A Pot-Pourri of Probability & Optimal Transport

Davi Sales Barreira

September 7, 2020

Contents

Abstract

En este documento se explican qué son las matrices, los distintos tipos que hay, algunas operaciones que se hacen con ellas con ellas (y sus respectivas propiedades), además de enseñar cómo realizar estas operaciones en programación. Incluye el concepto de relación binaria, y se explica cómo se pueden representar éstas (si son homogéneas) mediante grafos. y los distintos tipos de éstos últimos. Se recalca la "matriz jacobiana", explicando su función escalar y vectorial

1 Definiciones

En matemáticas, una matriz es todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma **rectangular**, formando filas y columnas. Una matriz se representa por medio de una letra mayúscula(A, B. ...).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Cada uno de los números de que consta la matriz se denomina **elemento**. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la fila y la columna a la que pertenece. Para ello se usa un doble subíndice donde el primero indica la fila y el segundo la columna a la que pertenece.

  Una forma simplificada de representar una matriz es $A := ((a_{ij}))$

- El número de filas y columnas de una matriz se denomina **dimensión de una matriz**. A una matriz con n filas y m columnas se le denomina matriz n-por-m (escrito $n \times m$) donde n, m $\in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Si la matriz tiene el mismo número de filas que de columnas, y es n, se dice que es de **orden** n.

- Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales.

- El conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$ se representa como $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K}$ es el campo al cual pertenecen las entradas. El tamaño de una matriz siempre se da con el número de filas primero y el número de columnas después.

2 Tipos de Matrices

Matriz fila: Una matriz fila está constituida por una sola fila.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

Matriz columna: La matriz columna tiene una sola columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matriz rectangular: La matriz rectangular tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su dimensión $n \times m$. (Ver expresión (1)).

Matriz traspuesta: Dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas y se denota por A^t.

Si A = $((a_{ij}))$, entonces $A^t = ((a_{ji}))$

Cumplen las siguiente propiedades:

- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha \cdot)^t = \alpha \cdot A^t$
- $(A \times B)^t = B^t \times A^t$.

Las operaciones con matrices se definen en el apartado 3.

Matriz nula: En una matriz nula todos los elementos son ceros. $A = ((a_{ij})) = ((0))$

Matriz cuadrada: La matriz cuadrada tiene el mismo número de filas que de columnas.

- Los elementos de la forma $((a_{ii}))$ constituyen **la diagonal principal**.
- La **diagonal secundaria** la forman los elementos con $i + j = n + 1$, siendo n el orden de la matriz.
- Existen los siguientes tipos de matrices cuadradas[1]

  Matriz triangular superior: En una matriz triangular superior los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.

  $$\mathbf{A=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

  Matriz triangular inferior: En una matriz triangular inferior los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.

  $$\mathbf{A=} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

[1] Las operaciones con matrices se definen en el apartado 3.

Matriz diagonal: En una matriz diagonal todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son nulos.

$$\mathbf{A=}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Una matriz escalar es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

Matriz identidad o unidad: Una matriz identidad es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

Matriz regular: Una matriz regular es una matriz cuadrada que tiene inversa.

Matriz singular: Una matriz singular no tiene matriz inversa.

Matriz indempotente: Una matriz, A, es indempotente si: $A^2 = A$.

Matriz involutiva: Una matriz, A, es involutiva si: $A^2 = I$.

Matriz simétrica: Una matriz simétrica es una matriz cuadrada que verifica: $A = A^t$. *Matriz antisimétrica o hemisimétrica:* Una matriz antisimétrica o hermisimétrica es una matriz cuadrada que verifica $A = -A^t$.

Matriz ortogonal: Una matriz es ortogonal si verifica que: $A \times A^t = I$

3 Operaciones con Matrices

Las operaciones que se pueden hacer con matrices provienen de sus aplicaciones, sobre todo de las aplicaciones en álgebra lineal. De ese modo las operaciones, o su forma muy particular de ser implementadas, no son únicas.

3.1 Suma o adición

Definición

Se define la operación de suma o adición de matrices como una operación binaria