游戏中的数学

David

January 24, 2021

Contents

Chapter 1

Vector

1.1 Defination

一般Vector翻译为:

- 向量 - 代数
- 矢量 - 几何

1.1.1 代数定义

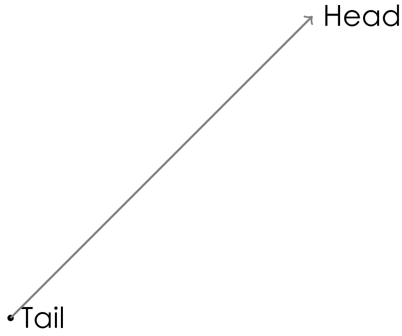
行向量（Row Vector）：

$$\mathsf{v} = \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

列向量（Column Vector）：

$$\mathsf{v} = \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

1.1.2 几何定义



- 大小（Magnitude）：

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- 方向（Direction）：可以用单位向量表示（Normalized）

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

1.1.3 用途

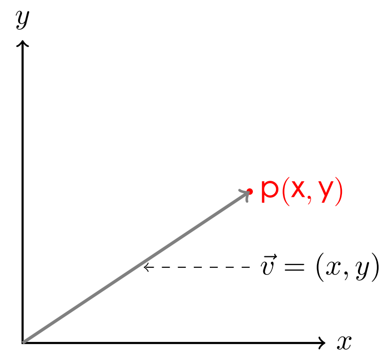
- 位移（Displacement）
- 速度（Velocity）
- …

1.2 Vector vs. Point

意义的区别：

- Point - 空间绝对位置
- Vector - 空间相对位置

等价关系：



尽管代数上是等价的，几何要进行区分理解:

- $\vec{v}$，给出列从原点到点$p(x, y, z)$的位移
- $p(x, y, z)$，则是从原点开始沿着$\vec{v}$指定的量进行移动，最终到达的位置

1.3 运算及其几何意义

分两个角度来看：一个代数（计算）角度，一个几何（图形）解释。
向量运算有:

- 加法： 几何运算满足三角规则（Triangle Rule）
  - 减法：减法是加法的逆运算
  - 逆元：$\vec{v}$ 的逆元是 $-\vec{v}$，几何意识是反方向
- 数乘：缩放向量$\vec{v}$
- 点积：可用两种几何视角来看，当作投影或向量夹角
- 叉积：计算相交两条线的法线

1.3.1 +

代数定义

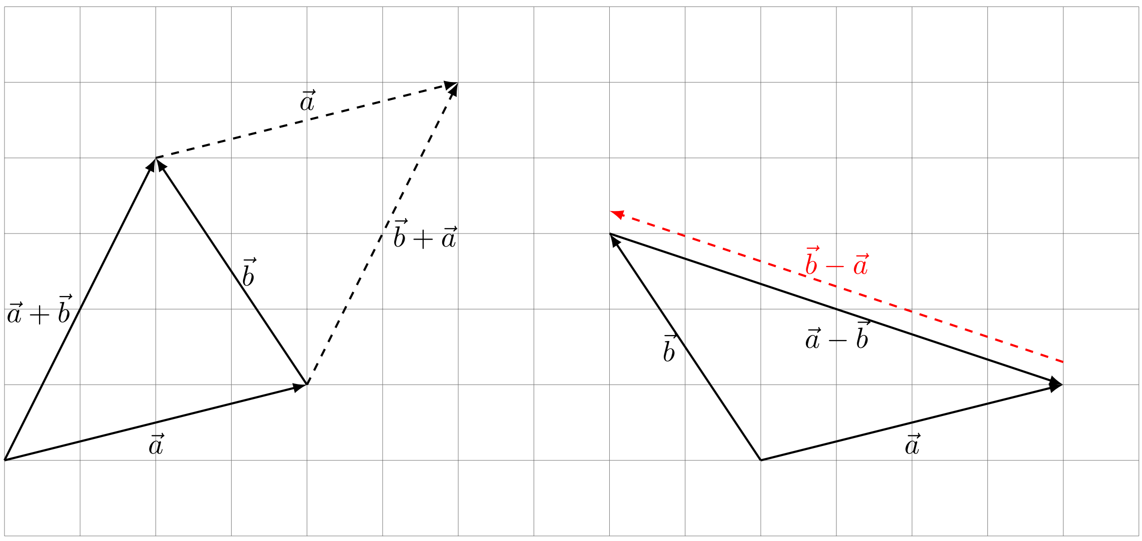
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$$

满足规则:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=-(\vec{b}-\vec{a})$

几何解释

满足三角形法则（Triangle Rule）：



常见用途

- 加法：多次位移的计算
- 减法：从一个点到另一个点的位移矢量

1.3.2 k

代数定义

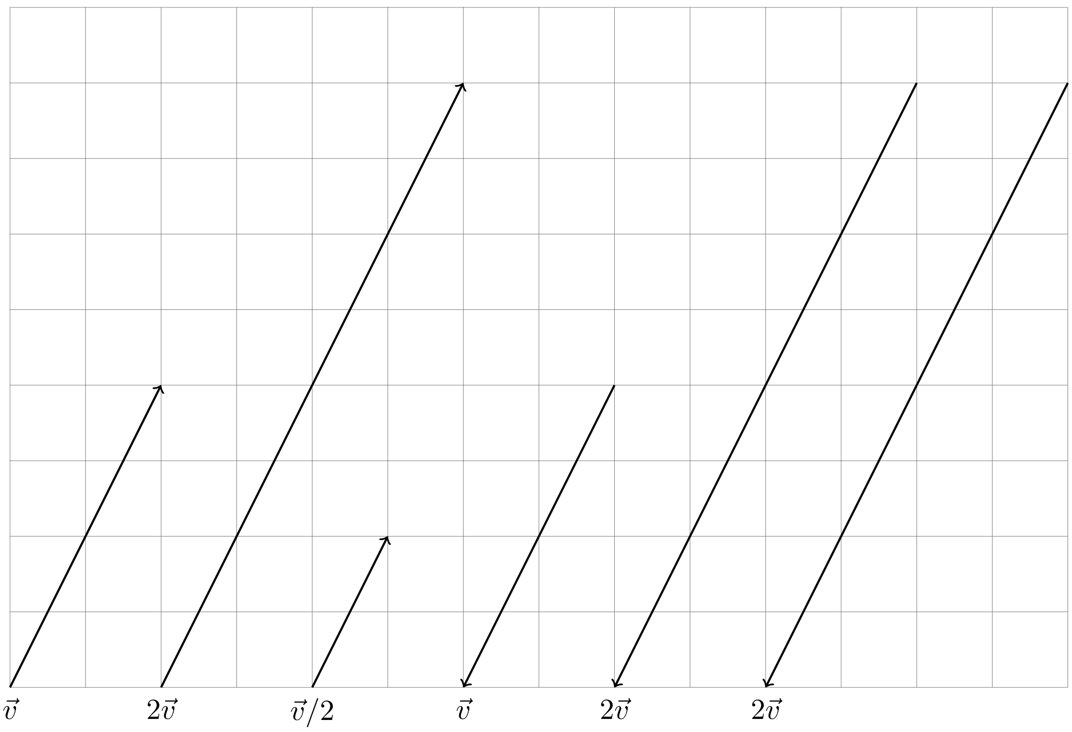
$$k\vec{v}=k\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kv_x\\kv_y\\kv_z\end{bmatrix}$$

满足规则:

- $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

几何解释

可以用于向量的缩放：



1.3.3 dot

代数定义

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

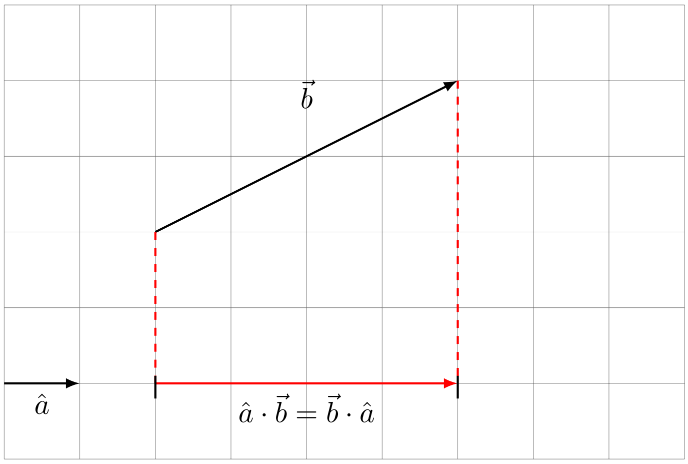
满足规则：

- 点积交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- 点积数乘分配律：$(k\vec{b})\cdot\vec{a}=k(\vec{b}\cdot\vec{a})=\vec{b}\cdot(k\vec{a})$
- 点积加法分配律：$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\hat{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

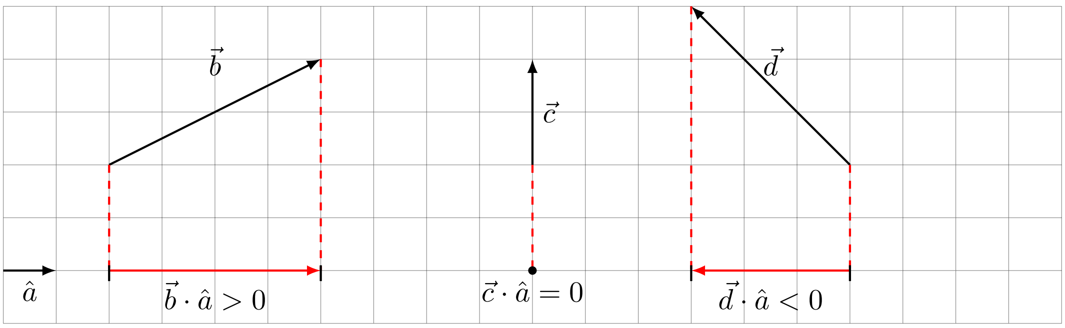
几何解释 - 投影

投影视角解释（Projection）：

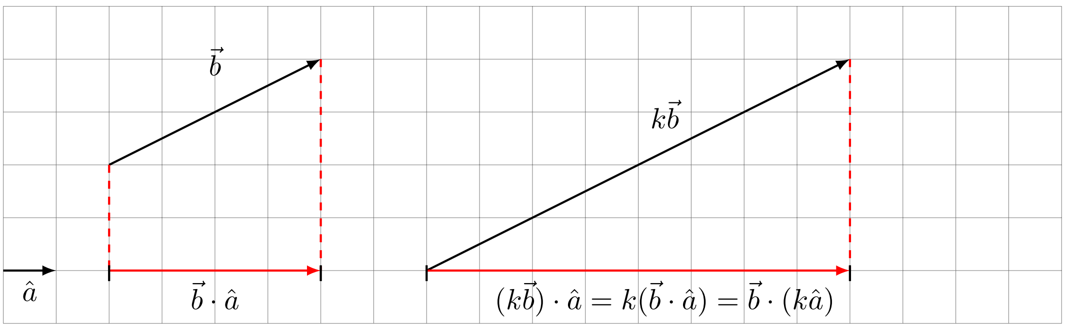
点积$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$\vec{b}$投影到平行于$\vec{a}$的任何一条线上的有符号长度（Singed Distance），乘以$\vec{a}$的长度。



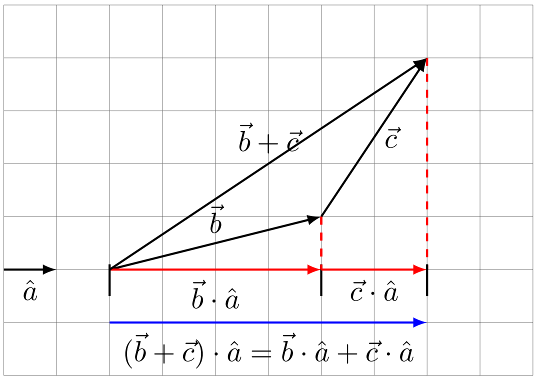
有符号投影长度:



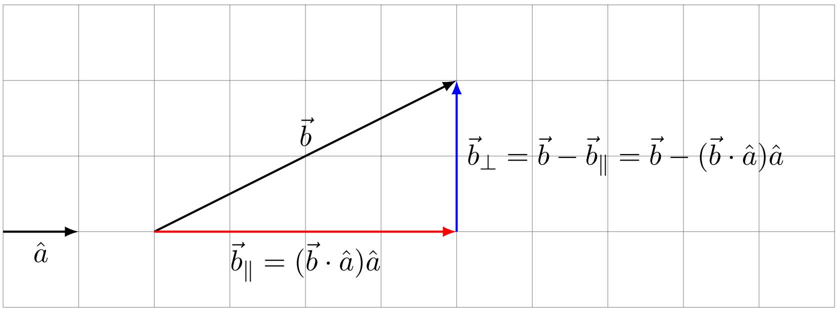
缩放（数乘分配律）：



分配和筛选（加法分配律）：



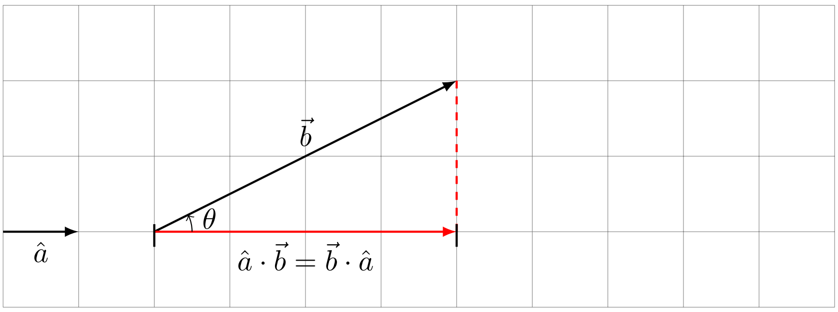
矢量分解:



几何解释 - 夹角

$$\cos\theta=\frac{adjacent}{hypotenuse}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|}=\frac{\vec{b}\cdot\hat{a}}{|\vec{b}|}=\hat{a}\cdot\hat{b}$$

$$\theta=\arccos(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|})=\arccos(\hat{a}\cdot\hat{b})$$



不考虑θ值时，可以通过点积知道两个向量之间的夹角关系：

$\vec{a}\cdot\vec{b}$	θ	**角度**	**描述**
>0	$[0,\pi/2)$	锐角	主要指向通一方向
$=0$	$\pi/2$	直角	垂直
<0	$(\pi/2,\pi]$	钝角	主要指向相反方向

常见用途

- 投影计算、坐标筛选计算（$\vec{b}\cdot\hat{x}$）
- 垂直判定：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
- 半空间判定：$\vec{x}$为空间任意一点，$\vec{n}$平面法向量
  - 平面上半空间：$\vec{x}\cdot\vec{n}>0$
  - 平面内：$\vec{x}\cdot\vec{n}=0$
  - 平面下半空间：$\vec{x}\cdot\vec{n}<0$
- 计算向量大小：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
- 矢量分解：$\vec{b}=\vec{b}_{\|}+\vec{b}_{\perp}$
- 夹角计算：$\theta=\text{arccos}(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|})=\text{arccos}(\hat{a}\cdot\hat{b})$

1.3.4 cross

代数定义

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_y\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_y\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{bmatrix}$$

满足规律：

- 叉积反交换律：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- $\vec{a}\times\vec{a}=0$
- $k(\vec{a}\times\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})$
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

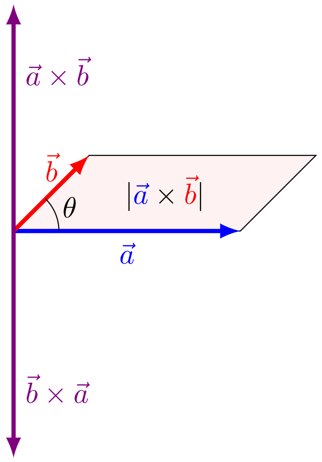
几何解释

叉积向量的大小：包含$\vec{a}$和$\vec{b}$的平行四边形面积，为0则两条线平行

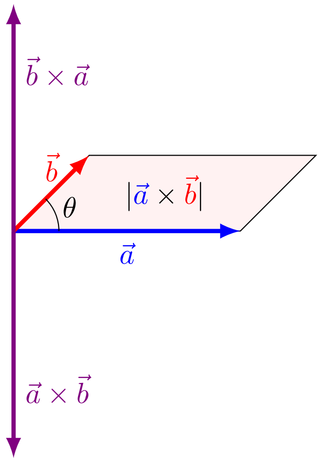
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$$

叉积向量的方向：

A、右手法则情况下



B、左手法则情况下



坐标基向量的叉积（左右手系不影响计算结果）：

$$\begin{array}{ll} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} & \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} & \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} & \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y} \end{array}$$

1.4 note

Chapter 2

Matrix

Chapter 3

Rotation

3.1 Axis angle

3.2 Euler angle

3.3 Quaterrnion

3.4 Convertion