Resúmen Vibraciones y Ondas

David Caro
04-04-2022

Movimiento Armónico Simple

Ecuación del movimiento:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

solución (coseno):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) =$$
$$\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \cos\left[\omega t + \arctan\left(-\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)\right]$$

Frecuencia: $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

Superposición de oscilaciones, misma frecuencia:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$
$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$
$$\alpha = \alpha_1 + \arcsin\left(\frac{A_2}{A}\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\right)$$

O lo que es mucho más sencillo, en complejos:

$$z = e^{j(\omega t + \alpha_1)}\left[A_1 + A_2 e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)}\right]$$

Nota que hay dos partes, una estática y una que depende de t.

Relación de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Superposición de diferentes frecuencias, batidos:

El resultado es periódico sólo si:

$$n_1 T_1 = n_2 T_2 = T$$

Para misma amplitud:

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

De donde cabe notar que la primera parte es la "portadora"de baja frecuencia y la segunda parte de alta frecuencia.

El batido sucede cuando:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$$

de periodo:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{beat}}} = \frac{1}{\nu_{\text{beat}}} = \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|}$$

Aproximaciones por pequeñas oscilaciones:

$$\sin(\theta) \approx \theta + O_3(\theta)$$
$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} + O$$
$$\tan(\theta) \approx \theta$$

Ejemplos de M.A.S.

Muelle y masa:

Ley de newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kA^2$$

Solución general:

($\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, A y α dependen de las condiciones de contorno, son constantes de integración):

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

Oscilaciones elásticas (módulo de Young):

$$F - \frac{AY}{l_0}x = -kx$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{AY}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

Péndulo ideal:

Periodo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

Frecuencia: $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$

Oscilaciones de un fluido (por conservación de la energía):

$$E_{\text{mecánica}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = \frac{1}{2}\rho ALv^2 + \rho Agx^2$$

Donde L es la longitud del tubo, x el desplazamiento del equilibro, A el área, ρ la densidad, v la velocidad y g la aceleración de la gravedad.

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

Objeto flotante:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\rho A}{m}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g\rho A}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

siendo A el area.

Circuito L-C:

Usando que $V_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2q(t)}{\mathrm{d}t^2}$ y $V_C = \frac{q(t)}{C}$, y que $V_L + V_C = V$:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$
$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

siendo A el area.

Péndulo sólido:

Aproximando para pequeñas oscilaciones, y siendo b la distancia entre el eje y el centro de masas: $\ddot{\Theta} + \frac{bmg}{I_{P,z}}\Theta = 0$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{P,z}}{bmg}}$$

siendo A el area.

Modos normales

Dados dos elementos vibratorios, sacamos las ecuaciones diferenciales del movimiento (ej. dos péndulos conectados por un muelle):

$$\omega_m^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_p^2 = \frac{g}{l}$$
$$\ddot{x}_A = -\frac{g}{l}x_A - \frac{k}{m}(x_A - x_B)$$
$$\ddot{x}_A + (\omega_p^2 + \omega_m^2)x_A - \omega_m^2 x_B = 0$$
$$\ddot{x}_B + (\omega_p^2 + \omega_m^2)x_B - \omega_m^2 x_A = 0$$

Entonces suponemos que los dos elementos oscilan con la misma frecuencia (estas serán las frecuencias normales del sistema):

$$\ddot{x}_A = -\omega^2 x_A$$
$$\ddot{x}_B = -\omega^2 x_B$$

Reemplazamos y resolvemos:

$$(-\omega^2 + \omega_p^2 + \omega_m^2)x_A - \omega_m^2 x_B = 0$$
$$-\omega_m^2 x_A + (-\omega^2 + \omega_p^2 + \omega_m^2)x_B = 0$$

Usando la regla del determinante y la solucón para una ecuacion cuadrática:

$$(-\omega^2 + \omega_p^2 + \omega_m^2)^2 - \omega_p^2 = 0$$
$$\omega^4 - 2(\omega_p^2 + \omega_m^2)\omega^2 + ((\omega_p^2 + \omega_m^2 - \omega_m^4)) = 0$$
$$\omega^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \omega_p^2 + \omega_m^2 \pm \sqrt{\omega_m^4}$$
$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_p^2 \\ \omega_p^2 + 2\omega_m^2 \end{cases}$$

Entonces, para cada solución, asumimos las diferentes coordenadas de la forma:

$$x_A = A\cos\omega t$$
$$x_B = B\cos\omega t$$

Reemplazamos de nuevo (usando la primera ecuación es suficiente), ahora con ω, x_A y x_B, por ejemplo, para $\omega = \omega_p$ (los cosenos se marchan):

$$(-\omega_p^2 + \omega_p^2 + \omega_m^2)A - \omega_m^2 B = 0$$
$$\omega_m^2 A - \omega_m^2 B = 0$$
$$A = \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2}B$$
$$A = B$$

Esto significa que las masas están **en fase y tienen la misma amplitud**.

Y para la otra solución $\omega^2 = \omega_p^2 + 2\omega_m^2$:

$$(-\omega_p^2 - 2\omega_m^2 + \omega_p^2 + \omega_m^2)A - \omega_m^2 B = 0$$
$$-\omega_m^2 A - \omega_m^2 B = 0$$
$$A = -\frac{\omega_m^2}{\omega_m^2}B$$
$$A = -B$$

En este segundo modo las masas están **en contrafase y tienen la misma amplitud**.

Para sacar las coordenadas normales, tenemos las ecuaciones:

$$\ddot{q} = -\omega_n q \quad, n \in 0 \ldots N$$

Donde ω_n es la frecuencia normal del modo n y N el número de modos normales. Y:

$$\ddot{q} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \ddot{x}_n$$

Recordando que $\ddot{x}_i = -\omega_n^2 x_i$ para cada modo, sustituyes esto en las ecuaciones del movimiento ($\ddot{x}_i = Ax_1 + Bx_2 \ldots$), y entonces resuelves, usando el ejemplo anterior:

$$\ddot{q} = \alpha_1(-(\omega_p^2 + \omega_m^2)x_A + \omega_m^2 x_B)$$
$$+\alpha_2(\omega_m^2 x_A - (\omega_p^2 + \omega_m^2)x_B)$$
$$= (-\alpha_1\omega_p^2 - \alpha_1\omega_m^2 + \alpha_2\omega_m^2)x_A$$
$$+(\alpha_1\omega_m^2 - \alpha_2\omega_p^2 - \alpha_2\omega_m^2)x_B$$

Para el modo $\omega = \omega_p$:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1\omega_p^2 x_A &= (-\alpha_1(\omega_p^2 + \omega_m^2) + \alpha_2\omega_m^2)x_A \\ -\alpha_2\omega_p^2 x_B &= (\alpha_1\omega_m^2 - \alpha_2(\omega_p^2 + \omega_m^2))x_B \end{aligned}\right\}$$
$$\alpha_2\omega_m^2 = \alpha_1\omega_m^2$$
$$\alpha_2 = \alpha_1$$
$$q_1 = x_A + x_B$$

Para el modo $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + 2\omega_m^2}$:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1(\omega_p^2 + 2\omega_m^2) &= -\alpha_1(\omega_p^2 + \omega_m^2) + \alpha_2\omega_m^2 \\ -\alpha_2(\omega_p^2 + 2\omega_m^2) &= \alpha_1\omega_m^2 - \alpha_2(\omega_p^2 + \omega_m^2) \end{aligned}\right\}$$
$$-\alpha_1\omega_p^2 - 2\alpha_1\omega_m^2 =$$
$$= -\alpha_1\omega_p^2 - \alpha_1\omega_m^2 + \alpha_2\omega_m^2$$
$$-\alpha_1\omega_p^2 - 2\alpha_1\omega_m^2 + \alpha_1\omega_p^2 + \alpha_1\omega_m^2 = \alpha_2\omega_m^2$$
$$-\alpha_1\omega_m^2 = \alpha_2\omega_m^2$$
$$\alpha_1 = -\alpha_2$$
$$q_2 = x_A - x_B$$

Oscilaciones amortiguadas y forzadas

Oscilaciones amortiguadas:
Fuerza amortiguación:
$b\dot{x}(t)$
Constante de amortiguamiento: b
$\gamma = \frac{b}{2m}$ (en el libro $\gamma = \frac{b}{m}$)
Frecuencia natural del sistema:
$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
Frecuencia de amortiguamiento:
$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
Solución general:
$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$
Tres casos:

- Amortiguamiento subcrítico (**oscila**): $\omega_0^2 > \gamma^2; \quad \omega_\gamma \in \mathbb{R}$
- Amortiguamiento crítico (**no oscila**): $\omega_0^2 = \gamma^2; \quad \omega_\gamma = 0$
- Amortiguamiento supercrítico (**no oscila**): $\omega_0^2 < \gamma^2; \quad \omega_\gamma \in \mathbb{C}$

Resolución de problemas:

- Dibujar el **diagrama del sistema libre**
- Obtener la **ecuación del movimiento** (Newton or Lagrange): $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
- Obtener la **ecuación canónica**: $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
- Obtener ω_0 y ξ:
  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
  $\xi = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0}$
- Aplicar solución:
  - Subcrítico $\xi < 1$: $x(t) = Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0 t + \delta)$
  - Crítico $\xi = 1$: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t}$
  - Supercrítico $\xi = 1$: $x(t) = C_1 e^{-|\lambda_1| t} + C_2 e^{-|\lambda_2| t}$

Detalles para amortiguamiento subcrítico:
C y δ se obtienen de las condiciones iniciales:
$x(t) = Ce^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}(\omega_\gamma t + \delta)$
$C^2 = x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_\gamma^2}$
$\tan\delta = \frac{\omega_\gamma x_0}{v_0 + \gamma x_0}$
$T_\gamma = \frac{2\pi}{\omega_\gamma}$
Tiempo de relajación:
$\tau = \frac{1}{\gamma}$
Decremento logarítmico en amplitud:
$\Delta = \frac{T_\gamma}{\tau} = 2\pi\frac{\gamma}{\omega_\gamma} \equiv \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_\gamma)}\right)$
Coeficiente de amortiguación:
$\zeta \equiv \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{\Delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Delta^2}}$
Energía:
$E(t) = \frac{1}{2}kA(t)^2 = E_0 e^{-2\gamma t}$
Nota: 2γ (γ en el libro) es el tiempo necesario para reducir la energía en un factor e^{-1}
Factor de calidad:
$Q = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\gamma} = 2\pi\frac{E(t)}{E(t+T)}$

Oscilaciones Forzadas:
Forzamiento:
$F = F_0\cos(\omega t + \alpha_0)$
Solución:
$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F_0\cos(\omega t + \alpha_0)$
$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = g(t)$
$g(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \alpha_0)$
$= g_0\cos(\omega t + \alpha_0)$
La solución tiene dos partes, una homogénea ($x_h(t)$, misma que el amortiguado) y una no homogénea ($x_p(t)$):
$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$
$x_h(t) = x_{\text{transitoria}} = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_\gamma t + \delta)$
$x_p(t) = x_{\text{estacionaria}} =$
$\frac{g_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \alpha_0 - \beta)$
$\beta = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$
Potencia (máxima cuando F y v en fase ->resonancia): $P = Fv$

Factor de amplificación:
$\frac{A}{g_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\gamma^2\omega^2}}$
Deformación estática:
$\delta_{\text{est}} = \frac{F_0}{k}$
Factor dinámico de amplificación:
$F_{\text{amplif}} = \frac{A}{\delta_{\text{est}}}$

Modos normales en sistemas continuos

Densidad de masa:
$\mu = \frac{M}{L}$
Frecuencia angular normal:
$\omega_n = \frac{n\pi}{L}v = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$
Velocidad normal:
$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$
Ciclos por unidad de tiempo:
$\nu_n = \frac{nv}{2L}$
Longitud de onda:
$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\omega_n}{v}$
Energía cinética:
$Ec = \frac{1}{2}\int_0^L \mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$
$E_{tot} = \sum_{n=0} N E_{\text{tot del modo n}}$

Solución general:
$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
$y(x,t) = C\,\mathrm{sen}(\frac{\omega}{v}x + \alpha)\cos(\omega t + \beta)$

Movimiento de la cuerda libre, solución:
$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)\cos\omega_n t$
$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega_n x}{v_n}\right)\cos\omega_n t$
Restricciones:
Si el lado es libre ($x = L$), es máximo:
$\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)_{x=L} = 0$
Si el lado ($x = L$) está anclado, no se mueve:
$y(L,t) = 0$
Si el lado ($x = L$) está forzado:
$y(L,t) = F$

Movimiento de la cuerda forzada en un extremo
Lado forzado: $y(0,t) = B\cos\omega t$
Lado anclado: $y(L,t) = 0$
Solución:
$f(x) = Asin\left(\frac{wL}{v} + \alpha\right)$
$A = \frac{B}{\sin\left(p\pi - \frac{wL}{v}\right)}$

Movimiento de una barra anclada en un extremo:
Velocidad: $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$
$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right)$
frecuencias naturales (nu ν):
$\nu_n = \frac{(n - \frac{1}{2})v}{2L} = \frac{2n-1}{4L}\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$

Movimiento de un tubo de aire:
Velocidad: $v = \sqrt{\frac{P\gamma}{\rho}}$
Donde $1 < \gamma < \frac{5}{3}$ es el coeficiente de adiabáticas.

Desarrollo de Fourier:
$y(x) = \sum_n^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{L}$
Donde:
$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$
Extras:
Aproximaciones para ángulos pequeños:
$\mathrm{sen}(\theta) = \theta$
$\cos(\theta) = 1$
Integración por partes:
$\int udv = uv - \int vdu$
Multiplicación seno/coseno (para ángulo doble usa $B = A$):
$\sin A\cos B = \frac{\mathrm{sen}(A+B) + \mathrm{sen}(A-B)}{2}$
$\cos A\sin B = \frac{\mathrm{sen}(A+B) - \mathrm{sen}(A-B)}{2}$
$\cos A\cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$
$\sin A\sin B = \frac{\cos(A+B) - \cos(A-B)}{2}$
Series de Taylor (para polinomizar una ecuación):
$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$
Momentos inerciales:
Disco: $I = \frac{mR^2}{2}$