Punto 3). Encuentre la función de Densidad espectral (Transformada de Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades).

- La Transformada de Fourier continua de una señal $x(t)$ esta definida como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

a). $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a \in \mathbb{R}^{+}$

Como esta señal es par, podemos escribir:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} (e^{at} e^{-j\omega t})\, dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-j\omega t} e^{-at})\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} (e^{at - j\omega t})\, dt = \int_{-\infty}^{0} (e^{(a-j\omega)t})\, dt = \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Bigg|_{-\infty}^{0} \right] = \left[\frac{1}{a-j\omega} \right] - 0 \;\boxed{= \frac{1}{a-j\omega}}$$

$$\int_{0}^{\infty} (e^{-(a+j\omega)t})\, dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Bigg|_{0}^{\infty} \right] = 0 - \left[-\frac{1}{(a+j\omega)} \right] \;\boxed{= \frac{1}{a+j\omega}}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \;\boxed{= \frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$

b). $\cos(\omega_c t), \quad \omega_c \in \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \quad ; \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} (e^{-j\omega t}) \right) dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{j(\omega_c-\omega)t}\right)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-j(\omega_c+\omega)t}\right)dt$$

Como la integral de una exponencial compleja es un delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t}\,dt = 2\pi\,\delta(a)$$

Aplicando esto a cada termino se tiene.

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left(2\pi\,\delta(\omega-\omega_c) + 2\pi\,\delta(\omega+\omega_c)\right)$$

$$\boxed{X(\omega) = \pi\left[\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\right]}$$

c) $x(t) = sen(\omega_s t), \quad \omega_s \in \mathbb{R}$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier se tiene

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sin(\omega_s t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Aplicando la identidad trigonométrica: $\quad sen\,\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t}}{2j} (e^{-j\omega t}) dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega_s - \omega)t} - e^{-j(\omega_s + \omega)t}) dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_s - \omega)t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_s + \omega)t} dt \right)$$

Como la integral de una exponencial compleja es una delta de Dirac

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha t} dt = 2\pi \delta(\alpha) \quad \rightarrow$ En la primera integral $\alpha = \omega_s - \omega \rightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_s)$

En la segunda integral $\alpha = -(\omega_s + \omega) \rightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_s)$

Entonces:

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} (2\pi\delta(\omega - \omega_s) - 2\pi\delta(\omega + \omega_s))$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_s) - \delta(\omega + \omega_s)] \cdot \frac{1}{j}$$

$$\boxed{X(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_s) - \delta(\omega + \omega_s)]}$$

d). $x(t) = f(t) \cdot cos(\omega_c t), \quad \omega_c \in \mathbb{R}, \quad f(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier:

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot cos(\omega_c t) \cdot e^{-j\omega_c t} dt \quad$ y aplicando la identidad trigonométrica

$$cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}\right) \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{j(\omega_c-\omega)t} + e^{-j(\omega_c+\omega)t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega-\omega_c)t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega+\omega_c)t}\, dt\right]$$

Se observa que cada una de esas integrales corresponde a la transformada de Fourier de $f(t)$ evaluada en frecuencias desplazadas.

Así que por Definición: $\boxed{X(\omega) = \frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_c) + F(\omega+\omega_c)\right]}$ $\quad F(\omega) = \mathcal{F}\{t\}$

e). $x(t) = e^{-a|t|^2}$, $\quad a \in \mathbb{R}^+$ señal Gaussiana.

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$, pero como $|t|^2 = t^2$ para todo $t \in R$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - j\omega t}\, dt$$

Llevando $-at^2 - j\omega t$ a una forma factorizada se tiene $(t^2 - bt)$

$-at^2 - j\omega t = -a\left(\frac{-at^2}{-a} + \frac{-j\omega t}{-a}\right)$, completando el cuadrado de $t^2 + \frac{j\omega}{a}t$

$\boxed{= -a\left(t^2 + \frac{j\omega t}{a}\right)} \longrightarrow (x-y)^2$ o $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$x = t \qquad 2yt = \frac{j\omega}{a}t$

$\boxed{y = \frac{j\omega}{2a}}$

$$\underbrace{t^2 + \frac{j\omega}{a}t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2}_{} - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2$$

Entonces:

$$-at^2 - j\omega t = -a\left[\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right] = -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{j^2\omega^2}{4a^2}$$

Recordando que $j^2 = -1$, queda

$$-a\left(\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{(-1)\omega^2}{4a^2}\right) = -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4a^{\cancel{2}}}(-a)$$

$$= -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$

Sustituyendo y simplificando en la integral:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}\right]} dt$$

Separando la parte constante del exponente que no depende de t.

$$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt$$

Realizando un cambio de variable

$u = t + \frac{j\omega}{2a}$, $du = dt$

cuando $t \to -\infty$, $u \to -\infty + \frac{j\omega}{2a} \simeq -\infty$

cuando $t \to +\infty$, $u \to \infty + \frac{j\omega}{2a} \simeq \infty$

$$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au} du$$

, la integral gaussiana es una integral estándar

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}}$$

En este caso, $c = a$ y la variable es u.
Por lo tanto.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \rightarrow \boxed{X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

f).

$x(t) = A\,\text{rect}_d(t)$, $A, d \in \mathbb{R}$

$$\text{rect}_d(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$x(t) = A$
si $|t| \leq \frac{d}{2}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\text{rect}_d(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

, Acotando los límites de integración

$$X(\omega) = A\int_{-d/2}^{d/2} e^{-j\omega t} dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-d/2}^{d/2}\right] = A \cdot \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega(d/2)} - e^{-j\omega(-d/2)}\right)$$

Aplicando la identidad trigonométrica $e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -2j \operatorname{sen}\theta$

$$X(\omega) = \frac{A}{-j\omega}\left(-2j \operatorname{sen}(\omega d/2)\right) = \frac{A \cdot 2 \operatorname{sen}(\omega d/2)}{\omega}$$

utilizando la definición de sinc normalizado (en radianes)

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad , \quad X(\omega) = A.d \, \frac{\operatorname{sen}(\omega d/2)}{(\omega d/2)}$$

$$\boxed{X(\omega) = A.d \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega d}{2}\right)}$$