2.3 Solución

• Sistema ①: $y[n]=\frac{x[n]}{3}+2x[n-1]-y[n-1]$

↳ Linealidad:

Sea $x_1[n]\to y_1[x_n]$, $x_2[n]\to y_2[n]$ definidas por:

$$y_1[n]=\frac{x_1[n]}{3}+2x_1[n-1]-y_1[n-1]$$

$$y_2[n]=\frac{x_2[n]}{3}+2x_2[n-1]-y_2[n-1]$$

Se quiere comprobar que: $x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$

$y[n]=ay_1[n]+by_2[n]$

sustituyendo

$$y[n]=\frac{ax_1[n]+bx_2[n]}{3}+2(ax_1[n-1]+bx[n-1])-y[n-1]$$

$$y[n-1]=ay_1[n-1]+by_2[n-1]$$

$$y[n]=ay_1[n]+by_2[n]$$

Se cumple la propiedad de linealidad

↳ Invariante en el tiempo:

$x[n-n_0]\to y[n-n_0]$

$$y[n-n_0]=\frac{x[n-n_0]}{3}+2x[n-n_0-1]-y[n-n_0-n_1]$$

la forma de la ecuación no cambia al desplazar la entrada, el sistema 1 es invariante en el tiempo.

En conclusión el $\underbrace{\text{Sistema 1 ES SLIT}}$

• Sistema ②: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k]$

↳ Linealidad:

Sea $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$

y $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (a^2x_1^2[k] + bx_2[k])^2$

Factorizando

$$\sum_{k=-\infty}^{n} (a^2x_1^2[k] + 2abx_1[k] + b^2x_2^2[k])$$

$$\neq a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1^2 + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2^2[k]$$

No cumple la propiedad de linealidad porque hay un cuadrado (x^2) Esto indica una parábola, no una recta.

↳ Invarianza en el Tiempo:

Desplazando $x[n] \to x[n-n_0]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k] = y[n-n_0]$$

Cumple con la propiedad de invarianza en el tiempo. Pero no cumple ambas propiedadades por ello el sistema 2 No es SLIT.

• Sistema ③: $y[n] = \text{median}(x[n])$ donde median es la función mediana sobre una ventana de tamaño 3.

↳ Linealidad:

Se tiene en cuenta que la mediana no es una operación lineal:

Ejm, sea:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n=1 \\ 2 & \text{si } n=2 \end{cases}, \quad x_2[n] = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n=1 \\ 1 & \text{si } n=2 \end{cases}$$

Ventana en $n=1$:

$x_1[n-1], x_1[n], x_1[n+1] = 1, 0, 2 \rightarrow$ mediana $= 1$

$x_2[n-1], x_2[n], x_2[n+1] = 2, 0, 1 \rightarrow$ mediana $= 1$

Ahora sumamos:

$x_1 + x_2 \rightarrow [(1+2), (0+0), (2+1)] = = [3, 0, 3] \rightarrow$ mediana $= 3$

Pero como $1+1 = 2 \neq 3$ el sistema No es lineal

↳ Invarianza en el tiempo:

$x[n] \rightarrow x[n-n_0] \rightarrow y[n] \rightarrow y[n-n_0]$

Esto se cumple porque la ventana de la mediana siempre se aplica relativa al valor de n, por ejemplo:

Si la ventana en $x[n]$ es:

$$x[n-1], x[n], x[n+1]$$

Entonces en $x[n-n_0]$:

$$x[n-n_0-1], x[n-n_0], x[n-n_0+1] \rightarrow \text{misma estructura}$$

Como la salida se desplaza igual, si es invariante en el tiempo.

Pero como no cumple ambas propiedades, el sistema no es SLIT.

• Sistema ④: $y(t) = Ax(t) + B$, $A, B \in \mathbb{R}$

↳ Linealidad:

Si $x(t) \to a x(t)$, entonces $y(t) \to a y(t)$

Entrada: $x(t)$
Salida: $y(t) = Ax(t) + B$

Entrada: $a x(t)$
Salida: $y_a(t) = Aax(t) + B$

$$a y(t) = a(Ax(t) + B) = Aax(t) + aB$$
$$y_a(t) = Aax(t) + B \neq ay(t) \text{ si: } B \neq 0$$

Ahora si: $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t) \to x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

$y_1(t) = Ax_1(t) + B$
$y_2(t) = Ax_2(t) + B$

$y_{1+2}(t) = A(x_1(t) + x_2(t)) + B$
$y_1(t) + y_2(t) = Ax_1(t) + B + Ax_2(t) + B = A(x_1(t) + x_2(t)) + 2B$

$y_{1+2}(t) = A(x_1(t) + x_2(t)) + B$

El sistema 4 No es lineal cuando $B \neq 0$
El sistema 4 es lineal si $B = 0$

↳ Invarianza en el tiempo:

Si $x(t) \to x(t - t_0)$, entonces $y(t) \to y(t - t_0)$

Entonces: Entrada: $x(t - t_0)$
Salida: $y_{desp}(t) = Ax(t - t_0) + B$

$$y(t - t_0) = Ax(t - t_0) + B$$

Como son iguales el sistema 4 es invariante en el tiempo

Si $B = 0$ el sistema es SLIT
Si $B \neq 0$ el sistema No es SLIT