1.4 Solución

ⓐ $\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t}\cos(w_c t)\}$, $w_1, w_c \in \mathbb{R}$

Aplicando la identidad trigonométrica:

$$\cos(w_c t) = \frac{1}{2}(e^{jw_c t} + e^{-jw_c t})$$

Tenemos:

$$e^{-jw_1 t}\cos(w_c t) = e^{-jw_1 t}\frac{1}{2}(e^{jw_c t} + e^{-jw_c t})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-j(w_1 - w_c)t} + e^{-j(w_1 + w_c)t})$$

Aplicando la transformada de Fourier $\mathcal{F}\{e^{-jw_0 t}\} = 2\pi\delta(w - w_0)$

$$\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t}\cos(w_c t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{e^{-j(w_1 - w_c)t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j(w_1 + w_c)t}\}\right]$$

$$\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t}\cos(w_c t)\} = \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(w - (w_1 - w_c)) + 2\pi\delta(w - (w_1 + w_c))\right]$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t}\cos(w_c t)\} = \pi\left[\delta(w - (w_1 - w_c)) + \delta(w - (w_1 + w_c))\right]}$$

ⓑ $\mathcal{F}\{u(t)\cos^2(w_c t)\}$, $w_c \in \mathbb{R}$ $u(t)$ = Función Escalón

Aplicando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2(w_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_c t)$$

$$u(t)\cos^2(w_c t) = u(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2w_c t)\right) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t)\cos(2w_c t)$$

Aplicando propiedades lineales de la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\cos^2(w_c t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u(t)\cos(2w_c t)\}$$

La transformada de Fourier de $u(t)$ es

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$$

Ahora, para $u(t)\cos(2w_c t)$ se utiliza la propiedad de modulación:

$$\mathcal{F}\{(u(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{u(t)e^{jw_0 t}\} + \mathcal{F}\{u(t)e^{-jw_0 t}\}\right]$$

Además, $\mathcal{F}\{u(t)e^{\mp jw_0 t}\} = \pi\delta(w \mp w_0) + \dfrac{1}{j(w \mp w_0)}$

Entonces:

$$\mathcal{F}\{u(t)\cos(2w_c t)\} = \frac{1}{2}\left[\pi\delta(w-2w_c) + \frac{1}{j(w-2w_c)} + \pi\delta(w+2w_c) + \frac{1}{j(w+2w_c)}\right]$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\cos^2(w_c t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}\right) + \frac{1}{4}\left[\pi\delta(w-2w_c) + \frac{1}{j(w-2w_c)} + \pi\delta(w+2w_c) + \frac{1}{j(w+2w_c)}\right]$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{2}\delta(w) + \frac{1}{2jw} + \frac{\pi}{4}\left[\delta(w-2w_c) + \delta(w+2w_c)\right] + \frac{1}{4j}\left[\frac{1}{w-2w_c} + \frac{1}{w+2w_c}\right]}$$

c) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\dfrac{7}{w^2+6w+45} * \dfrac{10}{\left(8+\frac{jw}{3}\right)^3}\right\}$

Aplicando teorema de convolución para la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(w) * G(w)\} = 2\pi \cdot F(t) \cdot g(t)$$

Donde

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\}, \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(w)\}$$

Calcular la transformada inversa de la primera función $f(t)$

$$F(w) = \frac{7}{w^2+6w+45} \rightarrow w^2+6w+45 = (w^2+6w+9) + 36 = (w+3)^2 + 6^2$$

$$F(w) = \frac{7}{(w+3)^2+6^2}$$ Aplicando la propiedad par de transformada (Decaimiento expo)

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+w^2} \rightarrow H(w) = \frac{7}{w^2+6^2} \rightarrow a = 6$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2(6)}{6^2+w^2}\right\} = e^{-6|t|}$$, Ajustando constantes

$$H(w) = \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{w^2+6^2} \rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(w)\} = \frac{7}{12} e^{-6|t|}$$

Luego, aplicando de desplazamiento en Frecuencia:

$H(w_0+3)=0$ $\quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(w+3\} = e^{-j3t}\, h(t)$

$w_0 = -3$

$$f(t) = \frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}$$

calcular la transformada inversa de la segunda función g(t)

$G(w) = \dfrac{10}{(8+\frac{jw}{3})^2}$, Aplicando el Par de transformada

$$\mathcal{F}\{t e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{(a+jw)^2}$$

Reescribiendo $G(w)$: $\dfrac{10}{\left(\frac{1}{3}(24+jw)\right)^2} = \dfrac{10}{\frac{1}{9}(24+jw)^2} = \dfrac{90}{(24+jw)^2}$

La expresión $\dfrac{90}{(24+jw)^2}$ coincide con la forma $\dfrac{1}{(a+jw)^2}$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{90}{(24+jw)^2}\right\} = 90 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(24+jw)^2}\right\}$$

$$g(t) = 90\left(e^{-24t} u(t)\right)$$

Aplicando el teorema de convolución: $y(t) = 2\pi \cdot f(t) \cdot g(t)$

$$y(t) = 2\pi\left(\frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}\right)\left(90\, t e^{-24t} u(t)\right)$$

$y(t) = 105\pi\, e^{-j3t} e^{-6|t|}\, t e^{-24t} u(t) \rightarrow u(t)$ 0 para $t<0$

$|t|$ t para $t \geq 0$

$e^{-6|t|} \cdot e^{-24t} = e^{-6t} \cdot e^{-24t} = e^{-30t}$ (para $t \geq 0$)

$$\boxed{y(t) = 105\pi \cdot t \cdot e^{-(30+j3)t} u(t)}$$

ⓐ $\mathcal{F}\{3t^3\}$, Aplicando la propiedad de linealidad

$\mathcal{F}\{3t^3\} = 3\,\mathcal{F}\{t^3\}$, Aplicando la propiedad de Diferenciación en frecuencia.

$$\mathcal{F}\{t^n x(t)\} = j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \rightarrow \begin{matrix} n=3 \\ x(t)=1 \end{matrix} \quad X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)=1\}$$

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{t^3\} = j^3 \frac{d^3}{d\omega^3}[2\pi\,\delta(\omega)] \rightarrow j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j$$

$$\mathcal{F}\{t^3\} = -j \cdot 2\pi \frac{d^3}{d\omega^3}\delta(\omega) \rightarrow \frac{d^3}{d\omega^3}\delta(\omega) = \delta^{(3)}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{t^3\} = 3(-j2\pi\,\delta^{(3)}(\omega)) \rightarrow \boxed{\mathcal{F}\{3t^3\} = -j\,6\pi\,\delta^{(3)}(\omega)}$$

② $$\frac{B}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+(\omega-n\omega_0)^2} + \frac{1}{a+j(\omega-n\omega_0)}\right)$$ donde: $n \in \{0, \pm1, \pm2, \dots\}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y $B, T \in \mathbb{R}^+$

$$X(\omega) = c\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0) \quad \text{si: } x(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

multiplicación de una señal aperiódica $f(t)$ por un tren de impulsos periódico

$$X(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$$

La constante de escala es B

La función de forma base en frecuencia es:

$$F(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{a+j(\omega)}$$

$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$, Como $F(\omega)$ es una suma, se puede aplicar la propiedad de la linealidad

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+\omega^2}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}$$

Para el primer término aplicando la propiedad de par de transformada

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+w^2} \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+w^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|t|}$$

Para el segundo término aplicando la anterior propiedad

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-a|t|} u(t)\} = \frac{1}{a+jw} \rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\} = e^{-at} u(t)$$

Entonces la función base $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2a} e^{-a|t|} + e^{-at} u(t)$$

Ahora, se construye la señal final en el dominio del tiempo

$$x(t) = B \cdot f(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-KT)\right)$$

$$x(t) = B\left(\frac{1}{2a} e^{-a|t|} + e^{-at} u(t)\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-KT)$$

$$x(t) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(KT) \cdot \delta(t-KT); f(KT) = \frac{1}{2a} e^{-a|KT|} + e^{-aKT} u(KT)$$

Entonces, la expresión final para la señal en el tiempo es:

$$\boxed{x(t) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2a} e^{-a|KT|} + e^{-aKT} u(KT)\right) \delta(t-KT)}$$