Métodos Matemáticos Aplicados EQE-703 1/2024 11/05/2024 J.Luiz
Trabalho 1 : Matrizes, Sistemas Lineares, Formas Quadráticas, Autovetores e Autovalores
Questão 1 (6 Pontos; itens de igual valor)

Considere a matriz simétrica $\underline{\underline{A}}$, o vetor $\underline{B}$, a constante C e a matriz $\underline{\underline{E}}$ dados abaixo. Com estes objetos cria-se a Função Objetivo $F(\underline{X}) = (1/2)\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\underline{X} + \underline{B}^T \underline{X} + C$. A partir disto, responda :

(i) Desenvolver programa MATLAB para aplicar o Processo Schmidt à matriz $\underline{\underline{A}}$ de modo produzir a base $\left[\underline{P}_1\ \underline{P}_2\ \underline{P}_3\ \underline{P}_4\ \underline{P}_5\ \underline{P}_6\ \underline{P}_7\ \underline{P}_8\right]$ de vetores conjugados por $\underline{\underline{A}}$.

(ii) Verificar que estes vetores são conjugados provando o caráter diagonal da matriz $\underline{\underline{D}}$ através do produto indicado (no MATLAB) : $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{A}}\underline{\underline{P}}$, $\quad$ *onde* $\underline{\underline{P}} = \left[\underline{P}_1\ \underline{P}_2\ \underline{P}_3\ \underline{P}_4\ \underline{P}_5\ \underline{P}_6\ \underline{P}_7\ \underline{P}_8\right]$

(iii) Estabelecer o caráter da Forma Quadrática $\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\underline{X}$

(iv) Defina a matriz $\underline{\underline{S}}$ dada pelas 5 primeiras linhas e 5 primeiras colunas de $\underline{\underline{A}}$. Calcule o Determinante de $\underline{\underline{S}}$ ($DET(\underline{\underline{S}})$) manualmente pelo método de pivotamento ou implemente um algoritmo computacional no MATLAB (ou outro software) com esta finalidade (não vale usar função pré-pronta para o DET do software em questão). Compare com o valor obtido para $DET(\underline{\underline{S}})$ com função do MATLAB ou de outro software de processamento numérico

(v) Os autovalores de $\underline{\underline{S}}$ são as 5 raízes da Eq. Característica $DET(\underline{\underline{S}} - \lambda\underline{\underline{I}}) = 0$ que no caso são números REAIS, ou seja, que estão sobre a Reta Real. Tendo obtido indiretamente o Carácter de $\underline{\underline{S}}$ pelo item (iii) (como?), e tendo o seu determinante pelo item (iv), defina um intervalo sobre a reta real que possivelmente contém as 5 raízes da Eq. Característica $DET(\underline{\underline{S}} - \lambda\underline{\underline{I}}) = 0$. Plote a função $\Xi(\lambda) = DET(\underline{\underline{S}} - \lambda\underline{\underline{I}}) / DET(\underline{\underline{S}})$ sobre este intervalo variando λ ao longo de 10^5 pontos (para calcular $\Xi(\lambda)$ use função numérica para DET no MATLAB ou em outro software). Por este gráfico, seria possível identificar janelas mais estreitas para cada uma das raízes de $DET(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}) = 0$? Calcule as 5 raízes (os 5 autovalores) usando um método numérico qualquer para resolver $\Xi(\lambda)=0$ em cada uma das 5 janelas identificadas (com tolerância de 10^{-6}). Obter manualmente (ou implementando computacionalmente) um autovetor de $\underline{\underline{S}}$ com norma unitária. Verifique que este autovetor satisfaz o Problema de Autovetor-Autovalor de $\underline{\underline{S}}$.

(vi) Escrever a expressão da solução geral do sistema $\underline{\underline{E}}\underline{X} = \underline{0}$ sob a forma $\underline{X} = \underline{\underline{K}}\underline{Z}$ onde $\underline{\underline{K}}$ é uma matriz constante a ser obtida e $\underline{Z}$ é um vetor de coordenadas independentes no espaço de soluções deste sistema;

(vii) Plotar (via SURF) a projeção de $F(\underline{X})$ sobre o espaço das soluções do sistema $\underline{\underline{E}}\underline{X} = \underline{0}$, isto é, $F(\underline{X}(\underline{Z}))$

(viii) Com base no item (iii), obter o ponto $\underline{X}^O$ que minimiza a Função Objetivo acima resolvendo sua relação de Ponto Estacionário $\underline{\nabla}_X F = \underline{0}$. Obter também o valor da Função Objetivo ($F^O = F(\underline{X}^O)$) sobre este ponto. (Note que $\underline{\nabla}_X (\underline{X}^T \underline{\underline{A}}\underline{X}) = 2\underline{\underline{A}}\underline{X}$, para $\underline{\underline{A}}$ simétrica)

(ix) Obter o ponto $\underline{X}^\#$ que minimiza a Função Objetivo acima sobre o espaço das soluções do sistema $\underline{\underline{E}}\underline{X} = \underline{0}$, resolvendo a relação de Ponto Estacionário Reduzida $\underline{\nabla}_Z F(\underline{X}(\underline{Z})) = \underline{0}$. Obter também o valor da Função Objetivo ($F^\# = F(\underline{X}^\#)$) sobre este ponto. (Note que $\underline{\nabla}_Z F(\underline{X}(\underline{Z})) = \left[\underline{\nabla}_Z \underline{X}^T\right]\underline{\nabla}_X F = \underline{\underline{K}}^T \underline{\nabla}_X F$)

(x) Obter o mesmo $\underline{X}^{\#}$ utilizando o método dos Multiplicadores de Lagrange, isto é, via solução do seguinte problema de Ponto Estacionário da Função Lagrangeana $\Lambda(\underline{X},\underline{\lambda}) = F(\underline{X}) + \underline{\lambda}^t \underline{\underline{E}}\,\underline{X}$:

$\underline{\nabla}_X \Lambda = \underline{0}$

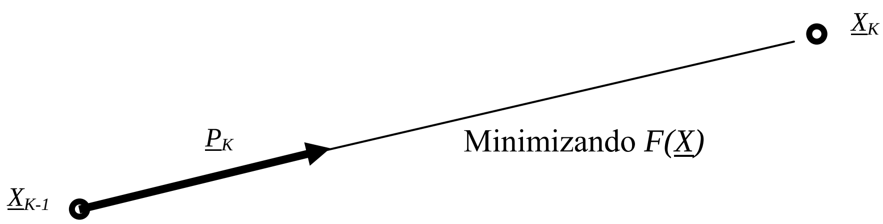
$\underline{\nabla}_\lambda \Lambda = \underline{0}$

onde $\underline{\lambda}$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange.

(xi) Partindo de um ponto qualquer $\underline{X}_0$ (escolha um) aplique 8 sucessivas minimizações unidimensionais (1D) sobre cada um dos vetores da base conjugada $\lfloor \underline{P}_1 \ \underline{P}_2 \ \underline{P}_3 \ \underline{P}_4 \ \underline{P}_5 \ \underline{P}_6 \ \underline{P}_7 \ \underline{P}_8 \rfloor$ obtendo, sucessivamente, os pontos $\lfloor \underline{X}_1 \ \underline{X}_2 \ \underline{X}_3 \ \underline{X}_4 \ \underline{X}_5 \ \underline{X}_6 \ \underline{X}_7 \ \underline{X}_8 \rfloor$. Verifique então que $\underline{X}_8$ é $\underline{X}^O$. Para minimização 1D sobre a reta $\underline{X}(\theta) = \underline{X}_{K-1} + \underline{P}_K\theta$, o problema seguinte deve ser resolvido (figura ilustra a etapa *k* deste processo):

$$\underset{\{\theta\}}{Min} \ F(\underline{X}(\theta)) \qquad onde \quad \underline{X}(\theta) = \underline{X}_{K-1} + \underline{P}_K\theta$$

Mostre que a solução desta Busca 1D é $\underline{X}_K = \underline{X}_{K-1} + \underline{P}_K\theta^*$ onde $\theta^* = -\dfrac{\underline{P}_K{}^t(\underline{B} + \underline{\underline{A}}\,\underline{X}_{K-1})}{\underline{P}_K{}^t\,\underline{\underline{A}}\,\underline{P}_K}$



$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^t = \begin{bmatrix} 11111 & 22222 & 33333 & 44444 & 44444 & 33333 & 22222 & 11111 \end{bmatrix} \quad , \quad C = 10^5 \ ,$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & -3 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 3 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -4 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -4 & -3 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (4 Pontos; itens de igual valor)

Considere o problema do GPS. Um ponto P emissor de sinal sobre a superfície da Terra terá seu vetor posição ($\underline{r}^t = [X \quad Y \quad Z]$) calculado a partir das leituras de distancias de P a 3 satélites geo-estacionários que melhor captaram o sinal de P. Estas três distancias são R_1, R_2, R_3. As posições dos três satélites em questão são dadas pelos vetores $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3$. Em um dado problema conhecem-se os valores de $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3$ e de R_1, R_2, R_3. O objetivo é determinar $\underline{r}$. O problema pode ser entendido como buscar a intersecção de três esferas de raios R_1, R_2, R_3 centradas, respectivamente, em $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3$. A partir disto:

(i) Apresente a formulação matemática do problema descrevendo as variáveis e equações disponíveis na forma

$$\underline{F}(\underline{r}) = \underline{0} \tag{1}$$

(ii) Apresente a expressão da matriz jacobiana das Eqs. (1), isto é:

$$\underline{\underline{J}} = \left[\underline{\nabla}_r \underline{F}^t\right]^t \tag{2}$$

Considere os dados pertinentes (em 10^3 km) : $\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ e para as distancias do objeto aos satélites os valores (também em 10^3 km) $R_1 = 5, R_2 = 5, R_3 = 4$. A partir disto:

(iii) Com o MATLAB plote os centros dos 3 satélites em 3D (PLOT3) e em seguida desenhe com SURF as 3 esferas centradas em cada um (use uma palete clara e "cheguei" como COOL). Com ROTATE3D pesquise ao redor da imagem por pontos candidatos a serem solução do problema. Salve estas imagens no documento de resolução indicando com "flechinhas" as possíveis soluções.

(iv) A partir de um chute inicial razoável, determine $\underline{r}$ com o Método Newton-Raphson executado em MATLAB, e plotando em 3D sobre a figura anterior os pontos da marcha Newton-Raphson em busca da solução (ou das soluções). Para isto use HOLD ON e PLOT3 com "bolinhas" bem "grossinhas" em vermelho para cada ponto da marcha NR.

(v) Coloque o problema como um Problema de Otimização Irrestrita tendo a forma da Eq. (3). Obtenha a Função Objetivo $G(\underline{r})$.

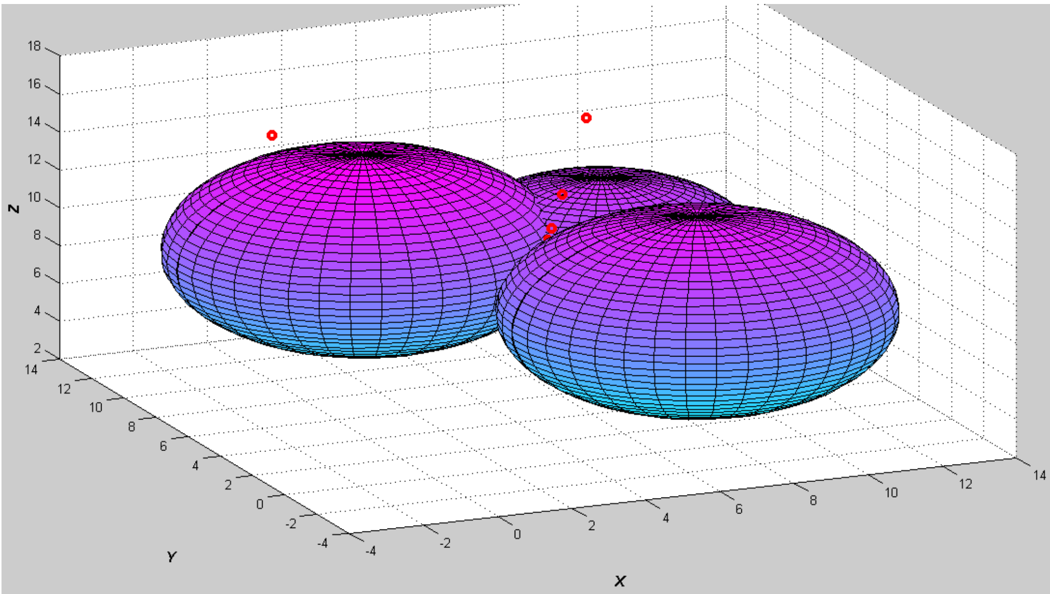
$$\underset{\{\underline{r}\}}{Min} \; G(\underline{r}) \tag{3}$$

(vi) Obter o Gradiente ($\underline{g} = \underline{\nabla}_r G$) e a Matriz Hessiana ($\underline{\underline{H}} = \underline{\nabla}_r \underline{\nabla}_r^t G$) da Função Objetivo acima

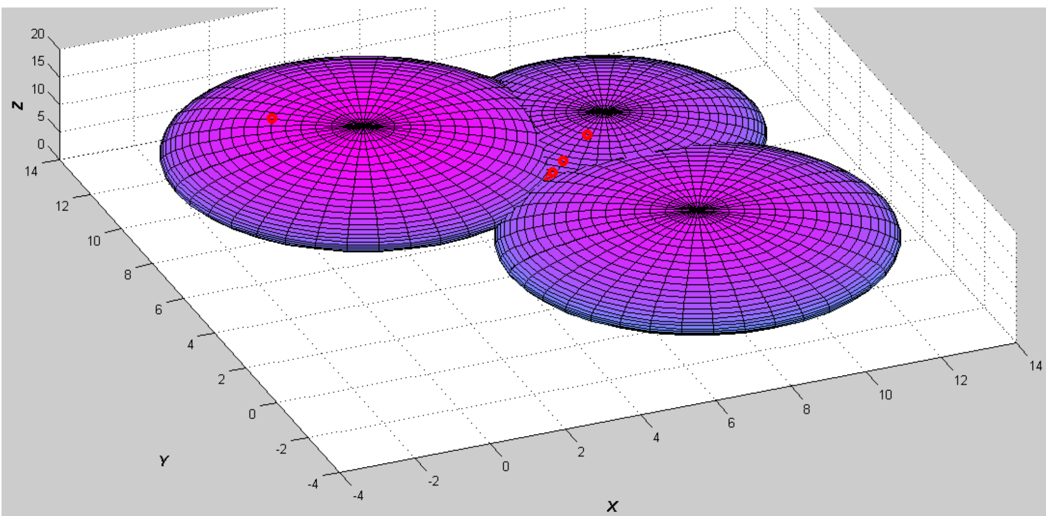
(vii) Escrever a expressão da condição de Ponto Estacionário ($\underline{\nabla}_r G = \underline{0}$). Resolver esta condição para $\underline{r}$.

(viii) Resolver numericamente o problema (3) de otimização com o minimizador do MATLAB FMINSEARCH (ou use outro minimizador qualquer de outro software de processamento numérico qualquer). Represente sobre a imagem os pontos ("bolinhas grossinhas") da busca minimizadora.

ATENÇÃO : Apresente listagens de todos os programas envolvidos e impressões das figuras.
As figuras a seguir são exemplos do que deverá ocorrer.



18
16
14
12
10
8
6
4
2
Z
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
Y
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
X



20
15
10
5
0
Z
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
Y
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
X