Probabilidade

Seminário I

Davi Barreira, Guilherme Macieira, Maria Gontijo

FGV - Escola de Matemática Aplicada

Modelo Probabilístico

Um Modelo Probabilístico, ou Espaço de Probabilidade, é definido pela tríplice (Ω,$\mathcal{F}$, P).

- Ω é o espaço amostral
- $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω
- P é uma função de probabilidade em $\mathcal{F}$

Definição 1 - Espaço Amostral (Ω)

Conjunto não-vazio de todos os resultados possíveis de um experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado de *evento*. Se $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ será chamado de *evento elementar*.

Exemplos:

- $\Omega = \{H, T\}$ - Finito
- $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ - Enumerável
- $\Omega = [0, 1]$ - Não enumerável

Antes de definirmos o que é $\mathcal{F}$, precisamos definir uma álgebra e uma σ-álgebra.

Definição 2 - Álgebra

Seja Ω um conjunto não-vazio. A classe $\mathcal{F}_o$ de subconjuntos de Ω é chamada de álgebra caso satisfaça os seguintes axiomas:

- Axioma 1. $\Omega \in \mathcal{F}_o$
- Axioma 2. Se $A \in \mathcal{F}_o$, então $A^c \in \mathcal{F}_o$
- Axioma 3. Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}_o$, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}_o$

Se estendermos o Axioma 3 para uniões enumeráveis:

- Axioma 3'. Se $A_n \in \mathcal{F}$ para $n = 1, 2, 3...$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_o$

Definição 3 - σ-Álgebra

Seja Ω um conjunto não-vazio. A classe $\mathcal{F}_o$ de subconjuntos de Ω é chamada de σ-álgebra caso satisfaça os Axiomas 1, 2 e 3'.

Modelo Probabilístico

A partir da definição de σ-álgebra valem as seguintes propriedades:

- P1. $\varnothing \in \mathcal{F}$

  Prova: $\Omega \in \mathcal{F} \therefore \Omega^c = \varnothing \in \mathcal{F}$

- P2. Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

  Prova: $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

$\sigma(A) \cap \sigma(B)$ é uma σ-álgebra? E $\sigma(A) \cup \sigma(B)$?

σ-Álgebra de Borel

Para um espaço amostral (Ω) finito ou enumerável, $\mathcal{F}$ será (normalmente) o conjunto das partes de Ω.

Quando o espaço amostral não é enumerável, o conjunto das partes se torna problemático, assim, utiliza-se a chamada σ-álgebra de Borel ($\mathcal{B}$).

A σ-álgebra de Borel é a menor σ-álgebra que contém todo intervalo do tipo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 4 - Função de Probabilidade

Seja um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, onde Ω é o espaço amostral e $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Uma função P é chamada de **medida de probabilidade** se satisfaz os seguintes axiomas:

- Axioma 1. $\mathrm{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
- Axioma 2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$
- Axioma 3. (*Aditividade finita*) Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ são disjuntos ($A_i \cap A_j = \varnothing$ se $i \neq j$), então $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$
- Axioma 3'. (σ-aditividade) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ são disjuntos, então $\mathrm{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$

Axioma 3' $\implies$ Axioma 3

Continuidade de probabilidade no vazio

Dados os Axiomas 1, 2 e 3, o Axioma 3' é equivalente ao seguinte axioma:

- Axioma 4. ("Continuidade no vazio") Se a sequência $(A_n)_{n\geq 1}$ decresce para o vazio, onde $A_n \in \mathcal{F}\ \forall n$, então $\mathrm{P}(A_n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Note que $(A_n)_{n\geq 1}$ decresce para o vazio ($A_n \downarrow \varnothing$) significa que $A_n \supset A_{n+1}\ \forall n$ e $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \varnothing$.

Provando a equivalência da *continuidade no vazio*

Dados os Axiomas 1, 2 e 3, o Axioma 3' $\iff$ Axioma 4

- (A3' $\implies$ A4). Suponha que a σ-aditividade é válida. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tal que $A_n \downarrow \varnothing$. Queremos provar que $\mathrm{P}(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

- (A4 $\implies$ A3'). Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ disjuntos ($\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$). Queremos provar que $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

Propriedades de Probabilidade

A partir dos Axiomas de probabilidade, as seguintes propriedades podem ser demonstradas:

- $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- $1 \leq \mathrm{P}(A) \geq 0$
- $A_1 \subset A_2 \implies \mathrm{P}(A_1) \leq \mathrm{P}(A_2)$
- $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$
- (*Continuidade de probabilidade*). Se $A_n \downarrow A$, então $\mathrm{P}(A_n) \downarrow \mathrm{P}(A)$. Se $A_n \uparrow A$, então $\mathrm{P}(A_n) \uparrow \mathrm{P}(A)$

Teorema da Extensão de Carathéodory

Seja $\mathcal{F}_o$ uma álgebra dos subconjuntos do espaço amostral Ω, de forma que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_o)$ seja a σ-álgebra gerada por essa álgebra. Suponha que $\mathrm{P}_o : \mathcal{F}_o \to [0, 1]$, satisfazendo $\mathrm{P}_o = 1$ e σ-aditividade em $\mathcal{F}_o$.

Assim, P_o pode ser extendido de maneira única para uma medida de probabilida P em $(\Omega, \mathcal{F})$, de forma que $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}_o(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}_o$.

Definição 5 - Medida

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- Axioma 1. $\mu(\varnothing) = 0$
- Axioma 2. (σ-aditividade) Se $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ são disjuntos, então $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

A medida de probabilidade é uma medida P com a propriedade adicional que $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Medida de Lebesgue

Construindo a medida de Lebesgue em $[0, 1]$

Iremos construir a medida uniforme de probablidade no intervalo $[0, 1]$, também conhecida como medida de **Lebesgue**.

Em uma medida de Lebesgue, temos que:

- Para $[a, b] \subset [0, 1]$, $\quad \mu([a, b]) = b - a$

Assim, toda medida representa o comprimento do intervalo.

Por questão de conveniência, iniciaremos pelo espaço amostral $\Omega = (0, 1]$, para depois estender para $[0, 1]$.

Medida de Lebesgue

Passos para construção da probabilidade uniforme:

1. Partir de uma classe $\mathcal{F}_0$ contida em $\Omega = (0, 1]$;
2. Provar que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_0$ é a σ-álgebra de Borel ($\mathcal{B}$);
3. Provar que $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra;
4. Aplicar o Teorema de Carathéodory.

Medida de Lebesgue

1. Definir a classe $\mathcal{F}_o$ contida em $(0, 1]$
   - $\varnothing \in \mathcal{F}_o$;
   - Se $A \in \mathcal{F}_o$, então:

$$A = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup ... \cup (a_n, b_n]$$

   Onde $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq ... \leq a_n < b_n \leq 1$, e $n \in \mathbb{N}$

2. Provar que $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$

Seja $\mathcal{C}$ a classe de todos os intervalos $[a, b]$ contidos em $(0, 1]$.

Sabemos que a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é a σ-álgebra de Borel ($\mathcal{B}$).

Medida de Lebesgue

3. Provar que:
    - $\mathcal{F}_0$ é uma álgebra;
    - $\mathcal{F}_0$ não é uma σ-álgebra.

4. Aplicar o Teorema de Caratheódory

Para todo $A \in \mathcal{F}_o$ não-vazio, temos:

$$A = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup ... \cup (a_n, b_n]$$

Definimos uma função que corresponde ao comprimento total:

$$\mathrm{P}_o = (b_1 - a_1) + ... + (b_n - a_n)$$

Ao aplicar o Teorema de Carathéodory, concluímos que existe uma função de probabilidade P, chamada de Lebesgue ou uniforme, definida em $\mathcal{B}$ que é igual a P_o em $\mathcal{F}_o$

Medida de Lebesgue

Construindo a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$

Considere agora que $\Omega = \mathbb{R}$. Definimos um σ-álgebra dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ do seguinte modo:

- Para um n qualquer, definimos a σ-álgebra de Borel de $(n, n+1]$ como a σ-álgebra gerada pelos conjuntos da forma $[a, b] \subset (n, n+1]$. Assim, A é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}$ se $A \cap (n, n+1]$ é um subconjunto de Borel de $(n, n+1]$, para todo n.

Seja P_n uma medida uniforme em $(n, n+1]$. Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, podemos decompor A em uma quantidade contável de pedaços e calcular o ”comprimento” $\mu(A)$ usando:

$$\mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}_n(A \cap (n, n+1])$$