Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería

Año 2021 - 1.er cuatrimestre

ANÁLISIS Y NUMÉRICO (75.12 - 95.04)

Curso 06 - Rodriguez - Machiunas

TRABAJO PRÁCTICO DE MÁQUINA N.º 1

Integrantes:

86559	Vicari, Dario Santiago	dvicari@fi.uba.ar
88019	Moreno, Jorge	jomoreno@fi.uba.ar

Fecha de entrega: 12/06/2021

1. Enunciado

La altura de las mareas se puede modelar utilizando una sumatoria de componentes armónicas de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$altura = a_0 + \Big[\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\omega_k t + \Phi_k)\Big] \tag{1.1}$$

siendo:
a_0: nivel medio de referencia
n: número de componentes armónicas consideradas
ω_k: frecuencia angular de la componente armónica k-ésima
ϕ_k: fase de la componente armónica k-ésima

Los parámetros de la ecuación 1.1 se calculan a partir de la serie temporal de datos obtenida por mareógrafos en los años anteriores, conocida como marea astronómica. Por lo general los responsables de la toma de datos de los mareógrafos son organismos que dependen de los gobiernos.
Históricamente se realizaba una publicación llamada anuario de mareas y en ocasiones también se publicaban las últimas constantes armónicas obtenidas en los puertos principales.
Actualmente parte de la información es de acceso público a través de páginas web. Por ejemplo, en Argentina, el organismo responsable es el Servicio de Hidrografía Naval. `http://www.hidro.gov.ar`. Cada puerto tiene asociada una tabla de mareas y en ocasiones hay que realizar correcciones debido a la influencia de los factores meteorológicos.

El primer objetivo de este TP es estimar las constantes armónicas de un puerto, del cual se dispone la altura de la marea en forma horaria, durante un año.

Cada grupo elegirá una combinación de puerto/año diferente, de un conjunto suministrado por los docentes.[Publique en el foro del TP 1 su puerto/año de esta primer parte, y verifique que no haya sido elegido por otro grupo]

Para cumplir adecuadamente el objetivo propuesto se sugiere se realicen los siguientes pasos:

1. Determinen las frecuencias angulares más importantes (ω_1,ω_2,ω_3,...ω_n). Para ello utilicen la transformada discreta de Fourier. Podrán utilizar la implementación de la transformada rápida de Fourier (fft) en Octave o Python. Deberán indicar que criterio utilizan para definir la cantidad de componentes armónicas (n). (En caso de consultar bibliografía adicional, recuerden tomar nota de los datos de la misma, para citarla en la bibliografía).

2. Utilicen el método de mínimos cuadrados para obtener el nivel medio de referencia (a_0) y la amplitud de cada componente armónica ($a_1, a_2, ..., a_n$) seleccionada previamente, como así también la fase. Indicar el ECM.

3. Repitan el punto anterior pero utilizando una componente armónica menos y analicen el efecto de esta modificación.

4. Repitan los puntos anteriores, pero esta vez utilizando solamente

   a) los datos de la primer semana de enero;
   b) los datos de la segunda semana de enero;
   c) los datos de enero y febrero;
   d) los datos de marzo y abril;

   Comparen (y relacionen, si les parece que es posible) los valores obtenidos en los componentes armónicos.

5. Suponga ahora que se desea realizar predicciones diarias de las horas y alturas de las pleamares y bajamares utilizando únicamente una sola componente armónica de acuerdo a la siguiente ecuación:

   $$altura = a_0 + a_1 cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{1.2}$$

   Indiquen como se modifican los parámetros (a_0, ω_1, ϕ_1) si solo se desea predecir las pleamares y bajamares en el mes de enero y en el mes de marzo (Pueden complementar el análisis empleando 2 o hasta 3 componentes armónicas, si les parece necesario; justifiquen su elección, en ese caso).

6. Ahora vamos utilizar la ecuación 1.2 para predecir las mareas en los puertos de la costa Argentina. Los datos se obtendrán de la página: `http://www.hidro.gov.ar/oceanografia/Tmareas/Form_Tmareas.asp` seleccionelo de la lista de puertos patrones; y cada grupo elegirá un puerto diferente. [Publiquen en el foro del TP 1 su puerto para esta segunda parte, y verifique que no haya sido elegido por otro grupo].

   Tomen los datos completos de marzo, abril y los primeros 21 días de mayo de este año. (Observe que los datos no son equiespaciados). Se aconseja que procesen los datos horarios y luego copien todo a un archivo de texto, para cargarlo con facilidad en Octave o Python. Para poder utilizar el modelo lineal de cuadrados mínimos, primero hagan gráficos y estudien que valor de ω_1 es adecuado utilizar -a partir de la inspección de los datos- y expliquen el criterio utilizado; luego por cuadrados mínimos lineales estime los parámetros a_0,a_1 y ϕ_1. También pueden optar por emplear el modelo de cuadrados mínimos no lineal. Hallen el ECM.

7. Utilicen el modelo obtenido en el punto anterior para predecir la hora de la primer pleamar de junio de la playa elegida. Expliquen la estrategia utilizada para la modelización.

2. Introducción

En este Trabajo Práctico, tenemos como objetivo utilizar el método de cuadrados mínimos para modelar la altura de las mareas en distintos puertos, en nuestro caso, el puerto de Maine, y el puerto de Mar del Plata. Ambos puertos registran las alturas de la marea, pero la diferencia es que en el primer caso, esta se registra de forma horaria, y en el segundo caso se registra solo para las pleamares y bajamares. Estos dos casos distintos nos harán utilizar distintas metodologías para hallar los modelos.

3. Desarrollo

En el primer caso, el del puerto de Maine, procesamos el archivo .csv dado, y
Partiendo de la ecuación 1.1, y aplicando la identidad trigonométrica $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$:

$$\begin{aligned} altura_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(\omega_k t)\cos(\phi_k) - \sin(\omega_k t)\sin(\phi_k) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_k \cos(\phi_k)}_{A_k} \cos(\omega_k t) + \underbrace{-a_k \sin(\phi_k)}_{B_k} \sin(\omega_k t) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{n} B_k \sin(\omega_k t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde los coeficientes A_k y B_k quedan caracterizados de la siguiente manera:

$$A_k = a_k * \cos(\phi_k) \tag{3.2}$$

$$B_k = -a_k * \sin(\phi_k) \tag{3.3}$$

Los valores a_k y ϕ_k son los coeficientes de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), el valor a_0, que sería el valor medio, la altura media, se puede calcular utilizando el método de cuadrados mínimos, como la constante que minimiza el error cuadrático Medio. Los coeficientes de fourier minimizan el Error Cuadrático Medio como se puede ver en [2], Capítulo 8.5, teorema 8.13. Como vemos a continuación. Estos desarrollos se tomaron de [1] capítulo 4.2:

$$EC = \| f(x) - \hat{f}(x) \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k (f(x_k) - \hat{f}(x_k))^2 \tag{3.4}$$

Error Cuadrático Medio

$$ECM = \frac{\sqrt{\| f(x) - \hat{f}(x) \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k (f(x_k) - \hat{f}(x_k))^2}}{n} \tag{3.5}$$

Para determinar cuantos armónicos fueron necesarios para recrear una serie que minimice el ECM, ordenamos de mayor a menor los coeficientes de la FFT y obteniendo las posiciones dentro del vector resultado, luego se toman los mayores n armónicos y se arma la serie. Fuimos iterando y hallamos que a partir de pocos armónicos, relativos a la cantidad total, había un amesetamiento en la reduccion del ECM.

Fundamentalmente, el método de los cuadrados mínimos, se trata de hallar una función $\hat{f}(x)$ que minimice el error cuadrático EC, partiendo de un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ de valores (x_i, y_i), donde consideramos $f(x_i) = y_i$, luego:

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i(x) \tag{3.6}$$

Reemplazando 3.6 en 3.4 defino al Error Cuadrático como una funcion $g(\vec{c}), \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ que dependa de las constantes c_i:

$$g(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k (f(x_k) - \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x_k))^2 \tag{3.7}$$

Lo que buscamos entonces, es minimizar el Error Cuadrático en funcion de los C_i, para ello:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial c_j} &= 0 \qquad 1 \leq j \leq n \\
\frac{\partial g}{\partial c_j} &= \frac{\partial \big(\sum\limits_{i=1}^{m} (f(x_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \phi_i)^2 \big)}{\partial c_j} \\
&= \sum_{k=1}^{m} 2\omega_k (f(x_k)) - \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i)(-\phi_j) = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k f(x_k) \phi_j = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_i \omega_k \phi_i \phi_j \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k f(x_k) \phi_j = \sum_{i=1}^{n} c_i (\sum_{k=1}^{m} \omega_k \phi_i \phi_j) \tag{3.10}$$

Debemos definir entonces el pseudo producto escalar entre dos funciones como:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k f(x_k) g(x_k) \tag{3.11}$$

Usando la definición 3.11 en 3.10 obtenemos:

$$(f, \phi_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i (\phi_i, \phi_j) \tag{3.12}$$

Con los datos de entrada de ejemplo, en los cuales contamos con un par ordenado de x_i, y_i, nos interesa aproximar $\hat{f}(x) = c\phi(x)$ donde $\phi(x) = 1$). Entonces a partir de la ecuación 3.12 y tomando el valor $\omega_k = 1$:

$$\begin{aligned}
(f, \phi) = c(\phi, \phi) \Longrightarrow c = \frac{(f, \phi)}{(\phi, \phi)} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{m} 1 = m} \\
c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k}{m} &= \bar{y}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

El el último item, se presenta una serie de datos x_i, y_i que no estan equiespaciados, dejando el análisis de los términos de fourier fuera de utilidad, aunque claro podríamos utilizar una interpolación y muestrar equidistantemente dicha interpolación, pero es un caso que podemos obviar si utilizamos diréctamente el método de cuadrados mínimos. Para ello utilizamos la ecuación 3.1 para un armónico:

$$altura_1(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) \tag{3.14}$$

Reescribimos la ecuación en función de la definicion de 3.6:

$$altura_1(t) = c_1 * \phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t) \tag{3.15}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= 1 \\ \phi_2(t) &= \cos(\omega_1 t) \\ \phi_3(t) &= \sin(\omega_1 t) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Entonces debemos resolver el sistema usando las definiciones de las ecuaciones 3.11 y 3.12

$$\begin{bmatrix} (\phi_1, \phi_1) & (\phi_1, \phi_2) & (\phi_1, \phi_3) \\ (\phi_2, \phi_1) & (\phi_2, \phi_2) & (\phi_2, \phi_3) \\ (\phi_3, \phi_1) & (\phi_3, \phi_2) & (\phi_3, \phi_3) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \phi_1) \\ (f, \phi_2) \\ (f, \phi_3) \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Esto resulta en un sistema lineal, que resolvemos utilizando python para obtener los valores de las constantes y utilizar el modelo deseado.

4. Resultados

5. Conclusiones

6. Anexo I

7. Anexo II

8. Bibliografía

Referencias

[1] Hernán González (2017) - Análisis Numérico Primer Curso 2º ediciòn. Buenos Aires. Nueva Librería.

[2] Burden, Richard L. / J. Douglas Faires (2011) - Análisis Numérico, Novena edición. Cengage Learning.

[3] Oppenheim Alan V. / Willsky Allan S. (1997) - Signals And Systems, Second Edition. Prentice Hall.