Métodos Numéricos I

David Caro
04-23-2022

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Variables separadas:

$f(y)dy = g(x)dx$

Solución:

$\int f(y)dy = \int g(x)dx$
$F(y) = H(x) + C$

Reducibles a variables separadas:

$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$

Solución, cambio de variable:

$z = ax + by + c$
$y = \frac{z-ax-c}{b}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$
$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$ <- Variables separadas!

Nota: deshacer el cambio de variable al final ($z = ax + by + c$)

Exactas:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
$: \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Solución:

$\int M(x, y)dx + \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right) dy = 0$

Reducibles a exactas:

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
$: \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Solución:

$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$

- Si $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = f(x)$
  $=> \mu(x, y) = e^{\int f(x)dx}$
- Si $-\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = f(y)$
  $=> \mu(x, y) = e^{\int f(y)dy}$

Lineales:

$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$

Solución:

- $a_0 = 0 => y(x) = \int \frac{b(x)}{a_1(x)}dx$ (siempre que $a_1(x)$ no se anule)
- $a_0 = a_1'$
  $=> y(x) = \frac{1}{a_1(x)}\{\int b(x)dx + C\}$

Reducibles a lineales:

$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \equiv \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

Solución (resolviendo como exacta, pero queda una fórmula más sencilla):

$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx + C\right]$

De Bernoulli:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$

Solución:

- Si $n \in \{0, 1\}$ ->lineal
- Si no, sustituir
  $v = y^{1-n} \implies \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$
  Quedando la ecuacion lineal:
  $\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$

De Riccati:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x)$

Solución:

Necesitamos saber una solución $y_1(x)$
Usamos el cambio de variable $y = y_1 + z$
Queda una ecuación de Bernoulli:
$\frac{dz}{dx} + [P(x) + 2y_1(x)]\, z = -Q(x)z^2$

Homogéneas:

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
$\quad | \quad f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$

Solución:

$z = \frac{y}{x}$ ->Se convierte en variables separadas
$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

Reducibles a homogéneas:

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Solución:

Usar el cambio de variables:
$X = x - x_0$
$Y = y - y_0$
Donde (x_0, y_0) es el punto de intersección de:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

De Clairaut:

$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Solución:

- Al derivar respecto de x:
  $x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
- queda que:
  - $\frac{d^2y}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = c$
  - ó $f'\left(\frac{dy}{dx}\right) = -x$
- Sustituyendo la primera tenemos las rectas envolventes (**solución general**):
  $y = cx + f'(c)$
- Sustituyendo la segunda tenemos la **solución singular** paramétrica:
  $$\begin{cases} x(p) = -f'(p) \\ y(p) = f(p) - pf'(p) \end{cases}$$
  Despejando x respecto p y sustituyendo obtendremos una fórmula dependiente de x e y.

Trayectorias ortogonales:

Dado $F(x, y) = C$, las trayectorias ortogonales vienen dadas por la solución de la EDO:

$\frac{dy}{dx} = \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

$y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t)$
$r(t) = 0$:
=>Homogénea
$p(t), q(t) =$ ctes:
=>ED de coeficientes constantes

Wronskiano, permite chequear la independencia lineal de funciones si $W(y_1, ..., y_k) \neq 0$, dado:

$$W(y_1, ..., y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_k \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)} & \dots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

Wronskiano de k, se usa en **variación de parámetros**:

$$W_n(y_1, ..., y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & 0 & \dots & y_k \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)} & \dots & \dots & f(x) & \dots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

Lineal homogénea:

$y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$

Solución tiene forma:

$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

Dada y_1, podemos encontrar y_2 con:

$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx$

Lineal homogénea de coef. constantes:

$ay'' + by' + cy = 0$

Equación característica:

$ar^2 + br + c = 0$

Solución:

$\Delta = b^2 - 4ac$

Tres casos:

- $\Delta > 0$
  $r_1 \neq r_2$
  $y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$
- $\Delta = 0$
  $r_1 = r_2$
  $y(x) = (C_1 + xC_2)e^{rx}$
- $\Delta < 0$
  $r = \alpha \pm \beta i$

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right]$$

Lineal homogénea de coef. variables:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Equación característica:

$$r^2 + P(x)r + Q(x) = 0$$

Solución:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

TODO

Lineal no homogénea:

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x)$$

Solución tiene la forma:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Donde:

- $y_h(x)$ ->Solución homogénea (sabemos sacarla) ($y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$)
- $y_p(x)$ ->Solución particular (veremos como)

Superposición:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$$

Solución:

$$y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

Donde y_{p1} es la solución de
$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x)$
y y_{p2} es la solución de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$$

Lineal no homogénea de coef. constantes:

$$a_k y^{n-1} + .. + cy = f(x)$$

Solución:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Para y_p podemos usar *coeficientes indeterminados*

Método de los coeficientes indeterminados, para encontrar la solución particular y_p:

Sólo aplica si:

- ED lineal no homogénea de coef. constantes.
- $f(x)$ es uno de $P_m(x)$ (polinomio de grado m), e^{rx}, $\cos kx$ o $\operatorname{sen} kx$.

Lineal no homogénea de coef. variables:

$$y'' + y' + Q(x)y = R(x)$$

Solución:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Para y_p podemos usar *variación de parámetros*

Método de variación de parámetros, para encontrar la solución particular y_p, más complicado que coeficientes indeterminados:

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)} dx$$