

**Федеральное агентство по образованию РФ**

**Ангарская государственная техническая академия**

# **Вычислительная математика**

## **Учебное пособие**

### **Часть вторая**

УДК 519.6(075)

Вычислительная математика. Часть вторая: Учебное пособие для студентов дневного и заочного обучения технических и химико-технологических специальностей./ В.С.Асламова, А.Г.Колмогоров, Н.Н.Сумарокова. Ангарская государственная техническая академия. – Ангарск: АГТА, 2005г. - 94 с.

ISBN 5-89864-030-4

В пособии рассматриваются основные положения численных методов, относящиеся к решению задач аппроксимации функций, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Значительное внимание уделяется вопросам алгоритмизации методов.

Пособие может быть использовано при выполнении лабораторных, курсовых и дипломных исследовательских работ, так как содержит подробные блок-схемы алгоритмов численных методов, с составлением которых у студентов чаще всего связаны основные трудности.

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом ангарской государственной технической академии

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук,  
старший научный сотрудник  
института динамики систем  
и теории управления СО РАН

М.В.Булатов

кандидат физ.-мат. наук, доцент  
кафедры математики АГТА

С.А.Чихачев

© Ангарская государственная техническая академия, 2005  
© Кафедра автоматизации технологических процессов и производств  
© В.С.Асламова, А.Г.Колмогоров, Н.Н.Сумарокова

АГТА 2005 г.

## Содержание

1. Аппроксимация функций .....	4
1.1. Многочлен Лагранжа .....	7
1.2. Многочлен Ньютона .....	9
1.3. Линейная и квадратичная интерполяция .....	13
1.4. Сплайны .....	21
1.5. Метод наименьших квадратов (среднеквадратичное приближение) ...	26
1.6. Контрольные вопросы .....	32
2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений .....	33
2.1. Одношаговые методы .....	38
2.1.1. Метод Эйлера .....	38
2.1.2. Модифицированный метод Эйлера .....	41
2.1.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности .....	44
2.2. Многошаговые методы .....	47
2.2.1. Методы прогноза и коррекции .....	47
2.2.1.1. Метод Милна .....	49
2.2.1.2. Метод Адамса-Башфорта .....	49
2.2.1.3. Метод Хемминга .....	50
2.2.2. Сравнение методов прогноза и коррекции с одношаговыми методами .....	52
2.3. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений .....	53
2.4. Краевые задачи .....	55
2.4.1. Метод стрельбы .....	57
2.4.2. Метод конечных разностей .....	61
2.5. Контрольные вопросы .....	64
3. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных	65
3.1. Построение разностных схем .....	67
3.2. Уравнения первого порядка .....	72
3.3. Уравнения второго порядка .....	80
3.3.1. Волновое уравнение .....	80
3.3.2. Уравнение теплопроводности .....	86
3.4. Контрольные вопросы .....	93
4. Литература .....	94

## 1. Аппроксимация функций

Пусть величина  $y$  является функцией аргумента  $x$ . Это означает, что любому значению  $x$  из области определения поставлено в соответствие значение  $y$ . Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между  $y$  и  $x$ , т. е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости  $y=f(x)$ . В некоторых случаях даже при известной зависимости  $y=f(x)$  она настолько громоздка (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т. п.), что ее использование в практических расчетах затруднительно.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между параметрами  $x$  и  $y$  неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы  $\{x_i, y_i\}$ . Это означает, что дискретному множеству значений аргумента  $\{x_i\}$  поставлено в соответствие множество значений функции  $\{y_i\}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Эти значения - либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике нам могут понадобиться значения величины  $y$  и в других точках, отличных от узлов  $x_i$ . Однако получить эти значения можно лишь путем очень сложных расчетов или проведением дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра  $y$  при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра  $x$ , поскольку точная связь  $y=f(x)$  неизвестна.

Этой цели и служит задача о приближении (*аппроксимации*) функций: данную функцию  $f(x)$  требуется приближенно заменить (*аппроксимировать*) некоторой функцией  $\varphi(x)$  так, чтобы отклонение  $\varphi(x)$  от  $f(x)$  в заданной области было наименьшим. Функция  $\varphi(x)$  при этом называется *аппроксимирующей*. Для практики весьма важен случай аппроксимаций функции многочленом

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m. \quad (1.1)$$

В дальнейшем будем рассматривать лишь такого рода аппроксимацию. При этом коэффициенты  $a_j$ , будут подбираться так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции.

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек  $x_i$ , то аппроксимация называется *точечной*. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек, например, на отрезке  $[a, b]$  аппроксимация называется *непрерывной* (или *интегральной*).

### Точечная аппроксимация

Одним из основных типов точечной аппроксимации является *интерполирование*. Оно состоит в следующем: для данной функции  $y=f(x)$  строим многочлен (1.1), принимающий в заданных точках  $x_i$  те же значения  $y_i$ , что и функция  $f(x_i)$ , т. е.

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

При этом предполагается, что среди значений  $x_i$  нет одинаковых, т. е.  $x_i \neq x_k$  при  $i \neq k$ . Точки  $x_i$  называются *узлами интерполяции*, а многочлен  $\varphi(x)$  - *интерполяционным многочленом*.

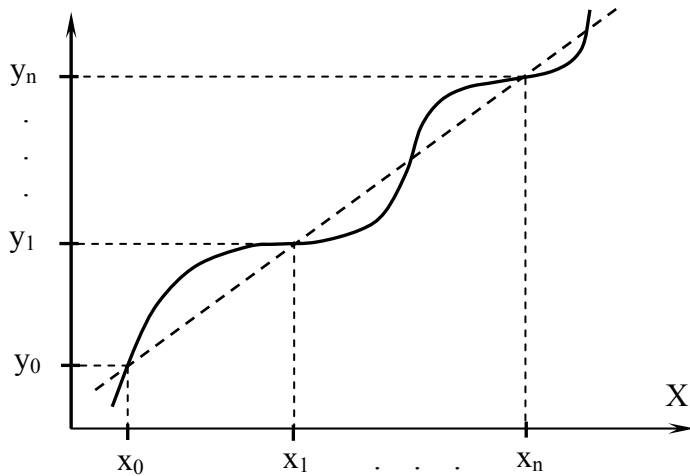


Рис. 1. Построение интерполяционного многочлена

Таким образом, близость интерполяционного многочлена к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданной системе точек (рис. 1, сплошная линия).

Максимальная степень интерполяционного многочлена  $m = n$ ; в этом случае говорят о *глобальной интерполяции*, поскольку один многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1.3)$$

используется для интерполяции функции  $f(x)$  на всем рассматриваемом интервале изменения аргумента  $x$ . Коэффициенты  $a_j$  многочлена (1.3) находят-ся из системы уравнений (1.2). Можно показать, что при  $x_i \neq x_k$  ( $i \neq k$ ) эта система имеет единственное решение.

Интерполяционные многочлены могут строиться отдельно для разных частей рассматриваемого интервала изменения  $x$ . В этом случае имеем *кусочную* (или *локальную*) *интерполяцию*.

Как правило, интерполяционные многочлены используются для аппроксимации функции в промежуточных точках между крайними узлами интерполяции, т. е. при  $x_0 < x < x_n$ . Однако иногда они используются и для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка ( $x < x_0$ ,  $x > x_n$ ). Это приближение называют *экстраполяцией*.

Как видим, при интерполировании основным условием является прохождение графика интерполяционного многочлена через данные значения функции в узлах интерполяции. Однако в ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно.

Например, при большом количестве узлов интерполяции получается высокая степень многочлена (1.3) в случае глобальной интерполяции, т. е. когда нужно иметь один интерполяционный многочлен для всего интервала изменения аргумента. Кроме того, табличные данные могли быть получены путем измерений и содержать ошибки. Построение аппроксимирующего многочлена с условием обязательного прохождения его графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерениях ошибок. Выход из этого положения может быть найден выбором такого многочлена, график которого проходит близко от данных точек (рис. 1, пунктирная линия). Понятие «близко» уточняется при рассмотрении разных видов приближения.

Одним из таких видов является *среднеквадратичное приближение* функций с помощью многочлена (1.1). При этом  $m \leq n$ ; случай  $m=n$  соответствует интерполяции. На практике стараются подобрать аппроксимирующий многочлен как можно меньшей степени (как правило,  $m = 1, 2, 3$ ).

$$S = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2. \quad (1.4)$$

### 1.1. Многочлен Лагранжа

Рассмотрим случай построения интерполяционного многочлена, единого для всего отрезка  $[x_0, x_n]$ . При этом график интерполяционного многочлена должен проходить через все заданные точки.

Запишем искомый многочлен в виде:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (1.5)$$

[illegible]

Будем искать многочлен в виде линейной комбинации многочленов степени  $n$ :

При этом потребуем, чтобы каждый многочлен  $l_i(x)$  обращался в нуль во всех узлах интерполяции, за исключением одного  $i$ -го узла, где он должен равняться единице. Легко проверить, что этим условиям отвечает многочлен вида

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}, \\ l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}, \\ &\dots\dots\dots \\ l_i(x) &= \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.9)$$
$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}. \quad (1.10)$$

Покажем, что этот многочлен является единственным. Допустим противоположное: пусть существует ещё один многочлен  $F(x)$  степени  $n$ , принимающий в узлах интерполяции заданные значения, т.е.  $F(x_i) = y_i$ . Тогда разность  $R(x) = L(x) - F(x)$ , являющаяся многочленом степени  $n$  (или ниже) в узлах  $x_i$  равна:

$$R(x_i) = L(x_i) - F(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Из формулы (1.10) можно получить выражения для линейной ( $n=1$ ) и квадратичной ( $n=2$ ) интерполяций:

$$L(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1, \quad n=1,$$

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2, \quad n=2.$$

Существует несколько обобщений интерполяционного многочлена Лагранжа. Например, довольно широко используются *интерполяционные многочлены Эрмита*. Здесь наряду со значениями функции  $y_i$  в узлах  $x_i$  задаются значения её производной  $y'_i$ . Задача состоит в том, чтобы найти многочлен  $\varphi(x)$  степени  $(2n+1)$ , значения которого удовлетворяют условию интерполяции (1.2), а производная в узлах  $x_i$  удовлетворяет соотношению

$$\varphi'(x_i) = y'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

В этом случае также существует единственное решение, если все  $x_i$  различны.

На рис. 2 приведена блок-схема метода аппроксимации функции интерполяционным полиномом Лагранжа.

### 1.2. Многочлен Ньютона

Рассмотрим случай равноотстоящих значений аргумента, т.е.  $x_i - x_{i-1} = h = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Величина  $h$  называется шагом.

Введём также понятие конечных разностей. Пусть известны значения функции в узлах  $x_i$ :  $y_i = f(x_i)$ .

Составим разности значений функции:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0), \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h), \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta y_{n-1} &= y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h). \end{aligned}$$

Эти значения  $\Delta y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) называют *первыми разностями* (или *разностями первого порядка*) функции.

Можно составить вторые разности функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1},$$

$$i=1, 2, \dots, n-2.$$

Аналогично составляются *разности порядка k*:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i=1, 2, \dots, n-k.$$

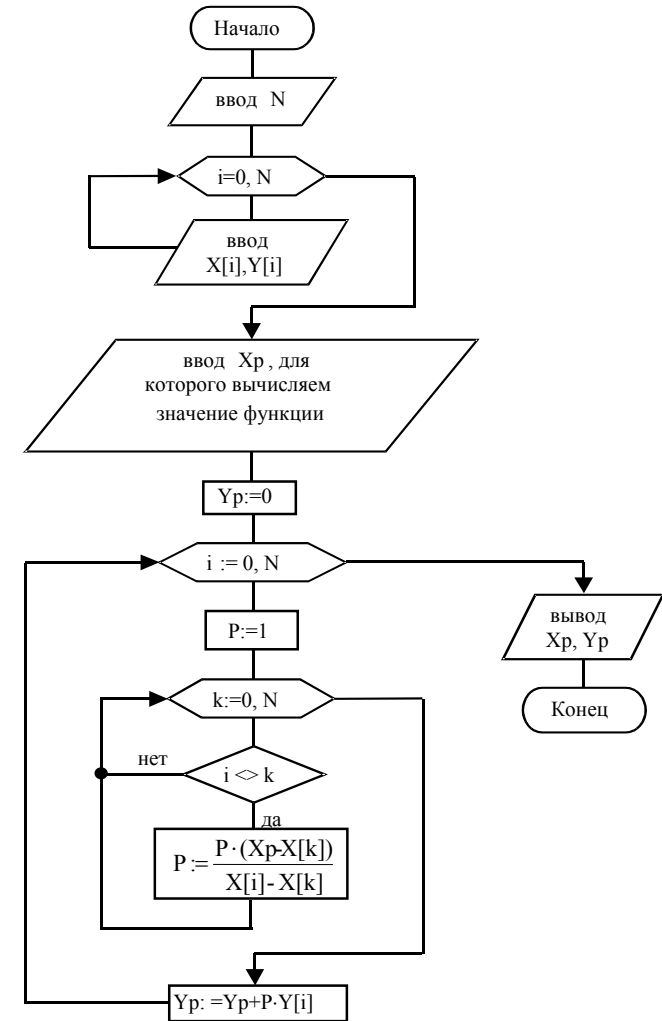


Рис. 2. Блок-схема метода интерполяции функции полиномом Лагранжа

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции. Например,

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0, \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \dots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0. \end{aligned}$$

Аналогично для любого  $k$  можно записать:

$$\Delta^k y_0 = y_k - ky_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0. \quad (1.11)$$

Эту формулу можно записать и для значения разности в узле  $x_i$ :

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - ky_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i.$$

Используя конечные разности, можно определить  $y_k$ :

$$y_k = y_0 - k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0. \quad (1.12)$$

Перейдём к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен будем искать в следующем виде:

$$N(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}). \quad (1.13)$$

График многочлена должен проходить через заданные узлы, т.е.  $N(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Эти условия используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$\begin{aligned} N(x_0) &= a_0 = y_0, \\ N(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1, \\ N(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2 = y_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Найдём отсюда коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0, \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \\ a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - 2a_1 h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно найти и другие коэффициенты. Общая формула для их вычисления имеет вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Подставляя эти выражения в формулу (1.13), получаем следующий вид интерполяционного многочлена Ньютона:

$$N(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots \quad (1.14)$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Конечные разности  $\Delta^k y_0$  могут быть вычислены по формуле (1.11).

Формулу (1.14) часто записывают в другом виде. Для этого вводится переменная  $t = (x-x_0)/h$ ; тогда

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ht, \quad \frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1, \\ \frac{x-x_2}{h} &= t-2, \dots, \quad \frac{x-x_{n-1}}{h} = t-n+1. \end{aligned}$$

С учётом этих соотношений формулу (1.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} N(x_0 + th) &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ &+ \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Полученное выражение может аппроксимировать данную функцию  $y=f(x)$  на всём отрезке изменения аргумента  $[x_0, x_n]$ . С точки зрения повышения точности расчётов и уменьшения числа членов в (1.15) целесообразно ограничиться случаем  $0 \leq t \leq 1$ , т.е. использовать формулу (1.15) для  $x_0 \leq x \leq x_1$ . Для других значений аргумента, например для  $x_1 \leq x \leq x_2$ , вместо  $x_0$  лучше взять  $x_1$ . Таким образом, интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в виде

$$\begin{aligned} N(x_i + th) &= y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_i, \\ &i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Полученное выражение называется *первым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования вперёд*.

Интерполяционную формулу (1.16) обычно используют для вычисления значений функций в точках левой половины рассматриваемого отрезка. Это объясняется следующим. Разности  $\Delta^k y_i$  вычисляются через значения функ-

ции  $y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k}$ , причём  $i+k \leq n$ ; поэтому при больших значениях  $i$  мы не можем вычислить разности высших порядков ( $k \leq n-i$ ). Например, при  $i=n-3$  в (1.16) можно учесть только  $\Delta y, \Delta^2 y$  и  $\Delta^3 y$ .

Для правой половины рассматриваемого отрезка разности лучше вычислять справа налево. В этом случае

$$t = \frac{(x - x_n)}{h},$$

т.е.  $t < 0$ , и интерполяционный многочлен Ньютона будет иметь вид:

$$N(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (1.17)$$

Полученная формула называется *вторым интерполяционным многочленом Ньютона для интерполирования назад*.

Отметим, что разные способы построения многочленов Лагранжа и Ньютона дают тождественные интерполяционные формулы при заданной таблице значений функции. Это следует из единственности интерполяционного многочлена заданной степени (при отсутствии совпадающих узлов интерполяции).

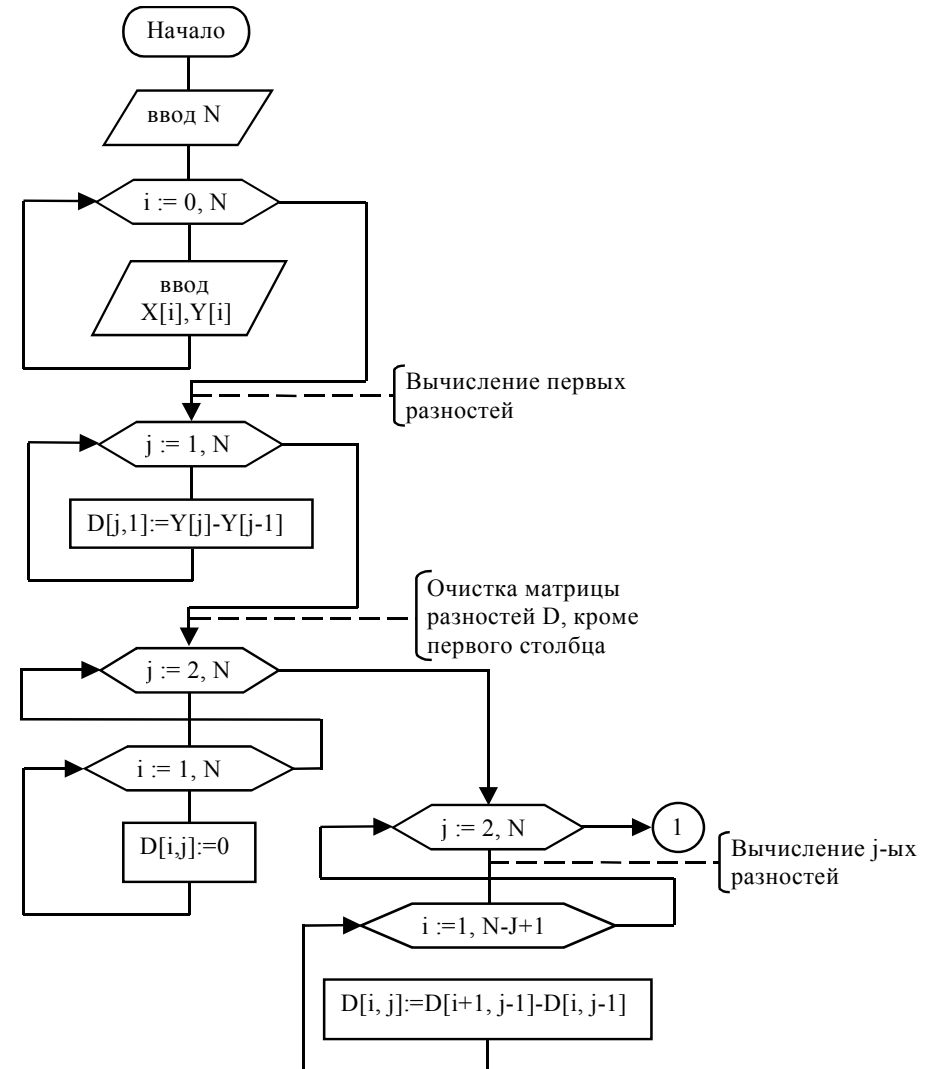
Блок-схема интерполяции функции полиномом Ньютона представлена на рис. 3.

### 1.3. Линейная и квадратичная интерполяция

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является *линейная интерполяция*, которая заключается в следующем: узлы интерполяции  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) соединяются прямолинейными отрезками, и функция  $f(x)$  аппроксимируется ломаной.

Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Поскольку имеется  $n$  интервалов  $(x_{i-1}, x_i)$ , то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного многочлена используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности для  $i$ -го интервала можно записать уравнение прямой, проходящей через точки  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  и  $(x_i, y_i)$ , в виде:

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$



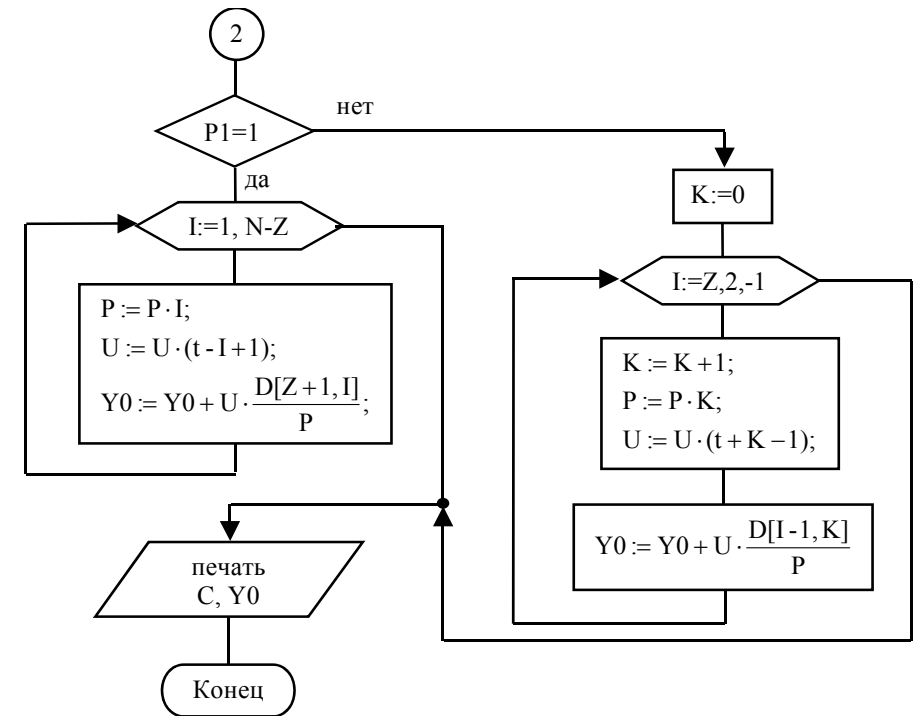
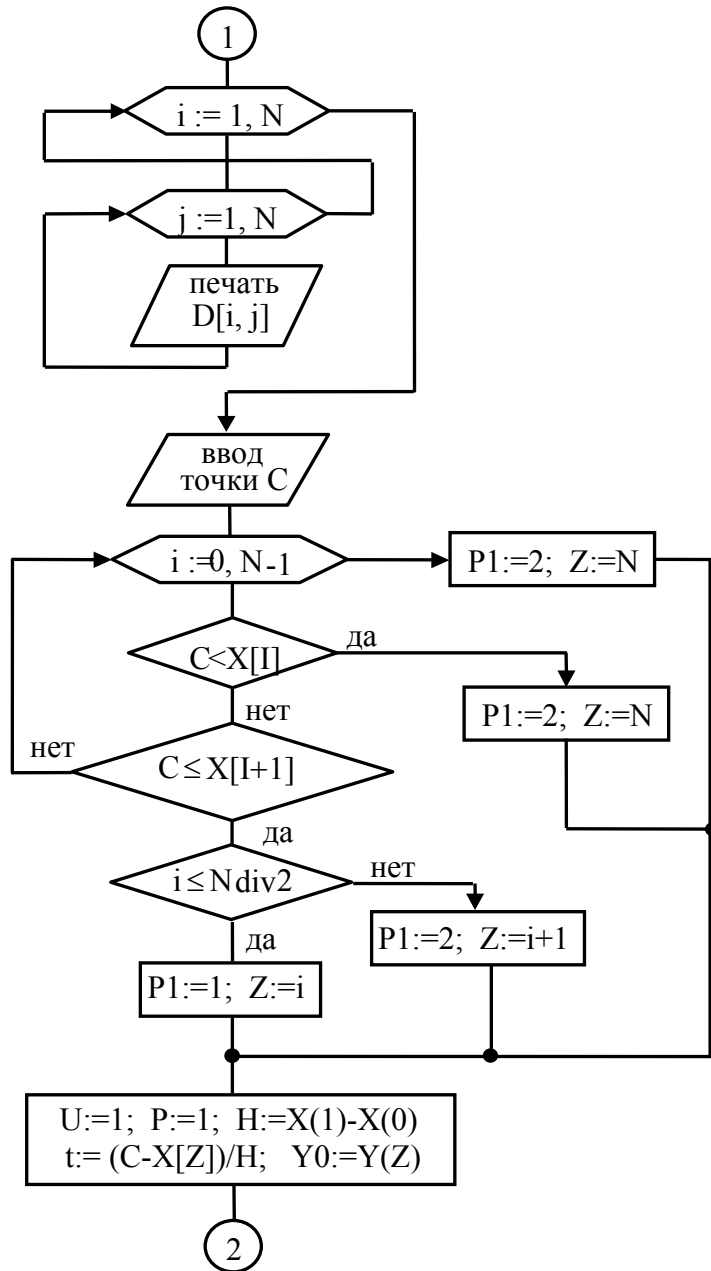


Рис.3. Блок-схема интерполяции функции полиномом Ньютона

Отсюда

$$y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (1.18)$$

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}.$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента  $x$ , а затем подставить его в формулу (1.18) и найти приближённое значение функции в этой точке. Блок-схема данного алгоритма представлена на рис.4.

В случае квадратичной интерполяции в качестве интерполяционной функции на отрезке  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  принимается квадратный трёхчлен. Такую интерполяцию называют также *параболической*.

Уравнение квадратного трёхчлена (параболы):



$$y = a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \quad (1.19)$$

$$x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1},$$

содержит три неизвестных коэффициента  $a_1, a_2, a_3$ , которые для каждого из интервалов имеют свои значения. Для их определения необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (1.19) через три точки  $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ . Эти условия можно записать в виде

$$\begin{cases} a_1 x_{i-1}^2 + a_2 x_{i-1} + a_3 = y_{i-1}, \\ a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3 = y_i \\ a_1 x_{i+1}^2 + a_2 x_{i+1} + a_3 = y_{i+1}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Интерполяция для любой точки  $x \notin [x_0, x_n]$  проводится по трём ближайшим к ней узлам.

Алгоритм вычисления приближённого значения функции с помощью квадратичной интерполяции можно представить в виде блок-схемы (см. рис. 5). В представленном алгоритме решение системы алгебраических уравнений (1.20) найдено методом Крамера. В блок-схеме используется матрица  $D$ , построенная на основе системы (1.20):

$$D = \begin{pmatrix} x_{i-1}^2 & x_{i-1} & 1 \\ x_i^2 & x_i & 1 \\ x_{i+1}^2 & x_{i+1} & 1 \end{pmatrix}$$

При написании программы следует определить тип матрицы `type matr = array [1..3, 1..3] of real`. Заголовок процедуры имеет следующие формальные параметры `PROC(D: matr; var dt: real)`. В процедуре определитель `dt` матрицы  $D$  находится по правилу звёздочки. Для хранения коэффициентов параболы используется массив `a`, для значений определителей (главного и дополнительных) – массив `det`.

**Задание.** Модифицируйте алгоритм, используя для решения системы (1.20): а) метод Гаусса; б) метод Гаусса-Жордана; в) метод Гаусса с выбором главного элемента в столбце.

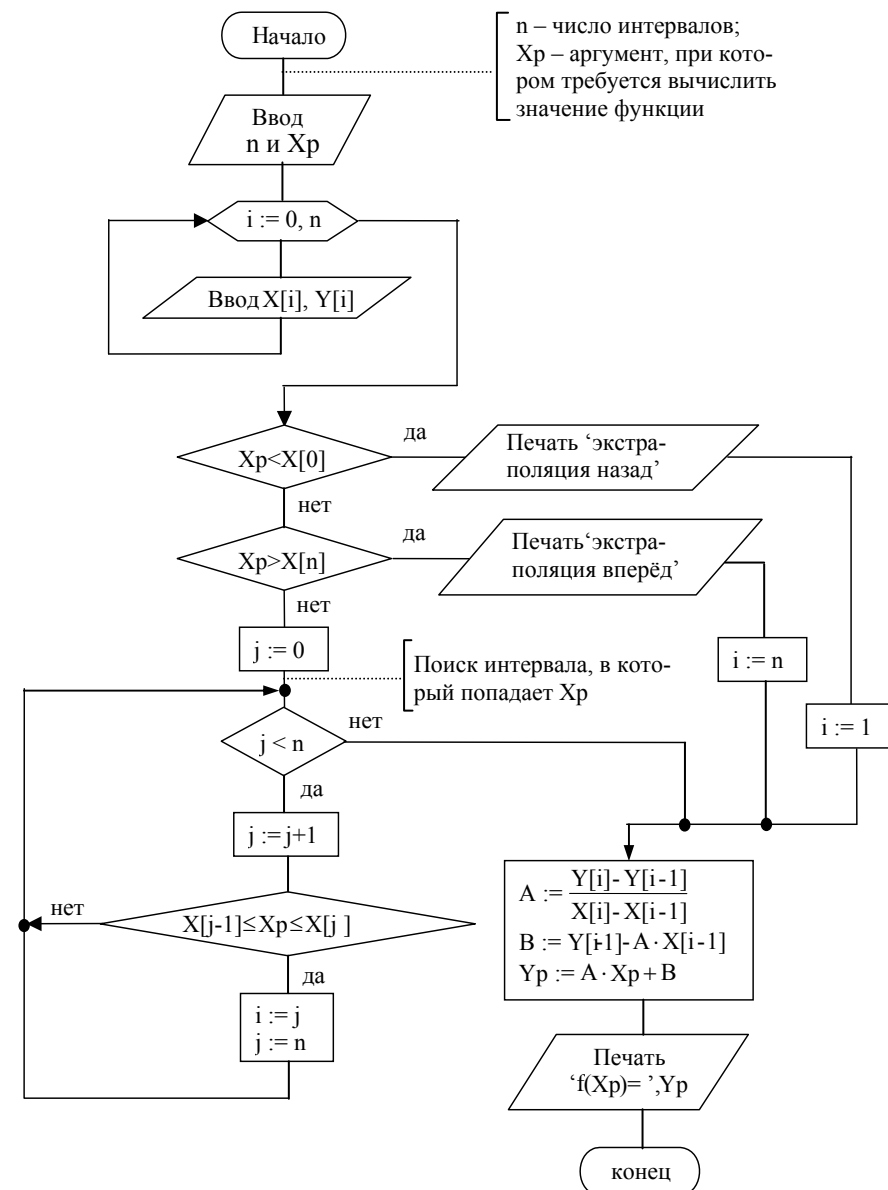


Рис.4. Блок-схема метода линейной интерполяции

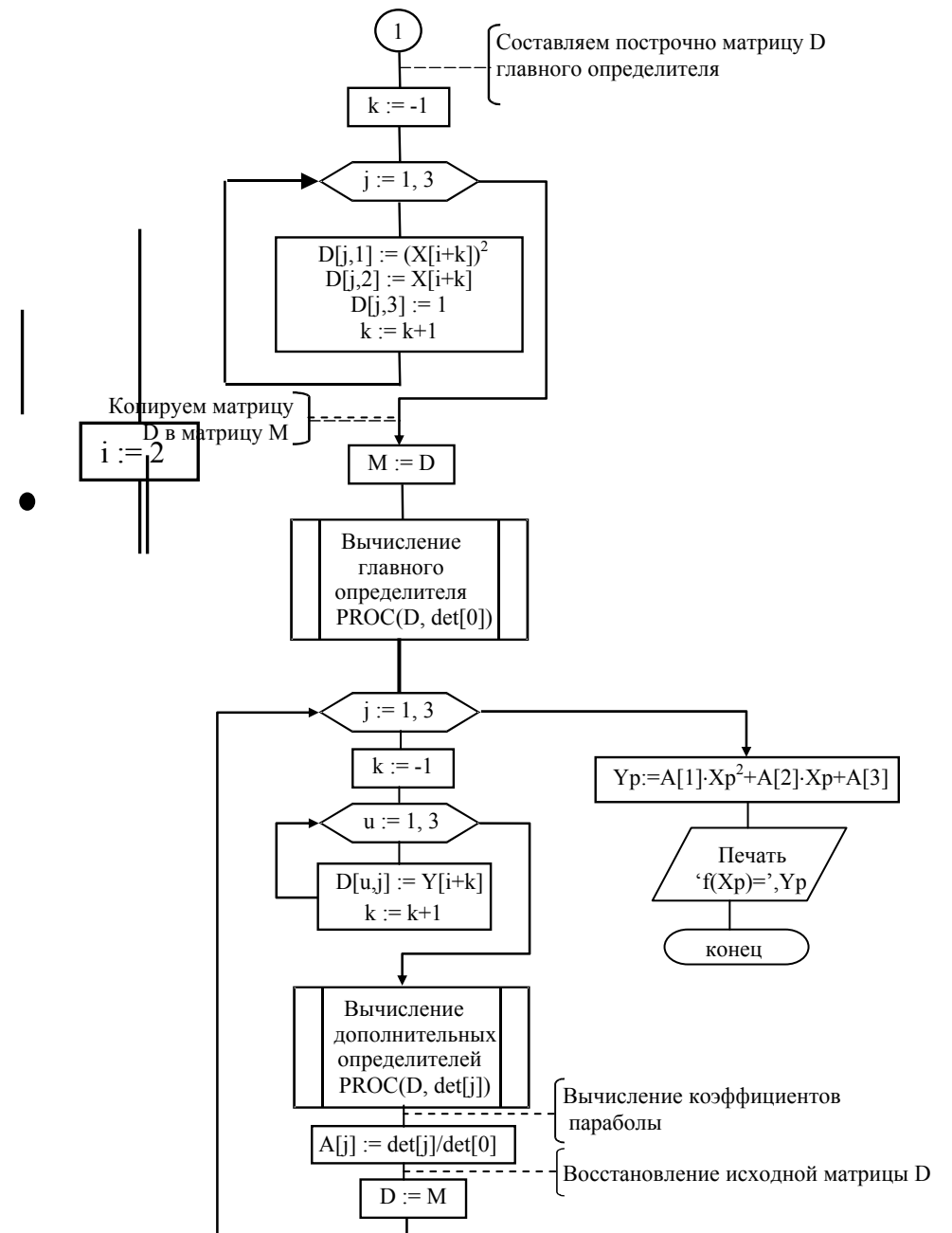
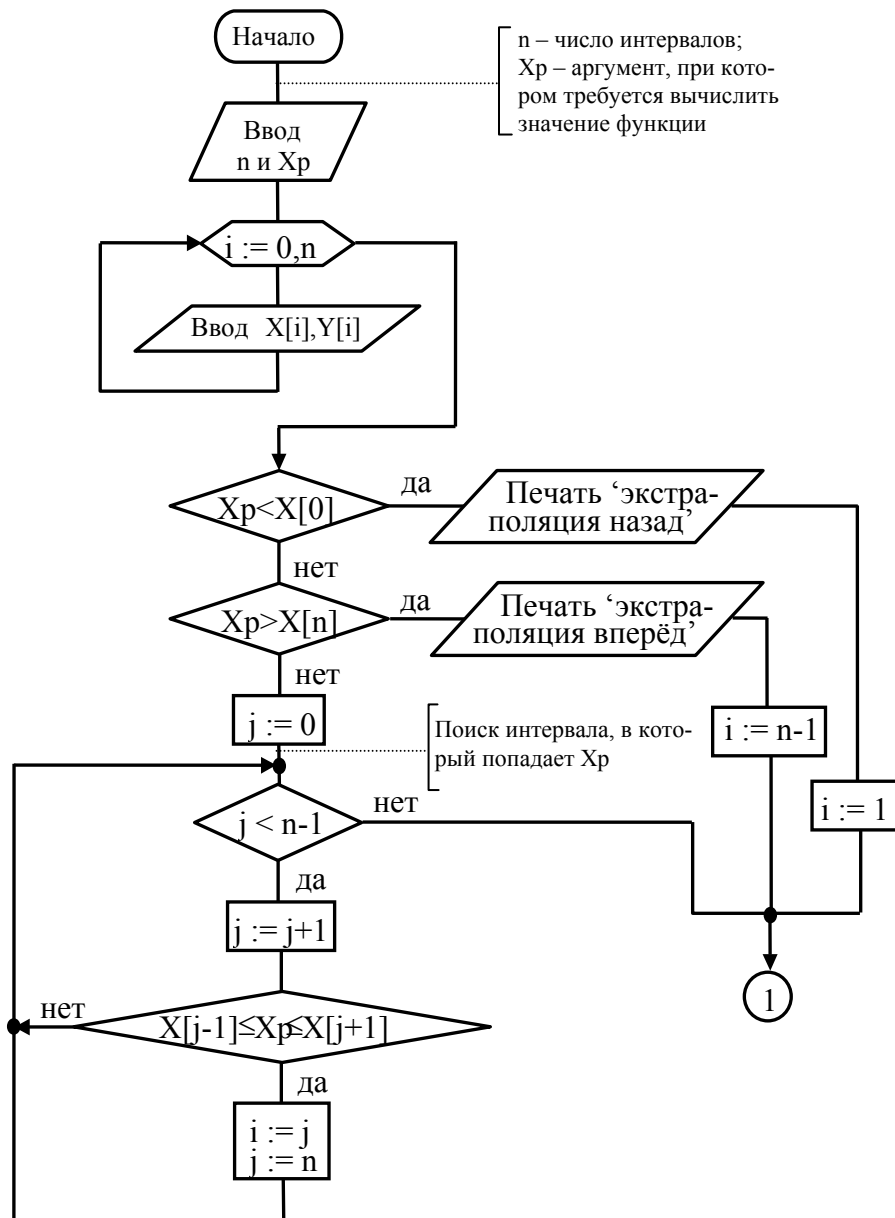


Рис.5. Блок-схема метода квадратичной интерполяции

#### 1.4. Сплаины

Кубические сплайн-функции – специальным образом построенные многочлены третьей степени. Они представляют собой некоторую математическую модель гибкого тонкого стержня из упругого материала. Если закрепить его в двух соседних узлах интерполяции с заданными углами наклонов  $\alpha$  и  $\beta$ , то между точками закрепления этот стержень (механический сплайн) примет некоторую форму, минимизирующую его потенциальную энергию (рис.6).

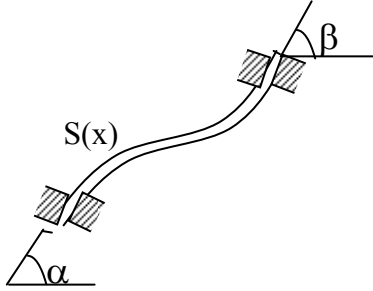


Рис.6. Сплайн

Пусть форма этого стержня определяется функцией  $y=S(x)$ . Уравнение свободного равновесия имеет вид  $\frac{d^4 S(x)}{dx^4} = 0$ . Отсюда следует, что между каждой парой соседних узлов интерполяции функция  $S(x)$  является многочленом третьей степени. Запишем его в виде:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (1.21)$$

Для определения коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  на всех  $n$  элементарных отрезках необходимо получить  $4n$  уравнений. Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции  $S(x)$  через заданные точки, то есть  $S(x_{i-1})=y_{i-1}$ ,  $S(x_i)=y_i$ . Эти условия можно записать следующим образом:

$$S(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \quad (1.22)$$

$$S(x_i) = S(x_i + h) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (1.23)$$

Эта система содержит  $2n$  уравнений. Для получения недостающих уравнений зададим условия непрерывности первых и вторых производных в узлах интерполяции.

Вычислим производные многочлена (1.21):

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \quad S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Приравнивая в каждом внутреннем узле  $x=x_i$  ( $i=2, n-1$ ) значения этих производных, вычисленные в левом узле интервала  $(x_i, x_{i+1})$  и правом узле интервала  $(x_{i-1}, x_i)$ , получаем  $2n-2$  уравнений:

$$b_{i+1} = b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i, \quad (1.24)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_i d_i, \quad i=1,2,\dots,n-1. \quad (1.25)$$

Недостающие два соотношения получаются из условий закрепления концов сплайна.

В частности, при свободном закреплении концов можно приравнять нулю кривизну линии в этих точках. Такая функция, называемая свободным кубическим сплайном, обладает свойством минимальной кривизны. Из условий нулевой кривизны на концах следуют равенства нулю вторых производных в этих точках:

$$S''(x_0) = c_1 = 0, \quad S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \quad (1.26)$$

Уравнения (1.22)–(1.26) составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения  $4n$  коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Эту систему можно привести к более удобному виду. Из условия (1.22) сразу можно найти все коэффициенты  $a_i$ . Далее из (1.25), (1.26) получим:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad d_n = \frac{c_n}{3h_n}. \quad (1.27)$$

Подставим эти соотношения, а также значения  $a_i = y_{i-1}$  в (1.23) и найдем отсюда коэффициенты:

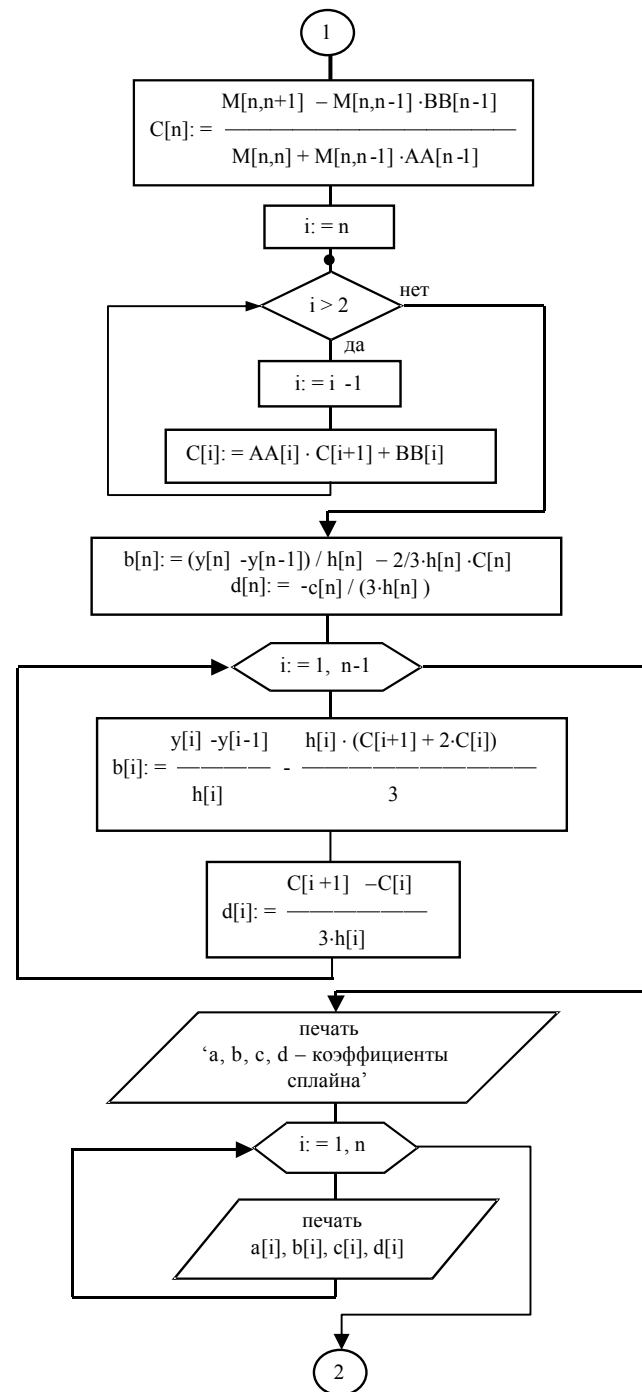
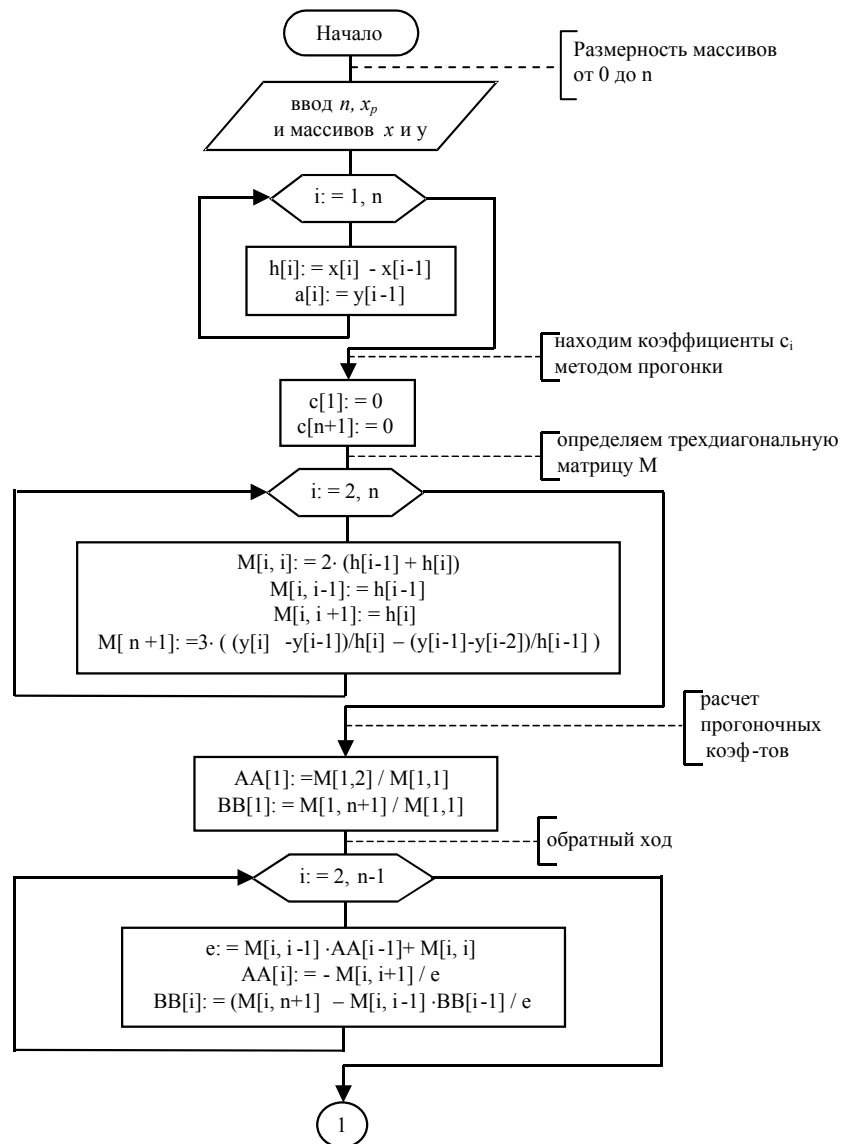
$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad i=1,2,\dots,n-1, \\ b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_n c_n. \quad (1.28)$$

Учитывая выражения (1.27) и (1.28) исключим из уравнения (1.24) коэффициенты  $d_i$  и  $b_i$ . Окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов  $c_i$ :

$$c_1 = 0, \quad c_{n+1} = 0, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad i=2,3,\dots,n. \quad (1.29)$$

Матрица этой системы трехдиагональная, то есть ненулевые элементы находятся на главной и двух соседних с ней диагоналях, расположенных сверху и снизу. По найденным из системы (1.29) коэффициентам  $c_i$  легко вычислить коэффициенты  $d_i$  и  $b_i$ .

Блок-схема метода сплайнов приведена на рис. 7.



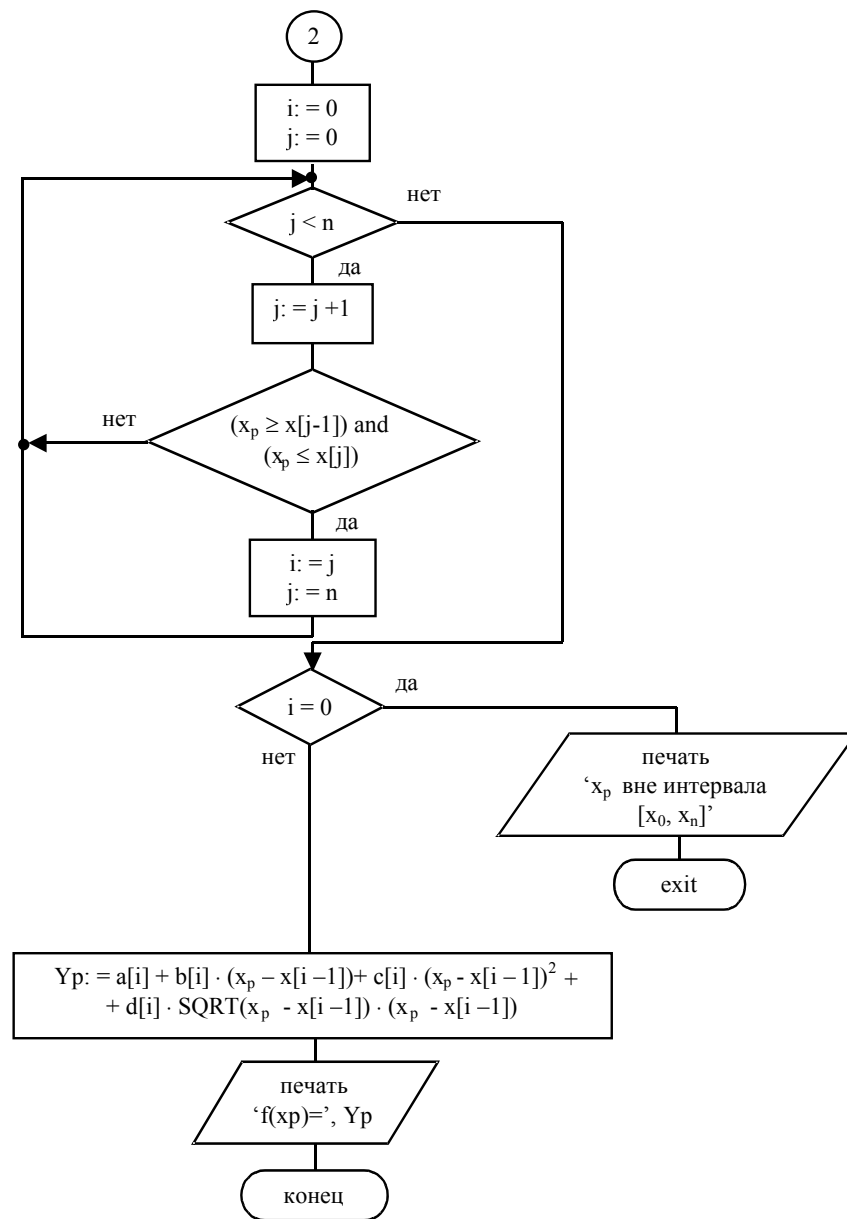


Рис 7. Блок-схема интерполяции при помощи сплайнов

### 1.5. Метод наименьших квадратов (среднеквадратичное приближение)

Эмпирические формулы. Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между  $x$  и  $y$ , мы в результате серии экспериментов получили ряд измерений этих величин и получили таблицу значений:

$x_0$	$x_1$	...	$x_n$
$y_0$	$y_1$	...	$y_n$

Задача состоит в том, чтобы найти приближённую зависимость

$$y = f(x), \quad (1.30)$$

значения которой при  $x = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) мало отличаются от опытных данных  $y_i$ .

Отметим, что задача построения эмпирической формулы отличается от задачи интерполирования. График эмпирической зависимости не проходит через заданные точки  $(x_i, y_i)$ , как в случае интерполяции.

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: подбора общего вида этой формулы и определения лучших значений содержащихся в ней параметров. Общий вид формулы иногда известен из физических соображений. Например, для упругой среды связь между напряжением  $\sigma$  и относительной деформацией  $\xi$  определяется законом Гука:  $\sigma = E\xi$ , где  $E$  - модуль упругости; задача сводится к определению одного неизвестного параметра  $E$ .

Если характер зависимости неизвестен, то вид эмпирической формулы может быть произвольным. Предпочтение обычно отдаётся наиболее простым формулам, обладающим достаточной точностью. Они первоначально выбираются из геометрических соображений: экспериментальные точки наносятся на график, и примерно угадывается общий вид зависимости путём сравнения полученной кривой с графиками известных функций. Успех здесь в значительной мере определяется опытом и интуицией исследователя.

Будем считать, что тип эмпирической формулы выбран и её можно представить в виде:

$$y = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m), \quad (1.31)$$

где  $\varphi$  - известная функция,  $a_0, a_1, \dots, a_m$  - неизвестные постоянные параметры.

Задача состоит в том, чтобы определить такие значения этих параметров, при которых эмпирическая формула даёт хорошее приближение данной функции, значения которой в точках  $x_i$  равны  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Разность между значениями опытных данных  $y_i$  и значениями эмпирической функции в точках  $x_i$  (отклонения) обозначим через  $\xi_i$ . Тогда

$$\xi_i = \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i, \quad (1.32)$$

$$i = 0, 1, \dots, n.$$

Задача нахождения наилучших значений параметров  $a_0, a_1, \dots, a_m$  сводится к некоторой минимизации отклонений  $\xi_i$ . Одним из способов решения данной задачи является метод наименьших квадратов.

**Основная идея метода.** Запишем сумму квадратов отклонений (1.32) для всех точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$ :

$$S = \sum_{i=0}^n \xi_i^2 = \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2. \quad (1.33)$$

Параметры  $a_0, a_1, \dots, a_m$  эмпирической формулы (1.31) будем находить из условия минимума функции  $S = S(a_0, a_1, \dots, a_m)$ . В этом состоит суть метода наименьших квадратов.

Поскольку параметры  $a_0, a_1, \dots, a_m$  выступают в роли независимых переменных функции  $S$ , то её минимум найдём, приравняв к нулю частные производные по этим переменным (необходимое условие экстремума функции):

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (1.34)$$

Полученные соотношения (1.34) – система уравнений для определения  $a_0, a_1, \dots, a_m$ .

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для частного случая, широко используемого на практике. В качестве эмпирической формулы рассмотрим многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (1.35)$$

Формула (1.33) для определения суммы квадратов отклонений  $S$  примет вид

$$S = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2 \quad (1.36)$$

Для составления системы уравнений (1.34) найдём частные производные функции  $S = S(a_0, a_1, \dots, a_m)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i), \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} &= 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m. \end{aligned}$$

Приравнявая эти выражения к нулю в соответствии с уравнениями (1.34) и собирая коэффициенты при неизвестных  $a_0, a_1, \dots, a_m$  получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot a_0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m &= \sum_{i=0}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^n x_i y_i, \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^n x_i^m y_i. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Решая эту систему линейных уравнений (1.37), получаем коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  многочлена (1.35), которые являются искомыми параметрами эмпирической формулы.

Пусть даны некоторые экспериментальные значения  $(x_i, y_i)$ , анализируя которые можно предположить, что искомая функция  $y_p$  линейно зависит от переменной  $x$ :

$$y_p = a_0 + a_1 x. \quad (1.38)$$

Будем определять параметры  $a_0$  и  $a_1$  так, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных значений  $y_i$  от прямой (1.38) была минимальна, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n (y_p - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 = \min_{a,b} S(a_0, a_1).$$

Поскольку параметры  $a_0$  и  $a_1$  выступают в роли независимых переменных функции  $S$ , то её минимум найдём, приравняв нулю частные производные по этим переменным

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0. \quad (1.39)$$

Запишем систему в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

Из системы (1.40) находят неизвестные параметры  $a_0$  и  $a_1$ .

Деление обоих уравнений системы на 2, раскрытие скобок и приведение подобных при параметрах  $a_0$  и  $a_1$  даёт следующую систему

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n y_i = a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n y_i x_i = a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{cases} \quad (1.41)$$

Введём обозначения

$$S_1 = \sum_{i=0}^n y_i; \quad S_2 = \sum_{i=0}^n x_i; \quad S_3 = \sum_{i=0}^n y_i x_i; \quad S_4 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2.$$

Получим простую систему уравнений относительно параметров  $a_0$  и  $a_1$ :

$$\begin{cases} S_1 = a_0(n+1) + a_1 S_2 \\ S_3 = a_0 S_2 + a_1 S_4 \end{cases}$$

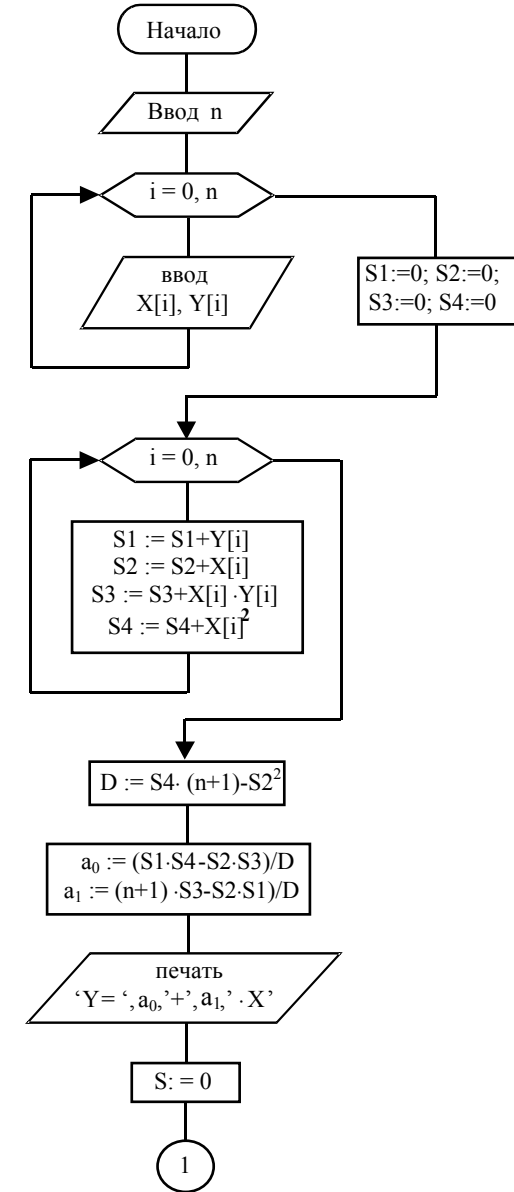
Из первого уравнения системы находим

$$a_0 = \frac{S_1 - a_1 S_2}{n+1}.$$

Подставляя  $a_0$  во второе уравнение системы, получим

$$a_1 = \frac{(n+1)S_3 - S_2 S_1}{(n+1)S_4 - S_2^2}; \quad a_0 = \frac{S_1 S_4 - S_2 S_3}{S_4(n+1) - S_2^2}.$$

Блок-схема метода наименьших квадратов приведена на рис.8.



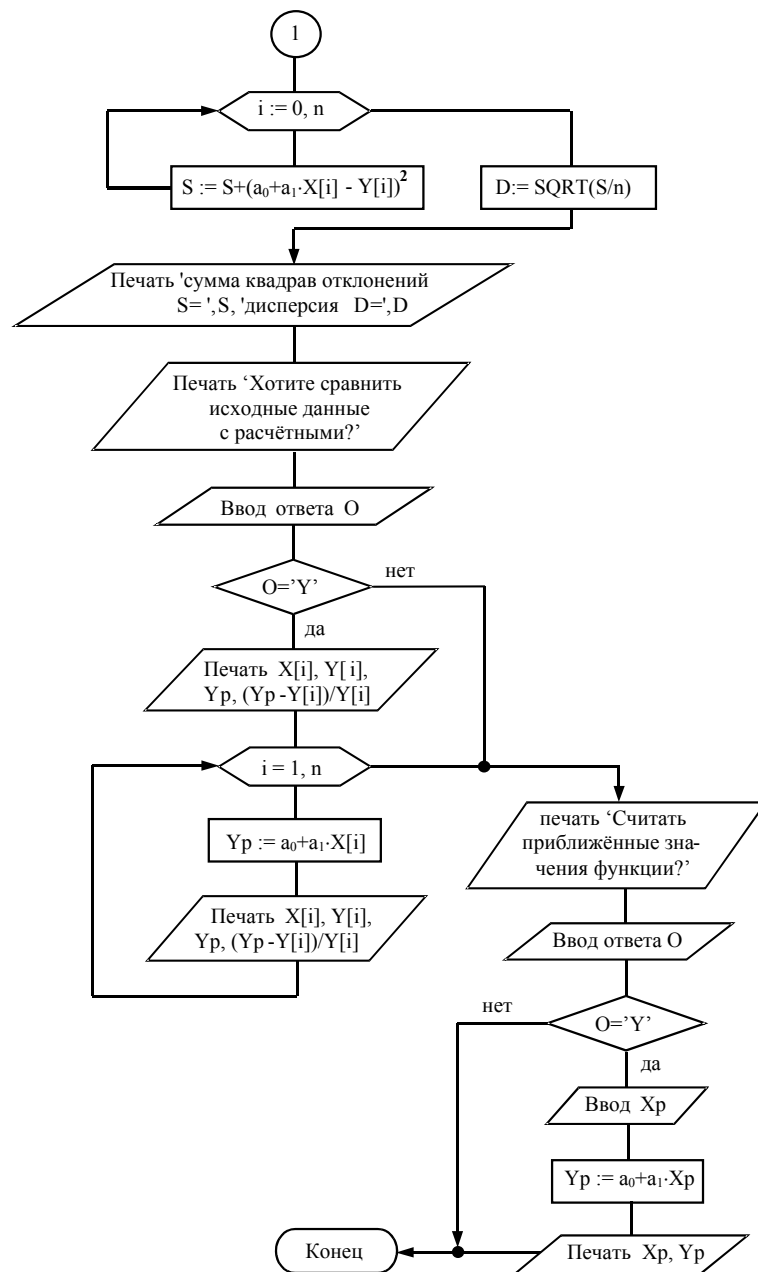


Рис. 8. Блок-схема метода наименьших квадратов

## 1.6. Контрольные вопросы

1. В каких случаях прибегают к методам численной аппроксимации?
2. В чём состоит отличие точечной аппроксимации от непрерывной?
3. Как формулируется основное условие интерполяции?
4. В каких случаях целесообразно использовать локальную и глобальную интерполяции?
5. В чём отличие экстраполяции от интерполяции?
6. Сколько узлов необходимо для использования метода квадратичной интерполяции?
7. В чём отличие первого от второго интерполяционного многочлена Ньютона?
8. В каких случаях следует использовать первый (второй) интерполяционный многочлен Ньютона?
9. Назовите основное достоинство среднеквадратичного приближения.
10. Как убедиться в правильности полученного интерполяционного значения функции.



## 2. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальными называются уравнения, содержащие одну или несколько производных. Инженеру очень часто приходится сталкиваться с ними при разработке новых изделий или технологических процессов, так как большая часть законов физики формулируется именно в виде дифференциальных уравнений. В сущности, большинство задач проектирования, связанных с расчётом потоков энергии или движения тел, в конечном счёте сводится к решению дифференциальных уравнений. К сожалению, лишь очень немногие из них удаётся решить без помощи вычислительных машин. Поэтому численные методы решения дифференциальных уравнений играют важную роль в практике инженерных расчётов.

В зависимости от числа независимых переменных дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения в частных производных, содержащие несколько независимых переменных. Данная глава посвящена методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции  $y = y'(x)$ . Их можно записать в виде:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $x$  - независимая переменная.

Наивысший порядок  $n$  входящей в уравнение (2.1) производной называется *порядком дифференциального уравнения*. В частности, запишем уравнения первого и второго порядков:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, y, y', y'') = 0.$$

В ряде случаев из общей записи дифференциального уравнения удастся выразить старшую производную в явном виде. Например,

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y'' &= f(x, y, y'). \end{aligned}$$

Такая форма записи называется *уравнением, разрешённым относительно старшей производной*.

*Линейным дифференциальным уравнением* называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производных. Например,  $y' - x^2 y = \sin(x)$  - линейное уравнение первого порядка.

*Решением дифференциального уравнения* (2.1) называется всякая функция  $y=f(x)$ , которая после ее подстановки в исходное уравнение превращает его в тождество.

*Общее решение* обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка содержит  $n$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , т. е. общее решение уравнения имеет вид:

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (2.2)$$

*Частное решение* дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения. Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$$y = f(x, C).$$

Если постоянная принимает определенное значение  $C=C_0$ , то получим частное решение

$$y = f(x, C_0).$$

**Локальная теорема о существовании и единственности решения:** если в уравнении  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  функция  $f$  непрерывна в некоторой области  $G = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$  и удовлетворяет в  $G$  условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \gamma \cdot |y_1 - y_2|,$$

где  $\gamma$  - постоянная, то существует такое число  $\alpha$ , что на отрезке  $x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha$  существует единственное решение  $\tilde{y}(x_0) = y_0$ .

Замечание. Выполнение условия Липшица можно заменить более сильным условием, накладываемым на функцию  $f(x, y)$  - должна существовать ограниченная по модулю частная производная  $\frac{df(x, y)}{dy}$  в области  $G$ .

Для выделения частного решения из общего нужно задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т. е. каков порядок уравнения. Следовательно, для уравнения первого порядка нужно задать одно дополнительное условие, для уравнения второго порядка - два дополнительных условия и т.д.

Наиболее часто встречаются два типа задач: *задача Коши* и *краевая задача*. В качестве дополнительных условий могут задаваться значения искомой функции и ее производных при некоторых значениях независимой переменной, т. е. в некоторых точках. Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется *задачей Коши*. Дополнительные условия в задаче Коши называются *начальными условиями*, а точка  $x = x_0$ , в которой они задаются - *начальной точкой*.

В общем виде задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при разных значениях независимой переменной, то такая задача называется *краевой*. Сами дополнительные условия называются при этом *граничными* (или *краевыми*) условиями. На практике обычно граничные условия задаются в двух точках  $x = a$  и  $x = b$ , являющихся границами области решения дифференциального уравнения. Постановка краевой задачи для дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(a) &= y_1, y(b) = y_2.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Приведём примеры постановки задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned}dx/dt &= x^2 \cos(t), \quad t > 0, \quad x(0) = 1; \\ y'' &= y'x + x^2, \quad x > 1, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.\end{aligned}$$

Краевые задачи:

$$\begin{aligned}y'' + 2y' - y &= \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0; \\ y''' &= x + yy', \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y'(3) = 2.\end{aligned}$$

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные (численные).

*Графические методы* используют геометрические построения. В частности, одним из них является *метод изоклин* для решения дифференциальных уравнений первого порядка вида. Поскольку производная  $y'$  характеризует

наклон касательной к интегральной кривой в данной точке, то при  $y' = k = \text{const}$ , из (2.1) получим  $f(x, y) = k$  - уравнение линии постоянного наклона, называемой *изоклиной*. Меняя  $k$ , получаем семейство изоклин.

С некоторыми *аналитическими методами* пользователь знаком по курсу высшей математики. Для ряда уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородными, линейными и др.), а также для некоторых типов уравнений высших порядков (например, линейных с постоянными коэффициентами) удастся получить решения в виде формул путем аналитических преобразований.

*Приближенные методы* используют различные упрощения самих уравнений путем обоснованного отбрасывания некоторых содержащихся в них членов, а также специальным выбором классов искомых функций.

Например, в некоторых инженерных задачах удастся представить решение в виде суммы двух составляющих, первое из которых определяет основное решение, а второе - малая добавка (возмущение), квадратом которой можно пренебречь. На этом основаны различные методы линеаризации. В приближенных методах также широко используется разложение решения в ряд по некоторому параметру, содержащемуся в данной задаче. К данной группе методов относятся и асимптотические методы, с помощью которых получают решения, описывающие предельную картину рассматриваемого явления.

В данном пособии рассматриваются *численные методы* решения дифференциальных уравнений, которые в настоящее время являются основным инструментом при исследовании инженерных задач, описываемых дифференциальными уравнениями.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей*. Его сущность состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек  $x_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , называемых *узлами*. Эти узлы составляют *разностную сетку*. Расстояние между двумя соседними узлами  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n-1$  называется *шагом сетки*. Часто используют равностоящие узлы, для которых  $h_i = h = \text{const}$ . Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется *сеточной*. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение произ-

водных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его *аппроксимацией* на сетке (или *разностной аппроксимацией*). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Значения сеточной функции зависят от шага сетки  $h$ , т.е. на самом деле мы имеем не одну разностную задачу, а семейство задач, зависящих от параметра  $h$ . Это семейство задач называется *разностной схемой*.

В вычислительной практике широкое распространение получил аналитический метод, основанный на идее разложения в ряд решения задачи Коши (2.3). Часто для этих целей используют формулу Тейлора. В этом случае вычислительные правила строятся особенно просто. Приближенное решение исходной задачи ищется в виде:

$$y_m(x) \approx \sum_{i=0}^m \frac{(x-x_0)^i}{i!} y^{(i)}(x_0), \quad x_0 \leq x \leq X, \quad (2.5)$$

где  $y^{(0)}(x_0) = y(x_0) = y_0$ ,  $y^{(1)}(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ ,

а значения производных  $y^{(i)}(x_0)$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$  находят по формулам, полученным последовательным дифференцированием уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} y^{(2)}(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \\ y^{(3)}(x_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + f^2(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \text{ и т.п.} \end{aligned}$$

Для значений  $x$ , близких к  $x_0$ , метод (2.5) при достаточно большом  $m$  дает обычно хорошее приближение к точному решению  $y(x)$  задачи (2.3).

Однако, с увеличением расстояния  $|x - x_0|$  погрешность приближенного равенства  $y(x) \approx y_m(x)$ , вообще говоря, возрастает по абсолютной величине и правило (2.5) становится вовсе неприемлемым. В таких случаях предпочтительнее использовать численные методы решения задачи Коши, позволяющие в фиксированных узлах последовательно находить значения  $y_i \approx y(x_i)$ ,

$i=1, 2, \dots, n$  приближенного решения. Сходимость численных методов не так жестко связана длиной отрезка  $[x_0, X]$ .

Большинство численных методов решения задачи Коши можно привести к виду

$$y_{i+1} = F(y_{i-q}, y_{i-q+1}, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+s}), \quad (2.6)$$

где  $F$  – некоторая известная функция указанных аргументов, определяемая способом построения метода и зависящая от вида уравнения (2.3) и выбранной сетки. При  $q=0$ ,  $0 \leq s \leq 1$  вычислительные правила (2.6) называются *одношаговыми*, а при  $q \geq 1$  или  $s > 1$  – *многошаговыми*. Методы вида (2.6) называются *явными* в случае  $s=0$  и *неявными* при  $s=1$ . При  $s > 1$  многошаговые методы называют методами *с забеганием вперед*.

## 2.1. Одношаговые методы

### 2.1.1. Метод Эйлера

Простейшим численным методом решения задачи Коши (2.3) для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка является *метод Эйлера*. Он основан на разложении искомой функции  $Y(x)$  по формуле Тейлора (2.5) в окрестностях узлов  $x_i$  ( $i=0, 1, \dots$ ). В методе Эйлера используется  $m=1$ . В результате получим:

$$Y(x_i + \Delta x_i) \approx Y(x_i) + Y'(x_i) \Delta x_i. \quad (2.7)$$

При условии, что решение уравнения (2.3) имеет на рассматриваемом отрезке непрерывную производную второго порядка, погрешность приближенного равенства (2.7) будет величиной порядка  $O(\Delta x_i^2)$ .

Заменяем значения функции  $Y$  в узлах  $x_i$  значениями сеточной функции  $y_i$ . Тогда уравнение (2.3) перепишется в виде:

$$Y'(x_i) = f(x_i, Y(x_i)) = f(x_i, y_i).$$

Будем считать, для простоты, узлы равноотстоящими, т.е.  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Учитывая введенные обозначения, из равенства (2.7) получаем:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2), \quad i=0, 1, \dots \quad (2.8)$$

Полагая  $i = 0$ , с помощью соотношения (2.8) находим значение сеточной функции  $y_1$  при  $x = x_1$ :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Требуемое здесь значение  $y_0$  задано начальным условием, т. е.  $y_0 = Y(x_0) = Y_0$ . Аналогично могут быть найдены значения сеточной функции в других узлах:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого метода представлена соотношениями (2.8), которые можно представить в виде рекуррентной формулы:

$$y_0 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

где  $y_0$ , стоящее справа от знака равенства – значение сеточной функции в предыдущем узле  $x_0$ , а  $y_0$ , стоящее слева от знака равенства – значение сеточной функции в следующем узле  $x_0+h$ . Метод Эйлера относится к одношаговым методам ( $q=0, s=0$ ). На рис. 9 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера.

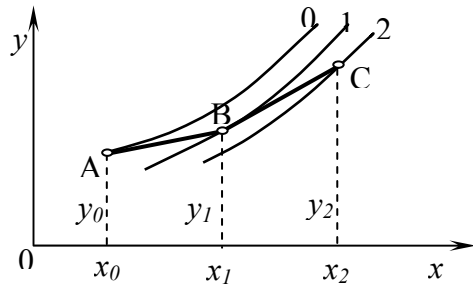


Рис.9. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

На рисунке изображены первые два шага, т. е. проиллюстрировано вычисление сеточной функции в узлах  $x_1, x_2$ . Интегральные кривые 0, 1, 2 описывают точные решения уравнения. При этом кривая 0 соответствует точному решению задачи Коши, так как она проходит через начальную точку  $A(x_0, y_0)$ . Точки B, C получены в результате численного решения задачи Коши методом Эйлера. Их отклонения от кривой 0 характеризуют погрешность метода. При выполнении каждого шага мы фактически попадаем на другую интегральную кривую. Отрезок AB – отрезок касательной к кривой 0 в точке A, ее наклон характеризуется значением производной  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ . Касательная BC уже проводится к другой интегральной кривой 1. Таким образом, погрешность метода Эйлера приводит к тому, что на каждом шаге решение переходит на другую интегральную кривую.

Блок-схема алгоритма решения задачи Коши методом Эйлера приведена на рис.10.

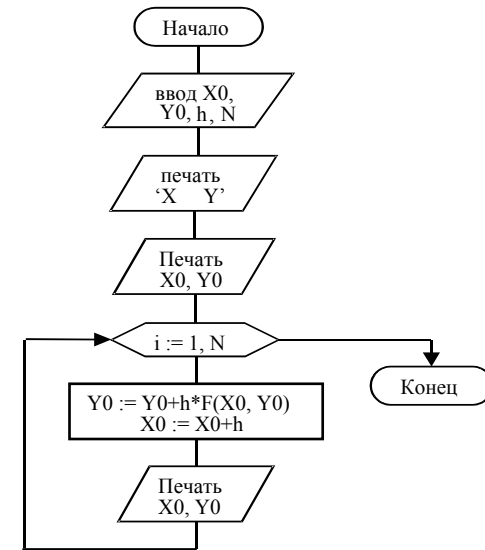


Рис.10. Блок-схема метода Эйлера

Замечание. Если в задании указан отрезок  $[x_0, x_k]$  и шаг  $h$ , то необходимое число интервалов  $n$  можно вычислить по формуле:  $n = \text{round}((x_k - x_0) / h)$ , где функция *round* определяет ближайшее целое вещественного числа. Далее следует пересчитать величину шага по формуле:  $h = (x_k - x_0) / n$ .

Рассмотрим подробнее вопрос о погрешности метода Эйлера.

Погрешность  $e_i$  в точке  $x_i$ , равная разности между значением сеточной функции  $y_i(x_i)$  и точным значением искомой функции  $Y(x_i)$ :  $e_i = y_i(x_i) - Y(x_i)$ , называется *погрешностью аппроксимации*.

При использовании приближенных методов основным является вопрос о сходимости. Применительно к разностным методам, к которым относится и метод Эйлера, наибольшее распространение получило понятие *сходимости при  $h \rightarrow 0$* . Оно означает следующее. Фиксируем точку  $X$  и построим последовательность сеток  $x_i = i \cdot h, i=0, 1, \dots, n$ . Говорят, что метод сходится в точке  $x_i$ , если погрешность аппроксимации  $|e_i| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Метод сходится на отрезке  $(0, X]$ , если он сходится в каждой точке отрезка.

Говорят, что метод имеет  $p$ -й порядок точности, если существует число  $p > 0$  такое, что  $|e_i| = O(h^p)$  для всех  $i=1, 2, \dots, n$  при  $h \rightarrow 0$ .

Из разностной схемы (2.8) следует, что погрешность аппроксимации является величиной  $O(h^2)$  при  $h \rightarrow 0$ . Погрешность аппроксимации состоит из двух частей:  $e_i = e'_i + e''_i$ .

Составляющая  $e'_i$  определяется погрешностью начального значения  $e_0 = y_0 - Y(x_0)$ . Как правило, начальное значение задается точно, т.е.  $y_0 = Y(x_0)$ , и тогда  $e_0 = 0$  и следовательно, равна нулю та часть погрешности решения  $e'_i$ , которая связана с  $e_0$ .

Погрешность  $e''_i$  обусловлена отброшенными членами в разложении по формуле Тейлора. На каждом шаге эта погрешность имеет порядок  $O(h^2)$ , так как именно члены такого порядка отброшены.

При нахождении решения в точке  $x_n$ , отстоящей на конечном расстоянии  $X$  от точки  $x_0$ , погрешность, в чем легко убедиться, суммируется. Суммарная погрешность, очевидно, равна  $nO(h^2)$ .

Если учесть, что  $h = X/n$ , то для суммарной погрешности получаем окончательное выражение:

$$nO(h^2) = \frac{X}{h} O(h^2) = O(h).$$

Таким образом, мы показали, что метод Эйлера имеет первый порядок точности.

### 2.1.2. Модифицированный метод Эйлера

Приведем еще одну схему метода Эйлера. Значение правой части  $f(x, Y)$  уравнения в схеме возьмем равным среднему арифметическому значению между  $f(x_i, y_i)$  и  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ , т.е. вместо разностной схемы (2.8) запишем:

$$y_{i+1} = y_i + h/2 [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i=0, 1, \dots$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение  $y_{i+1}$  входит в обе части соотношения и его, вообще говоря, нельзя выразить явно. Для вычисления  $y_{i+1}$  можно применить один из итерационных методов. Если имеется хорошее начальное приближение  $y_i$ , то можно построить решение с использованием двух итераций следующим образом. Считая  $y_i$  начальным приближением, вычисляем первое приближение  $\tilde{y}_{i+1}$  по формуле:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (2.9)$$

Новое значение  $\tilde{y}_{i+1}$  подставляем вместо  $y_{i+1}$  в правую часть соотношения и находим уточненное значение

$$y_{i+1} = y_i + h/2 [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]. \quad (2.10)$$

Алгоритмы (2.9) и (2.10) можно записать в виде одного соотношения:

$$y_{i+1} = y_i + h/2 [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i=0, 1, \dots$$

Эти рекуррентные соотношения описывают новую разностную схему, являющуюся модификацией метода Эйлера, которая называется методом Эйлера с пересчетом или модифицированным методом Эйлера. Можно показать, используя разложение по формуле Тейлора, что этот метод имеет второй порядок точности. Его применение к решению задачи Коши уменьшает в среднем значения погрешностей до величин  $O(h^2)$  вместо  $O(h)$  в обычном методе Эйлера.

На рис. 11 дана геометрическая интерпретация первого шага вычислений при решении задачи Коши модифицированным методом Эйлера. Касательная к кривой  $Y(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$  проводится с угловым коэффициентом  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ . С ее помощью методом Эйлера найдено значение  $\tilde{y}_1$ , которое используется затем для определения наклона касательной  $f(x_1, \tilde{y}_1)$  в точке А. Отрезок с таким наклоном заменяет первоначальный отрезок касательной от точки  $x_0 + h/2$  до точки  $x_1$ . В результате получается уточненное значение искомой функции  $y_1$  в этой точке. Блок-схема метода приведена на рис. 12.

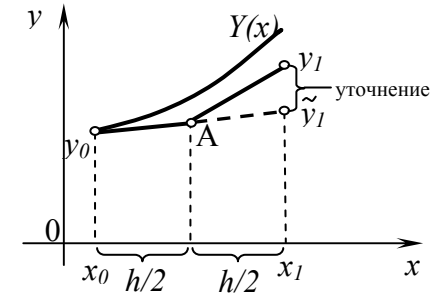


Рис. 11. Геометрическая интерпретация модифицированного метода Эйлера.

Разностную схему модифицированного метода Эйлера можно получить иначе, используя разложение функции по формуле Тейлора. Запишем это разложение в виде:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + h^2/2 y''_i + O(h^3). \quad (2.11)$$

В этой схеме должен быть сохранен член с  $h^2$ . Для этого аппроксимируем вторую производную с помощью отношения конечных разностей:

$$y''_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{h} + O(h). \quad (2.12)$$

Подставляя это соотношение в (2.11), получаем:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1}) + \frac{h^2}{2}O(h) + O(h^3) = y_i + \frac{h}{2}(y'_i + y'_{i+1}) + O(h^3). \quad (2.13)$$

Заменяя производные выражениями

$$y'_i = f(x_i, y_i), \quad y'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}), \quad (2.14)$$

где  $\tilde{y}_{i+1}$  найдено по формуле метода Эйлера, приходим к разностной схеме (2.9) модифицированного метода Эйлера. Такой способ вывода формулы позволил получить оценку погрешности метода в соответствии с (2.13). Погрешность на каждом шаге (локальная) имеет порядок  $h^3$ , а суммарная - порядок  $h^2$ :  $nO(h^3) = \frac{X}{h}O(h^3) = O(h^2)$ . Таким образом, модифицированный метод Эйлера имеет второй порядок точности.

С помощью модифицированного метода Эйлера можно проводить контроль точности решения путем сравнения значений  $\tilde{y}_{i+1}$  и  $y_{i+1}$  и выбора на основании этого соответствующей величины шага  $h$  в каждом узле. А именно, если величина  $|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}|$  сравнима с погрешностями вычислений, то шаг нужно увеличить; в противном случае, если эта разность слишком велика (например,  $|y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}| > 0.01|y_{i+1}|$ ), значение  $h$  следует уменьшить. Используя эти оценки, можно построить алгоритм модифицированного метода Эйлера с автоматическим выбором шага.

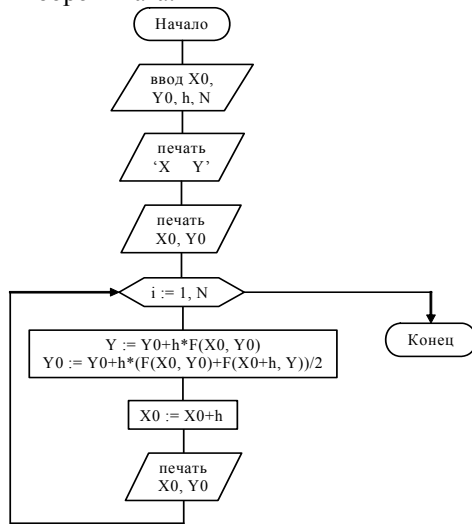


Рис.12. Блок-схема модифицированного метода Эйлера.

### 2.1.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности

Численный метод Рунге-Кутты часто используется для решения задач научного и инженерно-технического характера. Метод эффективен, надёжен и легко реализуется программными средствами. Существует несколько разновидностей метода Рунге-Кутты, различающиеся порядком точности. Рассмотрим метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности для решения задачи Коши (2.3).

В данном методе вводятся четыре вспомогательные величины  $k_0, k_1, k_2$  и  $k_3$ . Вычисление координат очередной точки  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , исходя из уже известных координат предыдущей точки, происходит по следующей схеме:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 0, 1, \dots \\ k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_1 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_0/2), \\ k_2 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2), \\ k_3 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, метод Рунге-Кутты требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения  $f(x, y)$ .

Данный метод требует большого объёма вычислений, однако это окупается повышенной точностью, что даёт возможность проводить счёт с большим шагом.

Блок-схема метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности входит в качестве составной части алгоритма метода Милна (см. рис.13).

Проведем сравнительную оценку рассмотренных методов на простом примере, позволяющем получить также и точное решение.

**Пример:** Решить задачу Коши

$$\frac{dY}{dx} = 2(x^2 + Y), \quad Y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad h = 0,1.$$

**Решение:** Сформулированная задача Коши может быть решена известными из курса высшей математики методами. Опустив выкладки, запишем окончательное выражение для точного решения с учетом заданного начального условия. Оно имеет вид:

$$Y = 1.5e^{2x} - x^2 - x - 0.5.$$

Проведем теперь решение данной задачи численно с помощью рассмотренных выше методов. Результаты вычислений приведены в таблице 1. Как

видно из этой таблицы, самым точным является решение, полученное методом Рунге-Кутты. Анализ решения с использованием метода Эйлера позволяет проследить рост погрешности с возрастанием  $x_i$ . При  $x=0,1$  погрешность составляет почти 1,81%, при  $x=1,0$  – 17,90 %. Следовательно, при большом числе узлов метод Эйлера может привести к заметным погрешностям, и в таких случаях предпочтительнее пользоваться численными методами высших порядков точности.

С уменьшением шага  $h$  локальная погрешность метода Эйлера снизится, однако при этом возрастет число узлов, что неблагоприятно повлияет на точность результатов.

Поэтому метод Эйлера применяется сравнительно редко при небольшом числе расчетных точек. Наиболее употребительным одношаговым методом является метод Рунге-Кутты.

Рассмотренные методы могут быть использованы также для решения систем дифференциальных уравнений. Покажем это для случая системы двух уравнений вида:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dx} &= \varphi(x, Y, Z), \\ \frac{dZ}{dx} &= \psi(x, Y, Z).\end{aligned}$$

Таблица 1

$x_i$	Метод Эйлера	Модифицированный метод Эйлера	Метод Рунге-Кутты	Точное решение
0.1	1.2000	1.2210	1.2221	1.2221
0.2	1.4420	1.4923	1.4977	1.4977
0.3	1.7384	1.8284	1.8432	1.8432
0.4	2.1041	2.2466	2.2783	2.2783
0.5	2.5569	2.7680	2.8274	2.8274
0.6	3.1183	3.4176	3.5201	3.5202
0.7	3.8139	4.2257	4.3927	4.3928
0.8	4.6747	5.2288	5.4894	5.4895
0.9	5.7376	6.4004	6.8643	6.8645
1.0	7.0472	8.0032	8.5834	8.5836

Начальное условие зададим в виде:

$$Y(x_0) = y_0, Z(x_0) = z_0.$$

По аналогии с (2.15) запишем формулы Рунге-Кутты для системы двух уравнений:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + 1/6(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \\ z_{i+1} &= z_i + 1/6(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3), \quad i = 0, 1, \dots, \text{ где} \\ k_0 &= h\varphi(x_i, y_i, z_i), \\ l_0 &= h\psi(x_i, y_i, z_i), \\ k_1 &= h\varphi(x_i + h/2, y_i + k_0/2, z_i + l_0/2), \\ l_1 &= h\psi(x_i + h/2, y_i + k_0/2, z_i + l_0/2), \\ k_2 &= h\varphi(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\ l_2 &= h\psi(x_i + h/2, y_i + k_1/2, z_i + l_1/2), \\ k_3 &= h\varphi(x_i + h, y_i + k_2, z_i + l_2), \\ l_3 &= h\psi(x_i + h, y_i + k_2, z_i + l_2).\end{aligned}$$

К решению систем уравнений сводятся также задачи Коши для уравнения высших порядков. Например, рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} = f(x, Y, \frac{dY}{dx}),$$

$$Y(x_0) = y_0, Y'(x_0) = z_0.$$

Введем вторую неизвестную функцию  $Z(x) = Y'(x)$ . Тогда сформулированная задача Коши заменяется системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dZ}{dx} = f(x, Y, Z),$$

$$\frac{dY}{dx} = Z,$$

$$Y(x_0) = y_0, Z(x_0) = z_0.$$

В заключение еще раз отметим особенность одношаговых методов, состоящую в том, что для получения решения в каждом новом расчетном узле достаточно иметь значение сеточной функции лишь в предыдущем узле. Это позволяет непосредственно начать счет при  $i=0$  по известным начальным значениям. Кроме того, указанная особенность допускает изменение шага в любой точке в процессе счета, что позволяет строить численные алгоритмы с автоматическим выбором шага.

**Задание.** Разработайте блок-схему алгоритма решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

## 2.2. Многошаговые методы

Суть построения разностных схем многошаговыми методами основана на том, что для вычисления значения  $y_{i+1}$  используются результаты не одного, а  $k$  предыдущих шагов, т. е. значения  $y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, \dots, y_i$ . В этом случае получается  $k$ -шаговый метод.

Многошаговые методы могут быть построены следующим образом. Запишем исходное уравнение в виде:

$$dY(x) = f(x, Y)dx. \quad (2.16)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по  $x$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ . Интеграл от левой части легко вычисляется:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dY(x) = Y(x_{i+1}) - Y(x_i) = y_{i+1} - y_i. \quad (2.17)$$

Для вычисления интеграла от правой части уравнения (2.16) сначала строится интерполяционный многочлен  $P_{k-1}(x)$  степени  $k-1$  для аппроксимации функции  $f(x, Y)$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  по значениям  $f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}), f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}), \dots, f(x_i, y_i)$ . После этого можно записать:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, Y)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx. \quad (2.18)$$

Приравняв выражения, полученные в (2.17) и (2.18), можно получить приближенную формулу для определения неизвестного значения сеточной функции  $y_{i+1}$  в узле  $x_{i+1}$ :

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx. \quad (2.19)$$

На основе этой формулы можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности. Порядок точности зависит от степени интерполяционного многочлена  $P_{k-1}(x)$ , для построения которого используются значения сеточной функции  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}$  вычисленные на  $k$  предыдущих шагах.

### 2.2.1. Методы прогноза и коррекции

В этих методах для вычисления положения новой точки используется информация о нескольких ранее полученных точках. Для этого применяются две формулы, называемые соответственно формулами прогноза и коррекции.

Схемы алгоритмов для всех таких методов одинаковы, а сами методы отличаются лишь формулами. Пусть дифференциальное уравнение задано в виде (2.3).

Так как в рассматриваемых методах используется информация о нескольких ранее полученных точках, то в отличие от одношаговых методов они не обладают свойством «самостартования». Поэтому, прежде чем применять метод прогноза и коррекции, приходится вычислять исходные данные с помощью какого-либо одношагового метода. Часто для этого прибегают к методу Рунге-Кутты.

Вычисления производят следующим образом. Сначала по формуле прогноза и исходным значениям переменных определяют значение сеточной функции. Верхний индекс  $0$  означает, что прогнозируемое значение является одним из последовательности значений  $y_{i+1}$ , располагающихся в порядке возрастания точности. По прогнозируемому значению  $y_{i+1}^0$  с помощью приведенного выше дифференциального уравнения находят производную

$$(y_{i+1}^0)' = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0),$$

которая затем подставляется в формулу коррекции для вычисления уточнённого значения  $y_{i+1}^{j+1}$ . В свою очередь  $y_{i+1}^{j+1}$  используется для получения более точного значения производной с помощью дифференциального уравнения

$$(y_{i+1}^{j+1})' = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{j+1}).$$

Если это значение производной не достаточно близко к предыдущему, то оно подставляется в формулу коррекции и итерационный процесс продолжается. Если же производная изменяется в допустимых пределах, то значение  $(y_{i+1}^{j+1})'$  используется для вычисления окончательного значения  $y_{i+1}$ , которое и выдаётся на печать. После этого процесс повторяется – делается следующий шаг, на котором вычисляется  $y_{i+2}$ .

Обычно при выводе формул прогноза и коррекции решение уравнения рассматривают как процесс приближённого интегрирования, а сами формулы получают с помощью конечно-разностных методов.

Если дифференциальное уравнение  $y'(x) = f(x, y)$  проинтегрировано в интервале значений от  $x_i$  до  $x_{i+1}$ , то результат примет вид

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx.$$

Этот интеграл нельзя вычислить непосредственно, так как зависимость  $y(x)$  заранее неизвестна. Приближённое значение интеграла можно найти с помощью одного из конечно-разностных методов. На этапе прогноза можно использовать любую формулу численного интегрирования, если в неё не входит предварительное значение  $y'(x_{i+1})$ .



### 2.2.1.1. Метод Милна

В этом методе на этапе прогноза используется формула Милна:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h \cdot (2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}) + O(h^5),$$

где  $O(h^5) = \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}$  - погрешность формулы прогноза.

а на этапе коррекции – формула Симпсона:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3}h \cdot (y'_{i+1} + 4y'_i + y'_{i-1}) + O(h^5),$$

где  $O(h^5) = -\frac{1}{90}h^5 y^{(5)}$  - погрешность формулы коррекции.

Указанные погрешности в обеих формулах в действительности в итерационном процессе не используются и служат лишь для оценки погрешности метода. Значения производных в формулах принимаются равными значению правой части дифференциального уравнения.

Метод Милна относят к методам четвёртого порядка точности, так как в нём отбрасываются члены, содержащие  $h$  в пятой и более высоких степенях. Может возникнуть вопрос: зачем вообще нужна коррекция, если прогноз имеет четвёртый порядок точности?

Ответ на этот вопрос даёт оценка относительной величины членов, выражающих погрешность. В данном случае погрешность усечения при коррекции в 28 раз меньше и поэтому представляет большой интерес.

Вообще формулы коррекции гораздо более точны, чем формулы прогноза, и поэтому их использование оправдано, хотя и связано с дополнительными трудностями.

Ниже приведена блок-схема данного метода (рис.13). Для остальных методов прогноза и коррекции, рассматриваемых в этой главе, данная блок-схема является справедливой - следует лишь поменять формулы прогноза и коррекции.

### 2.2.1.2. Метод Адамса-Башфорта

Этот метод также имеет четвёртый порядок точности. Используемая в нём формула прогноза получена интегрированием обратной интерполяционной формулы Ньютона и имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24}h \cdot (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}) + O(h^5),$$

$$\text{где } O(h^5) = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}.$$

На этапе коррекции используется формула:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24}h \cdot (9y'_{i+1} + 19y'_i - 5y'_{i-1} + y'_{i-2}) + O(h^5),$$

$$\text{где } O(h^5) = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}.$$

Расчёты по методу Адамса-Башфорта выполняются так же, как и по методу Милна, однако в отличие от последнего ошибка, внесённая на каком-либо шаге, не имеет тенденции к экспоненциальному росту.

Можно предположить, что поскольку величина отбрасываемого члена известна, то её можно использовать для уточнения скорректированного значения зависимой переменной. Однако, это было бы равноценно использованию системы более высокого порядка точности. Так как внесение поправок в корректирующий член может отрицательно сказаться на устойчивости счёта, то для повышения точности счёта следует прибегать к методам более высоких порядков точности.

### 2.2.1.3. Метод Хемминга

Это устойчивый метод четвёртого порядка точности, в основе которого лежат следующие формулы прогноза:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h \cdot (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) + O(h^5),$$

$$\text{где } O(h^5) = \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}$$

и коррекции:

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}[9y_n - y_{n-2} + 3h \cdot (y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})] + O(h^5),$$

$$\text{где } O(h^5) = -\frac{1}{40}h^5 y^{(5)}.$$

Особенностью метода Хемминга является то, что он позволяет оценивать погрешности, вносимые на стадиях прогноза и коррекции и устранять их. Благодаря простоте и устойчивости этот метод является одним из наиболее распространённых методов прогноза и коррекции.

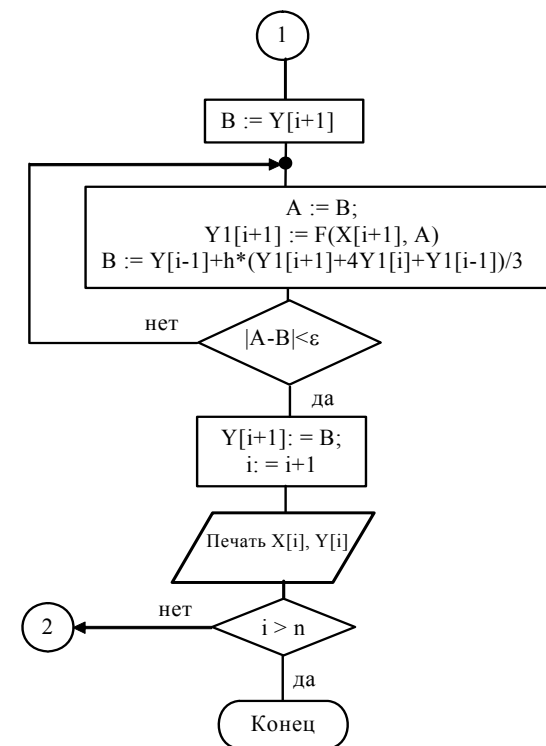
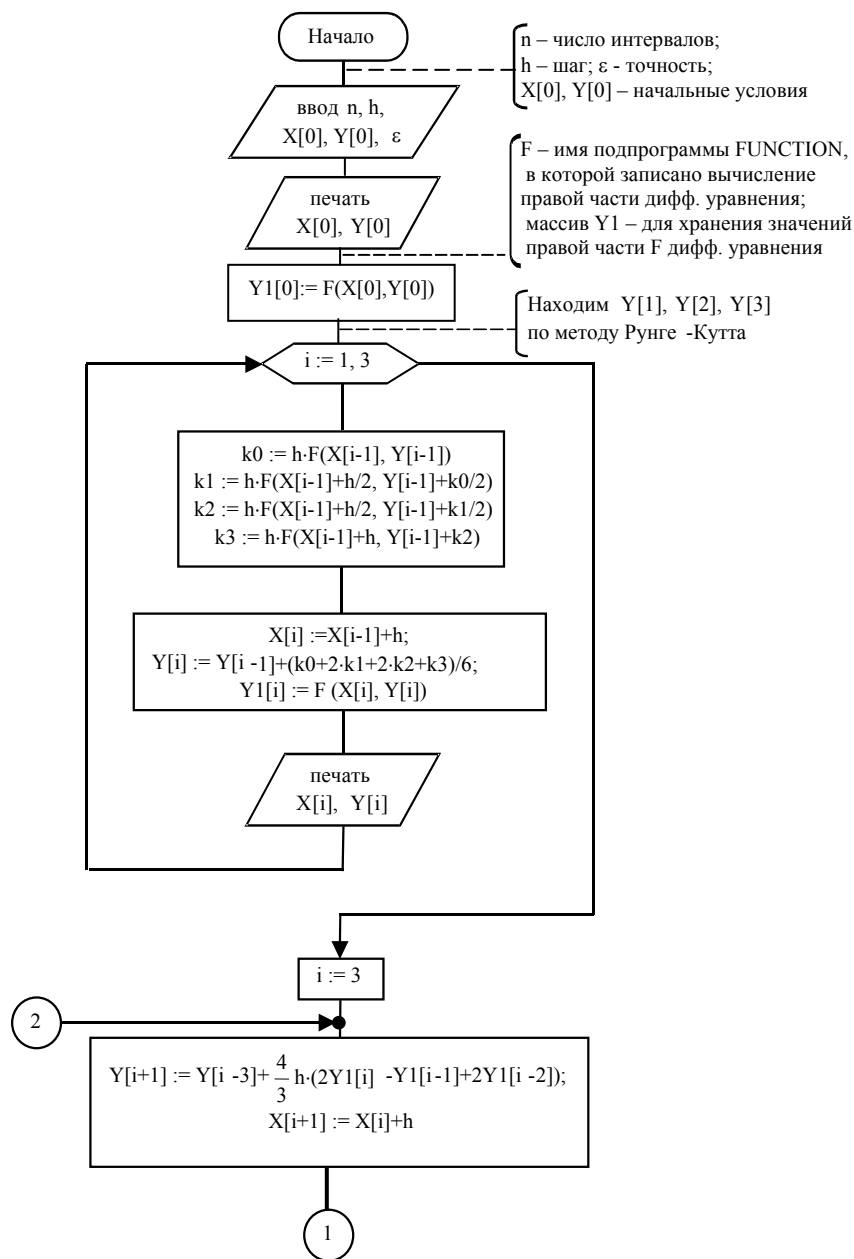


Рис.13. Блок-схема метода Милна.

### 2.2.2. Сравнение методов прогноза и коррекции с одношаговыми методами

По сравнению с одношаговыми методами методы прогноза и коррекции имеют ряд особенностей:

1. Для реализации методов прогноза и коррекции необходимо иметь информацию о нескольких предыдущих точках: другими словами, они не относятся к числу «самостартующих» методов. Для получения исходной информации приходится прибегать к какому-либо одношаговому методу. Если в процессе решения дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции изменяется шаг, то обычно приходится временно переходить на одношаговый метод.

2. Поскольку для методов прогноза и коррекции требуются данные о предыдущих точках, то соответственно предъявляются и повышенные требования к объёму и памяти ЭВМ.

4. Применяя метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности, на каждом шаге приходится вычислять четыре значения функции, в то время как для обеспечения сходимости метода прогноза и коррекции того же порядка точности достаточно двух значений функции. Поэтому методы прогноза и коррекции требуют почти вдвое меньше машинного времени, чем методы Рунге-Кутты сравнимой точности.

Математическое описание многих явлений часто сводится к системе дифференциальных уравнений вида

с дополнительными (начальными) условиями:

где  $x$  – независимая переменная,  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  – неизвестные (искомые) функции.

$$\begin{aligned} y_1(x+h) &= y_1(x) + hf_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ y_2(x+h) &= y_2(x) + hf_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ &\vdots \\ y_n(x+h) &= y_n(x) + hf_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Замечание. Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка вида:

с начальными условиями:

сводится к системе уравнений (2.31) и (2.32) с постоянным шагом  $h$ .

Блок-схема метода Эйлера для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений представлена на рис 15.

Задание. Разработайте алгоритм решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

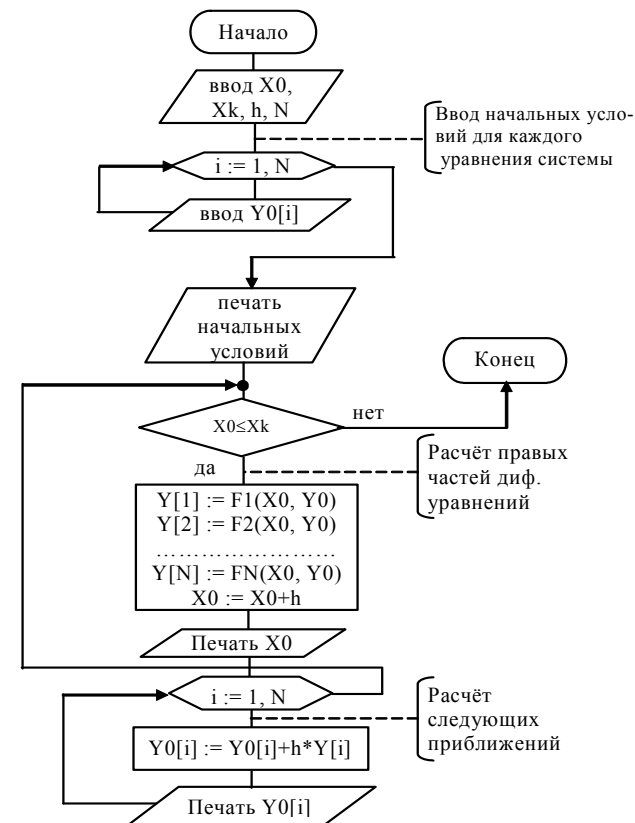


Рис.15. Блок- схема метода Эйлера для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2.4. Краевые задачи

Выше рассматривались задачи с начальными условиями, т.е. с условиями в одной (начальной) точке. На практике часто приходится решать задачи другого типа, когда условия задаются при двух значениях независимой переменной (на концах рассматриваемого отрезка). Такие задачи, называемые *краевыми*, получаются при решении уравнений высших порядков или систем уравнений.

Рассмотрим, например, линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = f(x). \quad (2.36)$$

Краевая задача состоит в отыскании решения  $Y=Y(x)$  уравнения (2.36) на отрезке  $[a, b]$ , удовлетворяющего на концах отрезка условиям:

$$Y(a) = A, Y(b) = B. \quad (2.37)$$

Граничные условия могут быть заданы не только в частном виде (2.37), но и в общем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 Y(a) + \beta_1 Y'(a) &= A, \\ \alpha_2 Y(b) + \beta_2 Y'(b) &= B. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Методы решения краевых задач довольно разнообразны - это и *точные аналитические методы*, и *приближенные*, и *численные*. Аналитические методы изучаются в курсе дифференциальных уравнений. Они имеются лишь для решения узкого класса уравнений. В частности, хорошо развит этот аппарат для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, которые широко используются в исследовании различных физических процессов (например, в теории колебаний, динамике твердого тела и т. п.).

*Приближенные методы* разрабатывались еще задолго до появления вычислительных машин. Однако многие из них и до сих пор не утратили своего значения. Это методы *коллокаций*, *наименьших квадратов* и другие, основанные на минимизации невязок уравнений. Весьма эффективными являются также *метод Галеркина* и его модификации. Рассмотрим сущность приближенных методов.

Для отыскания приближенного решения уравнения (2.36) с граничными условиями (2.38) выбирается некоторая линейно независимая (*базисная*) система дважды дифференцируемых функций  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ . При этом  $\phi_0(x)$  удовлетворяет граничным условиям (2.37), а  $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  - соответствующим

однородным граничным условиям (2.38). Искомое решение представляется в виде линейной комбинации базисных функций:

$$y(x) = \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x). \quad (2.39)$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.36), можно найти разность между его левой и правой частями, которая называется *невязкой*. Она является функцией переменной  $x$  и параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и имеет вид:

$$\psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = Y'' + p(x)Y' + q(x)Y - f(x). \quad (2.40)$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  стараются выбрать так, чтобы значение невязки было минимальным. Способ определения этих коэффициентов и характеризует тот или иной приближенный метод.

В *методе коллокаций* выбираются  $n$  точек  $x_i (i=1, 2, \dots, n, x_i \in [a, b])$ , называемых *точками коллокаций*, невязки (2.40) в которых приравняются нулю. Получается система  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Решая данную систему, можно найти эти коэффициенты, которые затем подставляются в решение (2.39).

*Метод наименьших квадратов* основан на минимизации суммы квадратов невязок в заданной системе точек  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Из этого условия также получается система линейных алгебраических уравнений относительно  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

В основе *метода Галеркина* лежит требование ортогональности базисных функций  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  к невязке  $\psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , которое записывается в виде:

$$\int_a^b \psi(x, a_1, \dots, a_n) \phi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из этих условий также получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов линейного соотношения (2.39).

Аналогично строятся некоторые другие приближенные методы. Все они сводятся к построению *системы линейных алгебраических уравнений*, из которой, если существует ее решение, находятся неизвестные коэффициенты. Найденные коэффициенты затем используются для построения решения как линейной комбинации базисных функций (2.39).

### 2.4.1. Метод стрельбы

Рассмотрим краевую задачу для уравнения второго порядка, разрешенного относительно второй производной:

$$Y'' = f(x, Y, Y'). \quad (2.41)$$

Будем искать решение  $Y=Y(x)$  этого уравнения на отрезке  $[0, 1]$ . Любой отрезок  $[a, b]$  можно привести к этому отрезку с помощью замены переменной

$$t = \frac{x-a}{b-a}.$$

Граничные условия на концах рассматриваемого отрезка примем в простейшем виде (2.37), т. е.

$$Y(0) = y_0, Y(1) = y_1. \quad (2.42)$$

Сущность *метода стрельбы* заключается в сведении решения краевой задачи (2.41), (2.42) к решению задач Коши для того же уравнения (2.41) с начальными условиями:

$$Y(0) = y_0, Y'(0) = k = tg \alpha. \quad (2.43)$$

Здесь  $y_0$  - точка на оси ординат, в которой помещается начало искомой интегральной кривой;  $\alpha$  - угол наклона касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 16).

Считая решение задачи Коши  $Y = Y(x, \alpha)$  зависящим от параметра  $\alpha$ , будем искать такую интегральную кривую  $Y = Y(x, \alpha^*)$ , которая выходит из точки  $(0, y_0)$  и попадает в точку  $(1, y_1)$ . Таким образом, если  $\alpha = \alpha^*$ , то решение  $Y(x, \alpha)$  задачи Коши совпадает с решением  $Y(x)$  краевой задачи. При  $x=1$ , учитывая второе граничное условие (2.43), получаем  $Y(1, \alpha) = y_1$  или

$$Y(1, \alpha) - y_1 = 0. \quad (2.44)$$

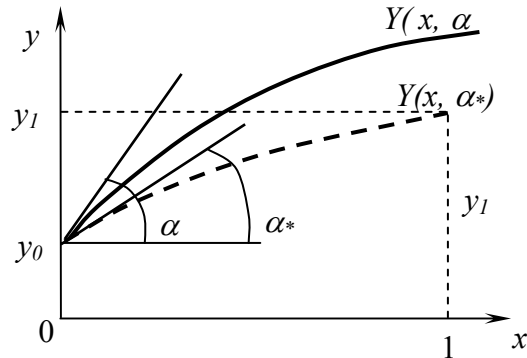


Рис.16. Метод стрельбы

Следовательно, получим уравнение вида  $F(\alpha) = 0$ , где  $F(\alpha) = Y(1, \alpha) - y_1$ . Это уравнение отличается от привычной записи тем, что функцию  $F(\alpha)$  нельзя представить в виде некоторого аналитического выражения, поскольку она является решением задачи Коши (2.41), (2.42). Тем не менее, для решения уравнения может быть использован любой из рассмотренных ранее методов решения нелинейных уравнений.

Например, при использовании *метода деления отрезка пополам* поступаем следующим образом. Находим начальный отрезок  $[\alpha_0, \alpha_1]$ , содержащий значение  $\alpha^*$ , на концах которого функция  $F(\alpha)$  принимает значения разных знаков. Для этого решение задачи Коши  $Y(1, \alpha_0)$  должно при  $x=1$  находиться ниже точки  $y_1$ , а  $Y(1, \alpha_1)$  выше. Далее, полагая

$$\alpha_2 = (\alpha_0 + \alpha_1)/2,$$

снова решаем задачу Коши при  $\alpha = \alpha_2$  и в соответствии с *методом деления отрезка пополам* отбрасываем один из отрезков:  $[\alpha_0, \alpha_2]$  или  $[\alpha_2, \alpha_1]$ , на котором функция  $F(\alpha)$  не меняет знак, и т. д.

Процесс поиска решения прекращается, если разность двух последовательно найденных значений  $\alpha$  меньше некоторого наперед заданного малого числа  $\varepsilon > 0$ . В этом случае последнее решение задачи Коши и будет принято за искомое решение краевой задачи.

Описанный алгоритм называется *методом стрельбы* вполне оправданно, поскольку в нем как бы проводится “пристрелка” по углу наклона интегральной кривой в начальной точке. Следует отметить, что этот алгоритм хорошо работает в том случае, если решение  $Y(x, \alpha)$  не слишком чувствительно к изменениям  $\alpha$ ; в противном случае мы можем столкнуться с неустойчивостью.

Существуют другие алгоритмы метода стрельбы. В частности, одним из самых надежных является *метод Ньютона*. Он состоит в следующем. Пусть  $\alpha_0$  - начальное приближение,  $\alpha^*$  - искомое значение, которое будем определять по формуле  $\alpha^* = \alpha_0 + \Delta\alpha$ . Решая задачу Коши при  $\alpha = \alpha_0$ , находим  $Y(x, \alpha_0)$ . Тогда можем записать разложение по формуле Тейлора с сохранением только линейных по  $\Delta\alpha$  членов:

$$Y(1, \alpha_0 + \Delta\alpha) \approx Y(1, \alpha_0) + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \Delta\alpha.$$

Полагая  $Y(1, \alpha_0 + \Delta\alpha) = Y(1, \alpha^*) = y_1$ , находим

$$\Delta\alpha = \frac{y_1 - Y(1, \alpha_0)}{\partial Y(1, \alpha_0) / \partial \alpha}. \quad (2.45)$$

Производную в знаменателе этого выражения можно найти численно:

$$\frac{\partial Y(1, \alpha_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{Y(1, \alpha_0 + \delta\alpha) - Y(1, \alpha_0)}{\delta\alpha}. \quad (2.46)$$

Здесь  $\delta\alpha$  - малое приращение  $\alpha$ .

Для вычисления правой части нужно решить задачу Коши при  $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$ , в результате чего найдем значение  $Y(1, \alpha_0 + \delta\alpha)$ . Вычисляя затем по формуле поправку  $\Delta\alpha$ , находим следующее приближение параметра  $\alpha$ :  $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha$  и т. д. Этот итерационный процесс продолжается до тех пор, пока очередное значение поправки  $\Delta\alpha$  по абсолютной величине не станет меньше заданного малого числа  $\varepsilon$ .

Методы стрельбы могут также использоваться для решения систем дифференциальных уравнений. В этом случае краевая задача (а не задача Коши) может возникнуть в силу того, что значения одной части искомых функций заданы при одном значении независимой переменной (например, при  $x=0$ ), а другой - при другом (например,  $x=1$ ). Тогда “пристрелка” проводится по неизвестным значениям искомых функций при  $x=0$  до тех пор, пока не будут удовлетворяться соответствующие граничные условия при  $x=1$ .

Рассмотрим систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} Y' = f_1(x, Y, Z), \\ Z' = f_2(x, Y, Z) \end{cases} \quad (2.47)$$

Граничные условия заданы в виде

$$Y(0) = y_0, Z(1) = z_{01}. \quad (2.48)$$

Процесс решения этой краевой задачи методом стрельбы состоит в следующем. Выбирается некоторое  $\alpha$ , аппроксимирующее значение  $Z(0)$ . Решается задача Коши для системы с начальными условиями  $Y(0) = y_0, Z(0) = \alpha \cdot \tan L$ . В результате решения при  $x=1$  получается некоторое значение  $Z(1, \alpha) \neq z_1$ . Если разность между этими величинами невелика, то найденное решение задачи Коши принимается за искомое решение краевой задачи. В противном случае находится уточненное значение  $\alpha$  и процесс повторяется.

Таким образом, метод стрельбы может быть также использован как для решения краевых задач для уравнений высших порядков, так и для систем уравнений.

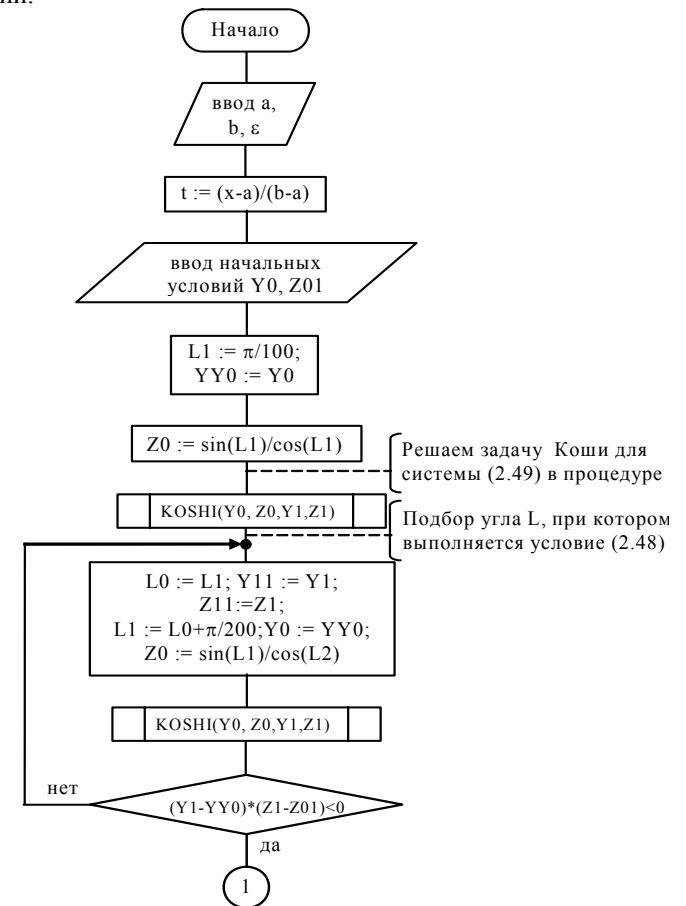
Ниже приведена блок-схема метода стрельбы (рис.17), где задана система уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dx} = f(x, Y, Z) \\ \frac{dY}{dx} = Z \end{cases} \quad (2.49)$$

с граничными условиями:

$$Y(0) = Y_0; \quad Z(0) = \tan L.$$

Причем при  $x=1$  значения сеточной функции  $Y(1)$  и  $Z(1)$  лежат по разные стороны от второго граничного условия,  $Y(1), Z(1)$  - конечные значения сеточных функций.



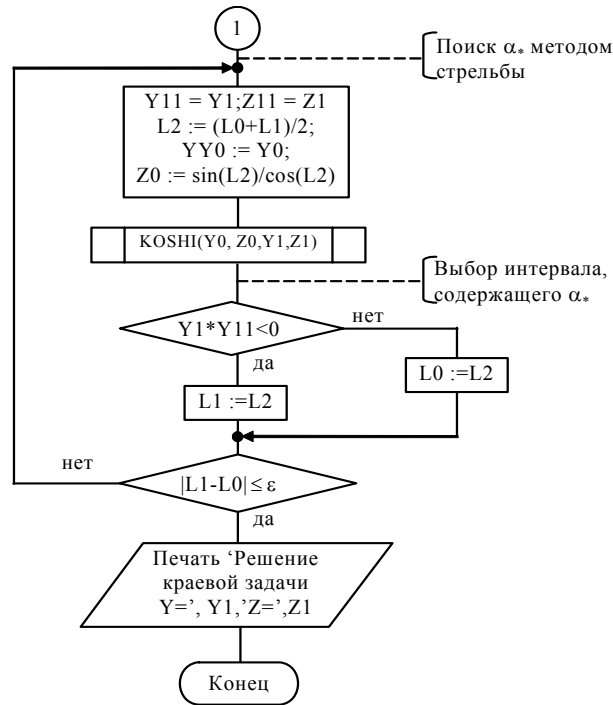


Рис.17. Блок-схема метода стрельбы.

#### 2.4.2. Метод конечных разностей

Достоинство этих методов состоит в том, что они сводят решение краевой задачи для дифференциального уравнения к решению системы алгебраических уравнений относительно значений искомой функции на заданном множестве точек. Это достигается путем замены производных, входящих в дифференциальное уравнение, их конечно-разностными аппроксимациями.

Рассмотрим сущность такого метода решения для дифференциального уравнения второго порядка (2.41) при заданных граничных условиях (2.42).

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  равных частей точками  $x_i = i \cdot h$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ). Решение краевой задачи (2.41) сведем к вычислению значений сеточной функции  $y_i$  в узлах  $x_i$ . Для этого напишем уравнение (2.41) для внутренних узлов:

$$Y''(x_i) = f(x_i, Y(x_i), Y'(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.50)$$

Заменим производные, входящие в эти соотношения, их конечно-разностными аппроксимациями:

$$Y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad Y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (2.51)$$

Подставляя эти выражения в (2.50), получаем систему разностных уравнений:

$$\varphi(x_i, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.52)$$

являющуюся системой  $n-1$  алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Входящие в данную систему  $y_0$  и  $y_n$  выбираются из граничных условий, если они задаются непосредственно.

На практике часто граничные условия задаются в более общем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 Y(0) + \beta_1 Y'(0) &= A, \\ \alpha_2 Y(1) + \beta_2 Y'(1) &= B. \end{aligned} \quad (2.53)$$

В этом случае граничные условия также должны быть представлены в разностном виде путем аппроксимации производных  $Y'(0)$  и  $Y'(1)$  с помощью конечно-разностных соотношений. Если использовать односторонние разности, при которых производные аппроксимируются с первым порядком точности, то разностные граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned}$$

Из этих соотношений находятся значения  $y_0, y_n$ .

Однако, как правило, предпочтительнее аппроксимировать производные, входящие в (2.53), со вторым порядком точности с помощью центральных разностей:

$$Y'(0) \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}, \quad Y'(1) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}.$$

В эти выражения входят значения сеточной функции  $y_{-1}$  и  $y_{n+1}$  в так называемых фиктивных узлах  $x_{-1} = -h$ , и  $x_{n+1} = 1+h$ , лежащих вне рассматриваемого отрезка. В этих узлах искомая функция также должна быть определена. Количество неизвестных значений сеточной функции при этом увеличивается на два. Для замыкания системы привлекают еще два разностных уравнения (2.52) - при  $i = 0$  и  $i = n$ .

Таким образом, решение краевой задачи для дифференциального уравнения сведено к решению системы алгебраических уравнений вида (2.52). Эта система является линейной или нелинейной в зависимости от того, линейно или нелинейно дифференциальное уравнение (2.52). Методы решения таких систем рассмотрены ранее (см. гл. 4, [1]).

Рассмотрим пример решения краевой задачи методом конечных разностей.

Требуется решить дифференциальное уравнение:  $y'' = 2x + 3$  при условиях  $y(0)=0, y(1)=1$  и шаге  $h=0,2$ .

Вычислим число интервалов по формуле:  $n = \frac{1-0}{h} = 5$ .

Заменим вторую производную во внутренних узлах  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) конечно-разностными соотношениями:  $y''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$ . Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\text{для } i = 1 \quad \frac{1}{0.04}(y_2 - 2y_1 + y_0) = 2x_1 + 3y_1;$$

$$\text{для } i = 2 \quad \frac{1}{0.04}(y_3 - 2y_2 + y_1) = 2x_2 + 3y_2;$$

$$\text{для } i = 3 \quad \frac{1}{0.04}(y_4 - 2y_3 + y_2) = 2x_3 + 3y_3;$$

$$\text{для } i = 4 \quad \frac{1}{0.04}(y_5 - 2y_4 + y_3) = 2x_4 + 3y_4.$$

После подстановки граничных условий  $y_0=0, y_5=1$ , расчета узлов сетки по формуле  $x_i=i \cdot h$  и приведения подобных получим:

$$\begin{cases} -2.12y_1 + y_2 = 0.016; \\ y_1 - 2.12y_2 + y_3 = 0.032; \\ y_2 - 2.12y_3 + y_4 = 0.048; \\ y_3 - 2.12y_4 = -0.936. \end{cases}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений является разреженной и легко может быть решена методом прогонки (см. рис.38, [1]).

**Задание.** Разработать алгоритм решения краевой задачи методом конечных разностей с использованием метода прогонки.

## 2.5. Контрольные вопросы

1. Что получается в результате применения численного метода для решения обыкновенных дифференциальных уравнений?
2. От чего зависит точность получаемого результата?
3. Что такое свойство «самостартования»?
4. В чём состоит отличие одношаговых методов от многошаговых?
5. Насколько точнее модифицированный метод Эйлера простого?
6. Зависит ли получаемое решение каким-либо методом от начального условия?
7. Как определяется порядок точности метода?
8. Основной недостаток многошаговых методов.
9. От чего зависит точность многошаговых методов?
10. Назовите достоинства методов прогноза и коррекции.
11. Возможно ли применение одношаговых и многошаговых методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений?
12. Сколько начальных условий должно быть задано для решения краевой задачи?



### 3. Методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

Во многих практических задачах искомые функции зависят от нескольких переменных, и описывающие такие задачи уравнения могут содержать частные производные искомых функций. Они называются *уравнениями с частными производными*.

Многие задачи механики сплошных сред сводятся к решению дифференциальных уравнений с частными производными. Здесь в качестве искомых функций обычно служат плотность, температура, напряжение и другие, аргументами которых являются координаты рассматриваемой точки пространства, а также время.

Полная математическая постановка задачи наряду с дифференциальными уравнениями содержит также некоторые дополнительные условия. Если решение ищется в ограниченной области, то задаются также условия на её границе, которые называются *граничными (краевыми) условиями*. Тогда задача называется *краевой задачей для уравнений с частными производными*.

Если одной из независимых переменных является время ( $t$ ), то задаются значения искомых функций в начальный момент времени  $t=0$ , они называются *начальными условиями*. Задача, которая состоит в решении дифференциального уравнения в частных производных при заданных начальных условиях – это *задача Коши*. При этом задача решается в неограниченном пространстве, и граничные условия не задаются. Задачи, при формулировке которых ставятся одновременно граничные и начальные условия называются *нестационарными (или смешанными) краевыми задачами*. Получающееся при этом решение меняется с течением времени.

Здесь мы будем рассматривать лишь корректно поставленные задачи, то есть задачи, решение которых существует и единственно в некотором классе начальных и граничных условий.

Рассмотрим достаточно узкий класс задач для уравнений первого и второго порядков, линейных относительно производных. В случае двух независимых переменных  $x$  и  $y$ :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \quad (3.1)$$

где  $u(x,y)$  – искомая функция;  $a, b, c, d, e, f, g$  – коэффициенты, которые могут зависеть от  $x, y$  и от  $u$ . В зависимости от этого уравнение (3.1) может быть:

а) *уравнением второго порядка* в частных производных с постоянными коэффициентами;

б) *линейным*, если правая часть уравнения линейно зависит от  $u$ , а коэффициенты зависят только от  $x, y$ ;

с) *квазилинейным*, если коэффициенты зависят от  $u$ .

Различают разные виды уравнений в зависимости от соотношения между коэффициентами:

1) При  $a=b=d=c=f=0, d \neq 0, e \neq 0$  получается *уравнение переноса*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} = g, \quad p = \frac{e}{d} \quad (3.2)$$

Если в уравнении (3.2) одной из независимых переменных является время, то это уравнение называется *эволюционным*.

2) Если хотя бы один из коэффициентов  $a, b, c \neq 0$ , то уравнение (3.1) является уравнением *второго порядка*. В этом случае в зависимости от дискриминанта  $D=4b^2-4ac$  оно может принадлежать к одному из трёх типов:

а) *гиперболическому* ( $D > 0$ );

б) *параболическому* ( $D = 0$ );

с) *эллиптическому* ( $D < 0$ ).

Приведем примеры наиболее распространенных уравнений в частных производных.

Волновое (гиперболическое) уравнение:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

Уравнение теплопроводности (параболическое):  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

где  $a > 0, \quad c=1, \quad g=0, \quad b=0, \quad D=0.$

Уравнение Лапласа (эллиптическое):  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

где  $D < 0, \quad a=1, \quad b=0, \quad c=1.$

Уравнение Пуассона  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g.$

Среди численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных наиболее распространёнными являются *разностные методы*. Они основаны на введении некоторой разностной сетки в рассматриваемой области.

мой области. Значения производных, начальные и граничные условия выражаются через значения искомой функции в узлах сетки. В результате чего получается система алгебраических уравнений, называемая разностной схемой. Решая систему уравнений, можно найти в узлах сетки значения сеточной функции, которые приблизительно считаются равными значениям искомой функции.

### 3.1. Построение разностных схем

Пусть задана прямоугольная область  $G$  с границей  $\Gamma$ , которая определена следующим образом:  $G = \{x, y: a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ , (рис. 18).

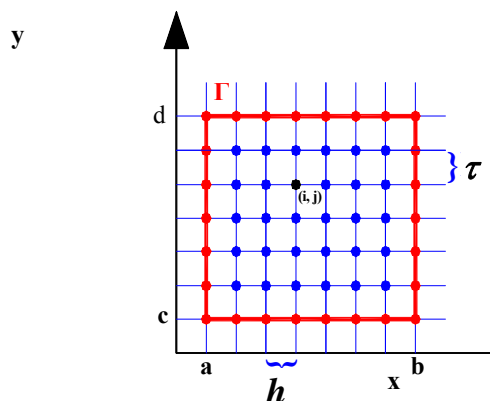


Рис. 18. Прямоугольная сетка

При этом  $h$  может не быть равным  $\tau$ . Стороны прямоугольника делятся на элементарные отрезки:

$$x_i = a + i \cdot h, (i=0, 1, \dots, n);$$

$$y_j = c + j \cdot \tau, (j=0, 1, \dots, m).$$

Через эти точки проводятся два семейства прямых  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , которые образуют сетку с прямоугольной ячейкой. Каждый узел сетки  $(i, j)$  определяется координатами  $(x_i, y_j)$ .

Аналогично можно ввести сетки для многомерных областей, которые содержат более двух измерений.

На рис. 19 показан элемент сетки в виде прямоугольного параллелепипеда для трёхмерной области.

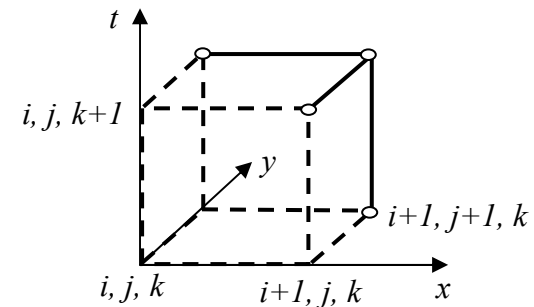


Рис.19. Элемент трёхмерной сетки

Иногда граничные точки области сложной формы не являются узлами сетки. В этом случае либо вводятся дополнительные узлы на пересечении координатных линий с границей, либо границу приближённо заменяют ломаной, проходящей через ближайшие к границе узлы. И на эту ломаную переносятся граничные условия.

Иногда сложные криволинейные области с помощью перехода к независимым переменным удаётся свести к простейшему виду.

Например, криволинейную область  $G$  можно привести к единичному квадрату  $G'$  с помощью введения новых переменных  $\xi, \eta$  вместо  $x, y$  (рис. 20) с помощью соотношений:

$$\xi = \frac{x - \varphi_1(y)}{\varphi_2(y) - \varphi_1(y)}, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\eta = \frac{y - \psi_1(x)}{\psi_2(x) - \psi_1(x)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

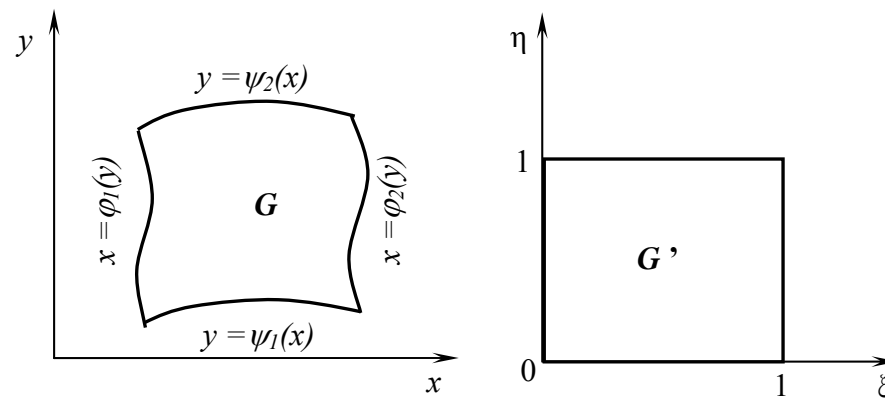


Рис. 20. Преобразование криволинейной области

В этом случае к новым переменным нужно преобразовать и дифференциальные уравнения, а также начальные и граничные условия.

На практике приходится решать задачи в криволинейных системах координат: полярной, цилиндрической, сферической. Например, если расчётную область удобно задавать в полярных координатах  $(r, \varphi)$ , то в этой области сетка вводится с шагами  $\Delta r$  и  $\Delta \varphi$  по радиус-вектору и полярному углу.

Иногда и в простой расчётной области вводят неравномерную сетку. В частности, в ряде случаев требуется проводить сгущение узлов для повышения точности расчёта в некоторых частях области  $G$ . Области сгущения узлов обычно известны или определяются в процессе решения задачи (например, в зависимости от градиентов искомых функций).

Для построения разностной схемы, как и в случае краевой задачи с обыкновенными дифференциальными уравнениями, частные производные в уравнении заменяются конечно-разностными соотношениями по некоторым шаблонам.

Рассмотрим некоторые примеры построения разностных схем для решения уравнения теплопроводности при заданных начальных и граничных условиях. Запишем смешанную краевую задачу в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; & 0 \leq x \leq 1; \quad t > 0; \quad a > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x); & U(0, t) = \psi_1(t); U(1, t) = \psi_2(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $\varphi(x)$  - начальное распределение температуры  $U$  при  $t=0$ ;

$\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  - распределение температуры на концах отрезка  $x=[0,1]$  в любой момент времени  $t$ .

Начальные и граничные условия должны быть согласованы, то есть:

$$\begin{cases} U(0, 0) = \varphi(0) = \psi_1(0) \\ U(1, 0) = \varphi(1) = \psi_2(0) \end{cases} \quad (3.4)$$

Введём равномерную прямоугольную сетку с помощью координатных линий:

$$\begin{aligned} x_i &= i \cdot h, & (i=0, 1, \dots, n), \\ t_j &= j \cdot \tau, & (j=0, 1, \dots, m), \end{aligned}$$

где  $h$  и  $\tau$  - шаги по сетке в направлении осей  $x$  и  $t$ .

Обозначим  $U_i^j = u(x_i, y_j)$  - значения искомой функции в узлах сетки.  $U_i^j$  заменим соответствующими значениями сеточной функции, которые удовлетворяют шаблону, представленному на рис. 21.

Заменим частные производные в системе уравнений (3.3) по шаблону:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \end{aligned}$$

Получим разностную схему:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \cdot \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \quad (3.5)$$

$$i=1, \dots, n-1, \quad j=0, \dots, m-1.$$

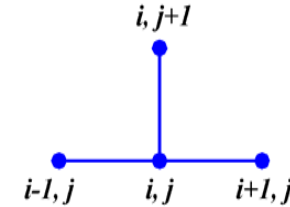


Рис. 21

Для одного и того же уравнения можно построить различные разностные схемы. Например, если воспользоваться шаблоном, представленным на рис. 22, то для системы (3.3) получим следующую разностную схему:

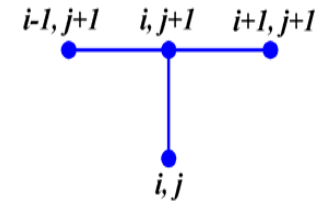


Рис. 22

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \cdot \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \quad (3.6)$$

$$i=1, \dots, n-1, \quad j=0, \dots, m-1.$$

Из системы алгебраических уравнений (3.5) или (3.6) определяют значения сеточной функции во внутренних узлах.

Значения в граничных узлах находятся из граничных условий:

$$u_0^j = \psi_1(t_j) \quad u_n^j = \psi_2(t_j) \quad (3.7)$$

Совокупность узлов при  $t=const$  называется слоем. Схема (3.5) позволяет последовательно находить значения  $u_i^{j+1}$  ( $i=1 \dots n-1$ ) на  $(j+1)$ -ом слое через

соответствующее значение  $u_i^j$  на слое  $j$  ( $j=0, m-1$ ). Такие схемы называются *явными*.

Для начала счёта необходимо знать решение на начальном слое. Оно определяется начальным условием (3.3), которое запишется в виде:

$$u_i^0 = \varphi(x_i) \quad i=1,2,\dots, n-1 \quad (3.8)$$

В отличие от явной схемы каждое разностное уравнение (3.6) содержит на каждом новом слое значения сеточной функции сразу в трёх узлах. Поэтому нельзя сразу определить эти значения через известное решение на предыдущем слое. Такие схемы называются *неявными*. При этом разностная схема (3.6) состоит из линейных трёхточечных уравнений, то есть каждое уравнение содержит неизвестную функцию в трёх узлах данного слоя. Такие системы линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей могут быть решены методом прогонки. В результате чего будет найдена сеточная функция в узлах.

Заметим, что в рассматриваемом примере мы получаем двухслойные схемы, где в каждое разностное уравнение входят значения функции из двух слоёв – нижнего, на котором решение уже найдено, и верхнего, в узлах которого решение ищется.

При построении разностных схем можно использовать и другие шаблоны:

- 1)  $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}$  ;  $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2h}$  ;
- 2)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}$  ;  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h^2}$  ;
- 3)  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \approx \frac{u_{i-2}^j - 4u_{i-1}^j + 6u_i^j - 4u_{i+1}^j + u_{i+2}^j}{h^4}$  ;  $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \approx \frac{u_i^{j+2} - 4u_i^{j+1} + 6u_i^j - 4u_i^{j-1} + u_i^{j-2}}{h^4}$  ;
- 4)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} - u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{4h^2}$  .

Практика использования численных методов для решения инженерных задач на ЭВМ показывает, что применение той или иной разностной схемы, даже если она исследована теоретически, требует её тщательной проверки при решении конкретной задачи. Для этого проводят вычислительные эксперименты, состоящие в расчётах с разными значениями шагов при различных исходных данных.

### 3.2. Уравнения первого порядка

Линейное уравнение переноса описывает скорость переноса частиц в средах, распространение возмущений и тому подобное.

Пусть искомая функция  $U$  зависит от времени  $t$  и одной переменной  $x$ , тогда уравнение переноса можно записать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = f(x, t), \quad (3.9)$$

где  $a > 0$  - скорость переноса, которую можно считать постоянной и положительной, что соответствует переносу слева направо в положительном направлении оси  $x$ .

Расчётная область при решении (3.9) может быть как бесконечной, так и ограниченной.

Для бесконечной области определения, задавая начальные условия при  $t=0$ :

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad (3.10)$$

получаем задачу Коши для полуплоскости  $\{t \geq 0, -\infty \leq x \leq \infty\}$ .

На практике чаще приходится решать уравнения переноса в некоторой ограниченной области  $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$ . В этом случае начальные условия при  $t=0$  задаются на отрезке  $x \in [0, 1]$ ; граничные условия нужно задать при  $x=0$ , т.е. на отрезке  $t \in [0, T]$ :

$$U(0, t) = \psi(t). \quad (3.11)$$

Таким образом, задача состоит в решении уравнения (3.9) с начальными условиями (3.10) и граничными условиями (3.11) в ограниченной области  $G = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$ . При  $f(x, t)=0$  имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -a \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.12) имеет вид:

$$U = H(x-at), \quad (3.13)$$

где  $H$ - произвольная дифференцируемая функция.

Решение (3.13) называется бегущей волной со скоростью  $a$ . Это решение постоянно вдоль каждой прямой  $x-at=const$ .

Рассмотрим разностные схемы для решения задачи (3.9), (3.10), (3.11). Построим в области  $G$  равномерную прямоугольную сетку с помощью прямых  $x=i \cdot h$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ),  $t=j \cdot \tau$  ( $j=0, 1, \dots, m$ ).

Вместо функций  $U, f, \varphi(x), \psi(t)$  будем рассматривать сеточные функции, значения которых в узлах  $(x_i, t_j)$  соответственно равны  $u_i^j, f_i^j, \varphi_i^j, \psi_i^j$ .

Применим следующий шаблон в виде правого нижнего уголка (рис.23).

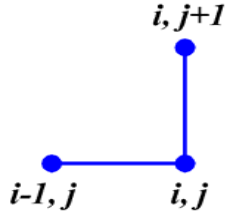


Рис. 23. Правый нижний уголок

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h},$$

где  $\tau$  – шаг по оси  $t$ ,  $h$  – шаг вдоль оси  $x$ .

Тогда линейное уравнение переноса будет аппроксимировано с использованием односторонних разностей:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = f(x_i, t_j). \quad (3.14)$$

Решая разностное уравнение относительно единственного неизвестного значения  $u_i^{j+1}$  на  $j+1$ -ом слое, получаем следующую разностную схему:

$$u_i^{j+1} = \frac{a \cdot dt}{h} u_{i-1}^j - \frac{a \cdot dt}{h} u_i^j + u_i^j + \tau \cdot f(x_i, y_j).$$

Обозначив  $\lambda = \frac{a \cdot \tau}{h}$  и приведя подобные, получим:

$$u_i^{j+1} = \lambda \cdot u_{i-1}^j + (1 - \lambda) \cdot u_i^j + \tau \cdot f(x_i, y_j), \quad (3.15)$$

$$i=1 \dots n, \quad j=0 \dots m-1.$$

Схема (3.15) является явной, поскольку значение сеточной функции в узле  $(j+1)$  верхнего слоя выражаются явно с помощью соотношения (3.15) через ранее найденные её значения на предыдущем слое  $j$ .

Для начала счёта по схеме (3.15) необходимы её значения на слое  $j=0$ . Они определяются начальным условием (3.10), которое записывается для сеточной функции в следующем виде:

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Граничное условие (3.11) записывается для сеточной функции следующим образом:

$$u_0^j = \psi^j(t_j), \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (3.17)$$

Таким образом, решение исходной дифференциальной задачи (3.9) - (3.11) сводится к решению разностной задачи (3.15) - (3.17). Найденные значения сеточной функции  $u_i^j$  принимаются в качестве значений искомой функции  $U$  в узлах сетки.

Алгоритм решения исходной задачи (3.9)–(3.11) с применением рассмотренной разностной схемы представлен на рис. 25.

В соответствии с этим алгоритмом в памяти ЭВМ хранится весь двумерный массив значений сеточной функции  $u_i^j$ , и он целиком выводится на печать по окончании счета.

С целью экономии памяти (и если эти результаты не понадобятся для дальнейшей обработки) можно хранить лишь значения сеточной функции на двух соседних слоях  $u_i^j, u_i^{j+1}$ .

Укажем теперь некоторые свойства данной разностной схемы. Она аппроксимирует исходную задачу с первым порядком точности. Схема устойчива при выполнении условия:

$$0 < \tau \leq h / \alpha. \quad (3.18)$$

Эти свойства схемы установлены в предположении, что решение  $U(x, t)$ , начальное и граничное значения  $\varphi(x)$  и  $\psi(t)$  дважды непрерывно дифференцируемы, а правая часть  $f(x, t)$  уравнения переноса имеет непрерывные первые производные.

Поскольку схема (3.15) устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то сеточное решение сходится к точному с первым порядком точности при  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ . Отметим, что при  $a < 0$  условие (3.18) не выполняется, и схема (3.15) не сходится.

Можно построить сходящуюся схему и для случая  $a < 0$ . В качестве шаблона для построения разностной схемы для уравнения (3.9) примем левый нижний уголок (рис. 24а).

Разностное уравнение в этом случае примет вид:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} = f_i^j. \quad (3.19)$$

Эта схема является устойчивой (следовательно, сходящейся) при  $a < 0$ , если выполнено соотношение

$$\tau \leq -\frac{h}{a}, \quad (3.20)$$

которое аналогично условию (3.18). При  $a > 0$  эта схема не сходится.

При построении явной разностной схемы (3.15) производная  $\partial U / \partial x$  в уравнении (3.9) аппроксимировалась с помощью значений сеточной функции на  $j$ -м слое; в результате получалось разностное уравнение (3.14), в котором использовано значение сеточной функции  $u_i^j$  лишь в одном узле верхнего слоя.

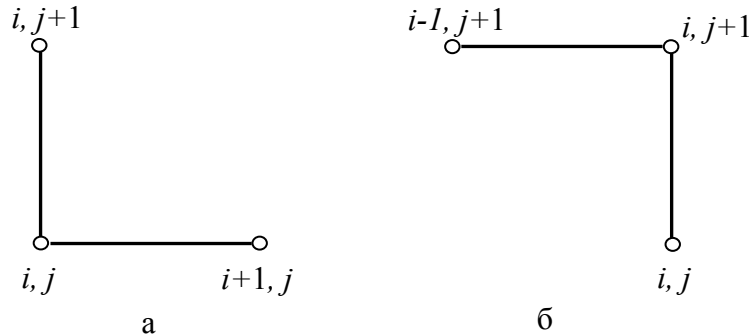


Рис. 24. Типы шаблонов: а) левый нижний уголок;  
б) правый верхний уголок

Если производную  $\partial U / \partial x$  аппроксимировать на  $j+1$ -м слое (шаблон изображен на рис. 24б), то получится неявная схема. Разностное уравнение примет вид:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} = f_i^j. \quad (3.21)$$

Разрешая это уравнение относительно  $u_i^{j+1}$ , приходим к следующей разностной схеме:

$$u_i^{j+1} = \frac{u_i^j + \lambda u_{i-1}^{j+1} + \tau f_i^j}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{a\tau}{h}. \quad (3.22)$$

Это двухслойная трёхточечная схема первого порядка точности. Она безусловно устойчива. Хотя формально данная разностная схема строилась как неявная, практическая организация счета по ней проводится так же, как и для явных схем.

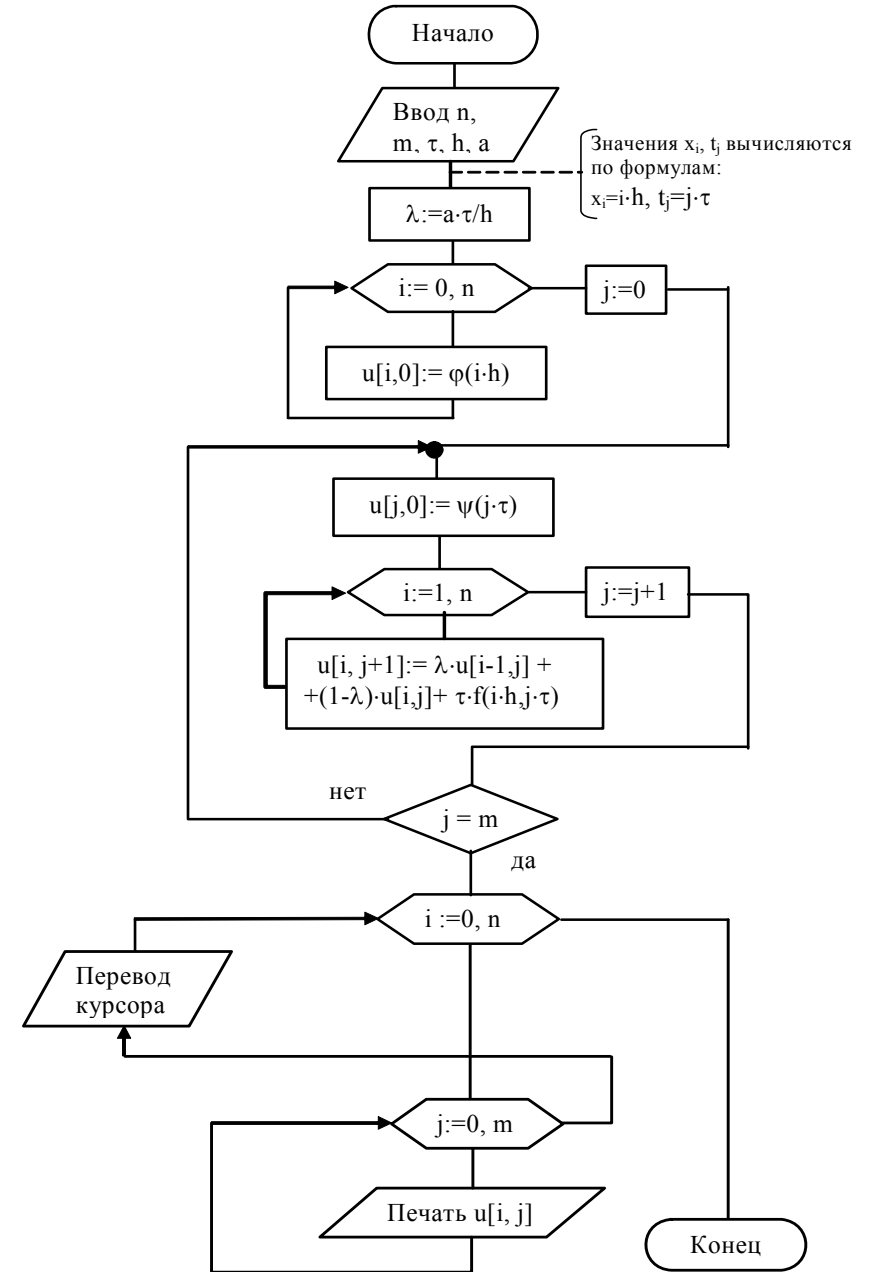


Рис. 25. Блок-схема решения линейного уравнения переноса.

Отметим, что в правую часть уравнения (3.22) входит значение  $u_{i-1}^{j+1}$  на  $j+1$ -м слое, которое при вычислении  $u_i^{j+1}$  уже найдено. При расчете  $u_1^{j+1}$  значение  $u_0^{j+1}$  берётся из граничного условия (3.17). По объему вычислений и логике программы, блок-схема которой приведена на рис.25, схема (3.22) аналогична схеме (3.15), однако безусловная устойчивость делает её более удобной, поскольку исключается ограничение на величину шага.

Схему (3.15) можно применять и для решения задачи Коши в неограниченной области, поскольку граничное условие (3.17) в этой схеме можно не использовать. Рассмотрим еще одну разностную схему, которую построим на симметричном прямоугольном шаблоне (рис. 26).

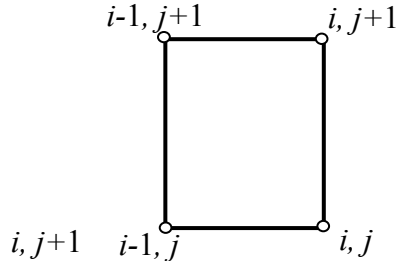


Рис.26. Прямоугольный шаблон

Производная по  $t$  здесь аппроксимируется в виде полусуммы отношений односторонних конечных разностей в  $i-1$ -м и  $i$ -м узлах, а производная по  $x$  - в виде полусуммы конечно-разностных соотношений на  $j$ -м и  $j+1$ -м слоях. Правая часть вычисляется в центре ячейки, хотя возможны и другие способы ее вычисления (например, в виде некоторой комбинации ее значений в узлах).

В результате указанных аппроксимаций получим разностное уравнение в виде:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{i-1}^{j+1} - u_{i-1}^j}{\tau} + \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} + \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right) = \bar{f}_i^j, \quad (3.23)$$

$$\bar{f}_i^j = f(x_i + h/2, t_j + \tau/2).$$

Данная двухслойная четырёхточечная схема также формально построена как неявная. Однако из (3.23) можно выразить неизвестное значение  $u_i^{j+1}$  через остальные, которые предполагаются известными:

$$u_i^{j+1} = \frac{u_{i-1}^j(1+\lambda) + (u_i^j + u_{i-1}^{j+1})(1-\lambda) + 2\tau \bar{f}_i^j}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{a\tau}{h}. \quad (3.24)$$

Построенная схема имеет второй порядок точности.

Все рассмотренные выше разностные схемы решения линейного уравнения переноса называются *схемами бегущего счета*. Они позволяют последовательно находить значения сеточной функции в узлах разностной сетки.

Схемы бегущего счета, построенные для случая одной пространственной переменной  $x$ , можно обобщить на многомерный случай. Рассмотрим для определенности смешанную задачу для двумерного линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a_1 \frac{\partial U}{\partial x} + a_2 \frac{\partial U}{\partial y} = f(x, y, t), \quad (3.25)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (3.26)$$

$$U(0, y, t) = \Psi_1(x, t), \quad U(x, 0, t) = \Psi_2(x, t). \quad (3.27)$$

Здесь  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  - скорости переноса вдоль осей  $x$ ,  $y$ ; (3.26) — начальное условие при  $t=0$ ; (3.27) — граничные условия при  $x=0$ ,  $y=0$ .

В трехмерной области  $(x, y, t)$  построим разностную сетку, ячейки которой имеют форму прямоугольного параллелепипеда (рис.27). Для этого проведем координатные плоскости через точки деления осей  $x$ ,  $y$ ,  $t$ :  $x_i = ih_1$  ( $i=0,1, \dots, n$ ),  $y_j = jh_2$  ( $j=0,1, \dots, m$ ),  $t_k = k\tau$  ( $k=0,1, \dots, l$ ). Значение сеточной функции в узле  $(i, j, k)$ , с помощью которой аппроксимируются значения  $U(x_i, y_j, t_k)$ , обозначим через  $u_{ij}^k$ . Сплошными линиями соединены узлы шаблона. Нижний слой (нижнее основание параллелепипеда) имеет номер  $k$ , верхний  $k+1$ .

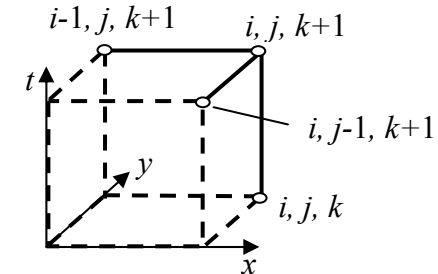


Рис. 27. Шаблон для двумерного уравнения.

Построим безусловно устойчивую разностную схему первого порядка точности, аналогичную схеме (3.22).

По аналогии с (3.21) запишем разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение (3.25):

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} + a_1 \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{h_1} + a_2 \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} = f_{ij}^k \quad (3.28)$$

Разрешим это уравнение относительно значения сеточной функции в узле  $(i, j, k+1)$ :

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{u_{ij}^k + \lambda_1 u_{i-1,j}^{k+1} + \lambda_2 u_{i,j-1}^{k+1} + \tau f_{ij}^k}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}, \quad (3.29)$$

$$\lambda_1 = a_1 \tau / h_1, \quad \lambda_2 = a_2 \tau / h_2.$$

Вычислительный алгоритм этой схемы аналогичен алгоритму одномерной схемы (3.22). Здесь также счет производится по слоям  $k = 1, 2, \dots, l$ . При  $k=0$  используется начальное условие (3.26), которое нужно переписать в разностном виде:

$$u_{ij}^0 = \varphi_{ij}. \quad (3.30)$$

На каждом слое последовательно вычисляются значения сеточной функции в узлах. При этом последовательность перехода от узла к узлу может быть различной: двигаются параллельно либо оси  $x$ , либо оси  $y$ . Во втором случае (по оси  $y$ ) последовательность вычисляемых значений следующая:

$$u_{11}^{k+1}, u_{12}^{k+1}, \dots, u_{1m}^{k+1}, u_{21}^{k+1}, u_{22}^{k+1}, \dots, u_{2m}^{k+1}, \dots, u_{n1}^{k+1}, u_{n2}^{k+1}, \dots, u_{nm}^{k+1}.$$

На рис. 28 показана нумерация узлов, соответствующая данной последовательности вычислений на каждом временном  $t$ -слое. Точками отмечены расчётные узлы сетки, крестиками - граничные узлы, в которых значения сеточной функции задаются граничными условиями (3.27). Эти условия необходимо записать в сеточном виде:

$$u_{0j}^{k+1} = \psi_1(y_j, t_{k+1}), \quad u_{i0}^{k+1} = \psi_2(x_i, t_{k+1}). \quad (3.31)$$

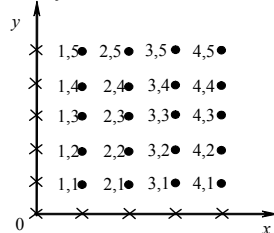


Рис. 28. Последовательность вычислений

При этом значение  $u_{00}^{k+1}$  в угловой точке  $(x=0, y=0)$  в данной разностной схеме не используется.

Блок-схема решения смешанной задачи (3.25) - (3.27) для двумерного уравнения переноса по схеме (3.29) с учетом начального и граничных условий (3.30) и (3.31) представлена на рис. 29.

В данной блок-схеме предусмотрено хранение в памяти машины не полного трехмерного массива искомых значений  $u_{ij}^k$ , а лишь значений на двух слоях:  $v_{ij}$  - нижний слой,  $u_{ij}$  - верхний слой (искомые значения). Блок «Вычисление  $u_{ij}$ » производит вычисление искомого значения по формуле (3.29), которая в принятых на блок-схеме обозначениях имеет вид:

$$u_{ij} = \frac{v_{ij} + \lambda_1 u_{i-1,j} + \lambda_2 u_{i,j-1} + \tau f_{ij}}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}. \quad (3.32)$$

### 3.3. Уравнения второго порядка

#### 3.3.1. Волновое уравнение

Одним из наиболее распространенных в инженерной практике уравнений с частными производными второго порядка является волновое уравнение, описывающее различные виды колебаний. Поскольку колебания — процесс нестационарный, то одной из независимых переменных является время  $t$ . Кроме того, независимыми переменными в уравнении являются также пространственные координаты  $x, y, z$ .

В зависимости от их количества различают одномерное, двумерное и трехмерное волновые уравнения.

*Одномерное волновое уравнение* описывает продольные колебания стержня, сечения которого совершают плоскопараллельные колебательные движения, а также поперечные колебания тонкого стержня (струны) и другие задачи.

*Двумерное волновое уравнение* используется для исследования колебаний тонкой пластины (мембраны).

*Трехмерное волновое уравнение* описывает распространение волн в пространстве (например, звуковых волн в жидкости, упругих волн в сплошной среде и т. п.).



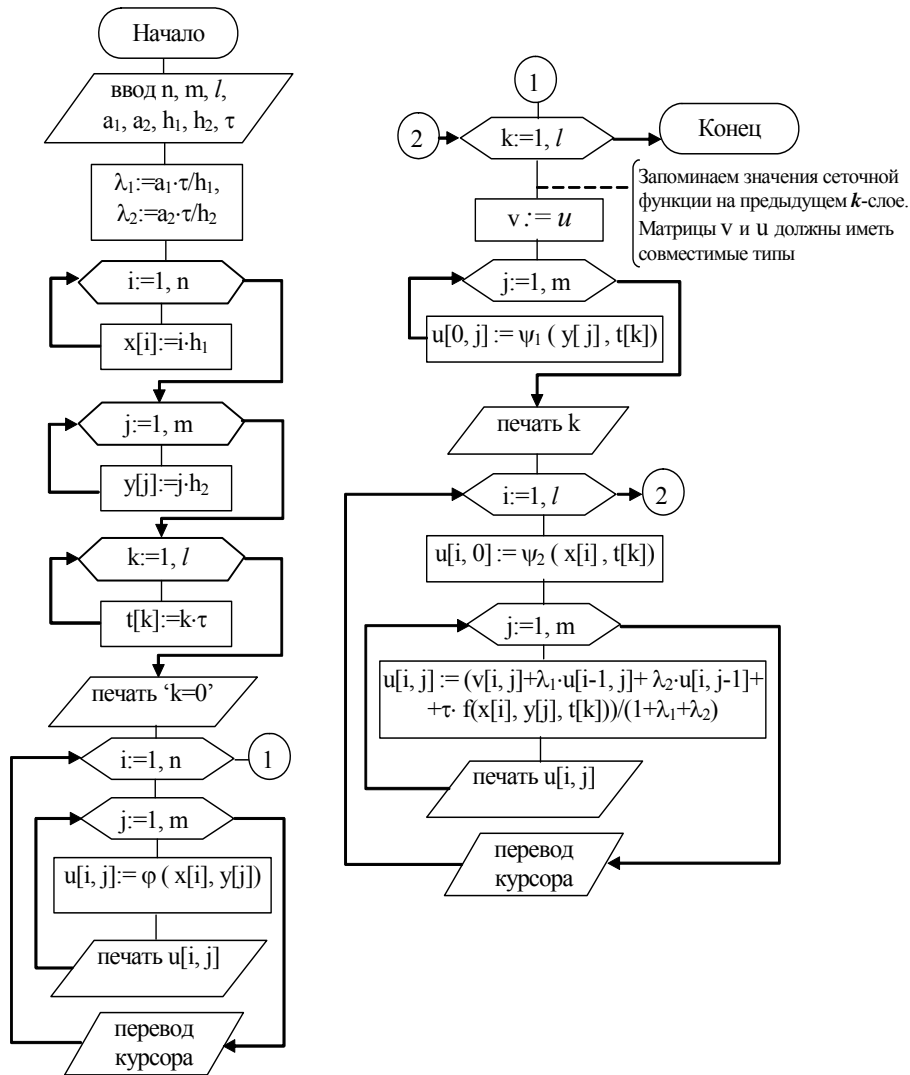


Рис. 29. Блок-схема решения двумерного уравнения

Рассмотрим одномерное волновое уравнение, которое можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (3.33)$$

Для поперечных колебаний струны искомая функция  $U(x, t)$  описывает положение струны в момент  $t$ . В этом случае  $a^2 = T/\rho$ , где  $T$  — натяжение струны,  $\rho$  — ее линейная (погонная) плотность. Колебания предполагаются малыми, т. е. их амплитуда мала по сравнению с длиной струны. Кроме того, уравнение (3.33) записано для случая свободных колебаний. В случае вынужденных колебаний в правой части уравнения добавляется некоторая функция  $f(x, t)$ , характеризующая внешние воздействия. Сопротивление среды колебательному процессу не учитывается.

Простейшей задачей для уравнения (3.33) является задача Коши: в начальный момент времени задаются два условия (количество условий равно порядку входящей в уравнение производной по  $t$ ):

$$U|_{t=0} = U(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial U / \partial t|_{t=0} = \psi(x). \quad (3.34)$$

Эти условия описывают начальную форму струны  $U = \varphi(x)$  и скорость движения ее точек  $\psi(x)$ .

На практике чаще приходится решать не задачу Коши для бесконечной струны, а смешанную задачу для ограниченной струны некоторой длины  $l$ . В этом случае задают граничные условия на ее концах. В частности, при закрепленных концах их смещения равны нулю, и граничные условия имеют вид:

$$U|_{t=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0. \quad (3.35)$$

Рассмотрим некоторые разностные схемы для решения задачи (3.33)—(3.35). Простейшей является явная трёхслойная схема крест (шаблон показан на рис.30). Заменим в уравнении (3.33) вторые производные искомой функции  $U$  по  $t$  и  $x$  конечно-разностными соотношениями с помощью значений сеточной функции  $u_i^j$  в узлах сетки  $(x_i, t_j)$ :

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad j=1, 2, \dots, m-1.$$

Отсюда можно найти явное выражение для значения сеточной функции на  $j+1$ -м слое:

$$u_i^{j+1} = 2(1-\lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}, \quad \lambda = a^2 \tau^2 / h^2. \quad (3.36)$$

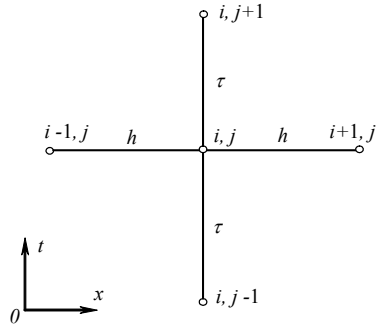


Рис. 30. Шаблон явной схемы «крест».

Здесь, как обычно в трехслойных схемах, для определения неизвестных значений на  $j+1$ -м слое нужно знать решения на  $j$ -м и  $j-1$ -м слоях. Поэтому следует начать счет по формулам (3.36) со второго слоя, а решения на нулевом и первом слоях должны быть известны. Они находятся с помощью начальных условий (3.34). На нулевом слое имеем:

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (3.37)$$

Для получения решения на первом слое воспользуемся вторым начальным условием (3.34). Производную  $\partial U / \partial t$  заменим конечно-разностной аппроксимацией. В простейшем случае полагают:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} \approx \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} \approx \psi(x_i). \quad (3.38)$$

Из этого соотношения можно найти значения сеточной функции на первом временном слое:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \psi(x_i), \quad i=0, 1, \dots, n, \quad t=0. \quad (3.39)$$

Отметим, что аппроксимация начального условия в виде (3.38) ухудшает аппроксимацию исходной дифференциальной задачи: погрешность аппроксимации становится порядка  $O(h^2 + \tau)$ , т. е. первого порядка по  $\tau$ , хотя сама схема (3.36) имеет второй порядок аппроксимации по  $h$  и  $\tau$ . Положение можно исправить, если вместо (3.39) взять более точное представление:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{t=0}. \quad (3.40)$$

Вместо  $\partial U / \partial t$  нужно взять  $\psi(x)$ . А выражение для второй производной можно найти с использованием уравнения (3.33) и первого начального условия (3.34). Получим:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{t=0} = a^2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right|_{t=0} = a^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2}.$$

Тогда (3.39) принимает вид:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \psi(x_i) + \frac{a^2 \tau^2}{2} \varphi''(x_i) \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (3.41)$$

Разностная схема (3.36) с учетом (3.41) обладает погрешностью аппроксимации второго порядка точности  $O(h^2 + \tau^2)$ .

При решении смешанной задачи с граничными условиями вида (3.35), т. е. когда на концах рассматриваемого отрезка заданы значения самой функции, второй порядок аппроксимации сохраняется. В этом случае для удобства крайние узлы сетки располагают в граничных точках ( $x_0=0, x_l=l$ ). Однако граничные условия могут задаваться и для производной. Например, в случае свободных продольных колебаний стержня на его незакрепленном конце задается условие:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (3.42)$$

Если это условие записать в разностном виде с первым порядком аппроксимации, то погрешность аппроксимации схемы станет порядка  $O(h^2 + \tau^2)$ . Поэтому для сохранения второго порядка данной схемы по  $h$  необходимо граничное условие (3.42) аппроксимировать со вторым порядком.

Рассмотренная разностная схема (3.36) решения задачи (3.33) - (3.35) устойчива. Необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид:

$$a\tau / h < 1. \quad (3.43)$$

Данная схема часто используется в практических расчетах. Она обеспечивает приемлемую точность получения решения  $U(x, t)$ , которое имеет непрерывные производные четвертого порядка.

Блок-схема решения задачи (3.33)—(3.35) с помощью данной явной разностной схемы приведена на рис. 32. В данном алгоритме все значения сеточной функции, образующие двумерный массив, по мере вычисления хранятся в памяти ЭВМ, а после решения задачи происходит вывод результатов. Мож-

но было бы предусмотреть хранение решения лишь на трех слоях, что сэкономило бы память. Вывод результатов в таком случае можно производить в процессе счета.

Существуют и другие разностные схемы решения волнового уравнения. В частности, иногда удобнее использовать неявные схемы, чтобы избавиться от ограничений на величину шага, налагаемых условием (3.43). Эти схемы обычно абсолютно устойчивы, однако алгоритм решения задачи и программа на ЭВМ усложняются.

Построим простейшую неявную схему. Вторую производную по  $t$  в уравнении (3.33) аппроксимируем, как и ранее, по трёхточечному шаблону с помощью значений сеточной функции на слоях  $j-1, j, j+1$ .

Производную по  $x$  заменяем полусуммой ее аппроксимации на  $j+1$ -м и  $j-1$ -м слоях (рис. 31):

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right) \quad (3.44)$$

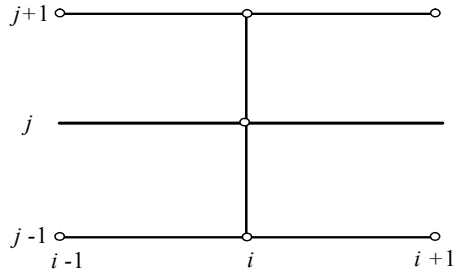


Рис. 31. Шаблон неявной схемы.

Из этого разностного соотношения можно получить систему уравнений относительно неизвестных значений сеточной функции на  $j+1$ -м слое ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ):

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = (1 + 2\lambda)u_i^{j-1} - \lambda(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) - 2u_i^j, \\ \lambda = a^2 \tau^2 / h^2, \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (3.45)$$

Неявная схема (3.45) имеет второй порядок точности  $O(h^2 + \tau^2)$ . Систему линейных алгебраических уравнений (3.45) можно, в частности, решать методом прогонки (см. рис.38 в [1]). К этой системе следует добавить разностные начальные и граничные условия. В частности, выражения (3.37), (3.39) или

(3.41) могут быть использованы для вычисления значений сеточной функции на нулевом и первом слоях по времени.

**Задание.** Разработать алгоритм решения волнового уравнения, используя неявную схему (3.45).

При наличии двух или трех независимых пространственных переменных волновые уравнения соответственно имеют вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right).$$

Для них также могут быть построены разностные схемы по аналогии с одномерным волновым уравнением. Разница состоит в том, что нужно аппроксимировать производные по двум или трем пространственным переменным, что, естественно, усложняет алгоритм и требует значительно больших объемов памяти и времени счета. Подробнее двумерные задачи будут рассмотрены ниже для уравнения теплопроводности.

### 3.3.2. Уравнение теплопроводности

Ранее уже были построены разностные схемы решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности (см. гл.3.1):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0, \quad (3.46)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad (3.47)$$

$$U(0, t) = \psi_1(t), \quad U(1, t) = \psi_2(t). \quad (3.48)$$

Были получены две двухслойные схемы — явная и неявная. В явной схеме значения сеточной функции  $u_i^{j+1} = u(x_i, t_{j+1})$  на верхнем  $j+1$ -м слое вычислялись с помощью решения на нижнем слое:

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i+1}^j + (1 - 2\lambda)u_i^j + \lambda u_{i-1}^j, \\ \lambda = a \tau / h^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.49)$$

Данная схема устойчива при выполнении условия:

$$\lambda = a \tau / h^2 \leq 1/2. \quad (3.50)$$

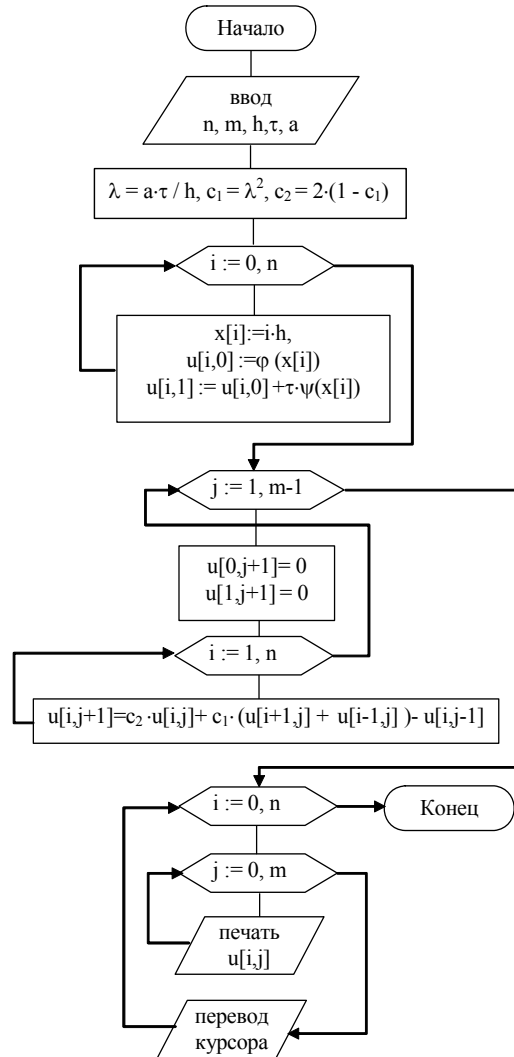


Рис. 32. Блок-схема решения волнового уравнения

При  $\lambda=1/2$  получается особенно простой вид рекуррентных соотношений (3.49):

$$u_i^{j+1} = (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) / 2. \quad (3.51)$$

Условие устойчивости (3.50) накладывает ограничение на шаг по  $t$  при выбранном значении  $h$ , что характерно для явных схем.

Построим простейшую неявную схему. Производную  $\partial^2 U / \partial x^2$  аппроксимируем на  $j+1$ -м слое:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}.$$

В этом случае получается трёх диагональная система линейных алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции в узлах верхнего слоя, которая имеет вид:

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda) u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = -u_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.52)$$

Эта система может быть решена методом прогонки. При этом разностное решение сходится к точному со вторым порядком по  $h$  и с первым порядком по  $\tau$ . Схема (3.52) всегда устойчива.

Выражения (3.49) и (3.52) определяют значения сеточной функции во внутренних узлах, а решение на границе находится из граничных условий, которые зависят от конкретной постановки задачи. В частности, если граничные условия имеют вид (3.48), то на каждом слое

$$u_0^j = \psi_1(t_j), \quad u_n^j = \psi_2(t_j). \quad (3.53)$$

В граничные условия может также входить производная искомой функции (температуры). Например, если конец стержня  $x = 0$  теплоизолирован, то условие имеет вид:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (3.54)$$

В этом случае, как и при решении волнового уравнения, данное условие нужно записывать в разностном виде.

**Задание.** Разработайте алгоритмы решения одномерного уравнения теплопроводности с использованием явной (3.49) и неявной (3.52) разностных схем.

Перейдем к построению разностных схем для уравнения теплопроводности с двумя пространственными переменными. Положим для простоты  $a = 1$ : Тогда это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \quad (3.55)$$

Пусть при  $t = 0$  начальное условие записано в виде:

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (3.56)$$

В отличие от волнового уравнения, требующего два начальных условия, в уравнение теплопроводности входит только первая производная по  $t$ , и необходимо задавать одно начальное условие.

Часто задачи теплопроводности или диффузии, описываемые двумерным уравнением (3.55), решаются в ограниченной области. Тогда, кроме начального условия (3.56), нужно формулировать граничные условия. В частности, если расчетная область представляет прямоугольный параллелепипед  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T$  (рис. 33), то нужно задавать граничные условия на его боковых гранях. Начальное условие (3.56) задано на нижнем основании параллелепипеда.

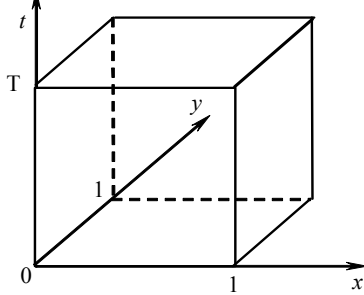


Рис. 33. Расчетная область

Введем простейшую сетку с ячейками в виде прямоугольных параллелепипедов, для чего проведем три семейства плоскостей:

$$\begin{aligned} x_i &= i \cdot h_1, \quad (i = 0, 1, \dots, n), \\ y_j &= j \cdot h_2, \quad (j = 0, 1, \dots, m), \\ t_k &= k \cdot \tau, \quad (k = 0, 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Значения сеточной функции в узле  $x_i, y_j, t_k$  обозначим символом  $u_{ij}^k$ .

Используя эти значения, можно построить разностные схемы для уравнения (3.55). Рассмотренные выше схемы легко обобщаются на двумерный случай.

Построим явную разностную схему, шаблон которой изображен на рис.34.

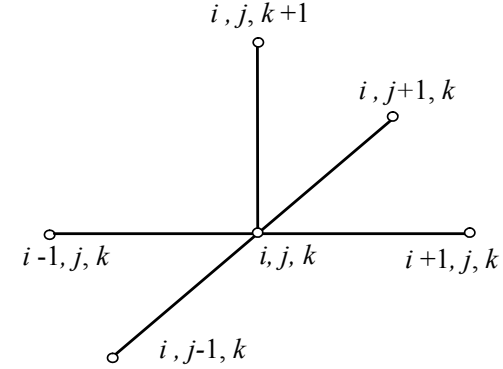


Рис. 34. Шаблон двумерной схемы.

Аппроксимируя производные отношениями конечных разностей, получаем следующее сеточное уравнение:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2}.$$

Отсюда можно найти явное выражение для значения сеточной функции на  $k+1$ -м слое:

$$u_{ij}^{k+1} = (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)u_{ij}^k + \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k),$$

$$\lambda_1 = \tau / h_1^2, \quad \lambda_2 = \tau / h_2^2. \quad (3.57)$$

Условие устойчивости имеет вид:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \tau / h_1^2 + \tau / h_2^2 \leq 1/2. \quad (3.58)$$

При  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1/2$  получается особенно простой вид схемы:

$$u_{ij}^{k+1} = \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k). \quad (3.59)$$

Полученная схема сходится со скоростью  $O(h_1^2, h_2^2 \tau)$ .

Формулы (3.57) или (3.59) представляют рекуррентные соотношения для последовательного вычисления сеточной функции во внутренних узлах слоев  $k=1, 2, \dots, l$ . На нулевом слое используется начальное условие (3.56), которое записывается в виде

$$u_{ij}^0 = \varphi(x_i, y_i). \quad (3.60)$$

Значения  $u_{0j}^k, u_{nj}^k, u_{i0}^k, u_{im}^k$ , в граничных узлах вычисляются с помощью граничных условий, заданных на боковых гранях:

$$U(0, y, t) = \psi_1(y, t); U(1, y, t) = \psi_2(y, t);$$

$$U(x,0,t) = \psi_3(x,t); \quad U(x,1,t) = \psi_4(x,t).$$

Блок-схема решения смешанной задачи для двумерного уравнения теплопроводности изображена на рис. 35. Здесь решение хранится на двух слоях: нижнем (массив  $v_{ij}$ ) и верхнем (массив  $u_{ij}$ ). Блоки граничных условий необходимо сформировать в зависимости от конкретного вида этих условий. Вывод результатов производится на каждом слое.

Можно построить устойчивую неявную схему для решения уравнения (3.55), аналогичную схеме (3.52) для одномерного уравнения теплопроводности. Аппроксимируя в (3.55) вторые производные по пространственным переменным на  $k+1$ -м слое, получаем следующее разностное уравнение:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2}.$$

Это уравнение можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции на каждом слое:

$$\lambda_1(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}) - (1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2)u_{ij}^{k+1} + \lambda_2(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}) = -u_{ij}^k,$$

$$\lambda_1 = \tau/h_1^2, \quad \lambda_2 = \tau/h_2^2, \quad i=1, 2, \dots, n-1, \quad j=1, 2, \dots, m-1. \quad (3.61)$$

К этой системе уравнений нужно добавить граничные условия для определения значений сеточной функции в граничных узлах (т. е. при  $i=0, n$ ;  $j=0, m$ ). На нулевом слое решение находится из начального условия (3.56), представленного в виде (3.60).

Система (3.61), полученная для двумерного уравнения теплопроводности, имеет более сложный вид, чем аналогичная система (3.52) для одномерного случая, которую можно решить методом прогонки. Таким образом, распро-

странение неявной схемы на многомерный случай приводит к значительному усложнению вычислительного алгоритма и увеличению объема вычислений.

Недостатком явной схемы (3.57) является жесткое ограничение на шаг по времени  $\tau$ , вытекающее из условия (3.58). Существуют абсолютно устойчивые экономичные разностные схемы, позволяющие вести расчет со сравнительно большим значением шага по времени ( $\tau \sim h$ ) и требующие меньшего объема вычислений.

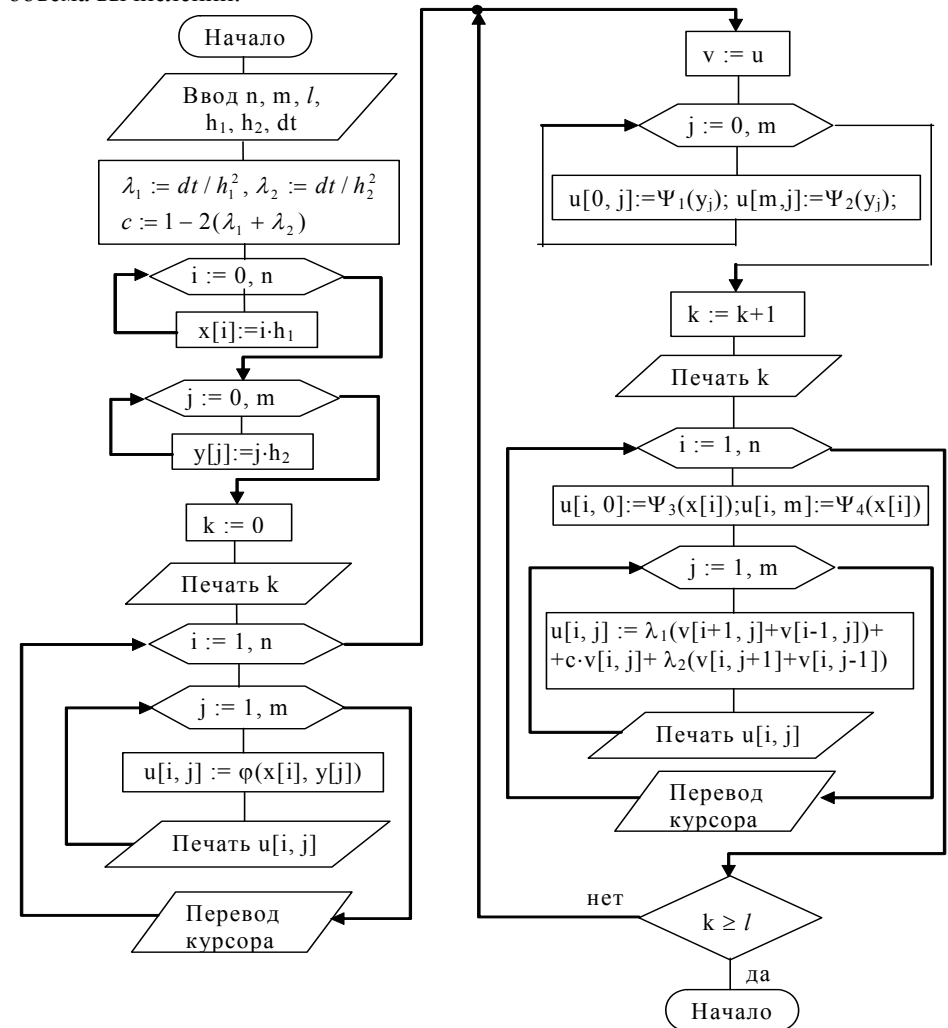


Рис. 35. Блок-схема решения двумерного уравнения теплопроводности.

### 3.4. Контрольные вопросы

1. Перечислите виды уравнений с частными производными.
2. В чём заключается суть разностного метода?
3. Назовите виды шаблонов разностных схем.
4. Решение какого уравнения называется бегущей волной?
5. Какая разностная схема называется явной (неявной)?
6. Как учитываются в волновом уравнении вынужденные колебания?
7. Назовите недостатки явной разностной схемы решения уравнения теплопроводности.

### 4. Литература

1. Асламова В.С., Колмогоров А.Г., Ступакова Н.Н. Вычислительная математика. Часть первая: Учебное пособие. – Ангарск: АГТА, 2003.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы (часть 1). – М.:Наука, 1983.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учебное пособие. – М.:Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1987.
4. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990.
5. Вержбицкий В.М. Численные методы. – М.:Высшая школа, 2000.
6. Волков Е.А. – Численные методы. – М.:Наука, 1982.
7. Воробьёва Г.Н., Данилова Д. Н. Практикум по вычислительной математике. – М.: Высшая школа, 1990 .
8. Демидович Б.П., Марон И.А. и др. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том 1,2. – М.:Наука, 1976.
10. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.:Наука, 1989.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
12. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987.
13. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. – М.:Мир, 1982.

