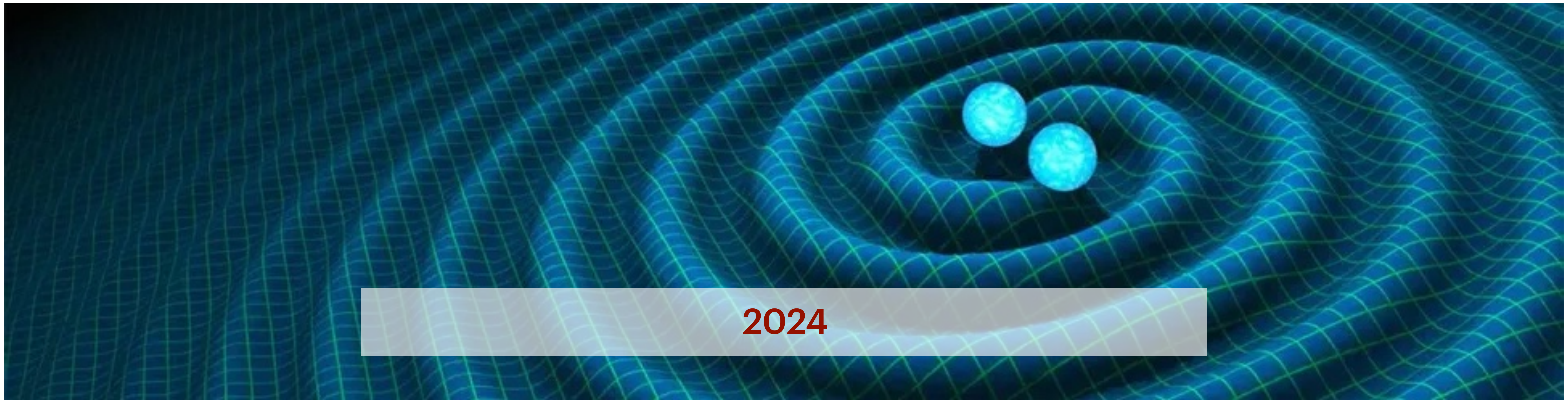
Difeomorfismos, derivada de Lie e conservação de energia e momento

Universidade Federal do Espírito Santo

Davi C. Rodrigues
Universidade Federal do Espírito Santo
Vitória, ES - Brazil

Cosmo-ufes
Center for Astrophysics and Cosmology
www.cosmo-ufes.org

- Parte da disciplina Relatividade Geral -

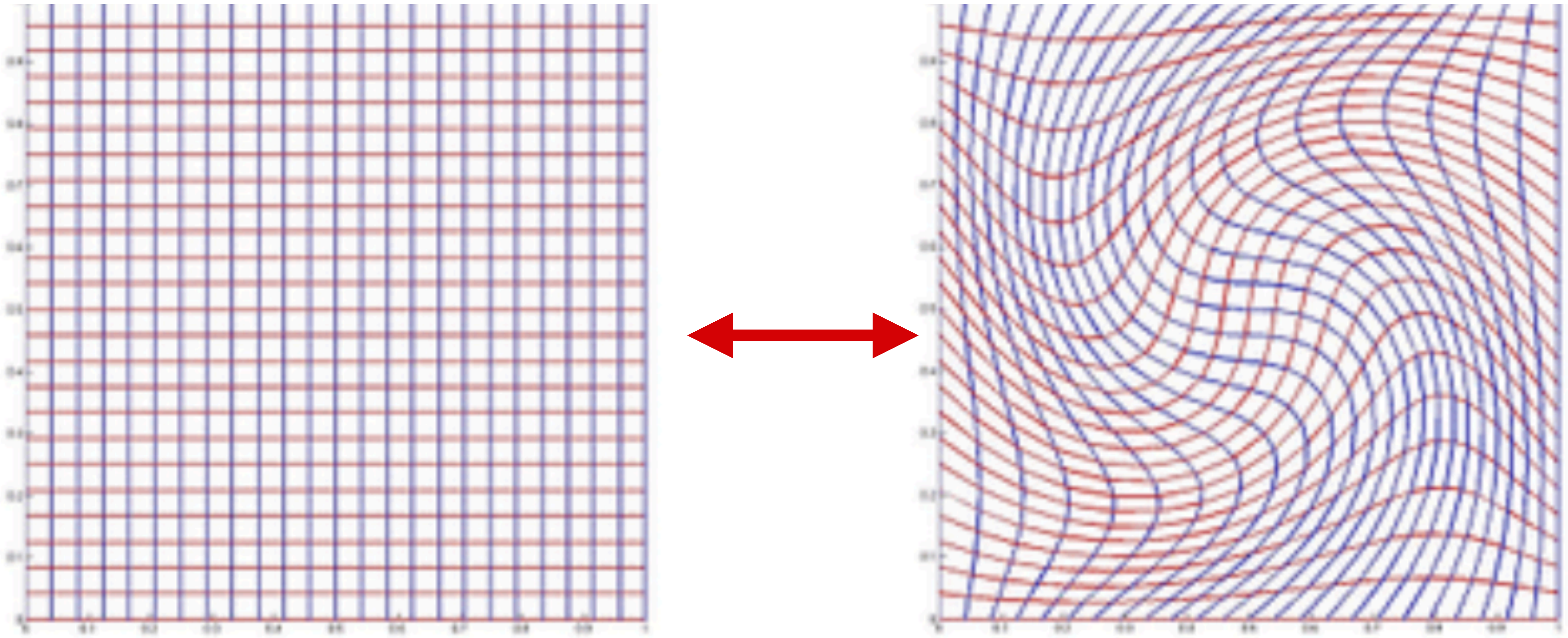


Difeomorfismo

- **Definição:**

  Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e seja $\phi : M \rightarrow N$ um mapa bijetivo e diferenciável. Então ϕ é um *difeomorfismo*.

  Em outras palavras, difeomorfismo é um isomorfismo entre variedades diferenciáveis.



- Acima uma visualização da atuação de um difeomorfismo. Duas interpretações:
  - Difeomorfismo ativo: trata-se de uma deformação suave da variedade em si.
  - Difeomorfismo passivo: visualize a deformação acima como uma mudança do sistema de coordenadas, que é capaz de descrever exatamente a mesma variedade original.

Difeomorfismo

- Um exemplo concreto para variedades bidimensinais:

  Em $\mathbb{E}^3$, considere uma variedade M dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e com $z \neq 1$. Ou seja, uma esfera de raio 1, a menos de um ponto.

  A variedade M pode ser mapeada numa variedade N de coordenadas (X, Y) dadas por:

  $$(X, Y) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

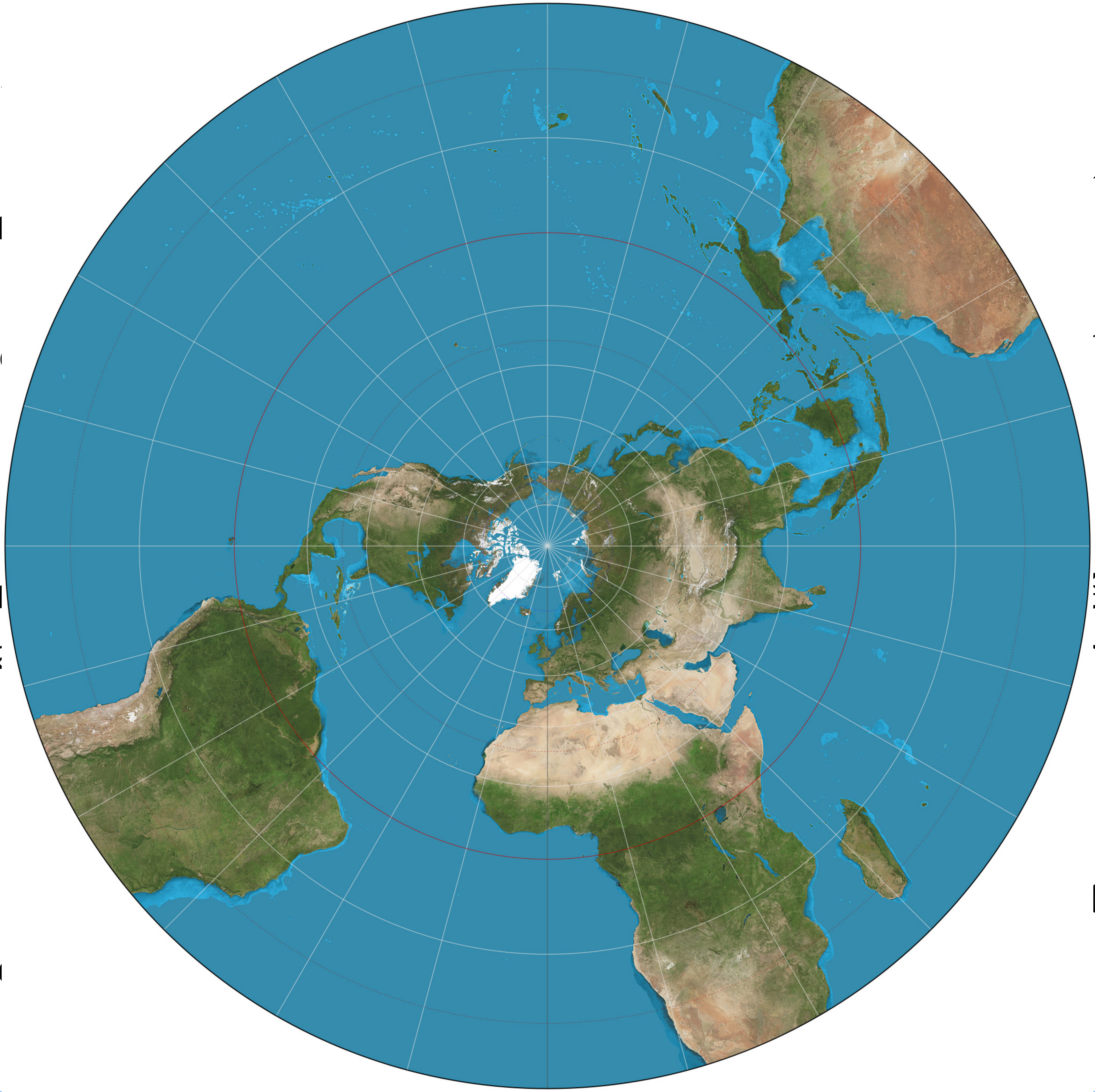
  Não é difícil notar que o mapa acima é inversível e diferenciável, logo é um difeomorfismo. Essa projeção da esfera, a menos de um ponto, num plano é chamada de *projeção estereográfica*.

- A imagem a seguir mostra um mapa $2D$ da Terra numa projeção estereográfica em que $z = 1$ corresponde ao pólo sul.

- Um exemplo conc

  Em $\mathbb{E}^3$, considere … $z \neq 1$. Ou seja, uma esfera de raio 1, a …

  A variedade M po… $, Y)$ dadas por:



  Não é difícil nota… é um difeomorfismo. Essa projeção d… hamada de *projeção estereográfica*.

- A imagem a segu… tereográfica em que $z = 1$ correspond…

Difeomorfismo

- Como um difeomorfismo associa uma variedade diferenciável a outra de forma suave, e como é uma transformação que tem inversa, diz-se que ambas as variedades são equivalentes (no contexto de geometria diferencial).

- Uma deformação infinitesimal de uma variedade, descrita por coordenadas x^μ, pode ser expressa por
$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \,.$$
Enfatizo que essa transformação pode igualmente ser vista como uma transformação de coordenadas ou uma deformação da variedade em si. No último caso, começa-se em uma variedade M e chega-se numa N. Mas como elas são conectadas por um difeomorfismo, é correto dizer, mesmo nesse caso que N é equivalente à M ($N \sim M$) — Semelhantemente, um *doughnut* é equivalente a uma caneca (é um exemplo famoso).

- https://www.gmanetwork.com/news/scitech/science/583886/when-is-a-coffee-mug-a-donut-topology-explains-it/story/

Difeomorfismo

- Cor ve, e
com são
equ

- Uma e ser
exp

Enf o de
coo uma
vari no, é
cor , um
doug

- http nut-
topology-explains-it/story/

Difeomorfismo infinitesimal

- Sendo x^μ e x'^μ coordenadas respectivamente dos pontos p e p', se eles forem suficientemente próximos, a diferença entre esses pontos define um vetor. Reciprocamente, a partir de um campo vetorial ξ^a(x) pode-se definir, ponto a ponto na variedade, translações infinitesimais.

- Denotando o difeomorfismo por $\Phi : M \to N \sim M$, escrevemos

$$\Phi^\mu(x) = x^\mu - \epsilon \xi^\mu(x) = x'^\mu,$$

em que ϵ é o parâmetro infinitesimal que será considerado só até a primeira ordem.

-> Uma diferença infinitesimal de coordenadas δx^μ, numa mesma variedade, define um vetor.

- Considerando a transformação em M induzida pelo campo vetorial ξ^a, podemos nos perguntar como um campo escalar $\phi : M \to \mathbb{R}$ se transforma.

Difeomorfismo infinitesimal

- Ou seja, desejamos calcular
  $\delta_\xi \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x).$

- Sabemos que
  $\phi'(x') = \phi(x) \qquad \text{e} \qquad \phi'(x') \approx \phi'(x) - \epsilon \xi^a \partial_a \phi(x).$

  Logo
  $\delta_\xi \phi(x) = \epsilon \xi^a \partial_a \phi(x).$

Difeomorfismo infinitesimal

- Analogamente,
  $\delta_\xi A^\mu(x) = A'^\mu(x) - A^\mu(x)$

- Sabemos que

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) = A^\mu(x) - \epsilon A^\nu(x)\partial_\nu \xi^\mu(x) \qquad \text{e} \qquad A'^\mu(x') \approx A'^\mu(x) - \epsilon \xi^\nu(x)\partial_\nu A^\mu(x)$$

- Logo
  $\delta_\xi A^\mu = \epsilon \xi^\nu \partial_\nu A^\mu - \epsilon A^\nu \partial_\nu \xi^\mu = \epsilon \xi^\nu \nabla_\nu A^\mu - \epsilon A^\nu \nabla_\nu \xi^\mu.$

- **Exercício:** Mostre a última igualdade com derivadas covariantes.

Difeomorfismo infinitesimal

- Para um tensor de rank-2 covariante,

  $$\delta_\xi B_{\mu\nu}(x) = B'_{\mu\nu}(x) - B_{\mu\nu}(x)$$

  vê-se que

  $$\delta_\xi B_{\mu\nu} = \epsilon \left(\xi^\lambda \partial_\lambda B_{\mu\nu} + B_{\lambda\nu} \partial_\mu \xi^\lambda + B_{\mu\lambda} \partial_\nu \xi^\lambda \right) = \epsilon \left(\xi^\lambda \nabla_\lambda B_{\mu\nu} + B_{\lambda\nu} \nabla_\mu \xi^\lambda + B_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda \right).$$

- **Exercício:** Mostre a última igualdade com derivadas covariantes.
- Logo, particularizando para a métrica:

$$\boxed{\delta_\xi g_{\mu\nu} = \epsilon \nabla_\mu \xi_\nu + \epsilon \nabla_\nu \xi_\mu}$$

Derivada de Lie

- Nossas expressões para os difeomorfismos $\delta_\xi T$ foram construídas a partir de expressões que dependem do sistema de coordenadas, mas chegamos em resultados independentes do sistema de coordenadas.
- É de se esperar que haja uma descrição mais geométrica das variações infinitesimais de interesse. Conforme veremos, as grandezas $\delta_\xi T$ são essencialmente ***derivadas de Lie.***
- ***[Continuar vendo em especial livro do Carroll e/ou Lee - introduction to smooth manyfolds]***