

## Resolução da Lista de Exercícios

**Francisco Davi Belo Rodrigues**

28 de outubro de 2025

### 1 Exercício 1

#### Enunciado e dados

Consideram-se dois tanques cilíndricos interligados em série. O tanque 1 recebe uma alimentação constante e descarrega no tanque 2, que por sua vez escoar para o ambiente. As vazões de saída de cada tanque dependem do nível interno segundo a relação empírica  $Q_i = k_i \sqrt{h_i}$ . Os parâmetros fornecidos são resumidos na Tabela 1.

Parâmetro	Valor
Vazão de alimentação $Q_0$	$20 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}$
Diâmetro do tanque 1 $D_1$	4 m
Diâmetro do tanque 2 $D_2$	3 m
Constante da válvula 1 $k_1$	$14 \text{ m}^{2.5} \text{ h}^{-1}$
Constante da válvula 2 $k_2$	$12 \text{ m}^{2.5} \text{ h}^{-1}$
Nível inicial no tanque 1 $h_1(0)$	3 m
Nível inicial no tanque 2 $h_2(0)$	2 m

Tabela 1: Dados operacionais da Questão 1.

#### Formulação do modelo

O modelo dinâmico é obtido a partir dos balanços de massa (ou volume, dado que a densidade é constante) em cada tanque. Para um volume de controle genérico com densidade constante  $\rho$ , tem-se

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho Q_{\text{in}} - \rho Q_{\text{out}},$$

o que conduz ao balanço volumétrico

$$\frac{dV}{dt} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}.$$

No tanque 1, o volume contido é  $V_1 = A_1 h_1$ , com  $A_1$  indicado na Eq. (1). O balanço volumétrico resulta em

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - Q_1,$$

em que  $Q_0$  é a vazão de alimentação e  $Q_1$  a vazão de saída do tanque 1. De modo análogo, para o tanque 2 obtém-se  $V_2 = A_2 h_2$  e

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_1 - Q_2,$$

com  $Q_1$  proveniente do tanque 1 e  $Q_2$  a descarga para o ambiente.

As vazões de saída seguem a correlação empírica das válvulas e as áreas dos tanques são calculadas pela geometria cilíndrica. Mantendo  $t$  em horas, têm-se as equações numeradas finais:

$$A_i = \frac{\pi D_i^2}{4}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$Q_1 = k_1 \sqrt{h_1}, \quad (2)$$

$$Q_2 = k_2 \sqrt{h_2}, \quad (3)$$

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - Q_1, \quad (4)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (5)$$

com condições iniciais  $h_1(0) = 3$  m e  $h_2(0) = 2$  m. Este conjunto de equações está pronto para utilização em ambientes de simulação como o EMSO, onde os parâmetros podem ser definidos separadamente sem substituição numérica antecipada.

## Resolução numérica

O sistema diferencial foi integrado em  $0 \leq t \leq 20$  h empregando o método Runge–Kutta de quarta/quinta ordem adaptativo (`solve_ivp` do SciPy) com passo máximo equivalente a 10 s após conversão interna de unidades no script de apoio. A implementação registra também as trajetórias discretizadas  $(t, h_1, h_2)$  em arquivo auxiliar para rastreabilidade.

```

1 import numpy as np
2 from math import pi
3 from scipy.integrate import solve_ivp
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 Q0 = 20.0 # m^3/h
7 D1 = 4.0 # m
8 D2 = 3.0 # m
9 k1 = 14.0 # m^{2.5}/h
10 k2 = 12.0 # m^{2.5}/h
11 h1_0 = 3.0 # m
12 h2_0 = 2.0 # m
13
14 A1 = pi * (D1 ** 2) / 4.0
15 A2 = pi * (D2 ** 2) / 4.0
16
17 T_sim = 20.0
18
19 def model(t, y):
20     h1, h2 = y
21     q1 = k1 * np.sqrt(max(h1, 0.0))
22     q2 = k2 * np.sqrt(max(h2, 0.0))
23     dh1dt = (Q0 - q1) / A1
24     dh2dt = (q1 - q2) / A2
25     return [dh1dt, dh2dt]
26
27 sol = solve_ivp(
28     fun=model,
29     t_span=(0.0, T_sim),
30     y0=[h1_0, h2_0],
31     max_step=0.01,
32     dense_output=True
33 )
34

```

```

35 t_hours = np.linspace(0.0, T_sim, 100)
36 h1 = sol.sol(t_hours)[0]
37 h2 = sol.sol(t_hours)[1]
38
39 plt.figure(figsize=(6, 4))
40 plt.plot(t_hours, h1, label="h1 (m)")
41 plt.plot(t_hours, h2, label="h2 (m)")
42 plt.xlabel("Tempo (h)")
43 plt.ylabel("Nível (m)")
44 plt.legend()
45 plt.grid(True)
46 plt.tight_layout()
47 plt.savefig("figuras/questao1_niveis.png", dpi=300)
48
49 with open("figuras/questao1_niveis.dat", "w", encoding="utf-8") as f:
50     f.write("tempo_h h1_m h2_m\n")
51     for t, hv1, hv2 in zip(t_hours, h1, h2):
52         f.write(f"{t:.6f} {hv1:.6f} {hv2:.6f}\n")
53
54 print("h1 final:", h1[-1])
55 print("h2 final:", h2[-1])

```

Listing 1: Script Python utilizado para a integraçao numerica da Questao 1.

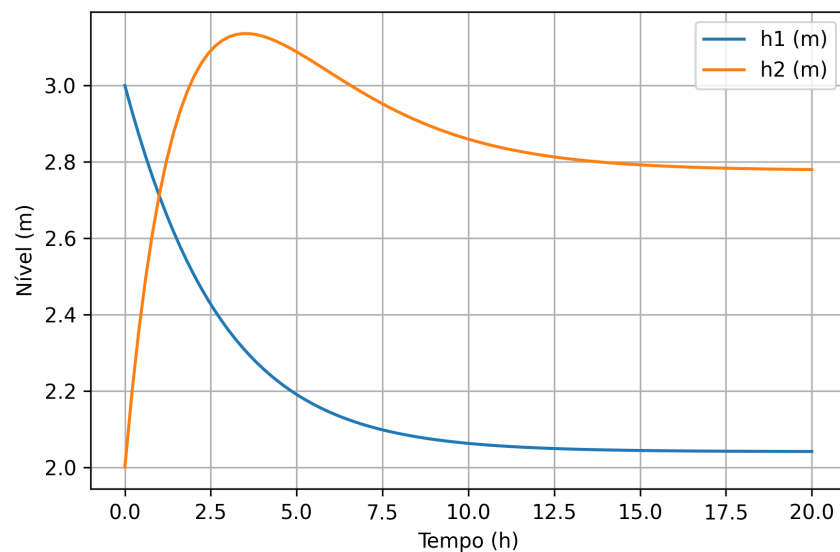


Figura 1: Perfis temporais simulados dos níveis  $h_1$  e  $h_2$  durante 20 horas.

## Referências

[1] Autor, *Título do Livro ou Artigo*, Editora, Ano.