1.3 Solución:

Encuentra la función de Densidad espectral (Transf. de Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades)

- La Transformada de Fourier continua de una señal $x(t)$ está definida como:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

ⓐ $x(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$

Como esta señal es par, podemos escribir:

$$x(t) \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$X(w) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} (e^{at} e^{-jwt}) dt}_{1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} (e^{-jwt} e^{-at}) dt}_{2}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{0} (e^{at - jwt}) dt = \int_{-\infty}^{0} (e^{(a-jw)t}) dt = \left[\frac{e^{(a-jw)t}}{a-jw} \right]_{\infty}^{0}$$

$$= \left[\frac{1}{a-jw} \right] - 0 = \frac{1}{a-jw}$$

$$2 = \int_{0}^{\infty} (e^{-(a+jw)t}) dt = \left[\frac{e^{-(at+jw)t}}{-(at+jw)} \right]_{0}^{\infty} = 0 - \left[-\frac{1}{a+jw} \right] = \frac{1}{a+jw}$$

$$X(w) = \frac{1}{a-jw} + \frac{1}{a+jw} = \boxed{\frac{2a}{a^2+w^2}}$$

ⓑ $\cos(w_c t)$, $w_c \in \mathbb{R}$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(w_c t) e^{-jwt} dt$$

$$\cos(w_c t) = \frac{e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}}{2} \; ; \; x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{jw_c t} + e^{-jw_c t}}{2} (e^{-jwt}) \right) dt$$

$$x(w) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(w_c - w)t}) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(w_c + w)t}) dt$$

Como la integral de una exponencial compleja es una delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t} dt = 2\pi \delta(a)$$

Aplicando esto a cada término se tiene

$$x(w) = \frac{1}{2} (2\pi \delta(w - w_c) + 2\pi \delta(w + w_c))$$

$$\boxed{x(w) = \pi [\delta(w - w_c) + \delta(w + w_c)]}$$

ⓒ $x(t) = \sin(w_s t)$, $w_s \in \mathbb{R}$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier se tiene

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sin(w_s t) \cdot e^{jwt}) dt$$

Aplicando la identidad Trigonométrica $\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$x(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jw_s t} - e^{-jw_s t}}{2j} (e^{-jwt}) dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(w_s - w)t} - e^{-j(w_s + w)t}) dt$$

$$x(w) = \frac{1}{2j} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w_s - w)t} dt}_{①} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(w_s + w)t} dt}_{②} \right)$$

Como la integral de una exponencial compleja es una delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t}\,dt = 2\pi\delta(a) \qquad \begin{array}{l} ① \; a = w_s - w \rightarrow 2\pi\delta(w - w_s) \\ ② \; a = -(w_s + w) \rightarrow 2\pi\delta(w + w_s) \end{array}$$

Entonces:

$$X(w) = \frac{1}{2j}\left(2\pi\delta(w - w_s) - 2\pi\delta(w + w_s)\right)$$

$$X(w) = \pi\left[\delta(w - w_s) - \delta(w + w_s)\right] \cdot \frac{1}{j}$$

$$\boxed{X(w) = j\pi\left[\delta(w + w_s) - \delta(w + w_s)\right]}$$

ⓓ $x(t) = f(t) \cdot \cos(w_c t)$, $w_c \in \mathbb{R}$ $\quad f(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Aplicando la definición de la Transformada de Fourier:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(w_c t) \cdot e^{-j w_c t}\,dt$$ y aplicando la identidad

Trigonométrica $\cos(w_c t) = \frac{1}{2}\left(e^{j w_c t} + e^{-j w_c t}\right)$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j w_c t} + e^{-j w_c t}\right) \cdot e^{-j w_o t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{j(w_c - w)t} + e^{-j(w_c + w)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(w - w_c)t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(w + w_c)t}\,dt\right]$$

Se observa que cada una de esas integrales corresponde a la transformada de fourier de $f(t)$ evaluada en frecuencias desplazadas

Así que por Definición:

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)\right]} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{z\}$$

② $x(t) = e^{-a|t|^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$ señal Gaussiana

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt,$$ Pero como $|t|^2 = t^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - j\omega t}\, dt$$

llevando $(-at^2 - j\omega t)$ a una forma factorizada se tiene $(t^2 - bt)$

$$-at^2 - j\omega t = -a\left(\frac{-at^2}{-a} + \frac{-j\omega t}{-a}\right),$$ Completando el cuadrado de $t^2 + \frac{j\omega}{a}t$

$$= -a\left(t^2 + \frac{j\omega t}{a}\right)$$

$$(x-y)^2 \text{ ó } (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$x = t$ $\qquad 2yt = \frac{j\omega}{a}t$

$$y = \frac{j\omega}{2a}$$

$$t^2 + \frac{j\omega}{a}t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2$$

Entonces:

$$-at^2 - j\omega t = -a\left[\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right] = -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{j^2\omega^2}{4a^2}$$

Recordando que $j^2 = -1$ queda

$$-a\left(\left(t+\frac{jw}{2a}\right)^2 - \frac{(-1)w^2}{4a^2}\right) = -a\left(t+\frac{jw}{2a}\right)^2 + \frac{w^2}{4a^2}(-a)$$

$$= -a\left(t+\frac{jw}{2a}\right)^2 - \frac{w^2}{4a}$$

Sustituyendo y simplificando en la integral:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-a\left(t+\frac{jw}{2a}\right)^2 - \frac{w^2}{4a}\right]} dt$$

Separando la parte constante del exponente que no depende de t

$$X(w) = e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{jw}{2a}\right)^2} dt$$

Realizando un cambio de variable

$u = t + \frac{jw}{2a}$ Cuando $t \to -\infty$, $u \to -\infty + \frac{jw}{2a} \simeq -\infty$

$du = dt$ Cuando $t \to +\infty$, $u \to \infty + \frac{jw}{2a} \simeq \infty$

$$X(w) = e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au} du$$

La integral Gaussiana es una integral estándar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{c}}}$$

En este caso, $c = a$ y la variable es u. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\boxed{X(w) = e^{-\frac{w^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

(f) $x(t) = A\,\text{rect}_d(t) \quad A, d \in \mathbb{R}$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\text{rect}_d(t) \cdot e^{-jwt}\, dt$$

$$\text{rect}_d(t) \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad x(t) = A \quad \text{si } |t| \leq \frac{d}{2}$$

Acotando los límites de integración

$$X(w) = A \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jwt}\, dt = A \left[\frac{e^{-jwt}}{-jw} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$= A \frac{1}{jw} \left(e^{-jw(d/2)} - e^{-jw(-d/2)} \right)$$

Aplicando la identidad trigonométrica $e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -2j\sin\theta$

$$X(w) = \frac{A}{-jw}(-2j)\sin(w d/2) = \frac{A \cdot 2\sin(wd/2)}{w}$$

Utilizando la definición de sinc normalizado (en radianes)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad X(w) = A \cdot d \,\frac{\sin(wd/2)}{(wd/2)}$$

$$\boxed{X(w) = A \cdot d \cdot \text{sinc}\left(\frac{wd}{2}\right)}$$