

Mini projet st5 voie théorique

David Hourì

October 30, 2023

Lien Github du projet: [wave control](#)

1 Question 1

Theorem Let $\Omega =]-L, L[\times]-\ell, \ell[$ be a domain with a simply connected sub-domain Ω_{air} , whose boundaries are $] -L, 0[\times \{\ell\}$, $\{-L\} \times]-\ell, \ell[$ and another boundary, denoted by Γ , which is the straight line starting in $(0, -\ell)$ and ending in $(0, \ell)$. In addition let Ω_{wall} be the supplementary domain of Ω_{air} in Ω , so that Γ is the common boundary of Ω_{air} and Ω_{wall} . The length L is supposed to be large enough.

Let the original problem (the frequency version of the wave damped problem be

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_0) - \omega^2 \xi_0 u_0 &= 0 \text{ in } \Omega_{\text{air}}, \\ -\nabla \cdot (\eta_1 \nabla u_1) - \omega^2 \tilde{\xi}_1 u_1 &= 0 \text{ in } \Omega_{\text{wall}}, \end{aligned}$$

with

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{ai}{\xi_1 \omega} \right)$$

together with boundary conditions on Γ

$$u_0 = u_1 \text{ and } \eta_0 \nabla u_0 \cdot \nu = \eta_1 \nabla u_1 \cdot \nu,$$

and the condition on the left boundary

$$u_0(-L, y) = g(y)$$

and some other boundary conditions. Let the modified problem be

$$-\nabla \cdot (\eta_0 \nabla u_2) - \omega^2 \xi_0 u_2 = 0 \text{ in } \Omega_{\text{air}}$$

with boundary absorption condition on Γ

$$\eta_0 \nabla u_2 \cdot \nu + \alpha u_2 = 0$$

and the condition on the left boundary

$$u_2(-L, y, \omega) = g(y, \omega).$$

Let u_0, u_1, u_2 and g be decomposed into Fourier modes in the y direction, denoting by k the associated wave number. Then the complex parameter α , minimizing the following expression

$$A \|u_0 - u_2\|_{L_2(\Omega_{\text{air}})}^2 + B \|\nabla(u_0 - u_2)\|_{L_2(\Omega_{\text{air}})}^2$$

can be found from the minimization of the error function

$$e(\alpha, \omega) := \sum_{k=\frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{Z}} e_k(\alpha, \omega),$$

where e_k are given by

$$\begin{aligned} e_k(\alpha) = (A + B|k|^2) & \left(\frac{1}{2\lambda_0} \{ |\chi|^2 [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \right. \\ & + |\gamma|^2 [\exp(2\lambda_0 L) - 1] \} + 2L \operatorname{Re}(\chi\bar{\gamma}) \\ & \left. + B \frac{\lambda_0}{2} \{ |\chi|^2 [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] + |\gamma|^2 [\exp(2\lambda_0 L) - 1] \} - 2B\lambda_0^2 L \operatorname{Re}(\chi\bar{\gamma}) \right) \end{aligned}$$

if $k^2 \geq \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2$ or

$$\begin{aligned} e_k(\alpha) = (A + B|k|^2) & \left(L (|\chi|^2 + |\gamma|^2) + \frac{i}{\lambda_0} \operatorname{Im} \{ \chi\bar{\gamma} [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \} \right) \\ & + BL|\lambda_0|^2 (|\chi|^2 + |\gamma|^2) + iB\lambda_0 \operatorname{Im} \{ \chi\bar{\gamma} [1 - \exp(-2\lambda_0 L)] \} \end{aligned}$$

if $k^2 < \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2$, in which

$$\begin{aligned} f(x) &= (\lambda_0 \eta_0 - x) \exp(-\lambda_0 L) + (\lambda_0 \eta_0 + x) \exp(\lambda_0 L) \\ \chi(k, \alpha, \omega) &= g_k(\omega) \left(\frac{\lambda_0 \eta_0 - \lambda_1 \eta_1}{f(\lambda_1 \eta_1)} - \frac{\lambda_0 \eta_0 - \alpha}{f(\alpha)} \right) \\ \gamma(k, \alpha, \omega) &= g_k(\omega) \left(\frac{\lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1}{f(\lambda_1 \eta_1)} - \frac{\lambda_0 \eta_0 + \alpha}{f(\alpha)} \right) \end{aligned}$$

where

$$\begin{cases} \lambda_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2} & \text{if } k^2 \geq \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2, \\ \lambda_0 = i \sqrt{\frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2 - k^2} & \text{if } k^2 \leq \frac{\xi_0}{\eta_0} \omega^2. \end{cases}$$

and

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{k^2 - \frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2 + \sqrt{\left(k^2 - \frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a\omega}{\eta_1}\right)^2}} \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2 - k^2 + \sqrt{\left(k^2 - \frac{\xi_1}{\eta_1} \omega^2\right)^2 + \left(\frac{a\omega}{\eta_1}\right)^2}}. \end{aligned}$$

The case $A = 1, B = 1$ can be considered.

2 Question 2

2.1 Source 1: Instrument à vent

Dans un instrument à vent du type flûte à bec, on sait que la forme des solutions de l'équation d'onde est de la forme

$$g_3(y, w, t) = A \sin(wt - kx) \text{ avec } k = \frac{w}{c} \quad (1)$$

Donc à t_0 , il existe ϕ_0 tel que:

$$g_3(y, w) = A \sin\left(\frac{w}{c}(\phi - y)\right) \quad (2)$$

D'où en choisissant t_0 de sorte que $\phi = 0$ on obtient:

$$g_3(y, w) = B \sin\left(\frac{w}{c}y\right) \quad (3)$$

D'une manière plus théorique on peut approximer une source quelconque à l'aide de fonctions sinusoïdales donc on peut s'intéresser à ce type de source dans notre étude.

2.2 Source 2: Modélisation d'une salle de classe

La première source est la plus simple à laquelle on puisse penser. On peut par exemple imaginer qu'une salle de classe se situe derrière le mur de gauche. On peut supposer en première approximation que cette classe émet un signal de même amplitude pour toutes les fréquences sonores et de manière homogène selon l'axe u_y . On a donc directement l'expression de cette source en fonction de y et w .

$$g_1(y, w) = \begin{cases} A & \text{si } -L \leq y \leq L \text{ et } 20 \leq \frac{\omega}{2\pi} \leq 20000 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

2.3 Source 3: Une sirène

De la même manière on peut imaginer qu'une sirène de taille $2k_s L$ se situe en $y=0$. Elle émet donc uniquement entre $-k_s L$ et $k_s L$ un signal a une fréquence w_0 . De plus le signal n'étant pas pur à la fréquence w_0 on sait d'après le cours de Traitement du Signal que le signal est de la forme

$$g_2(y, w) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\sigma^2}} & \text{si } -k_{\text{sirène}}L \leq y \leq k_{\text{sirène}}L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

Ici σ donne le bruitage du signal. Plus il est grand plus la gaussienne est étalée autour de w_0 .

3 Question 3

On a le lien du github du projet: [wave control project](#)

On obtient les 3 courbes suivantes pour le matériau considéré:

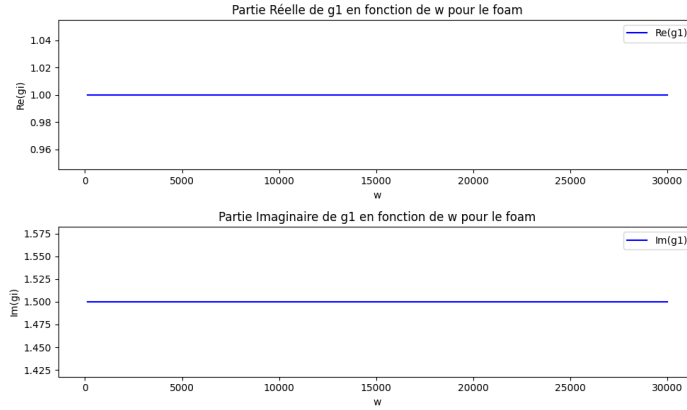


Figure 1: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g_1

On constate tout d'abord que pour la source 2 (la fonction indicatrice), la matériau suit très fidèlement les résultats dans le polycopié. On constate en étudiant la forme de la partie imaginaire de α que pour les hautes fréquences, elle diminue linéairement avec ω . Cela signifie que la dissipation d'énergie dans le matériau est plus forte pour les hautes fréquence. En effet, un signal de fréquence plus élevée a plus d'énergie. Le mur va donc agir comme un filtre passe bas en sélectionnant les basses fréquences. On peut observer cet effet dans les bouchons d'oreille qui ont tendance à nous faire entendre uniquement les sons graves.

De plus pour la source 3 qui modélise une alarme, on constate que pour des fréquences éloignées de w_0 (qui ici vaut $w_0 = 10000 \text{ rad.s}^{-1}$). La valeur optimale de α vaut 0. Cela provient de l'exponentielle qui rend nul le signal pour des fréquences éloignées de w_0 . Ainsi pour ces fréquences, il n'y aura pas dissipation d'énergie puisque qu'elle n'en transportent pas. Cependant pour des valeurs assez proches de w_0 . On constate que la partie imaginaire est très faible donc l'énergie de l'onde est fortement atténuée mais que dans le voisinage proche de w_0 il semble il y a avoir une résonance et l'énergie de

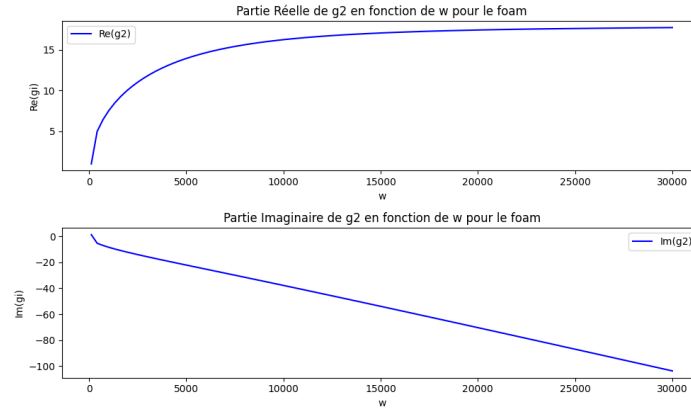


Figure 2: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g_2

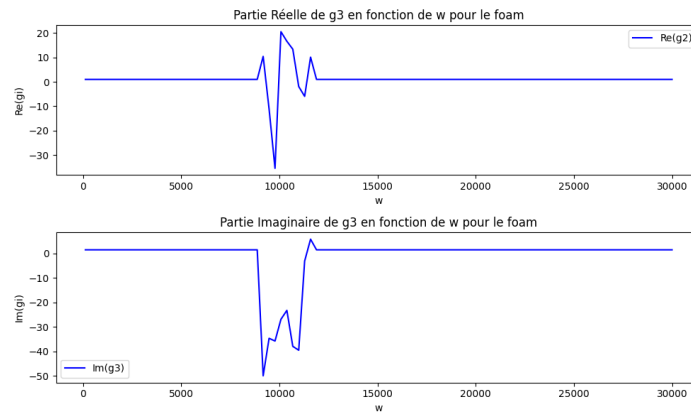


Figure 3: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g_3

l'onde est assez faiblement atténuée. Le mur aura tendance à agir comme un filtre coupe bande qui va laisser passer des fréquences les plus proches de w_0 possible

Enfin la source sinusoïdale est décevante puisqu'on constate que la fonction d'optimisation nous renvoie uniquement notre initial guess donc elle n'arrive pas à converger vers un minimum. Cela peut provenir du fait que le sinus est une fonction propre du D'Alembertien mais je n'ai pas trouvé comment résoudre ce problème.

4 Question 4

On considère le matériau précédent ainsi que 2 types de bois différents. Le pin: $\phi = 0.54$ (porosity), $\sigma = 35540$ (resistivity), $\alpha_h = 1.22$ (tortuosity) et le chêne $\phi = 0.67$ (porosity), $\sigma = 197525$ (resistivity), $\alpha_h = 1.38$ (tortuosity).

On obtient des résultats proches de ceux que l'on a obtenu en question 3 ce qui nous conforte dans notre modèle informatique de résolution de l'exercice. La source pour les constantes du pin et du chêne se trouve sur le [site](#)

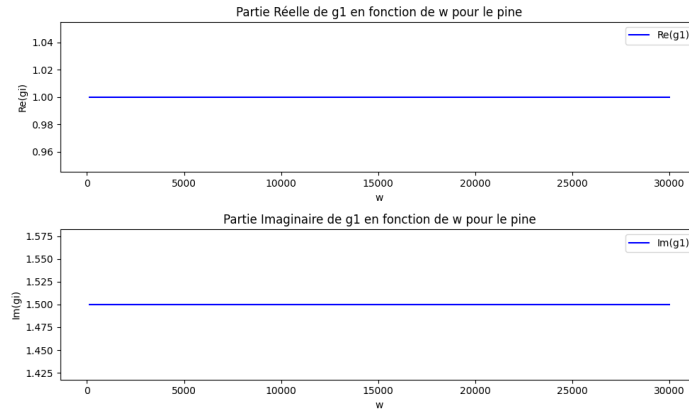


Figure 4: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g1 pour le pine

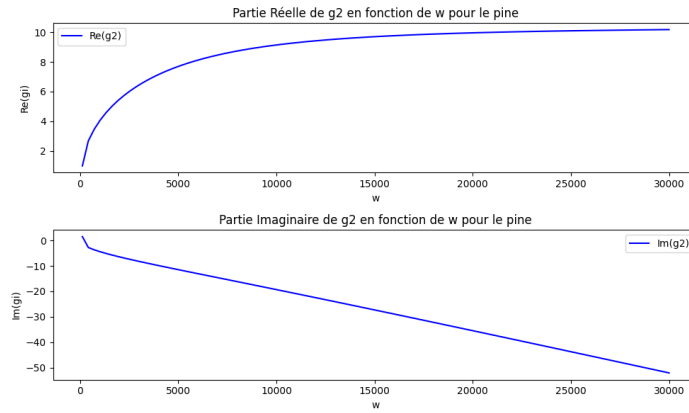


Figure 5: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g2 pour le pine

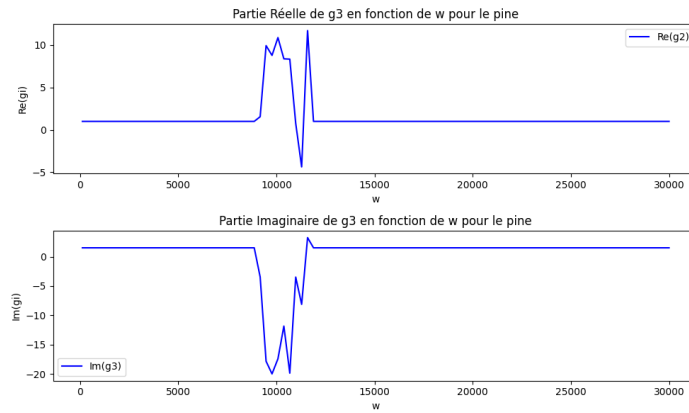


Figure 6: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g3 pour le pine

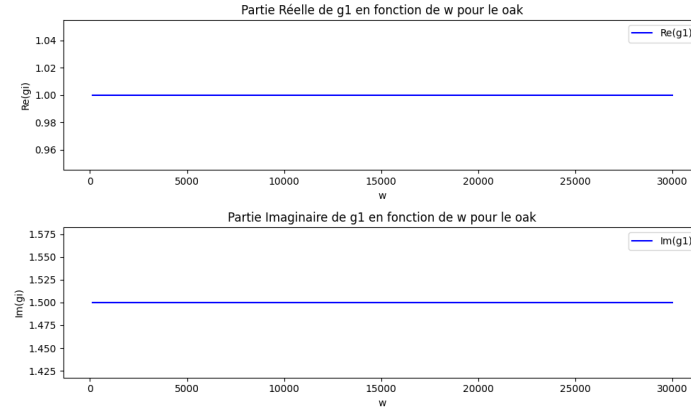


Figure 7: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g1 pour le chêne

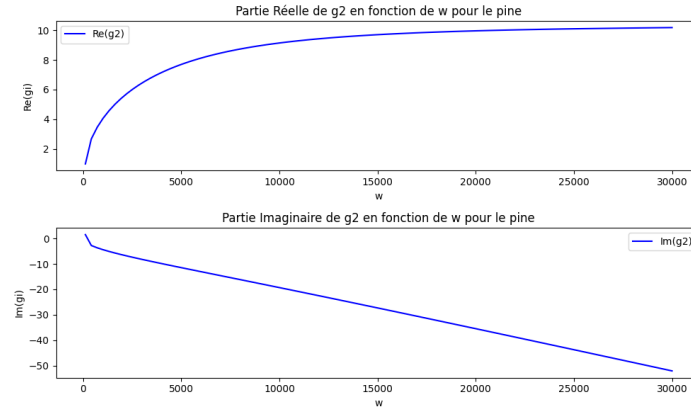


Figure 8: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g2 pour le chêne

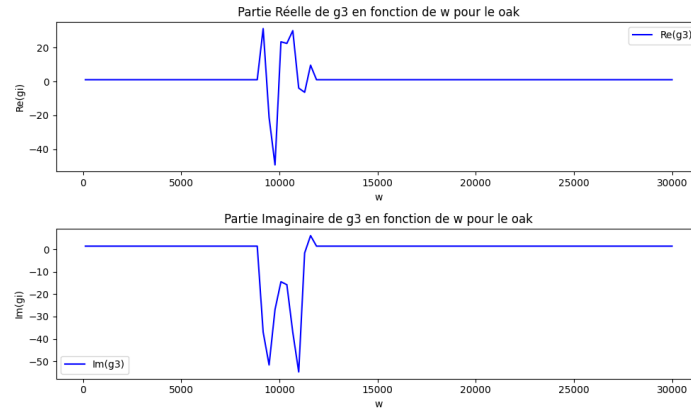


Figure 9: Partie imaginaire et réelle de α pour la fonction g3 pour le chêne