NUMERI DI BETTI

LUCA BRUNI, JACOPO BURELLI, SILVIA FABIANI, DAVID VENCATO

Contents

1. NOTA STORICA SUI NUMERI DI BETTI

Enrico Betti nasce il 21 ottobre 1823 a Pistoia, dove compie gli studi classici al Liceo Forteguerri. Studia matematica e fisica all'Università di Pisa dove, nel 1846, si laurea in matematiche applicate, sotto la direzione scientifica di Giuseppe Doveri. Nei primissimi anni della vita scientifica di Enrico Betti, significativa sarà l'influenza di Mossotti. Questi, per esempio, scrivendogli da Viareggio nell'estate del 1847, scoraggia un iniziale interesse di Betti per la geometria descrittiva. Seguendo il severo (e forse un po' azzardato) giudizio del maestro, Betti lascia lo studio della geometria descrittiva per dedicarsi alla fisica matematica, in particolare ad un problema di idrodinamica, dato alle stampe nel 1850 negli "Annali di Scienze matematiche e fisiche", la nuova rivista fondata in quell'anno a Roma da Barnaba Tortolini. Questo primo lavoro di Betti doveva restare a lungo isolato nella sua produzione scientifica, fino al ben più significativo incontro con Riemann. Dal 1849 Betti insegna matematica al Liceo Forteguerri di Pistoia, sua città natale. Lontano dalla consuetudine di scambio quotidiano con gli antichi maestri, le sue ricerche acquistano un carattere decisamente più autonomo e originale. A questo periodo risalgono infatti i suoi primi studi di algebra, che lo occuperanno per tutto un decennio.

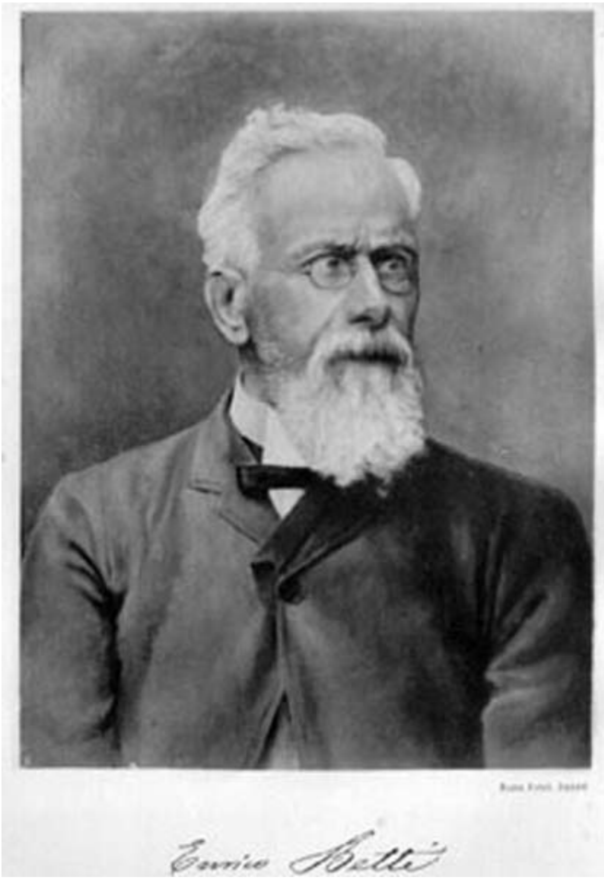


FIGURE 1. Enrico Betti

Punto di partenza di Betti sono i lavori di Galois sulla risolubilità per radicali delle equazioni algebriche, in quanto gli sviluppi promessi da Liouville sui lavori di Galois, si lasciano inutilmente attendere. Così la prima effettiva ripresa delle idee di Galois è opera di Betti, nel corso del 1850. Betti è certamente consapevole della novità e dell'importanza dei lavori di Galois, alla cui chiarificazione sono destinate le sue ricerche.

All'estero gli studi di Betti non sembrano suscitare particolare interesse: l'argomento è nuovo e difficile e la forma dell'esposizione, se più chiara di quella di Galois, non è certamente trasparente.

A ciò si aggiunga ancora il non banale inciampo costituito dalla lingua italiana in cui è redatto il lavoro. Di fatto, l'interlocutore scientifico di Betti capace di entrare con competenza nel suo ambito di ricerche è in quel periodo, in Italia, Tardy ed è nella corrispondenza fra i due che si possono seguire gli sviluppi degli studi di Betti. Betti pubblica ancora negli "Annali" un lavoro sulla teoria delle sostituzioni, in cui si limita a chiarire alcuni punti della sua lontana memoria del 1852. Oltre alla intrinseca difficoltà di queste ricerche, un ulteriore ostacolo sembra essere di natura estranea ad esse: in quell'anno infatti Betti lascia l'insegnamento a Pistoia per assumere il ruolo più impegnativo di professore di Algebra Superiore al Liceo di Firenze. Connessa a questa nuova attività didattica, Betti intraprende la traduzione del volume di Algebra di Bertrand, che veniva pubblicato con le sue aggiunte e note nel 1856. Nel 1857, Betti ottiene la cattedra di Algebra all'Università di Pisa.

In quegli anni, oltre alle lezioni universitarie, Betti tiene a casa propria, due volte la settimana, lezioni private per esporre a quattro dei suoi migliori studenti "le parti più elevate dell Algebra che non posso esporre nel corso che fò all'università". Alla primavera del 1855 risalgono le ultime ricerche di Betti nell'ambito della teoria delle equazioni: annunciate in una lettera a Sylvester, conosciuto allora a Firenze, appaiono negli "Annali" di Tortolini. Da questo momento in poi, fino verso la fine degli anni Cinquanta, Betti, pur continuando a lavorare nel campo dell'algebra, si dedica ad argomenti che rientrano nel più consolidato filone delle ricerche algebriche del tempo, dalla teoria delle serie alla teoria degli invarianti delle forme binarie alla teoria delle funzioni simmetriche delle radici di un equazione algebrica. Ed è proprio con una breve nota su quest'ultimo argomento che Betti raggiunge il primo effettivo riconoscimento all'estero, con la pubblicazione sulla prestigiosa rivista di Crelle. Ritornato da un soggiorno a Gottinga, nel quale insieme ai colleghi Brioschi e Casorati conosce Dedekind, Dirichlet e Riemann, Betti inizia ad interessarsi ai lavori di quest'ultimo.

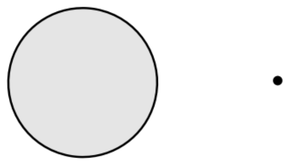
Gli studi sulla teoria riemanniana delle funzioni di una variabile complessa si intrecciano allora, per Betti, con una temporanea ripresa dei suoi precedenti lavori sulla teoria delle equazioni. L'interesse prevalente di Betti è adesso rivolto all'analisi e, chiamato dalla fine del 1859 alla cattedra di Analisi Superiore, fa della teoria delle funzioni ellittiche l'argomento delle sue lezioni all'università. L'influenza di Riemann è accentuata dalla permanenza a Pisa di questi. Infatti Riemann soffriva di una forma acuta di tubercolosie negli ultimi anni della sua vita fece lunghi viaggi in Italia (e in particolare a Pisa) cercando sollievo nel mite clima mediterraneo.

Gli argomenti che animavano gli incontri e le discussioni tra Riemann e i matematici pisani dovevano abbracciare uno spettro estremamente ampio di questioni, di cui sono rimaste solo poche tracce nel Nachlass di Riemann e nella corrispondenza di Betti. Non è dunque un caso che proprio durante il soggiorno di Riemann a Pisa, quando il contatto fra i due è più stretto e fecondo, Betti riprenda a occuparsi di fisica matematica, che a partire da quegli anni fino alla morte egli fa oggetto principale delle proprie ricerche oltre che delle lezioni all'università accanto a quelle di Analisi Superiore. Tuttavia, anche se la presenza di Riemann può aver suggerito elementi di riflessione e di ricerca su aspetti particolari di questa o quella teoria, l'influenza più significativa e duratura esercitata dal matematico tedesco su Betti appare piuttosto essere stata di natura generale, sul modo di intendere la matematica come scienza unitaria, strettamente legata alla conoscenza del mondo fisico. In questa concezione riemanniana, che Betti fa propria, si trovano infatti i motivi ispiratori e le convinzioni più profonde che animano il terzo e più lungo periodo della sua attività scientifica, completamente dedicato alla fisica matematica, dopo le iniziali ricerche di carattere algebrico e il breve periodo (1859-1863) in cui egli si era prevalentemente occupato di questioni di analisi.

2. Topologia e Numeri di Betti per oggetti geometrici

Partiamo con esempi e parole che hanno lo scopo di guidarci in questo laboratorio.

Esempio 2.1. Siano dati un disco D^2 e un punto P. È facile capire perché questi due oggetti geometrici non sono omeomorfi: se infatti esistesse un omeomorfismo tra i due, allora i due oggetti dovrebbero avere lo stesso numero di punti, ma D^2 ne ha infiniti, il punto P è costituito da un unico punto.



Esempio 2.2. Siano dati due oggetti geometrici X e Y con un numero differente di *componenti connesse* che li distinguono. Allora questi non sono omeomorfi in quanto la deformazione che dovrebbe portare l'uno nell'altro dovrebbe strapparsi.

Esercizio 2.3. Se prendiamo la retta $\mathbb{R}$ e la circonferenza S^1 come faccio a distinguerle?

E se prendiamo una sfera S^2 e un toro $S^1 \times S^1$ come potremmo distinguerli? Intuitivamente percepiamo che sono oggetti diversi in quanto il toro, oltre a suddividere lo spazio $\mathbb{R}^3$, definisce anche dei cerchi sulla sua superficie che è impossibile "sciogliere" (formalmente contrarre a un punto).

L'obiettivo di questo laboratorio è introdurre un invariante che ci permetta di distinguere oggetti geometrici.

La questione di distinzione di oggetti geometrici è legata alla topologia. In queste dispense non daremo gli assiomi precisi della topologia, ci accontenteremo di dire che regolano le trasformazioni geometriche *continue*, ovvero, informalmente, trasformazioni senza strappi.

Definizione 2.4. Diremo che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è una *varietà* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno di x che è omeomorfo a $\mathbb{R}^k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Informalmente, una varietà è un sottoinsieme dello spazio tale che, se lo guardi da vicino, è come essere nello spazio $\mathbb{R}^k$

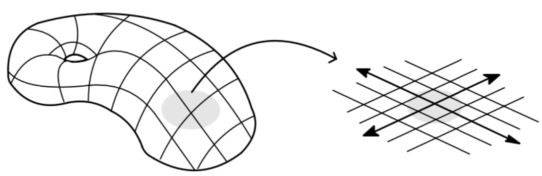
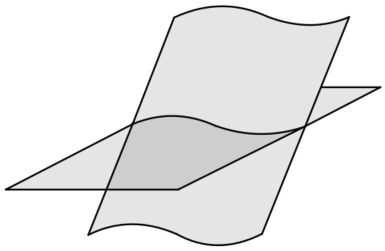


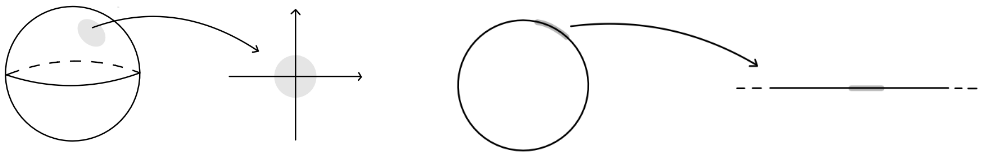
FIGURE 2. Una varietà 2-dimensionale

Definizione 2.5. Diremo che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è un *oggetto geometrico* se è una unione finita di varietà che si intersecano a due a due in una varietà.



Esempio 2.6. Essere su una varietà che corrisponde a una superficie significa che se mi trovo in un punto della varietà, è come essere su un piano.

Essere su una varietà 1-dimensionale è come stare su una linea.



Esercizio 2.7.
- Quali lettere dell'alfabeto (scritte in maiuscolo) sono delle varietà?
- Qual è un oggetto geometrico che *non* è una varietà?

Definizione 2.8. Diremo che due oggetti geometrici X, Y sono *omeomorfi* se $\exists f : X \to Y$ funzione continua, bigettiva con inversa continua. Moralmente se posso deformare un oggetto in un altro senza strappi.

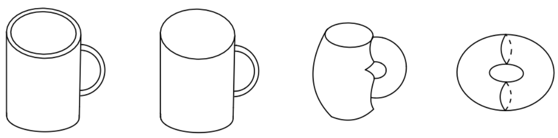


FIGURE 3. Un omeomorfismo tra una tazza ed un toro

Definizione 2.9. Siano $f, g : X \to y$ due funzioni continue tra oggetti geometrici. Una *omotopia* tra f e g è una mappa continua $H\colon X \times [0,1] \to Y$ tale che $H(x,0) = f$ e $H(x,1) = g$.

Analogamente diremo che una omotopia tra f e g è una famiglia di funzioni $f_t : X \to Y$ con $t \in [0,1]$ tali che $f_0 = f$ e $f_1 = g$.

Diremo che $\phi : X \to Y$ è una *equivalenza omotopica* se esiste $\psi : Y \to X$ tale che $\psi \circ \phi$ è omotopa a id_X e $\phi \circ \psi$ è omotopa a id_Y.

Definizione 2.10. Diremo che due oggetti geometrici X, Y sono *omotopicamente equivalenti* se esiste $f : X \to Y$ equivalenza omotopica.

Osservazione 2.11. Il segmento $[0,1]$ è omotopicamente equivalente a un punto. Il disco $\mathbb{D}^n$ è omotopicamente equivalente al punto.

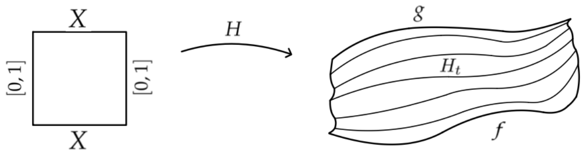


FIGURE 4. Omotopia come interpolazione tra una mappa f a una mappa g

Osservazione 2.12. Due oggetti omeomorfi sono omotopicamente equivalenti.

A questo punto vogliamo trovare un invariante per gli oggetti geometrici che sia ben definito e che sia facilmente calcolabile. Per farlo introduciamo i *complessi simpliciali*, che sono una approssimazione tramite segmenti, triangoli, tetraedri, etc. di oggetti geometrici.

Definizione 2.13. Il *simplesso $n-$dimensionale standard* è

$$\Delta^n = \left\{ (t_1, \cdots, t_{n+1}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{1 \leq i \leq n+1} t_i \leq 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

e una sua *faccia* è un $n-k$ simplesso definito come:

$$F_{i_1,\ldots,i_k} = \left\{ (t_1, \cdots, t_{n+1}) \subseteq \Delta^n | t_{i_j} = 0 \text{ se } 1 \leq j \leq k \right\}$$

Un *simplesso* è un riscalamento delle facce che ne mantiene la forma essenziale.

Osservazione 2.14.
- Un simplesso $1-$dimensionale è un segmento.
- Un simplesso $2-$dimensionale è un triangolo pieno.
- Un simplesso $3-$dimensionale è un tetraedro pieno.

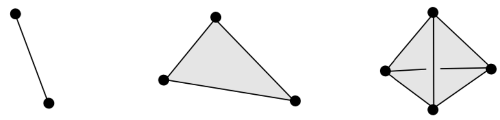


FIGURE 5. Simplessi di dimensione 1, 2 e 3

Definizione 2.15. Un *complesso simpliciale* X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ definito come una unione finita di simplessi che soddisfa le seguenti due proprietà:

1 Ogni faccia di un simplesso di X è ancora in X.
2 L'intersezione di due simplessi $X_1, X_2 \in X$ è una faccia sia di X_1 che di X_2.

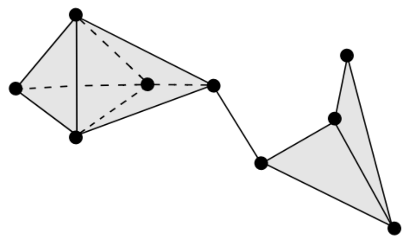


FIGURE 6. Complesso simpliciale

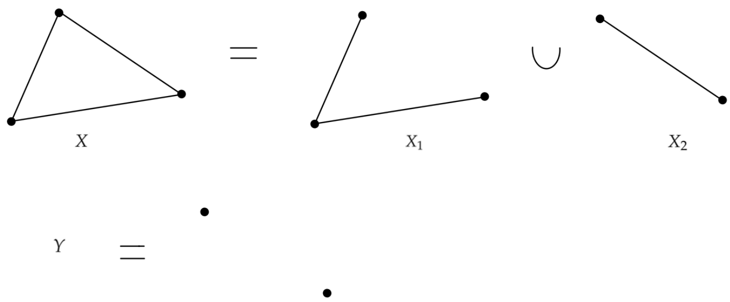
Siamo pronti a definire cosa sono i numeri di Betti per complessi simpliciali

Definizione 2.16. Dato un complesso simpliciale X i *numeri di Betti* di X che indicheremo con $b_0(X), b_1(X), \cdots$ sono gli unici numeri che verificano le seguenti proprietà:

1 Se X è omotopicamente equivalente a Y allora $b_i(X) = b_i(Y)$ per ogni $i \geq 0$. In altre parole, i numeri di Betti sono invarianti per equivalenza omotopica.
2 $b_0(pt) = 1, b_i(pt) = 0$ per ogni $i \neq 0$; $b_i(\emptyset) = 0$ per ogni i e infine $b_0(X)$ conta il numero di componenti connesse di X.
3 Verificano la proprietà di Mayer-Vietoris: se $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 complessi simpliciali, detta $Y = X_1 \cap X_2$, allora abbiamo una successione di numeri

$$\longrightarrow b_1(Y) \longrightarrow b_1(X_1) + b_1(X_2) \longrightarrow b_1(X) \longrightarrow b_0(Y) \longrightarrow b_0(X_1) + b_0(X_2) \longrightarrow b_0(X) \longrightarrow 0$$

tale che
a La somma alternata dei numeri tra due 0 deve fare 0.
b Surgettività: se $a \longrightarrow b \longrightarrow 0$ allora $a \geq b$.
c Iniettività: se $0 \longrightarrow a \longrightarrow b$ allora $a \leq b$.



Esercizio 2.17. Calcolare i numeri di Betti di triangolo. Lo spezzo come due segmenti e un segmento che si intersecano in due punti. Chiamando l'intersezione Y si ha $b_0(Y) = 2$ e $b_i(Y) = 0$ per ogni $i \geq 1$. Applicando la proprietà di Mayer-Vietoris si ha:

$$b_2(Y) \to \underbrace{b_2(X_1) + b_2(X_2)}_{0} \to b_2(X) \to \underbrace{b_1(Y)}_{0} \to \underbrace{b_1(X_1) + b_1(X_2)}_{0} \to$$
$$\to \underbrace{b_1(X)}_{?} \to \underbrace{b_0(Y)}_{2} \to \underbrace{b_0(X_1) + b_0(X_2)}_{2} \to \underbrace{b_0(X)}_{?} \to 0$$

da cui $b_0(X) = b_1(X)$ e dunque $b_1(X) = 1$.

Per poter calcolare i numeri di Betti di un oggetto geometrico qualsiasi l'idea è quella di triangolarlo, ovvero di approssimarlo come fosse un complesso simpliciale.

Definizione 2.18. Una *triangolazione di M* è una suddivisione di M in $n-$simplessi (i.e. immagine di $n-$simplessi). Formalmente è una mappa $f : K \to M$ omeomorfismo, con K complesso simpliciale.

Una *triangolazione di un oggetto geometrico* X è una triangolazione di ogni varietà di cui è composto e una triangolazione per ogni intersezione tra varietà.

Esempio 2.19. Concretamente, una triangolazione di una superficie è un ricoprimento di una superficie tramite triangoli che si intersecano a due a due o in un lato o in un vertice.

Definizione 2.20. I numeri di Betti di un oggetto geometrico X sono i numeri di Betti di una triangolazione associata a X o a un oggetto geometrico Y omotopicamente equivalente a X, ovvero i numeri di Betti del complesso simpliciale con cui è stato triangolato lui o un suo rimpiazzamento Y.

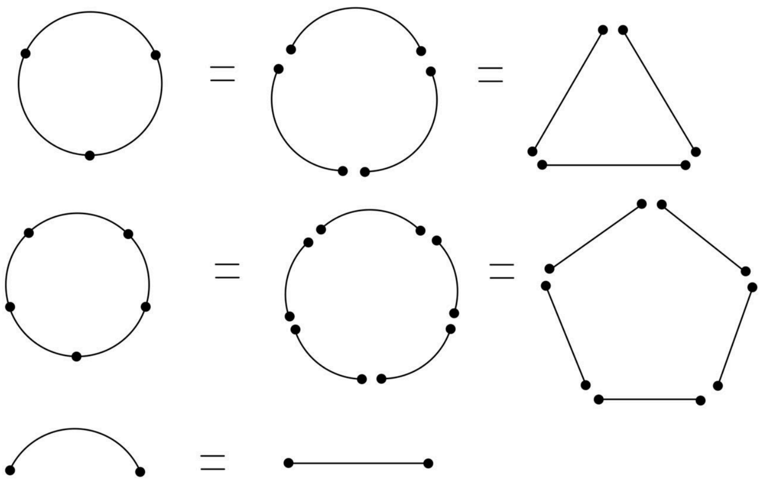


FIGURE 7. Possibili triangolazioni della circonferenza S^1

Osservazione 2.21. Non è detto che un oggetto geometrico sia triangolabile! Si pensi ad esempio al piano $\mathbb{R}^2$

A priori la definizione non è ben posta perché potrebbe capitare che due triangolazioni diverse forniscono numeri di Betti differenti. Questo in realtà non accade: provare, per esercizio, a triangolare S^1 non con soli 3 segmenti, ma con 5 o con 2.

Il prossimo Teorema, di cui non diamo dimostrazione, fornisce la buona definizione dei Numeri di Betti per oggetti geometrici

Teorema 2.22. *I numeri di Betti sono ben definiti: ovvero scegliendo triangolazioni diverse per uno stesso oggetto geometrico, i numeri di Betti non cambiano.*

Osservazione 2.23. I numeri di Betti hanno una definizione molto più astratta legata all'omologia. Sono definiti come la dimensione di una ben definita struttura algebrica. Nel caso degli oggetti geometrici, la definizione data coincide con quella generale, ma nel caso di oggetti più complessi è necessario introdurre il (difficile) concetto di omologia.

Osservazione 2.24. Geometricamente, i numeri di Betti contano i buchi k-dimensionali di un oggetto.

3. Persistent Homology e Topological Data analysis

In queste brevi note, vedremo una applicazione dei numeri di Betti per il riconoscimento di alcune caratteristiche di un oggetto a partire da una nuvola di punti che sappiamo far parte dell'oggetto.

Lo studio di dati e la determinazione di caratteristiche geometriche tramite tecniche topologiche prende il nome di *topological data analysis* e combina tecniche di geometria con la potenza dei calcolatori.

L'applicazione che presentiamo, che prende il nome di *persistent homology* ha come uno dei padri un pistoiese, Patrizio Frosini. Sarà uno speaker del convegno dedicato a Betti presso la Scuola Normale Superiore il prossimo 19 ottobre. Per informazioni su di lui è possibile consultare la sua pagina web.

Per fissare le idee immaginiamo di avere a disposizione un laser per individuare un meteorite in movimento. Non riusciamo a capire la forma completa del meteorite perché riusciamo solo ad ottenere le coordinate di alcuni punti. Cosa possiamo dedurre? Come potrebbe essere fatto il meteorite?

Tramite i numeri di Betti e il procedimento che andremo a vedere riusciremo ad ottenere informazioni sul meteorite anche se non è direttamente osservabile.

Per semplicità prendiamo un insieme di punti nel piano e non nello spazio.

Descriviamo operativamente in che cosa consiste lo studio di una nuvola di punti

(1) Si prende una nuvola di punti nello spazio (o nel piano).
(2) Fissato un raggio d si connettono i punti a distanza minore o uguale a d.
(3) Si calcolano i numeri di Betti del complesso simpliciale ottenuto.

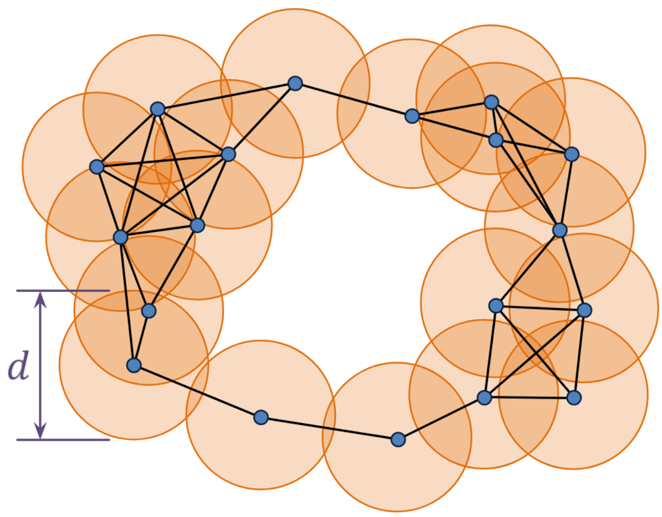


Figure 8. Algoritrmo esposto per una generica nuvola di punti

Le problematicità di questo metodo sono evidenti:

- Se d viene scelto troppo grande o troppo piccolo non si riesce ad individuare la giusta geometria
- Otteniamo solamente un grafo e, come conseguenza dell'Esercizio AGGIUNGI REF, solamente zeresimo e primo numero di Betti uguale a 0.
- Se è presente del *rumore*, ovvero delle misurazioni erronee, questi dati potrebbero risultare significativi.

Idea chiave: Non guardo i numeri Betti fissata una singola distanza d, ma faccio variare d e cerco di monitorare la *persistenza* di alcuni numeri di Betti.

Per fare in modo che non si crei solamente un grafo, ogni qualvolta un insieme di punti formano un triangolo o un tetraedro (i.e. 3 o 4 punti sono distano a coppie almeno d) riempio il triangolo o il tetraedro da loro definito.

Se si aumenta la dimensione dello spazio in cui viviamo, ovvero abbiamo una nuvola di punti in uno spazio n- dimensionale, riempiamo ogni scheletro di simplesso n-dimensionale che si viene a formare.

Definizione 3.1. Fissato $d \in \mathbb{R}^+$ il *Complesso di Rips* è il complesso simpliciale R_d è il complesso simpliciale costruito tramite l'idea operativa definita sopra

Vediamo come operativamente cambia il nostro algoritmo:

Fissiamo un $D \in \mathbb{R}^+$ (ad esempio $D = \max\{\text{dist}(x, y) \mid x, y \text{ punti della nuvola}\}$) e per ogni $0 < d < D$ ed eseguiamo le seguenti operazioni:

(1) Costruiamo il complesso di Rips R_d.
(2) Calcoliamo i numeri di Betti di R_d.

Vogliamo dedurre da queste informazioni i numeri di Betti *reali* dell'oggetto di cui conosciamo solamente la nuvola di punti. Per poterlo fare, introduciamo il concetto di *codice a barre*.

Ogni buco (di qualsiasi dimensione), apparirà per un certo valore di d, che chiameremo d_1 e scomparirà (verrà riempito) per un secondo valore d_2 con $d_1 < d_2$. Dunque a ogni buco B, possiamo associare un intervallo $[d_1, d_2]$ che identifica il tempo per cui il buco è sopravvissuto. Tale intervallo lo possiamo rappresentare con una barra continua da d_1 a d_2 ed è detto la *persistenza del buco*. L'insieme di tutte le barre identificatrici dei buchi viene detto *codice a barre*.

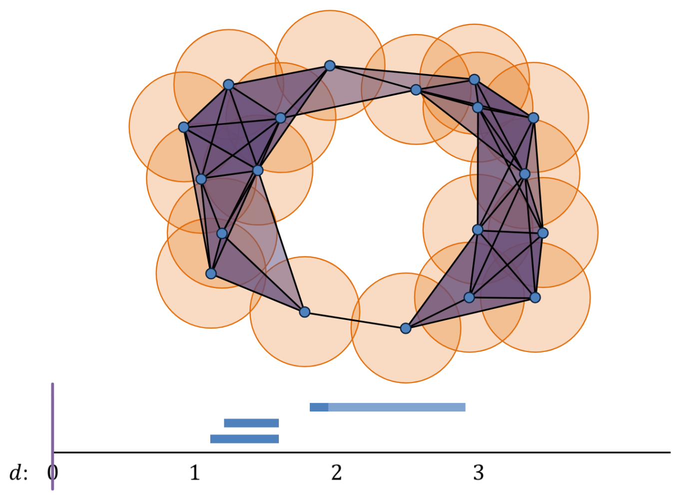


FIGURE 9. Codice a barre formatosi all'aumentare di d

Osservazione 3.2. Fissato un tempo d, il numero di barre esistenti al tempo d per buchi n - dimensionali coincide esattamente con $b_n(R_d)$.

A partire dall'osservazione dei codici a barre è possibile intuire i numeri di Betti dell'oggetto codificato dalla nuvola di punti e dunque intuire la forma indicativa di tale oggetto: se infatti la persistenza di alcune barre è molto grande, questo permette di asserire che tale buco è effettivamente reale e non è soltanto frutto di rumore o errore di misurazione.

Possiamo enunciare il seguente risultato:

Proposizione 3.3. *Fissata una nuvola di punti associata alla misurazione di un oggetto, è possibile calcolare con una incertezza ϵ il numero di Betti $n-$esimo associato all'oggetto come il numero di barre che ha persistenza maggiore di un certo $\tilde{d}$ dove $\tilde{d}$ e ϵ sono numeri che dipendono dalla precisione della misurazione della nuvola di punti.*

Concludiamo citando un Teorema che ci assicura l'affidabilità del metodo presentato:

Teorema 3.4 (2007, Cohen-Steiner, Edelsbrunner,Hares)**.** *I codici a barre sono stabili per perturbazione dei dati, i.e. una minima perturbazione dei dati iniziali fornisce gli stessi risultati in termini di numeri di Betti.*

4. Esercizi e attività: Numeri di Betti

Esercizio 4.1. Mostrare che S^1 non è omeomorfo ad $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.2. Calcolare i numeri di Betti del nastro di Möbius.

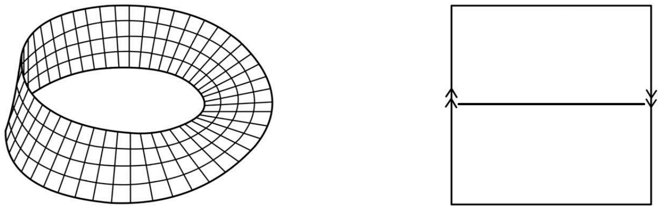


FIGURE 10. Il nastro di Moebius: visione tridimensionale e bidimensionale con identificazioni

Esercizio 4.3. Sia S^2 la sfera. Calcolare i numeri di Betti di S^2.

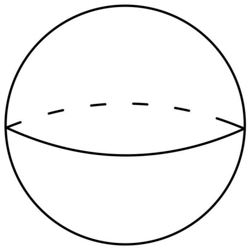


FIGURE 11. La sfera S^2

Esercizio 4.4 (*). Calcolare i numeri di Betti di S^n, con $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Esercizio 4.5. Risolvere i seguenti punti:

- Calcolare i numeri di Betti del wedge di due circonferenze, cioè di $S^1 \vee S^1$.

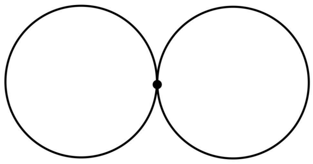


FIGURE 12. Un wedge di due circonferenze

- Calcolare i numeri di betti di un wedge di $n \in \mathbb{N}$ circonferenze.

Esercizio 4.6 (*). Mostrare che $[a, b]$ è omomotopicamente equivalente ad un punto.

Esercizio 4.7 (**). Calcolare i numeri di Betti di un wedge di n circonferenze e m sfere, ovvero di $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n} \vee \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{m}$.

Esercizio 4.8 (***). Sia X un complessso simpliciale di dimensione n. Si dimostri che $b_k(X) = 0$ quando $k > n$.

Esercizio 4.9 (***). Calcolare i numeri di Betti del toro $T = S^1 \times S^1$.

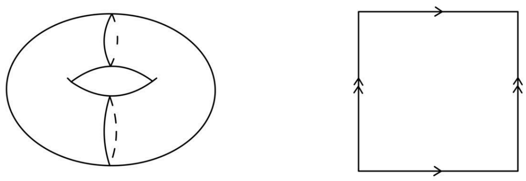


FIGURE 13. Il toro; visione tridimensionale e bidimensionale con identificazioni

Potrebbe essere utile seguire la seguente traccia risolutiva:

(1) Spezzare lo spazio $\mathbb{R}^3$ come unione di un toro pieno X (un toro in cui i punti interni fanno parte del toro stesso) e il suo complementare in $\mathbb{R}^3$ che chiameremo Y. Tali oggetti geometrici hanno intersezione un oggetto geometrico emotopicamente equivalente al toro T se ingrassati..
(2) Calcolare i numeri di Betti di X e Y e mostrare che il primo numero di Betti di Y coincide con il primo numero di Betti del toro T.

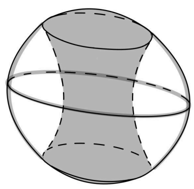


FIGURE 14. Un retratto per deformazione di Y

(3) Trovare una triangolazione per il Toro T e sfruttare le informazioni precedenti per calcolare i rimanenti numeri di Betti

5. Esercizi e attività: Persistent Homology

Esercizio 5.1. Disegnare la seguente nuvola di punti 2-dimensionale in un piano cartesiano, calcolare le distanze tra ogni coppia di punti determinarne il codice a barre:

$$A = (-2, 3) \qquad B = (1, 4) \qquad C = (2, 2)$$
$$D = (-1, -3) \qquad E = (-3, 0) \qquad F = (3, -1)$$

Esercizio 5.2 (*). Disegnare la seguente nuvola di punti 3-dimensionale in uno spazio tridimensionale, calcolare le distanze tra ogni coppia di punti determinarne il codice a barre:

$$A = (-2, 3, 1) \qquad B = (1, -2, 4) \qquad C = (2, 2, 0)$$
$$D = (-1, -3, 3) \qquad E = (-3, 3, 0) \qquad F = (2, 3, -1)$$

Esercizio 5.3 (**). Data una nuvola di punti, dare una condizione necessaria su d affinché a partire da quel d possa crearsi o bloccarsi una barra di persistenza.

Esercizio 5.4 (***). Analizzare tramite il programma "Ripser" fruibile online, le nuvole di punti fornite dai tutor e cercare di intuire la forma degli oggetti misteriosi a partire dai codice a barre.