Filtrage numérique

I - Introduction

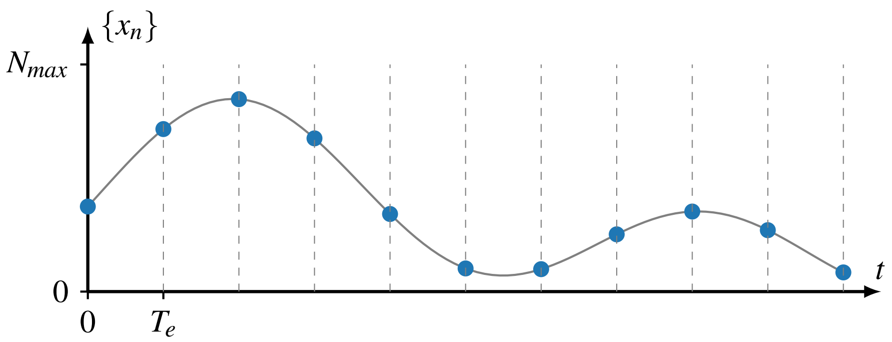
Une chaîne de traitement numérique est généralement structuré de la manière suivante :

- $x(t)$ est le signal analogique d'entrée.
- $x'(t)$ est le résultat d'un filtrage passe-bas du signal d'entrée afin de respecter la condition de Shannon.
- x_n est une séquence de nombres correspondant à l'entrée.
- y_n est une séquence de nombres correspondant à la sortie.
- $y'(t)$ est le signal analogique en « marche d'escalier » de restitution par le CNA
- $y(t)$ est le signal analogique de sortie après lissage afin d'éliminer les « marche d'escalier ».

Les séquences de nombres $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont des nombres binaires codés sur N bit avec une fréquence d'échantillonnage :

$$\boxed{f_E = \frac{1}{T_E}}$$

Exemple : séquence d'entrée $\{x_n\}$.



$$\boxed{x_n = x(nT_E)}$$

II - Equation de récurrence

Forme générale d'une équation de récurrence

L'algorithme de calcul d'une chaîne de traitement numérique linéaire repose sur une **équation de récurrence** qui prend la forme générale suivante :

$$\boxed{y_n = a_0 \cdot x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \cdots + b_1 \cdot y_{n-1} + b_2 \cdot y_{n-2} + \ldots}$$

- y_n est la **sortie en cours** ;
- x_n est l'**entrée en cours** ;
- $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ sont les **entrées antérieures** ;
- $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots$ sont les **sorties antérieures** ;
- $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$ sont des **constantes** qui caractérisent la chaîne de traitement numérique.

Algorithmes non-récursifs

Si l'échantillon de sortie y_n ne dépend que des échantillons d'entrée $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$

Exemple : équation de récurrence non-recursif.

$$\underbrace{y_n}_{\text{sortie}} = \underbrace{0,8 \cdot x_n}_{\text{entrée}} + \underbrace{0.5 \cdot x_{n-1} + 0.3 \cdot x_{n-2} + 0.1 \cdot x_{n-3}}_{\text{entrées antérieures}}$$

Algorithmes récursifs

Si l'échantillon de sortie y_n dépend à la fois des échantillons d'entrée $x_n,\ x_{n-1},\ x_{n-2},\ \ldots$ et des échantillons de sortie antérieure $y_{n-1},\ y_{n-2},\ \ldots$

Exemple : équation de récurrence récursif.

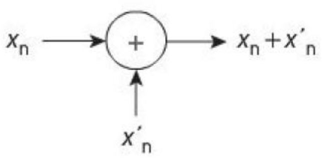
$$\underbrace{y_n}_{\text{sortie}} = \underbrace{1,0 \cdot x_n}_{\text{entrée}} + \underbrace{0.5 \cdot x_{n-1} - 0.5 \cdot x_{n-2}}_{\text{entrées antérieures}} + \underbrace{1,0 \cdot y_{n-1} + 0.3 \cdot y_{n-2} - 0.2 \cdot y_{n-3}}_{\text{sortie antérieures}}$$

Mise en oeuvre

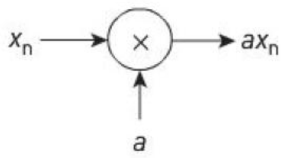
En pratique, cette équation de récurrence est **implémentée sous forme logiciel** (ex. microcontrôleur, DSP, ...) à l'aide d'un langage de programmation ou **sous forme matériel** à partir de composants électroniques spécialisés.

Représentation graphique d'un algorithme

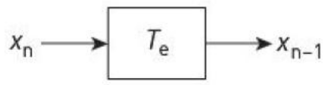
Un algorithme peut-être représenté de façon structurelle à partir des trois opération élémentaires suivantes :



Addition

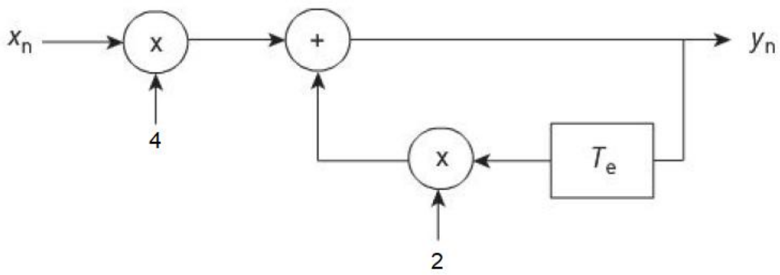


Multiplication



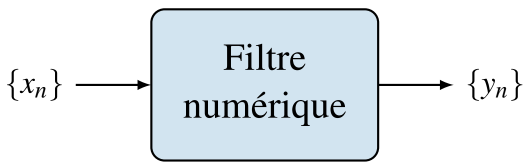
Retard

Exemple : pour l'équation de récurrence $y_n = 4x_n + 2y_{n-1}$



III - Filtre numérique

Un **filtre numérique** est une chaîne de traitement numérique qui **modifie la distribution fréquentielle** du signal numérique d'entrée $\{x_n\}$. Le résultat du filtrage numérique est donné par signal numérique de sortie $\{y_n\}$.



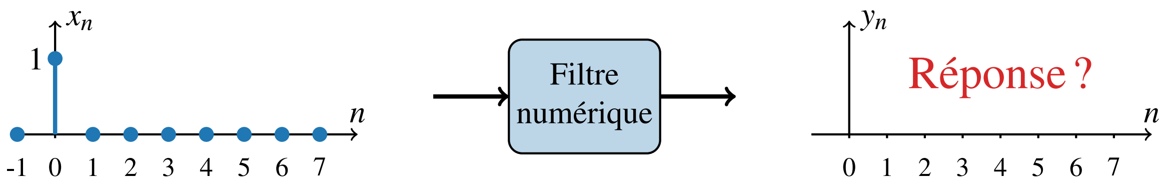
$$f_E = \frac{1}{T_E}$$

Par rapport à un filtre analogique, un filtre numérique apporte de **nombreux avantages** : précision, fiabilité, stabilité, adaptabilité, encombrement réduit, ...

IV - Réponse impulsionnelle

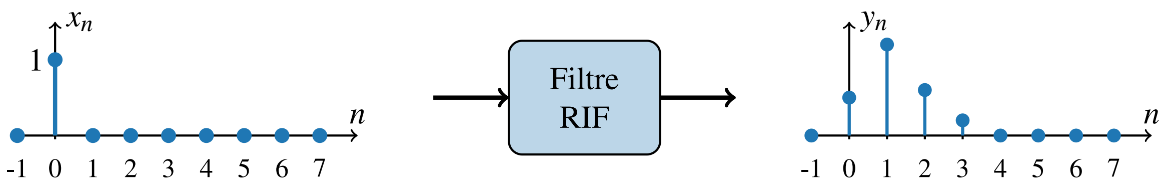
Définition

La réponse d'un filtre numérique à une séquence d'impulsion permet de **distinguer les filtres numériques**.



Filtre à réponse impulsionnelle finie (filtre RIF)

La **réponse impulsionnelle s'annule au bout d'un certain temps**. Elle ne comporte qu'un nombre fini d'échantillons non-nuls.

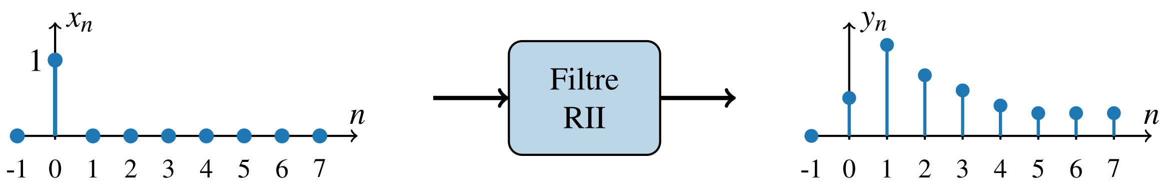


Les **filtres non récursif** sont des filtres RIF.

Il n'y a **pas d'équivalent en analogique** !

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (filtre RII)

La **réponse impulsionnelle comporte une infinité d'échantillons non-nuls**.

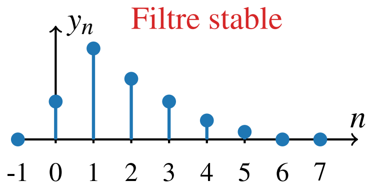


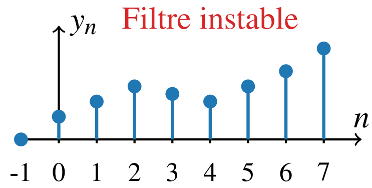
Ces filtres sont forcément des **filtres récursifs**.

V - Stabilité

Définition

> Un filtre est **stable** lorsque sa **réponse impulsionnelle tend vers 0** lorsque n tend vers l'infini.





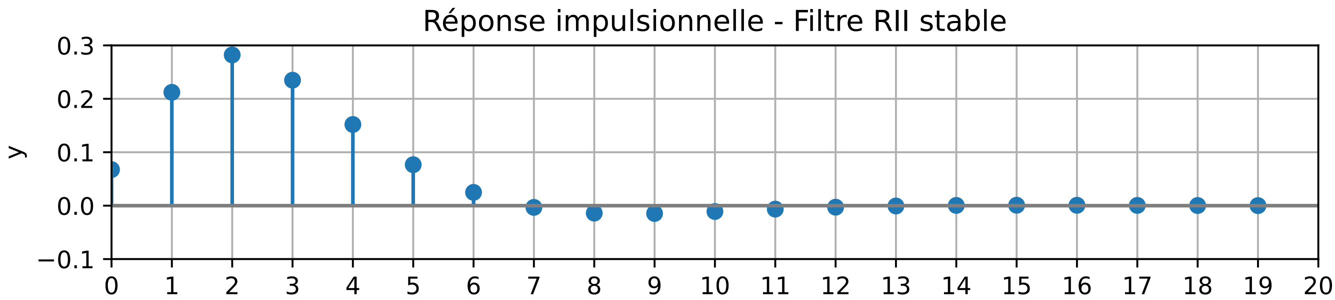
Stabilité d'un filtre RIF

> Par conséquent, un **filtre RIF** (filtre non-récursif) est **toujours stable** !

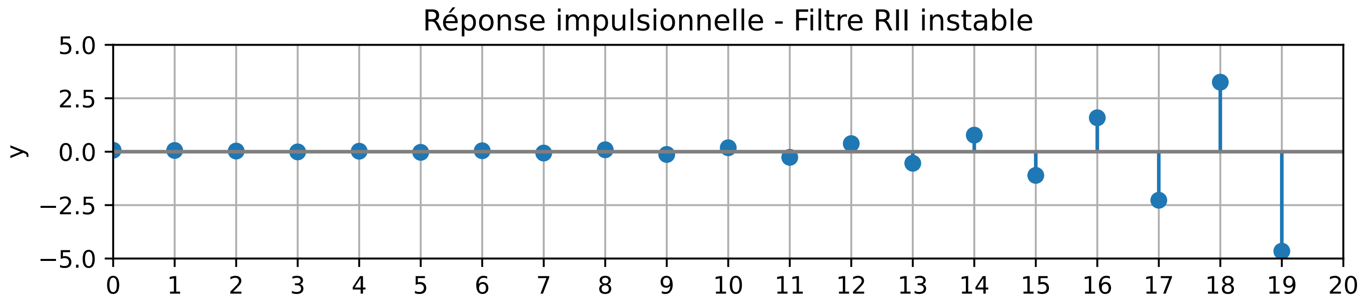
Stabilité d'un filtre RII

> Par contre, un **filtre RII** (filtre non-récursif) **peut-être instable**. Il est donc important d'étudier sa réponse impulsionnelle pour déterminer sa stabilité.

Exemple : filtre RII stable.



Exemple : filtre RII instable.



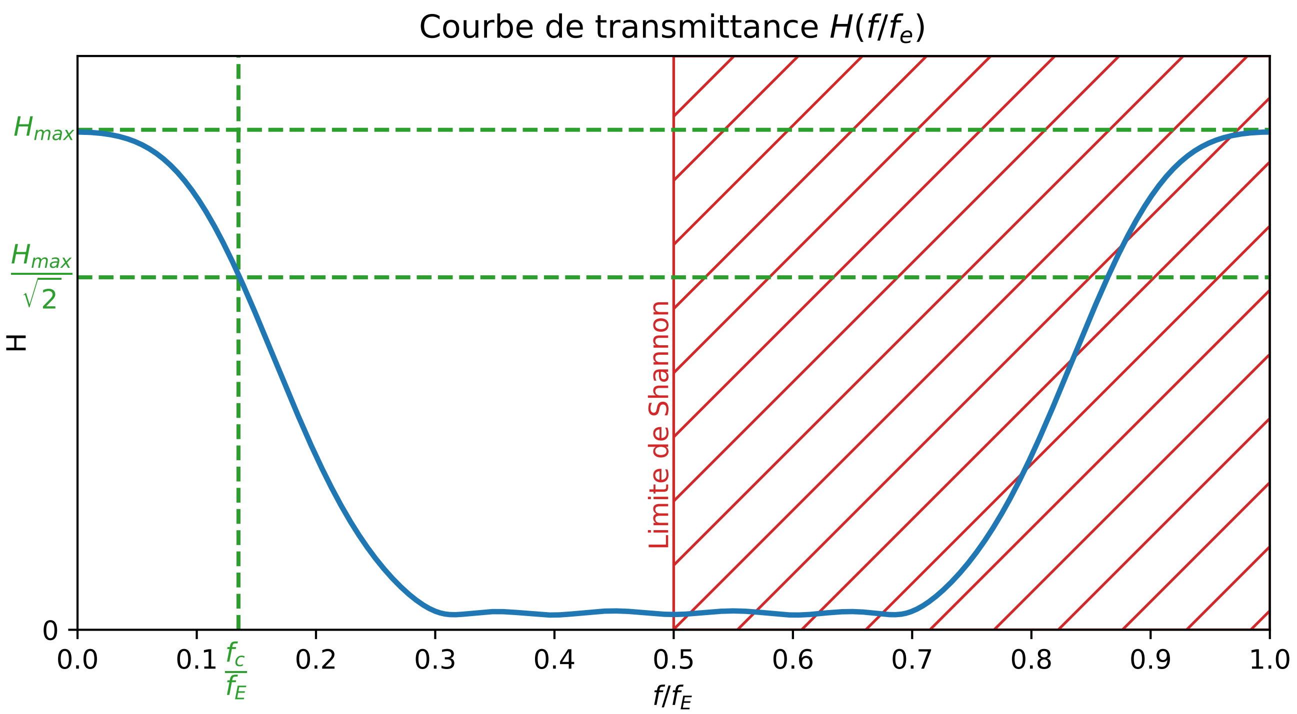
VI - Réponse en fréquence

La réponse en fréquence d'un filtre numérique s'obtient en appliquant à son entrée un signal numérique de **forme sinusoïdale** avec une période d'échantillonnage T_E.

Transmittance ou amplification

$$H(f) = \frac{\widehat{\{y_n\}}}{\widehat{\{x_n\}}}$$

Représentation graphique (courbe de la transmittance)



La **fréquence de coupure** f_c est définie pour $\boxed{G = G_{max} - 3 \text{ dB}}$ ou $\boxed{H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}}$