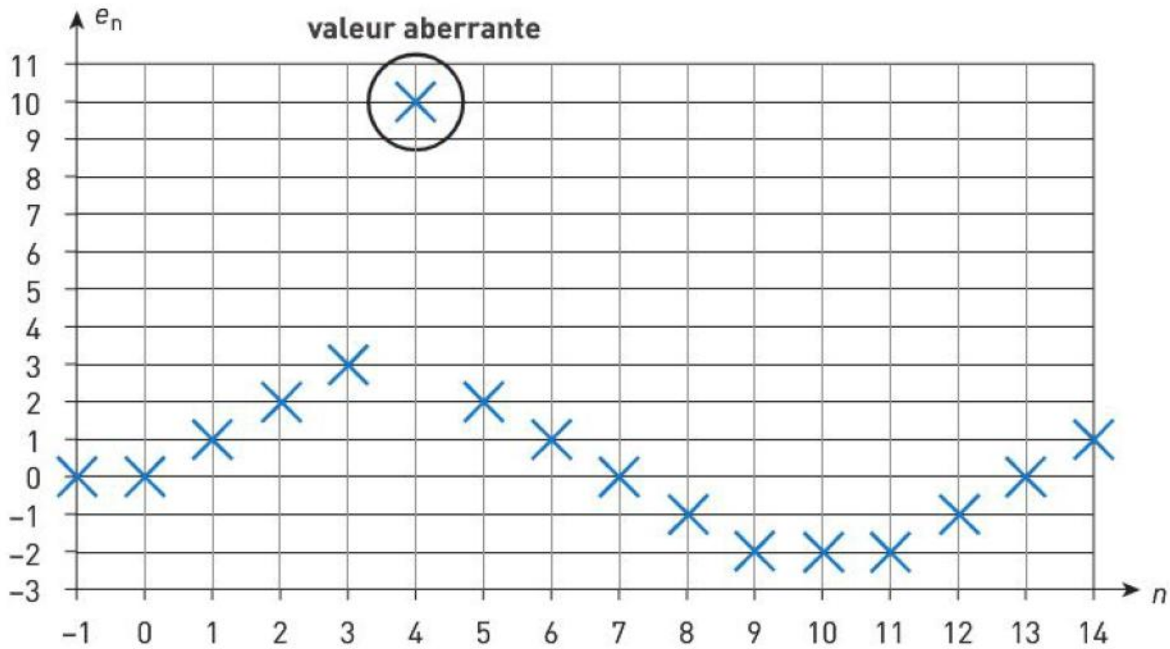
Filtrage numérique

Exercice 1. (filtre à moyenne glissante et filtre médian)

Parmi les filtres numériques les plus employés, figurent le filtre à moyenne glissante et le filtre médian particulièrement utilisé dans le domaine du traitement d'images numériques ou il permet d'améliorer la qualité d'images bruitées. L'objet de cet exercice est de comparer l'action de ces deux types de filtres sur la séquence de nombres $\{e_n\}$ suivante qui présente une valeur aberrante (due par exemple à une erreur de mesure).



La séquence e_n est traitée par deux algorithmes :

- le premier, de type moyenne glissante, délivre la sequence $\{s_{1n}\}$ avec

$$s_{1n} = \frac{e_{n-1} + e_n + e_{n+1}}{3}$$

- le second, de type médian, délivre la séquence $\{s_{2n}\}$ où s_{2n} correspond à la valeur médiane de e_{n-1}, et e_n et e_{n+1}. Pour déterminer la valeur médiane de trois nombres, il faut les ranger dans l'ordre croissant et extraire la valeur centrale. Ainsi, par exemple, pour des valeurs de e_{n-1}, e_n et e_{n+1} respectivement égales à 3, 8, 4, la valeur médiane est égale à 4.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de e_n pour $0 \leq n \leq 14$ et reporter ces valeurs dans la seconde ligne du tableau suivant :

n	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
e_n	0															
s_{1n}	0															X
s_{2n}	0															X

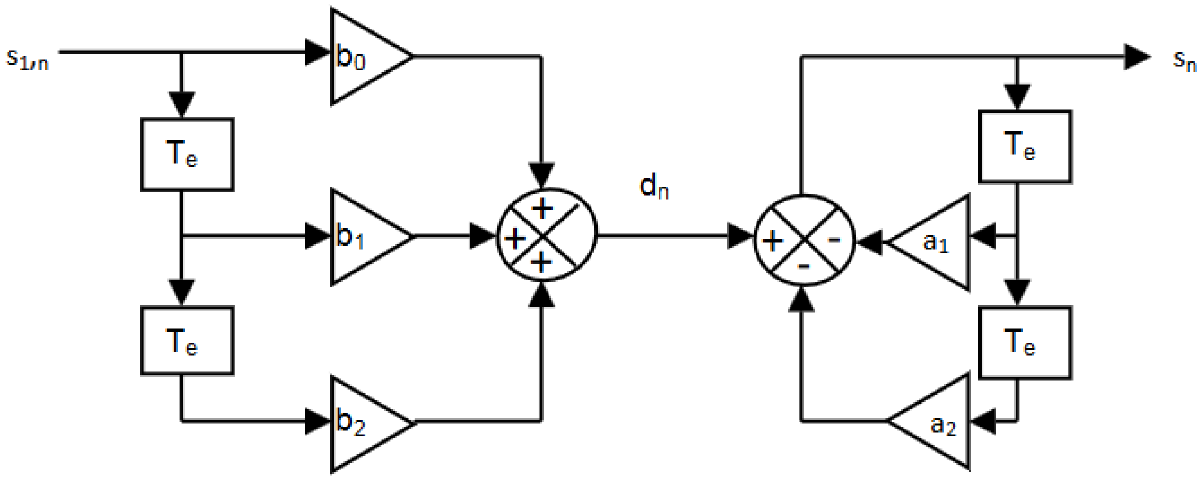
2. Calculer, pour $0 \leq n \leq 13$, les échantillons s_{1n} et s_{2n} fournis par les deux algorithmes et compléter les deux dernières lignes du tableau.

3. Représenter s_{1n} et s_{2n} en fonction de n pour $0 \leq n \leq 13$.

4. Quel est le filtre le plus efficace pour atténuer les valeurs aberrantes isolées ?

Exercice 2. (filtre décimateur)

La structure du filtre numérique de fréquence d'échantillonnage F_e est donnée par la figure suivante.



Sur cette figure un triangle et un rectangle représentent une amplification et un retard d'un période d'échantillonnage T_e.

On note $s_{1,n}$ la grandeur échantillonnée correspondant à $s_1(nT_e)$

1. Exprimer l'algorithme de d_n en fonction de $s_{1,n}$, $s_{1,n-1}$ et $s_{1,n-2}$.

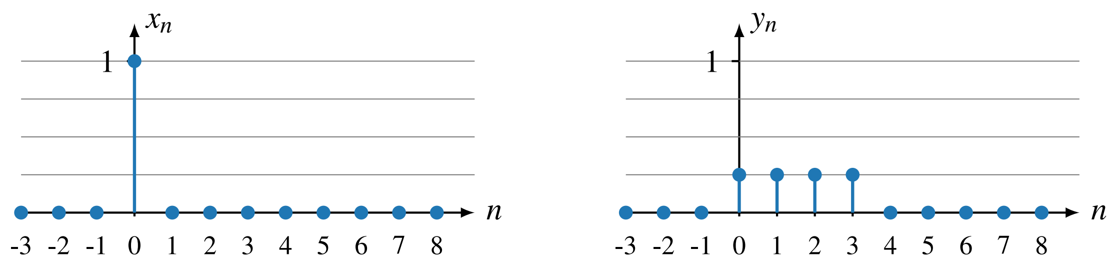
2. Exprimer l'algorithme de s_n, en fonction de d_n, s_{n-1} et s_{n-2}

3. En déduire que :

$$s_n = b_0 \cdot s_{1,n} + b_1 \cdot s_{1,n-1} + b_2 \cdot s_{1,n-2} - a_1 \cdot s_{n-1} - a_2 \cdot s_{n-2}$$

Exercice 3. (réponse impulsionnelle d'un filtre)

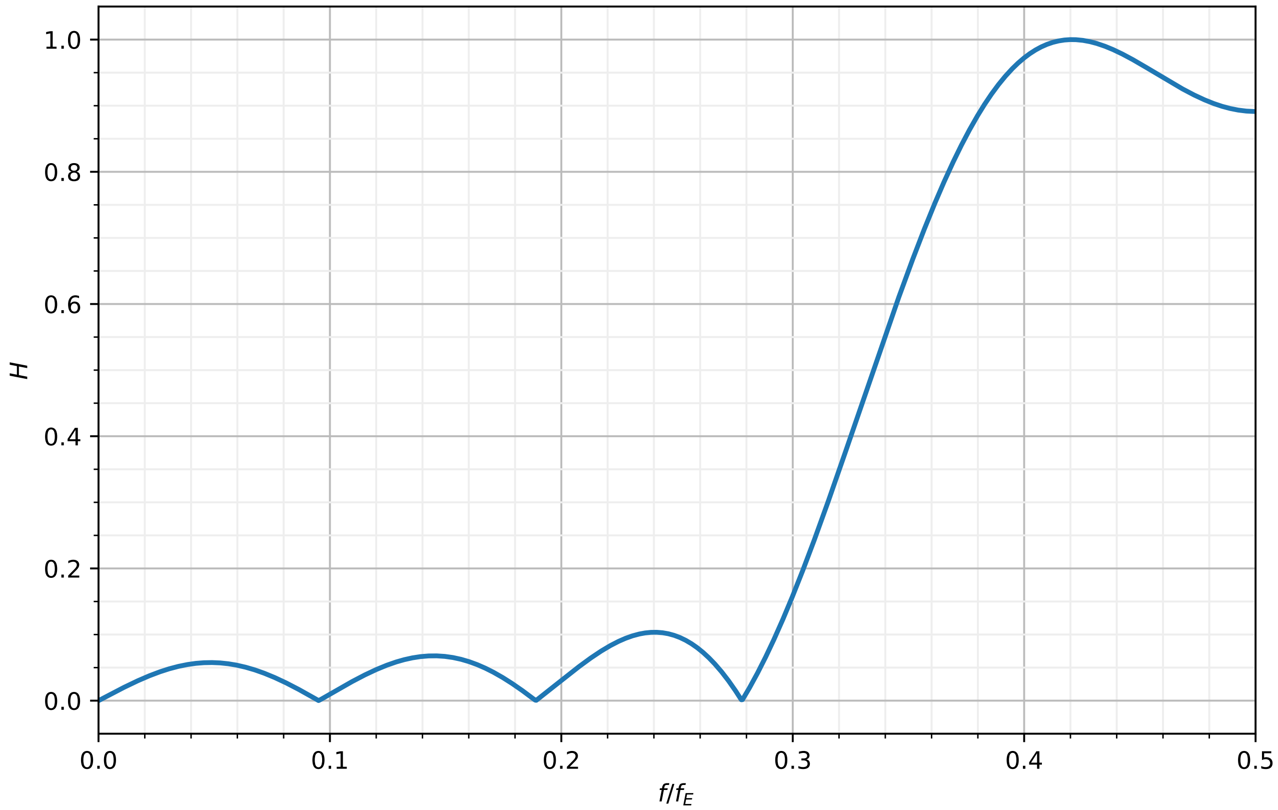
La réponse impulsionnelle d'un filtre numérique est donnée par la figure ci-dessous. Les grandeurs $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont respectivement les séquences d'entrée et de sortie.



1. Ce filtre est-il stable ?
2. Est-il du type RIF ou RII ?
3. Déterminer l'équation de récurrence correspondante.
4. Que fait ce filtre ? Quel est son nom ?

Exercice 4. (réponse harmonique d'un filtre)

La réponse harmonique d'un filtre numérique est donnée par la figure suivante :



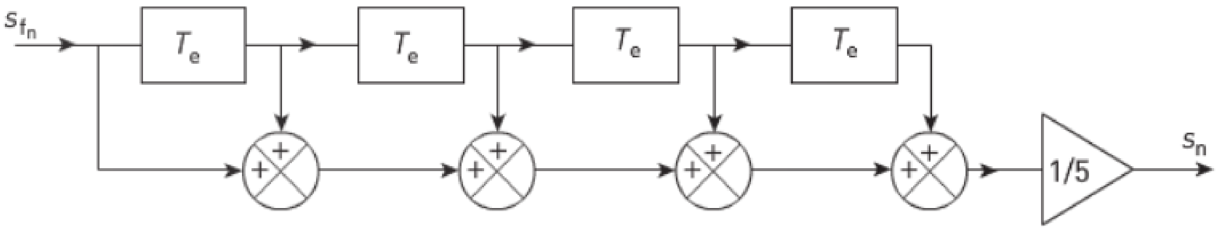
La fréquence d'échantillonnage est $f_E = 1$ kHz.

1. De quel type de filtre s'agit-il ?
2. Quelle est la fréquence maximale du signal applicable en entrée de ce filtre ?
3. Déterminer la fréquence de coupure f_c à -3 dB. En déduire sa bande passante.
4. On applique en entrée du filtre un signal sinusoïdal d'amplitude 2 V et de fréquence $f = 400$ Hz. Quelle sera l'amplitude du signal en sortie ?
5. Que vaut cette amplitude si $f = 240$ Hz ?

Exercice 5. (moyenneur numérique)

Un microcontrôleur gère les informations issues d'un capteur de pression. Une moyenne des mesures s_{f_n} est réalisée avant de transmission.

1. A partir de la structure de l'algorithme représentée ci-dessous, établir l'expression de s_n fonction des valeurs de pression mesurées s_{f_n}, $s_{f_{n-1}}$, $s_{f_{n-2}}$, ...

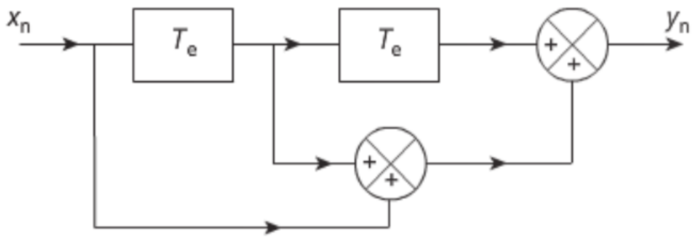


2. Sachant que l'entrée s_{f_n}, est nulle pour $n < 0$, compléter le tableau suivant en y reportant les valeurs prises par s_n correspondant à la réponse de l'algorithme à l'entrée s_{f_n}.

n	0	1	2	3	4	5	6
s_{f_n}	2,05	1,98	2,11	1,93	1,97	2,07	1,89
s_n	0,41						

Exercice 6. (récepteur TNT)

Lors de la réception d'un signal TNT, suite à des phénomènes de réflexions d'ondes, la même information est reçue plusieurs fois à des instants différents au niveau de l'antenne réceptrice. Afin de tenir compte du retard engendré par les réflexions, un filtrage numérique est implanté dans les récepteurs (décodeurs) TNT. Le schéma simplifié retenu pour le filtre est donné ci-dessous.



Le bloc T_e représente un retard d'une période d'échantillonnage T_e.

On note :

- x_n la valeur de l'échantillon pris à l'instant $t = nT_e$,
- x_{n-1} la valeur de l'échantillon pris à l'instant $t = (n-1)T_e$,
- ... etc.

Filtre numérique

1. Écrire l'équation de récurrence reliant y_n à x_n et aux échantillons précédents de l'entrée.
2. Donner la nature du filtre numérique implanté et préciser ce que cela entraîne du point de vue de sa stabilité.

Réponse impulsionnelle

3. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce filtre numérique en complétant le tableau suivant :

n	−1	0	1	2	3	4	5	6
x_n	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{n-1}								
x_{n-2}								
y_n								

4. Représenter graphiquement la séquence $\{y_n\}$ correspondant à la réponse impulsionnelle.

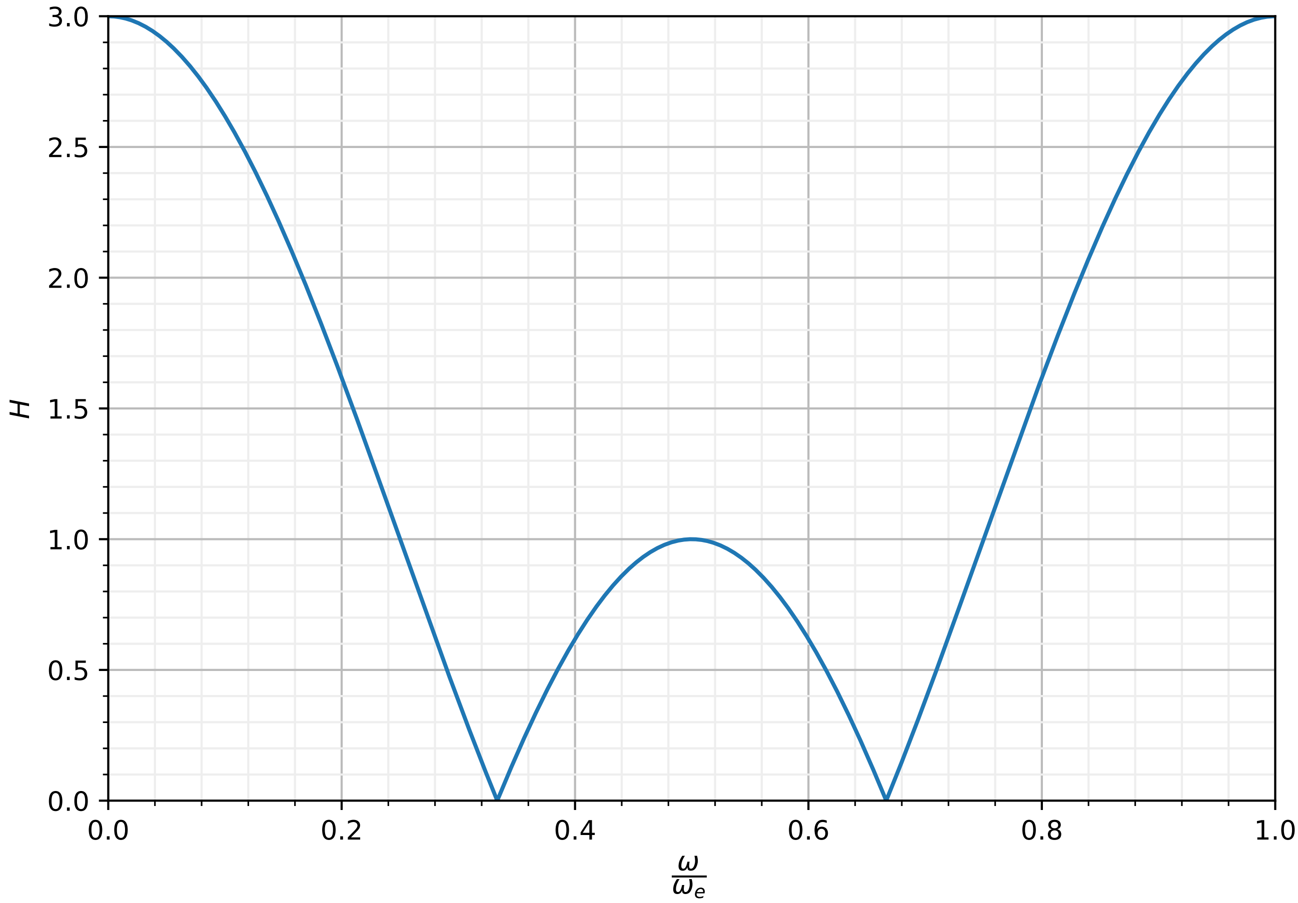
Réponse fréquentielle

On montre que la transmittance complexe du filtre s'écrit sous la forme :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = Ke^{-\mathrm{j}\omega T_e} \quad \text{avec} \quad K = 1 + 2\cos(\omega T_e)$$

5. Déduire de l'expression précédente celle du module $H(\omega)$ de $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$.

On donne ci-dessous l'évolution du module H en fonction de la pulsation réduite $\dfrac{\omega}{\omega_e}$.

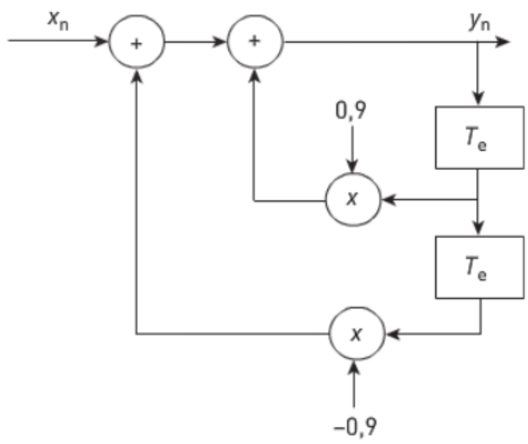


6. Préciser le domaine de valeurs possibles du rapport $\dfrac{\omega}{\omega_e}$ qui permettent de respecter la condition de Shannon.

7. Sachant que la fréquence porteuse maximale qu'est susceptible de capter le récepteur TNT est $F_{MAX} =$ 853 MHz, déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale $f_{e_{MIN}}$ permettant d'obtenir en sortie un signal d'amplitude égale à au moins 90 % du signal maximal.

Exercice 7. (filtre numérique d'un système de train d'atterrissage)

Un système automatique d'aide à l'atterrissage d'un avion fournit aux systèmes de contrôle des informations offrant au pilote un guidage de précision dans sa phase d'approche. Ce système repose, entre autre, sur l'émission au sol d'un signal porteur modulé en amplitude par un signal sinusoïdal de fréquence 90 Hz. Après démodulation, ce signal est converti en une séquence de nombres $\{x_n\}$ avec une fréquence d'échantillonnage f_E. Cette séquence est traitée numériquement au sein du cockpit conformément à la structure ci-après :

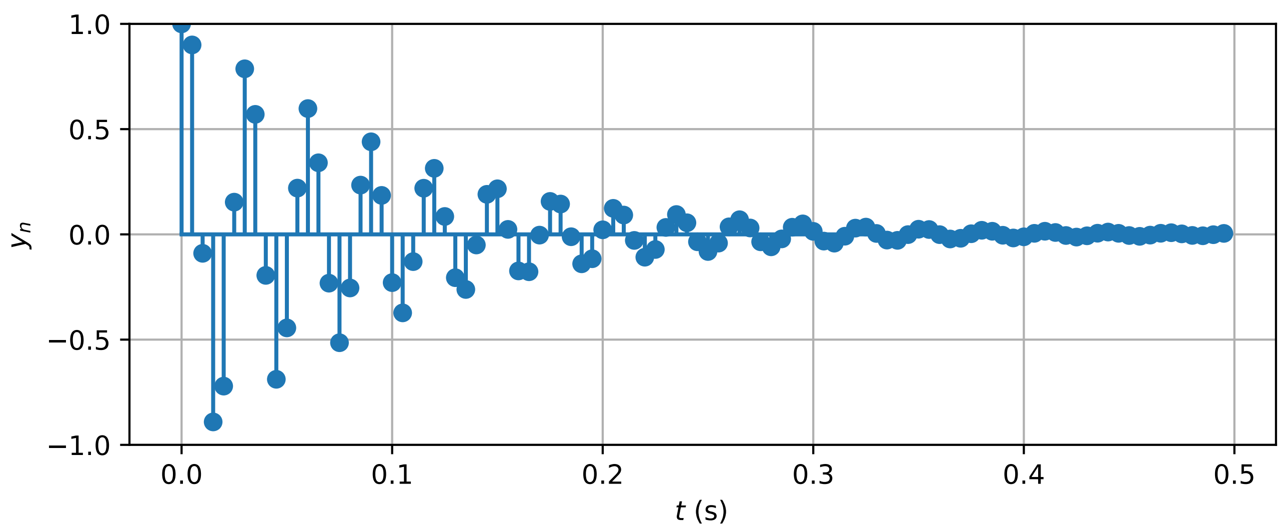


Equation de récurrence

1. Donner l'expression de y_n, en fonction des échantillons x_n, y_{n-1} et y_{n-2}.
2. Indiquer, en justifiant, s'il s'agit d'un filtre récursif.

Stabilité

La figure ci-dessous donne la réponse impulsionnelle du filtre.

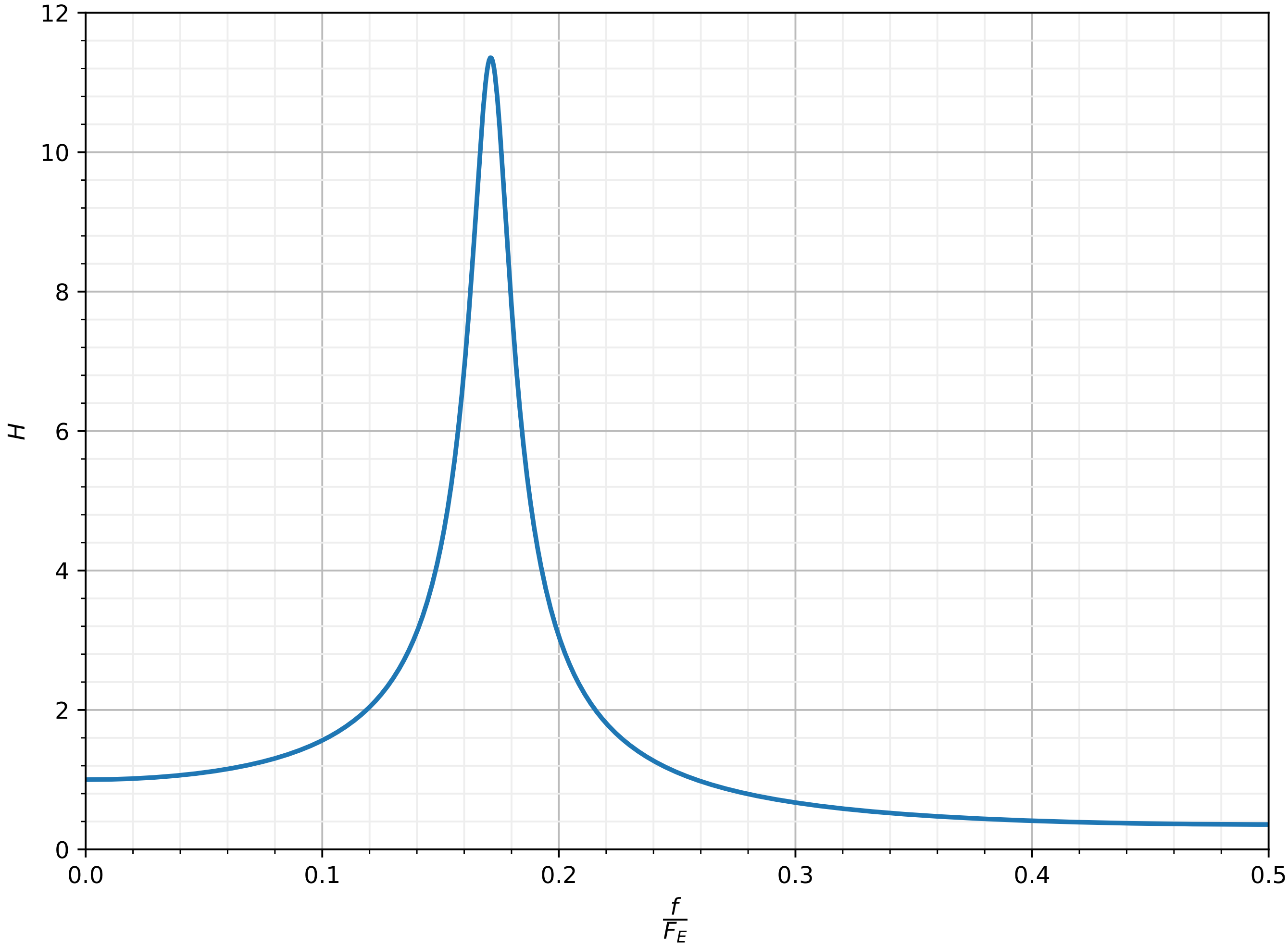


3. Quel est la fréquence d'échantillonnage du filtre ?

4. Ce filtre est-il stable ? Justifier.

Réponse harmonique

La représentation de la transmittance H en fonction de la fréquence réduite $\frac{f}{F_E}$ est donnée sur la figure ci-après.



5. Déterminer la nature du filtre.

6. Donner l'expression de la fréquence centrale $f_{centrale}$ en fonction de f_E.

7. Exprimer la largeur de la bande passante à -3 dB en fonction de f_E.

On souhaite obtenir $f_{centrale} = 90$ Hz.

8. Quelle doit-être la fréquence d'échantillonnage f_E ?

9. Calculer la bande passante du filtre.