# Resolução da Lista de Exercícios

**Francisco Davi Belo Rodrigues**

28 de outubro de 2025

## 1 Exercício 1

### Enunciado e dados

Consideram-se dois tanques cilíndricos interligados em série. O tanque 1 recebe uma alimentação constante e descarrega no tanque 2, que por sua vez escoa para o ambiente. As vazões de saída de cada tanque dependem do nível interno segundo a relação empírica $Q_i = k_i\sqrt{h_i}$. Os parâmetros fornecidos são resumidos na Tabela 1.

| **Parâmetro** | **Valor** |
|---|---|
| Vazão de alimentação $Q_0$ | $20\ \mathrm{m^3\,h^{-1}}$ |
| Diâmetro do tanque 1 $D_1$ | 4 m |
| Diâmetro do tanque 2 $D_2$ | 3 m |
| Constante da válvula 1 $k_1$ | $14\ \mathrm{m^{2.5}\,h^{-1}}$ |
| Constante da válvula 2 $k_2$ | $12\ \mathrm{m^{2.5}\,h^{-1}}$ |
| Nível inicial no tanque 1 $h_1(0)$ | 3 m |
| Nível inicial no tanque 2 $h_2(0)$ | 2 m |

Tabela 1: Dados operacionais da Questão 1.

### Formulação do modelo

O modelo dinâmico é obtido a partir dos balanços de massa (ou volume, dado que a densidade é constante) em cada tanque. Para um volume de controle genérico com densidade constante $\rho$, tem-se

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho Q_{\text{in}} - \rho Q_{\text{out}},$$

o que conduz ao balanço volumétrico

$$\frac{dV}{dt} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}.$$

No tanque 1, o volume contido é $V_1 = A_1 h_1$, com $A_1$ indicado na Eq. (1). O balanço volumétrico resulta em

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - Q_1,$$

em que $Q_0$ é a vazão de alimentação e $Q_1$ a vazão de saída do tanque 1. De modo análogo, para o tanque 2 obtém-se $V_2 = A_2 h_2$ e

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_1 - Q_2,$$

com $Q_1$ proveniente do tanque 1 e $Q_2$ a descarga para o ambiente.

As vazões de saída seguem a correlação empírica das válvulas e as áreas dos tanques são calculadas pela geometria cilíndrica. Mantendo $t$ em horas, têm-se as equações numeradas finais:

$$A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$Q_1 = k_1 \sqrt{h_1}, \tag{2}$$

$$Q_2 = k_2 \sqrt{h_2}, \tag{3}$$

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - Q_1, \tag{4}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_1 - Q_2, \tag{5}$$

com condições iniciais $h_1(0) = 3$ m e $h_2(0) = 2$ m. Este conjunto de equações está pronto para utilização em ambientes de simulação como o EMSO, onde os parâmetros podem ser definidos separadamente sem substituição numérica antecipada.

## Resolução numérica

O sistema diferencial foi integrado em $0 \leq t \leq 20$ h empregando o método Runge–Kutta de quarta/quinta ordem adaptativo (`solve_ivp` do SciPy) com passo máximo equivalente a 10 s após conversão interna de unidades no script de apoio. A implementação registra também as trajetórias discretizadas $(t, h_1, h_2)$ em arquivo auxiliar para rastreabilidade.

```python
import numpy as np
from math import pi
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

Q0 = 20.0 # m^3/h
D1 = 4.0 # m
D2 = 3.0 # m
k1 = 14.0 # m^{2.5}/h
k2 = 12.0 # m^{2.5}/h
h1_0 = 3.0 # m
h2_0 = 2.0 # m

A1 = pi * (D1 ** 2) / 4.0
A2 = pi * (D2 ** 2) / 4.0

Q0 /= 3600.0
k1 /= 3600.0
k2 /= 3600.0

T_sim = 20.0
Te = T_sim * 3600.0

def model(t, y):
    h1, h2 = y
    q1 = k1 * np.sqrt(max(h1, 0.0))
    q2 = k2 * np.sqrt(max(h2, 0.0))
    dh1dt = (Q0 - q1) / A1
    dh2dt = (q1 - q2) / A2
    return [dh1dt, dh2dt]

sol = solve_ivp(
    fun=model,
    t_span=(0.0, Te),
```

```python
    y0=[h1_0, h2_0],
    max_step=10.0,
    dense_output=True
    )

t_hours = np.linspace(0.0, T_sim, 1000)
h1 = sol.sol(t_hours * 3600.0)[0]
h2 = sol.sol(t_hours * 3600.0)[1]

plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(t_hours, h1, label="h1 (m)")
plt.plot(t_hours, h2, label="h2 (m)")
plt.xlabel("Tempo (h)")
plt.ylabel("Nível (m)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig("figuras/questao1_niveis.png", dpi=300)

with open("figuras/questao1_niveis.dat", "w", encoding="utf-8") as f:
    f.write("tempo_h h1_m h2_m\n")
    for t, hv1, hv2 in zip(t_hours, h1, h2):
        f.write(f"{t:.6f} {hv1:.6f} {hv2:.6f}\n")

print("h1 final:", h1[-1])
print("h2 final:", h2[-1])
```

Listing 1: Script Python utilizado para a integracao numerica da Questao 1.

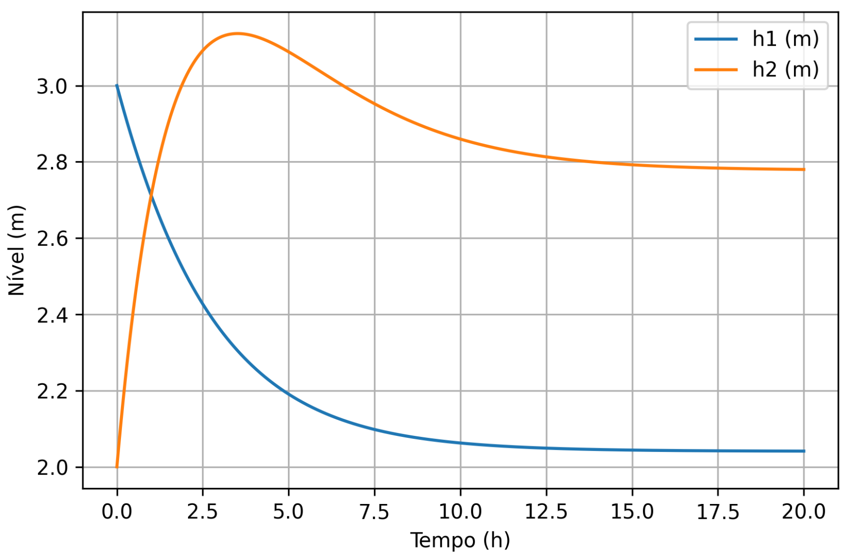


Figura 1: Perfis temporais simulados dos níveis $h_1$ e $h_2$ durante 20 horas.

# Referências

[1] Autor, *Título do Livro ou Artigo*, Editora, Ano.