

# Mesures et incertitudes

## I - Généralités

### Vocabulaire

**Mesurage :** ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur.

**Mesurande  $X$  :** grandeur particulière soumise à mesurage (ex. température, pression, tension, ...).

**Valeur mesurée  $x$  :** valeur obtenue par un seul mesurage.

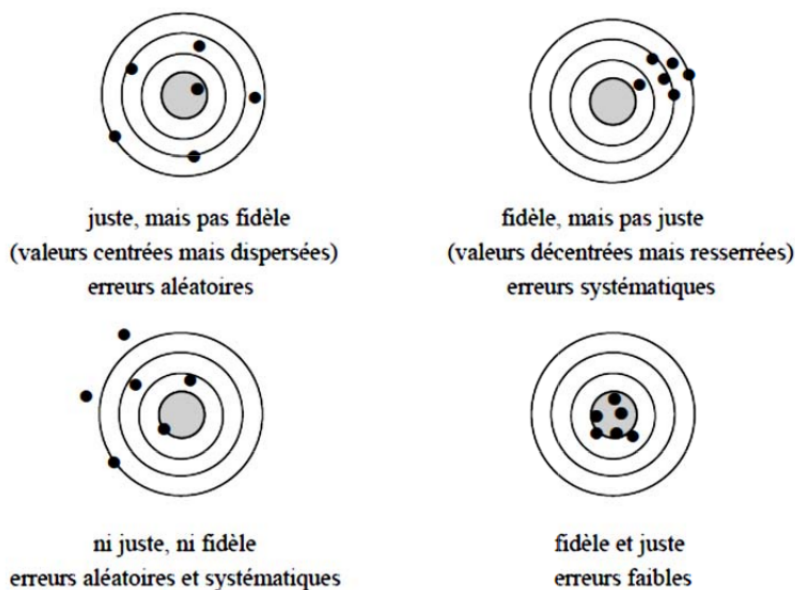
**Valeur vraie  $X_{vrai}$  :** valeur obtenue si la mesure était parfaite. Cette valeur est toujours inconnue car un mesurage n'est jamais parfait.

**Valeur de référence  $X_{ref}$  :** valeur d'une documentation technique, d'un modèle ou d'une autre mesure plus précise.

## II - Types d'erreurs

Il existe deux types d'erreurs :

- L'**erreur aléatoire** est liée à la **fidélité** de l'instrument de mesure (aptitude à donner des indications très voisines dans les mêmes conditions de mesure).
- L'**erreur systématique** est liée à la **justesse** d'un instrument de mesure (aptitude à donner des indications exemptes autour de la valeur mesurée).



### III - Incertitudes

#### Incertitude type $u(x)$

L'incertitude type  $u(x)$  fournit une estimation de la dispersion des valeurs attribuée à un mesurande.

Il existe deux façons de procéder :

- Incertitude-type A pour une série de mesure (étude statistique) ;
- Incertitude-type B pour une mesure unique (autre étude que statistique).

#### Incertitude type élargie $U(x)$

L'incertitude type élargie  $U(x)$  pour un niveau de confiance  $p$  (en pourcentage) est obtenue par élargissement l'incertitude type  $u(x)$  par un facteur d'élargissement  $k$  tel que :

$$U(x) = k \cdot u(x)$$

- $k = 1$  pour un niveau de confiance de 68% ;
- $k = 2$  **pour un niveau de confiance de 95%** ;
- $k = 3$  pour un niveau de confiance de 99%.

### IV - Résultat d'un mesurage

Un résultat de mesurage est toujours donné sous la forme d'un intervalle de valeurs probables avec un certain niveau de confiance.

$$X = (x \pm U(x)) \quad (\text{unité de } X)$$

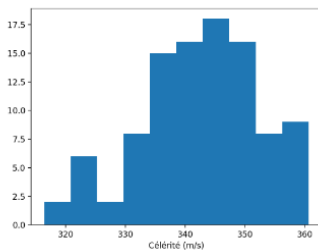
## V - Incertitude-type A (série de mesures)

### Principe

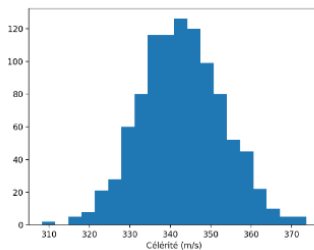
C'est le cas où une même mesure  $x$  est réalisée plusieurs  $N$  fois dans les mêmes conditions d'évaluation. La mesure  $x$  est affectée aléatoirement de part et d'autre d'une valeur moyenne  $\bar{x}$ .

### Histogramme

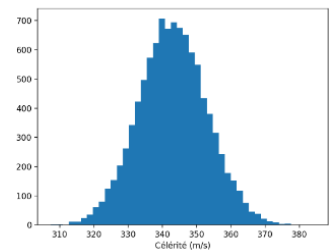
Un histogramme est une représentation du nombre de mesures (fréquence) pour chaque valeur mesurée.



(a) Simulation de 100 expériences.



(b) Simulation de 1 000 expériences.



(c) Simulation de 10 000 expériences.

### Valeur moyenne $\bar{x}$

Le meilleur estimateur du résultat d'une mesure est sa valeur moyenne  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} x_i \quad \text{ou} \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

### Ecart-type $s$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{ou} \quad s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N-1}}$$

### Incetitude-type $u(\bar{x})$

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

## VI - Incertitude-type B (mesure unique)

### Principe

Cas où la mesure est réalisée qu'une seule fois (pas d'étude statistique possible).

L'incertitude-type est due à la **qualité de l'instrument de mesure**, au **protocole de mesure** et à l'**expérimentateur**.

### Incertitude-type d'un instrument de mesure

$$u(x) = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$d$  est la **demi-entendue** de l'appareil de mesure.

### Quelques cas possibles

- Si le constructeur fournit une **tolérance** à  $\pm\alpha$

$$d = \alpha \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

- Si l'appareil de mesure est analogique avec des **graduations** (cadran, règle, ...)

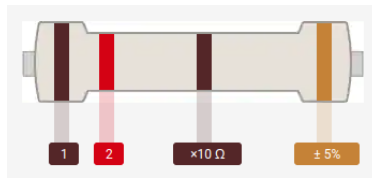
$$d = \frac{1}{2} \text{ graduation} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1/2 \text{ graduation}}{\sqrt{3}}$$

- Si l'appareil de mesure est numérique avec une **précision**  $\Delta = x\% \text{ Lecture} + y \text{ Digits}$

$$d = \Delta \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

**Exemple 1.**

Pour une résistance de  $120\ \Omega$ , le constructeur indique une tolérance à 5%.



Tolérance :

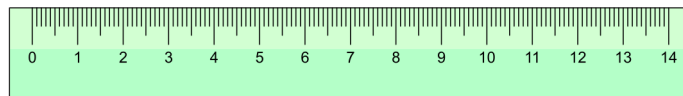
$$\alpha = 120 \times \frac{5}{100} = 6\ \Omega$$

Incertitude-type :

$$u(R) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow u(R) \approx 3,46\ \Omega$$

**Exemple 2.**

Pour une règle graduée en mm.



Demi-graduation :

$$\frac{1\ \text{mm}}{2} = 0,5\ \text{mm}$$

Incertitude-type :

$$u(x) = \frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,288675\dots\ \text{mm}$$

**Exemple 3.**

Une mesure au voltmètre numérique affiche 10,047 sur le calibre 50 V. La documentation du constructeur indique une précision de  $0,025L + 3UR$ .

Précision :

$$\Delta = 0,025 \times 10,047 + 3 \times 0,001 = 0,254175$$

Incertitude-type :

$$u(U) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0,254175}{\sqrt{3}} = 0,142748\dots\ \text{V}$$