_{ab}$

- Há uma simples, mas relevante, simplificação que é obtida introduzindo

$$\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$$

- O tensor de Einstein fica um pouco mais simples,

$$G_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} + \partial^c\partial_{(b}\bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd}$$

- **Exercícios:** i. Compare $\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}_a^a$ com γ .
ii. Verifique em detalhes todas as passagens até chegar na equação de $G_{ab}^{(1)}$.
- Para chegarmos na equação de Einstein, falta especificar $T_{ab}^{(0)}$ e $T_{ab}^{(1)}$ (veremos em breve).

Transformações de coordenadas

- Estando fixada a métrica de fundo, há transformações de γ_{ab} que não têm impacto geométrico/físico, pois podem ser interpretadas como transformações de coordenadas da métrica de fundo (Minkowski).
- Perante mudanças de coordenadas (ou difeomorfismos) geradas por um campo vetorial ξ^μ , o fundo se transforma como

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu.$$

- Assumindo que o fundo está fixo num dado sistema de coordenadas, um difeomorfismo não alteraria $\eta_{\mu\nu}$, mas:

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

Calibre na eletrodinâmica

- Para eletrodinâmica, $A'_a = A_a + \partial_a \Lambda$ é uma transformação de calibre, sendo Λ campo escalar arbitrário.
- Essa transformação é uma invariância das equações de campo, pois F_{ab} é invariante perante essa transformação.
- É fácil ver que o calibre de Lorenz (ou Lorentz, ver [10.1109/MAP.1991.5672647](https://arxiv.org/abs/10.1109/MAP.1991.5672647)), dado por $\partial^a A_a = 0$ é acessível, pois $\partial^a A'_a = \partial^a A_a + \square \Lambda$, logo, fixando $\square \Lambda = -\partial^a A_a$ encontra-se o calibre de Lorenz.
- Nota-se também que esse calibre deixa uma simetria residual. Embora dado um A^a arbitrário sempre exista Λ tal que $\partial^a A_a = 0$; essa solução para Λ não é única.

Calibre na eletrodinâmica

- Nota-se também que esse calibre deixa uma simetria residual. Embora dado um A^a arbitrário sempre exista Λ tal que $\partial^a A_a = 0$; essa solução para Λ não é única.
- A saber, considere $\Lambda' = \Lambda + \lambda$, em que $\square \lambda = 0$. Logo $\square \Lambda' = \square \Lambda$.
- Mesmo para condições de contorno fixadas no infinito espacial, ou em alguma outra superfície, $\square \lambda = 0$ possui soluções não triviais (ondas).
- O que é necessário para fixar Λ completamente?
- Para uma eq. de Laplace ou Poisson, basta providenciar as condições de contorno numa dada superfície fechada, mas isso não ocorre para a eq. de onda.
- Tal como num problema da corda vibrante, fornecer as condições de contorno nas extremidades não é suficiente para determinar sua posição em cada ponto e cada instante. Para obter uma solução específica, necessita-se também das condições iniciais, ou seja, especificar $\Lambda(t_0, x)$ e $\dot{\Lambda}(t_0, x)$

Calibre na eletrodinâmica

- No calibre de Lorenz, a condição $A_0 = 0$ só tem chance de fazer sentido se $J_0 = 0$, pois nesse calibre $\square A_b \propto J_b$.
- Assumiremos que $J_0 = 0$ a partir de agora.
- Para qualquer A_0 que satisfaça a equação de campo $\square A_0 = 0$, podemos usar a simetria de calibre residual para definir $A'_0 = A_0 + \dot{\lambda}$. Nota-se que para qualquer λ teremos $\square A'_0 = 0$.
- Como A_0 e $\dot{\lambda}$ satisfazem a mesma equação diferencial, existe λ tal que $A'_0 = 0$.
- A demonstração acima é suficiente para garantir a acessibilidade do calibre $\partial^i A_i = 0$ e $A_0 = 0$ (Calibre de radiação)
- Demonstra-se também que o calibre de radiação quebra (fixa) completamente a simetria de calibre no vácuo.

Calibre na eletrodinâmica

- Demonstra-se também que o calibre de radiação quebra (fixa) completamente a simetria de calibre no vácuo.
- Se um campo $f(x, t)$ satisfaz $\square f = 0$, a solução explícita de $f(x, t)$ pode ser obtida dando:
 - ▶ i) condições de contorno em dada superfície no espaço (problema análogo ao da unicidade das soluções da eq. de Laplace);
 - ▶ ii) condições iniciais para f tais que especifiquem f e \dot{f} em dado instante.
- Não lidamos explicitamente com as condições de contorno, mas estamos sempre assumindo que podem ser dadas. O procedimento de fixar λ que vimos fixa as condições iniciais de λ . A saber, num dado instante t_0 seja
 - ▶ $\dot{\lambda}(x, t_0) = -A_0(x, t_0)$. Logo $A'_0(x, t_0) = 0$. Consequentemente, devido ao calibre de Lorenz,
 - ▶ $\partial^i A'_i(x, t_0) = 0$ e $\partial^i \partial_i \lambda(x, t_0) = -\partial^i A_i(x, t_0) \implies \exists \lambda(x, t_0)$.
- Ou seja, o calibre de radiação fixa a solução de λ , logo fixa completamente a transformação de calibre.

Relatividade geral: Calibre transverso

- Sendo $\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma$, verifica-se que o calibre transverso (que é às vezes referido como de Lorenz/Lorentz) é acessível, $\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0$.
- A verificação da acessibilidade é direta. O objetivo é demonstrar que existe um campo vetorial ξ^a tal que $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$. Verifica-se que ξ^a precisa satisfazer uma eq. de onda não-homogênea, logo é possível. **Exercício:** Verificar $\bar{\gamma}'_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a - \eta_{ab} \partial^c \xi_c$.
- Nota-se que $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = \partial^a \bar{\gamma}_{ab} + \square \xi_b$, logo $\partial^a \bar{\gamma}'_{ab} = 0$ requer $\square \xi_b = -\partial^a \bar{\gamma}_{ab}$.
- Ressalta-se que o calibre transverso não fixa por completo a simetria de calibre, há uma simetria residual associada à parte homogênea da eq. diferencial que ξ^a deve satisfazer.

Relatividade geral: Calibre transverso

- No calibre transverso, as equações de Einstein linearizadas simplificam consideravelmente.
- De forma geral, vimos que, até primeira ordem em γ_{ab} ,

$$-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab} + \partial^c\partial_{(b}\bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\bar{\gamma}_{cd} = 8\pi G T_{ab}.$$

Logo

$$\square\bar{\gamma}_{ab} = -16\pi G T_{ab}.$$

- **Exercício:** Verificar que $\square\gamma_{ab} = -16\pi G \bar{T}_{ab}$.

Relatividade geral: Calibre transverso

- Comentário sobre $\partial^a \gamma_{ab} = 0$.

Nota-se que $\partial^a \gamma'_{ab} = \partial^a \gamma_{ab} + \square \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a$,
consequentemente a condição $\partial^a \gamma_{ab} = 0$ é possível desde que exista ξ_b que satisfaça

$$\square \xi_b + \partial_b \partial^a \xi_a = -\partial^a \gamma_{ab}$$

- **Questão:** É possível garantir a existência de ξ^a que satisfaça a equação acima?

Relatividade geral: Calibre TT

- **Exercício:** Mostar que a fixação adicional $\bar{\gamma} = 0$ é também acessível.
- Em particular, no calibre TT (“transverse and traceless”) temos $\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab}$.

Fluidos

- Começemos antes tentando entender um caso mais simples (dust)

$$T^{ab} = \rho U^a U^b$$

- Logo, em termos de componentes,

$$(T^{\mu\nu}) = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \begin{pmatrix} \rho & J^i \\ J^i & \rho v^i v^j \end{pmatrix},$$

com $J^i = \rho v^i$ e $v^i = \frac{d\tau}{dt} U^i$

- O sistema comóvel de coordenadas é definido por $U^i = 0$.

Questão: Para um fluido, por que sempre podemos escolher um sistema de coordenadas comóvel?

- Logo, nesse sistema, $T^{00} = U^0 U^0 \rho$ e as demais componentes são nulas. Esse é o caso de poeira. **Exercício:** Via equações de Einstein, verificar que $g_{0i} = 0$ neste sistema de coordenadas, mas não no anterior.

Fluidos

- Para anular a velocidade espacial é necessário que em cada ponto do fluido haja apenas um vetor de velocidade. Isto é, v^i precisa ser um campo vetorial.
- Imagine que o fluido é composto por diversas partículas microscópicas. Se essas partículas se movem de forma coerente (um fluido frio), uma pequena região macroscópica (uma célula do fluido) terá uma única velocidade bem definida, que é a mesma velocidade do conjunto de partículas que a célula contém. Ou seja, $v_{\text{fluido}}^i(x) = \langle v^i \rangle(x)$.
- Se as partículas não se movem coerentemente, é possível estar em repouso com respeito ao fluido $v_{\text{fluido}}^i = 0$, mas com $\langle v^i v^j \rangle \neq 0$.
- A quantidade $\sigma^i = \sqrt{\langle v^i v^i \rangle - \langle v^i \rangle^2}$ é a componente i da **dispersão de velocidades**. Em coordenadas comóveis, $\sigma^i = \sqrt{\langle v^i v^i \rangle}$.
- A quantidade $\langle v^i v^j \rangle$ é o **tensor de dispersão de velocidades**, ou **tensor de tensões de Reynolds**.

Fluidos

- **Exercício:** Considere um sistema de grande número de partículas cujo tensor energia momento seja dado por $T^{ab} = \rho \langle U^a U^b \rangle$, em que ρ é a densidade de massa das partículas e U^a é a quadrivelocidade de uma partícula (a média é tomada com respeito a todas as partículas numa dada célula do fluido efetivo. Considere que o fluido é isotrópico, logo v^i e v^j não estão correlacionados e $\langle v^i v^j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Considere também um sistema comóvel e mostre, usando a eq. de Euler, que a dispersão de velocidades desempenha a função da pressão. Dica: a eq. de Euler de fluidos é deduzida a partir de $\nabla_\mu T^{\mu i} = 0$.
- **Exercício.** Verifique diretamente que a conservação do tensor energia momento geral de dust implica na relação vetorial usual da eq. da continuidade, com $\nabla_\mu J^\mu = 0$. Defina J^μ .

Fluidos

- Uma outra expressão para as componentes de T^{ab} é dada por uma decomposição desse tensor em direções paralelas ou perpendiculares a U^a .
- Operador de projeção na direção de U^a :

$$P_{\parallel b}^a = -U^a U_b$$

- Operador de projeção em direção perpendicular a U^a :

$$P_{\perp b}^a = \delta_b^a + U^a U_b$$

Exercício: verificar que os tensores acima são operadores de projeção em espaços ortogonais entre si.

Fluidos

- Podemos localmente definir um sistema de coordenadas cartesiano.
- Seja a direção temporal t^a definida localmente na mesma direção de U^a , mas num referencial e sistema de coordenadas que é localmente Minkowski em coordenadas canônicas, assim

$$t^\mu t_\nu = t^\mu t^\nu \eta_{\mu\nu} = -1, \quad (t^\mu) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \text{ e } (t_\mu) = (-1 \ 0 \ 0 \ 0).$$

- Como $U_\mu U_\nu T^{\mu\nu} = t_\mu t_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{00}$,

$$\tilde{T}^{00} = U_a U_b T^{ab} = \rho.$$

- Semelhantemente, estendendo a abordagem acima, encontra-se, para fluido perfeito,
 $-\tilde{T}^{0i} = U_\mu P_{\perp\nu}^i T^{\mu\nu} = U_\mu (\delta_\nu^i + U^i U_\nu) [\rho U^\mu U^\nu + p(g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu)] = 0$
 $\tilde{T}^{ij} = P_{\perp\mu}^i P_{\perp\nu}^j T^{\mu\nu} = p\delta^{ij}$

Fluidos

- O tensor energia momento de um fluido perfeito é

$$T^{ab} = \rho U^a U^b + p(U^a U^b + g^{ab})$$

- É a mesma expressão de relatividade especial, com $\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}$, em que ρ é densidade de energia e p é pressão.
- De forma mais geral,

$$T^{ab} = \rho U^a U^b + p(g^{ab} + U^a U^b) + \sigma^{ab} + q^a U^b + q^b U^a ,$$

- ▶ q^a é o vetor de fluxo de calor (ou densidade de momento) e satisfaz $q_a U^a = 0$
- ▶ σ_{ab} é o tensor de tensão anisotrópica e satisfaz $\sigma^{ab} = \sigma^{ba}$, $U^a \sigma_{ab} = 0$ e $g^{ab} \sigma_{ab} = \sigma = 0$.

Fluidos

- Podemos decompor esse tensor da seguinte forma num referencial localmente inercial,

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & q^1 & q^2 & q^3 \\ q^1 & P^1 & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ q^2 & \sigma^{21} & P^2 & \sigma^{23} \\ q^3 & \sigma^{31} & \sigma^{32} & P^3 \end{pmatrix},$$

com $P^i = p + \sigma^{ii}$.

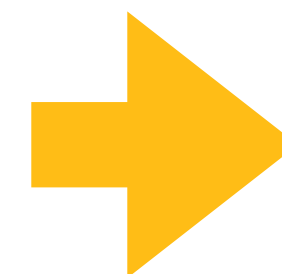
Fluidos e o Limite Newtoniano

-
- Pré-requisitos para o limite Newtoniano em dado sistema de coordenadas:
 - ▶ 1. Campo fraco (!!)
 - ▶ 2. Fontes lentas (!!)
 - ▶ 3. Métrica estática ou quase-estática
 - ▶ 4. Fluido com pressão e tensões pequenas
 - ▶ 5. Fluido com energia interna pequena

Fluidos e o Limite Newtoniano

- Pré-requisitos para o limite Newtoniano em dado sistema de coordenadas:

- ▶ 1. Campo fraco (!!)
- ▶ 2. Fontes lentas (!!)
- ▶ 3. Métrica estática ou quase-estática
- ▶ 4. Fluido com pressão e tensões pequenas
- ▶ 5. Fluido com energia interna pequena



- ▶ $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ (RG linearizada)
- ▶ $|v^i| \ll 1 \implies |T^{0i}| \ll |T^{00}|$
- ▶ $|\dot{\gamma}_{ab}| \ll |\partial_i \gamma_{ab}|$
- ▶ $|T^{ij}| \ll |T^{00}|$ ($|p| \ll |\rho|$)
- ▶ $\rho = \rho_m + \mu$, com $|\mu| \ll |\rho_m|$

Fluidos e o Limite Newtoniano

- Desenvolvimento feito em sala, falta digitar aqui...

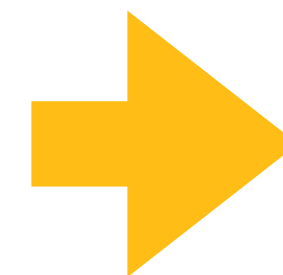
Gravito-electromagnetismo

- Há uma **semelhança** mais forte entre as **eqs. de Maxwell e relatividade geral** se considerarmos todos os pré-requisitos para o limite Newtoniano, mas consideramos que o fluido pode ter velocidade relativística e a métrica não precisa ser quase estática.
- - ▶ 1. Campo fraco (!!)
 - ▶ 2. ~~Fontes lentas (!!)~~
 - ▶ 3. ~~Métrica estática ou quase-estática~~
 - ▶ 4. Fluido com pressão e tensões pequenas
 - ▶ 5. Fluido com energia interna pequena

Gravito-electromagnetismo

- Há uma **semelhança** mais forte entre as **eqs. de Maxwell e relatividade geral** se considerarmos todos os pré-requisitos para o limite Newtoniano, mas consideramos que o fluido pode ter velocidade relativística e a métrica não precisa ser quase estática.

- ▶ 1. Campo fraco (!!)
- ▶ 2. ~~Fontes lentas (!!)~~
- ▶ 3. ~~Métrica estática ou quase-estática~~
- ▶ 4. Fluido com pressão e tensões pequenas
- ▶ 5. Fluido com energia interna pequena



- ▶ $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ (RG linearizada)
- ▶ $|v^i| \ll 1 \implies |T^{0i}| \ll |T^{00}|$
- ▶ $|\dot{\gamma}_{ab}| \ll |\partial_i \gamma_{ab}|$
- ▶ $|T^{ij}| \ll |T^{00}|$ ($|p| \ll |\rho|$)
- ▶ $\rho = \rho_m + \mu$, com $|\mu| \ll |\rho_m|$

Gravito-electromagnetismo

- Há uma **semelhança** mais forte entre as **eqs. de Maxwell e relatividade geral** se considerarmos todos os pré-requisitos para o limite Newtoniano, mas consideramos que o fluido pode ter velocidade relativística e a métrica não precisa ser quase estática.

-

Neste caso, num referencial localmente inercial, $T^{ab} \approx \rho t^a t^b$.

-

Seja $J_b \equiv -T_{ab}t^a \approx \rho t_b$, logo, até primeira ordem,

$$\square \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab} \implies t^a \square \bar{\gamma}_{ab} = 16\pi J_b \implies \square \bar{\gamma}_{0\mu} = 16\pi J_\mu$$

-

Gravito-electromagnetismo

- Introduzindo $A_\mu \equiv -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{0\mu}$,

$$\square A^\mu = -4\pi J^\mu$$

- E, a partir da equação da geodésica,

$$\vec{a} = -\vec{E} - 4\vec{v} \times \vec{B}$$

- Efeitos de “frame dragging” ou Lense-Thirring podem ser calculados a partir da formulação eletromagnética da gravitação linearizada. Esses efeitos foram testados em particular pelo [Gravity Probe B](#). Há resultados mais recentes e mais precisos...
- Por fim, atenção à não linearidade de RG mesmo no contexto da chamada RG linearizada! A equação da geodésica nesse contexto é uma informação extra, pois a dedução da eq. da geodésica vem de $\nabla_a T^{ab} = 0$, que difere de linha reta somente na segunda ordem.