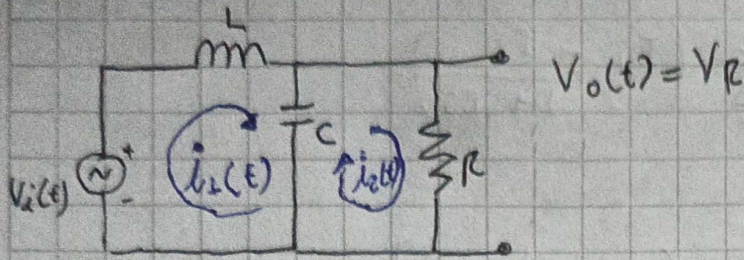


2.2 Solución



Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff tenemos

$$V_i(t) = V_L + V_C + V_R, \text{ donde } V_R = V_o$$

Convertiremos los elementos al dominio de Laplace

- Bobina $L \rightarrow Ls$
- Capacitor $C \rightarrow \frac{1}{Cs}$
- Resistor $R \rightarrow R$

Fuente $V_i(s)$

Malla 1: planteamos la ecuación en sentido horario: Fuente, inductor, capacitor: $V = IR$

$$V_i(s) = Ls \cdot I_1(s) + \frac{1}{Cs} [I_1(s) - I_2(s)] \quad (1)$$

Malla 2: planteamos la ecuación en sentido horario: capacitor, resistor

$$0 = \frac{1}{Cs} [I_2(s) - I_1(s)] + R I_2(s) \quad (2)$$

Despejamos $I_2(s)$ en función de $I_1(s)$. En (2) multiplicamos todo por Cs y despejamos

$$\frac{1}{Cs} [I_2(s) - I_1(s)] + R I_2(s) = 0 \quad * (Cs)$$

$$I_2(s) - I_1(s) + CsR I_2(s) = 0$$

$$I_2(1 + CRs) = I_1 \rightarrow I_2 = \frac{I_1}{1 + CRs}$$

Marden

Sustituyendo I_2 en la primera ecuación ①

$$V_i(s) = L s I_1 + \frac{1}{Cs} \left(I_1 - \frac{I_1}{1+CRS} \right)$$

Factorizando I_1

$$V_i(s) = I_1 \left[L s + \frac{1}{Cs} \left(1 - \frac{1}{1+CRS} \right) \right]$$

Simplificando el término del paréntesis

$$1 - \frac{1}{1+CRS} = \frac{1+CRS-1}{1+CRS} = \frac{CRS}{1+CRS}$$

$$V_i(s) = I_1 \left[L s + \frac{1}{Cs} \cdot \frac{CRS}{1+CRS} \right] = I_1 \left[L s + \frac{R}{1+CRS} \right]$$

Calculamos $V_o(s)$

La salida está sobre R y la corriente por ella es $I_2(s)$, entonces

$$V_o(s) = R \cdot I_2(s) = R \cdot \frac{I_1(s)}{1+CRS}$$

Calculando la función de transferencia $H(s)$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R \cdot \frac{I_1(s)}{1+CRS}}{I_1(s) \cdot \left[L s + \frac{R}{1+CRS} \right]}$$

$$H(s) = \frac{R}{(L+CRS) \left[L s + \frac{R}{1+CRS} \right]} \rightarrow H(s) = \frac{R}{L s (1+CRS) + R}$$

Organizando la función de transferencia $H(s)$ tenemos

$$\frac{R}{C L s^2 + L s + R} \left(\frac{1/R}{1/R} \right) = H(s) = \frac{1}{L C s^2 + \frac{L}{R} s + 1}$$

Comparando el circuito eléctrico con el Sistema Mecánico, tenemos:

$$H(s) = \frac{1}{L C s^2 + \frac{L}{R} s + 1} = \frac{1}{m s^2 + b s + k} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Llevada a la} \\ \text{forma} \\ \text{canónica} \end{array} \right\}$$

$$\frac{1/m}{\frac{m}{m} s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}}$$

$$\begin{array}{l} L C = m \\ L/R = b \\ R = 1 \end{array}$$

Hallamos ω_n^2 , k , ξ para el sistema físico

$$\omega_n^2 = \frac{d_0}{d_2} \rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \text{Frecuencia natural}$$

$$k = \frac{1}{d_0} \rightarrow k = \frac{1}{k} \rightarrow \text{Ganancia } k$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{d_0 d_2}} \rightarrow \xi = \frac{b}{2\sqrt{k b}} \rightarrow \text{Factor de amortiguamiento}$$

Luego hallamos ω_n^2 , k , ξ para el circuito eléctrico

$$\omega_n^2 = \frac{d_0}{d_2} \rightarrow \omega_n^2 = \frac{1}{L C} \rightarrow \text{Frecuencia natural}$$

$$k = \frac{1}{d_0} \rightarrow k = 1 \rightarrow \text{Ganancia}$$

$$\xi = \frac{d_1}{2\sqrt{d_0 d_2}} \rightarrow \xi = \frac{L/R}{2\sqrt{1 \cdot L/R}} \rightarrow \text{Factor de amortiguamiento}$$