3.3 Solución

Encuentre la transformada Z, para las siguientes señales:

i) $x[n] = -a^n u[-n-1]$

La función $u[-n-1]$ es 1 para $n \leq -1$ y 0 para $n \geq 0$
Entonces

$x[n] = -a^n$ para $n \leq -1$, $x[n] = 0$ para $n \geq 0$

Usamos la TZ bilateral porque la señal vive en $n<0$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a^n z^{-n})$$

$m = -n \to m$, y cuando $n = -1 \to m = 1$, $n = -\infty \to m = \infty$

$$X(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} (a^{-m} z^m) = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{z}{a}\right)^m\right)$$

Esto es una serie trigonométrica de razón $\frac{z}{a}$, válida si $\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \to |z| < |a|$

$$X(z) = -\left(\frac{\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}}\right) = \left(\frac{z}{a-z}\right)$$

$$X(z) = \frac{-z}{a-z}, \quad ROC: |z| < |a|$$

ii) $x[n] = a^n$ para $0 \leq n \leq N-1$, con $a > 0$.

Esta señal es finita de duración N, de la forma:

$$x[n] = a^n (u[n] - u[n-N])$$

Transformada Z Unilateral:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$$

Multiplicamos den por z^N

$$x(z) = \frac{z^N - a^N}{z^n - az^{N-1}} = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$$

$$x(z) = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} \qquad ROC \neq 0$$

iii) $x[n] = \{5, 3, -2, 0, 4, -3\}$ con $x[0] = 5$

La señal esta definida para $n=0$ hasta $n=5$ entonces:

$x[0] = 5$, $x[1] = 3$ $x[2] = -2$ $x[3] = 0$

$x[4] = 4$, $x[5] = -3$

Transformada Z Unilateral

$$x(z) = \sum_{n=0}^{5} x[n] z^{-n} = 5 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + 0z^{-3} + 4z^{-4} + 3z^{-5}$$

$$x(z) = 5 + 3z^{-1} - 2z^{-2} + 4z^{-4} - 3z^{-5}$$