2.5 Solución

Sea la señal Gaussiana $x(t) = e^{-at^2}$

$$x(t) = e^{-at^2} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Sistema A: $y_A(t) = x^2(t)$

Sistema B: Un SLIT con respuesta impulso

$$h_B(t) = Be^{-bt^2}$$

• Salida serie: $x(t) \xrightarrow[h_B(t)]{} y(t) \xrightarrow{\text{cuadrado}} y_A(t)$

① $x(t) * h_B(t) = y(t)$

② $y_A(t) = y^2(t)$

Convolución de $x(t) * h_B(t)$

$$y(t) = x(t) * h_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_B(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(\tau) = e^{-a\tau^2} \quad * h_B(t-\tau) = Be^{-b(t-\tau)^2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\tau^2} - Be^{-b(t-\tau)^2}\, d\tau$$

Sustituyendo:

$$y(t) = Be^{-bt^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)(\tau^2 - \frac{2bt}{a+b}\tau)}\, d\tau$$

Completando diferencia de cuadrados y términos

$$\tau^2 - \frac{2bt}{a+b}\tau = \left(\tau - \frac{bt}{a+b}\right)^2 - \left(\frac{bt}{a+b}\right)^2$$

Sustituyendo

$$y(t) = Be^{-bt^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)\left(\left[\tau - \frac{bt}{a+b}\right]^2 - \left[\frac{bt}{a+b}\right]^2\right)}\, d\tau$$

$$= Be^{-bt^2}\, e^{\frac{b^2+2}{a+b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+b)(\tau-u)^2}\, d\tau \qquad \bullet\ u = \frac{bt}{a+b}$$

El resultado de la señal Gaussiana será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-K(T-u)^2}\, dT = \sqrt{\frac{\pi}{K}} \quad \cdot K = a+b$$

$$Y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\; e^{-bt^2 + \frac{b^2t^2}{a+b}}$$

Se simplifica la exponente

$$-bt^2 + \frac{b^2t^2}{a+b} = t^2\left(\frac{-b(a+b)+b^2}{a+b}\right) = -\frac{abt^2}{a+b}$$

$$Y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\; e^{-\frac{abt^2}{a+b}}$$

Se aplica $Y_A(t) = y^2(t)$

$$Y_A(t) = \left(B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\; e^{\frac{-abt^2}{a+b}}\right)^2$$

$$Y(t) = B^2\frac{\pi}{a+b}\, e^{-\frac{2abt^2}{a+b}}$$

• Salida del Sistema

$$x(t) \rightarrow Y_A(t) = x^2(t) \xrightarrow{hB(t)} Y(t)$$

Aplicar A directamente

$$Y_A(t) = x^2(t) = (e^{-at^2})^2 = e^{-2at^2}$$

Convolución con $hB(t) = Be^{-bt}$

$$Y(t) = Y_A(t) * hB(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2aT^2} * Be^{-b(t-T)^2}\, dT$$

$$Y(t) = B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2aT^2} * e^{-b(b-T)^2}\, dT$$

$$Y(t) = B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}} * e^{-2\frac{abt^2}{2a+b}}$$