Funzioni a variazione finita e Integrale di Riemann-Stieltjes

- S_t^Δ : $A : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0,+\infty)$, $\Delta = \{ 0 = t_0 < \dots < t_n = t \}$. $|\Delta| = \max_{i=1,\dots,n} |t_i - t_{i-1}|$

$$S_t^\Delta := \sum_{i=1}^{n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|$$

- Variazione di una funzione : la variazione di A su $[0,t]$ é $S_t := \sup_\Delta S_t^\Delta$. Se $S_t < +\infty$ $\forall t$ allora A é a variazione finita. É a variazione limitata se $\exists M$ t.c. $S_t \le M$ $\forall t$.

- Proprietá (da ora in poi A continua a dx):
  - $\Delta \supseteq \Delta' \Rightarrow S_t^\Delta \ge S_t^{\Delta'}$
  - $t' \ge t \Rightarrow S_{t'} \ge S_t$
  - A crescente $\Rightarrow S_t = S_t^\Delta = A_t - A_0$ $\forall t$

- Prop. : Se A a variazione finita $\Rightarrow A_t = I_t - D_t$ con I_t, D_t crescenti e positive (e cont. a dx se A lo é)

- Prop. : $F : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ crescente e continua a dx, allora $\exists$ misura μ di Borel t.c.

$$\mu((-\infty, t]) = F(t)$$

- Integrale di Stieltjes : Sia $t > 0$. Data $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ boreliana e localmente finita, allora definiamo l'integrale di Stieltjes rispetto ad A di f su $[0,t]$:

$$\boxed{\int_0^t f_s \, dA_s := \int_0^t f_s \, d\mu_I(s) - \int_0^t f_s \, d\mu_D(s)}$$

con μ_I, μ_D misure associate a I_t, D_t $(A_t = I_t - D_t)$

Notazione : $(f \cdot A)_t = \int_0^t f_s \, dA_s$ e $(f \cdot A)_0 := 0$

- Prop. : Se $f \in C^0([0,t])$ allora : $\int_0^t f_s \, dA_s = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})$ (Integrale Riemann-Stieltjes)

- Proprietá : ① $A \in C^1([0,+\infty))$ $\overset{\text{var. finita}}{\Rightarrow}$, $f : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}$, allora $\boxed{\int_0^t f_s \, dA_s = \int_0^t f_s \, A'_s \, ds}$

  ② Giuste hp. di buona def. $\boxed{\int_0^t f_s \, d(g \cdot A)_s = \int_0^t f_s \, g_s \, dA_s}$

Uniforme integrabilità

Famiglia uniformemente integrabile di v.a. : Una famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ di v.a. è detta uniformemente integrabile (UI) se vale:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}\right]=0$$

$$\boxed{X_i = X \ \forall i \text{ e } X \text{ integrabile} \Rightarrow X \text{ è UI}}$$

$$\boxed{UI \Rightarrow \text{limitata in } L^1(\mathbb{P})} \qquad \boxed{\text{limitata in } L^2(\mathbb{P}) \longrightarrow UI}$$

$$\boxed{(X_i)_{i\in I}, (Y_j)_{j\in J} \text{ con } (Y_j)_j \text{ UI e t.c. } \forall i \ \exists j : |X_i| \le |Y_j| \Rightarrow \{X_i\}_i \text{ UI}}$$

Caratterizzazione UI : $(X_i)_{i\in I}$ è UI $\iff$

$$\begin{cases} ① \text{ limitata in } L^1(\mathbb{P}) \\ ② \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \text{ t.c. } \forall A\in\mathcal{F} \ \mathbb{P}(A)<\delta \Rightarrow \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_A\right]<\varepsilon \ \forall i\in I \end{cases}$$

Corollario : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. convergente in $L^1(\mathbb{P}) \Rightarrow$ è UI.

Teorema di Vitali : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ UI e X v.a. t.c. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Allora $X\in L^1(\mathbb{P})$ e $X_n \to X$ in $L^1(\mathbb{P})$

cioè $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|\right]=0$.

Utile caso di famiglia UI : $X\in L^1(\mathbb{P})$ e $\{\mathcal{G}_j\}_{j\in J}$ famiglia di σ-alg t.c. $\mathcal{G}_j\subseteq\mathcal{F} \ \forall j$. Allora

$$\{\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}_j]\}_{j\in J} \text{ UI}.$$

Moto Browniano

- **Moto Browniano**: $(B_t)_{t \in [0,T]}$ é un moto browniano a valori in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^d$) se:

  ① Continuo

  ② Incrementi indipendenti su intervalli disgiunti

  ③ $B_t \sim N(0,t) \quad \forall t$ (std) (se non lo vogliamo standard $N(c,t)$)

- **Proprietà immediate**: ① $B_t - B_s \sim N(0, t-s) \quad t>s$.

  ② (B_t) é un processo gaussiano i.e. $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ é un vettore gaussiano

  ③ $\mathbb{E}[B_t B_s] = \inf(t,s)$

- **Altri moti Browniani**: Se $(B_t)_{t \geq 0}$ e' un moto browniano, lo sono anche:

  ① $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0} \quad \forall s \geq 0$

  ② $\{-B_t\}_{t \geq 0}$

  ③ $\{c\, B_{t/c^2}\}_{t \geq 0} \quad \forall c>0$

  ④ $X_t := \begin{cases} 0, & t=0 \\ t\, B_{\frac{1}{t}}, & t>0 \end{cases} \qquad \left(\mathbb{P}\left(\lim_{t \to 0} t\, B_{\frac{1}{t}} = 0 \right) = \mathbb{P}\left(\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} B_t \right) = 1 \right)$

  ⑤ $B_{t+\tau} - B_\tau$ é un $\mathcal{F}_{t+\tau}$ BM con τ t.d.a rispetto a $\mathcal{F}_t$, X_t é indip. da B_τ

- $\boxed{\mathbb{E}\left[|B_t - B_s|^4 \right] = 3|t-s|^2}$

- **Proprietà locali dei cammini browniani**: ① La modificazione data da Kolmogorov ha traiettorie α-Hölder continue $\forall \alpha < \frac{1}{2}$

  ② (Modulo di Continuità di Paul-Levy): Sia $h(t) = \sqrt{2t \log \frac{1}{t}}$, $t>0$. Allora

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \left(\sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ 0 < |t-s| < \varepsilon}} \frac{|B_t - B_s|}{h(\varepsilon)} \right) = 1 \right) = 1$$

- $\boxed{\langle B \rangle_t = t \quad \forall t}$

- **Corollario (teorema su variazione quadratica)**: Sia $(B_t)_{t \geq 0}$ MB std. Allora:

  ① le traiettorie non sono a variazione finita $\mathbb{P}$-q.c.

  ② " " α-hölder per $\alpha > \frac{1}{2}$ ".

- $\boxed{(B_t)_{t \geq 0} \text{ MB é martingala}}$

- $\boxed{(B_t)_{t \geq 0} \text{ MB std. é martingala locale con t.d.a } T_n = n}$

$$\boxed{B \text{ MB std } d\text{-dim.} \Rightarrow \langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij} t \quad \forall \geq 0}$$

MOTO BROWNIANO COME INTEGRATORE:

- MB che parte da x: Sia $x \in \mathbb{R}^d$. Un processo B è detto $(\mathcal{F}_t)$-MB^d che parte da x se: (se parte da 0 è std.)

  1. B è un MB^d che parte da x
  2. B è adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$
  3. $\forall s \geq 0$ $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ è ind. da $\mathcal{F}_s$.

Prop.: Se B è un $(\mathcal{F}_t)$-MB std., allora:

1. Se $K \in L^2_{loc}(B)$ allora $K \cdot B$ è una martingala (a priori è solo mart. locale cont.)
2. Se K è progr. misurabile e con $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, ds\right] < +\infty \Rightarrow K \cdot B \in H_0^2$

Lemma: B un $(\mathcal{F}_t)$-MB std. e $K \in L^2_{loc}(B)$, allora $\forall t \geq 0$ vale:

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s \, dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, ds\right]}$$

Integrale di Wiener: $f \in L^2([0,+\infty), \text{Lebesgue})$ e B un $(\mathcal{F}_t)$-MB std allora:

$$\int_0^{+\infty} f(s) \, dB_s \sim N\left(0, \|f\|^2_{L^2([0,+\infty), \text{Lebesgue})}\right)$$

Corollario: Sia $f \in L^2_{loc}(B)$ deterministica, allora $f \cdot B$ è una martingala UI se e solo se $f \in L^2([0,+\infty), \mathcal{L}^1)$.

→ In particolare se $f \in L^2([0,+\infty), \mathcal{L}^1) \Rightarrow f \cdot B \in H_0^2$.

Processi stocastici in generale

- <u>Processo stocastico</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. di probabilità, $(E, \mathcal{E})$ sp. misurabile. Processo stocastico:
$$(X_t)_{t\in T} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (E, \mathcal{E}) \text{ v.a. con } T \text{ insieme}$$

- <u>Pr. stocastico continuo</u>: E sp. topologico, $\mathcal{E}$ σ-algebra dei boreliani. $(X_t)_{t\in T}$ è continuo se
$$t \longmapsto X_t(\omega) \text{ è continua } \tilde{\forall} \omega \in \Omega.$$

- <u>Versione</u>: $(X_t)_{t\in T}$ definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(X'_t)_{t\in T}$ definito su $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ sono versioni l'uno dell'altro se $\{(X_{t_1} \ldots X_{t_n})_\# \mathbb{P} = (X'_{t_1} \ldots X'_{t_n})_\# \mathbb{P} \mid t_1, \ldots, t_n \in T\}$

- <u>Modificazione</u>: $(X_t)_{t\in T}$, $(Y_t)_{t\in T}$ definiti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sono modificazione l'uno dell'altro se
$$\forall t : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \tilde{\forall} \omega$$

- <u>Indistinguibili</u>: $(X_t)_{t\in T}$, $(Y_t)_{t\in T}$ definiti su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sono indistinguibili se
$$\tilde{\forall} \omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega) \ \forall t$$

- $\boxed{\text{Indistinguibili} \Rightarrow \text{Modificazione} \Rightarrow \text{Versione}}$

- $\boxed{\text{Modificazione + continuo} \Rightarrow \text{Indistinguibili}}$

- <u>Modificazione $\not\Rightarrow$ Indistinguibili</u>: T v.a. con distribuzione continua su $\mathbb{R}^+$, $\{X_t = 0\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ $\{Y_t = 1_{\{T=t\}}\}_{t\in\mathbb{R}^+}$

- <u>Versione $\not\Rightarrow$ Modificazione</u>; $X_t \sim N(0,1)$, $Y_t = -X_t$.

- <u>Teorema di continuità di Kolmogorov</u>: Sia $(X_t)_{t\in T}$ un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}^d$. Allora se
$$\exists\, \alpha, \beta, C > 0 \text{ t.c. } \forall t,s \in T \ \ \mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \le C|t-s|^{d+\beta} \text{ allora}$$
ammette una modificazione q.c. continua. (in realtà α-Höder $\forall \alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma}$)

- <u>Variazione quadratica</u>: $(X_t)_{t\ge 0}$ reale ha variazione quadratica finita se $\exists$ processo $\langle X \rangle_t$ t.c.
$$\langle X \rangle_t < +\infty \ \mathbb{P}\text{-q.c. } \forall t \ \text{ e } \lim_{n\to+\infty} T_n^{\Delta_n}(X) = \langle X \rangle_t \text{ in prob. } \forall t \ \Big(\text{dove}$$
$$T_t^\Delta(X) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^2 \Big) \text{ con } |\Delta_n| \longrightarrow 0$$

- <u>Oss</u> X variazione quadratica finita $\not\Rightarrow$ $\sup_\Delta T_t^\Delta < +\infty$ (es. moto Browniano)

- <u>Teorema</u>: X misura gaussiana con intensità μ e F t.c. $\mu(F) < +\infty$ e $\{F_n^k\}$ partizione di F con $\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_k \mu(F_n^k)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum (X(F_k^n))^2 = \mu(F)$ in L^2 (e dunque in prob) (da qui $\langle \overset{BM}{B} \rangle_t = t$).

<u>Processo stocastico cadlag</u>: $(X_t)_{t\geq 0}$ é detto cadlag se $\forall \omega \in \Omega$ $\exists \lim_{s \to t^+} X_s(\omega) = X_t(\omega)$ $\forall t \geq 0$

e $\lim_{s \to t^-} X_s(\omega) \in \mathbb{R}$ $\forall t > 0$.

Diremo che é $\mathbb{P}$-q.c. cadlag se valgono le condiz. $\mathbb{P}$-q.c.

<u>Operatore di shift</u>: Sia $T = [0, +\infty)$, l'operatore di shift θ_t $t \geq 0$ é $\theta_t : E^{[0,+\infty)} \longrightarrow E^{[0,+\infty)}$

$$(x_s)_{s\geq 0} \longrightarrow (x_{s+t})_{s\geq 0}$$

Si può anche restringere a $C([0,+\infty), E)$.

<u>Processo stazionario</u>: se la sua legge non cambia con l'azione di t: $(X_s)_{s\geq 0} = (X_{s+t})_{s\geq 0}$ $\forall t$

Filtrazione e tempi di arresto

- **Filtrazione**: Una filtrazione su $(\Omega, \mathcal{F})$ é una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ di σ-algebre t.c. $\forall s\leq t$ $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

- **Processo adattato**: $(X_t)_t$ é $\mathcal{F}_t$-adattato se X_t é $\mathcal{F}_t$-misurabile $\forall t$.

- **Filtrazione naturale**: $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s \mid s\leq t)$

- **$\mathcal{F}_t^-$, $\mathcal{F}_t^+$**: $\mathcal{F}_{t^-} := \sigma(\mathcal{F}_s \mid s<t) = \overset{\text{unione e poi faccio } \sigma\text{-alg.}}{\bigvee_{s<t}} \mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_t$. $\mathcal{F}_t^- \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_t^+$. Se $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ é continua a dx

- **Tempo di arresto**: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, una v.a. $T: \Omega \to [0,+\infty]$ é detto tempo di arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se vale che $\{T>t\}, \{T\leq t\} \in \mathcal{F}_t$ $\left(\Rightarrow \{T<+\infty\} = \bigcup_n \{T\leq n\} \in \mathcal{F}\right)$.

- **Proprietá**: ① $\{T<t\} = \bigcup_{\substack{s<t\\ s\in\mathbb{Q}}} \{T\leq s\} \in \mathcal{F}_t^-$ dunque T t.d.a. $\Rightarrow \{T<t\}\in\mathcal{F}_t$

  ② Se $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ é continua a dx, $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t \Rightarrow T$ t.d.a.

- **$\mathcal{F}_T$**: data T t.d.a., poniamo $\mathcal{F}_T$ la σ-algebra degli $A\in\mathcal{F}$ t.c. $A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ $\forall t\geq 0$.

- **Proprietá**: ① T é $\mathcal{F}_T$-misurabile.

  ② $S\leq T$ t.d.a. $\Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

- **Prop.**: Sia (E,d) sp. metrico e siano $C\subseteq E$ chiuso, $A\subseteq E$ aperto, $(X_t)_{t\geq 0}$ processo adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a traiettorie continue. Allora: ① $\inf\{t\geq 0 \mid X_t\in C\}$ é un $(\mathcal{F}_t)$-t.d.a.

  ② $\inf\{t\geq 0 \mid X_t \in A\}$ é un $(\mathcal{F}_t^+)$-t.d.a.

- **Progressivamente misurabile**: $(X_t)_{t\geq 0}$ pr. misurabile rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se $\forall t\geq 0$ la restrizione $X: \Omega\times[0,t] \to E$ $(\omega,s)\mapsto X_s(\omega)$ é mis. con $\Omega\times[0,t]$ munito della σ-algebra $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$

- $\boxed{\text{Pr. misurabile} \Rightarrow \text{adattato}}$

- $\boxed{\text{Adattato + continuo (a dx)} \Rightarrow \text{pr. misurabile}}$

- **Prop.**: Se $(X_t)_{t\geq 0}$ é pr. misurabile e T é t.d.a. allora $X_T \cdot \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}$ é $\mathcal{F}_T$-mis.

- **Processo arrestato**: Se $(X_t)_{t\geq 0}$ pr. misurabile e T é un t.d.a. rispetto alla stessa $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, il processo arrestato $X_t^T := X_{T\wedge t}$ é pr. misurabile rispetto a $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$. Notiamo che $T\wedge t$ é ancora t.d.a.

- Filtrazione completa: Sia $N \subseteq \mathcal{F}$ l'insieme dei misurabili $\mathbb{P}$-nulli. La filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é detta $\mathbb{P}$-completa se $N \subseteq \mathcal{F}_0$

- Completamento di una filtrazione: Sia $N \subseteq \mathcal{F}$ l'insieme dei misurabili $\mathbb{P}$-nulli. Allora la famiglia di σ-algebre $(\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}})_{t\geq 0}$ con $\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}} := \sigma(\mathcal{F}_t \cup N)$ $\forall t \geq 0$, sono una filtrazione detta $\mathbb{P}$-completa

- Ipotesi abituali: Diciamo che $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ soddisfa le hp. abituali se é completa e continua a dx. Se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é una filtrazione, il suo allargamento abituale si indica con $(\mathcal{F}_{t+}^{\mathbb{P}})_{t\geq 0}$.
(É utile quando vogliamo che la modificazione di un processo adattato rimanga adattato).

Martingale

Martingala: Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ (T intervallo o $\mathbb{N}$), un processo stocastico $(M_t)_{t\in T}$ è detto

$(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingala se: ① $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \quad \forall t \in T$ (integrabile)

② Adattato

③ $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \mathbb{P}$-q.c. $\forall s,t \in T \quad s \le t$. (ortogonalità degli incrementi $\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$)

Submartingala: " $\ge$ "

Supermartingala: " $\le$ "

Proprietà: ① M_t, N_t submart. $\Rightarrow \alpha M_t + \beta N_t$ submart. $\forall \alpha, \beta > 0$ (Sono un cono)

② M_t, N_t martingala $\Rightarrow \alpha M_t + \beta N_t$ martingala $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Sono uno sp. vett.)

$\varphi(x) = |x|^p$ è convesso ⟵ ③ $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, $M_t \in I$ q.c., $\varphi(M_t)$ integr., M_t martingala $\Rightarrow \varphi(M_t)$ submartingala

④ " convessa e crescente ", M_t submart. $\Rightarrow \varphi(M_t)$ submart.

Esempi di martingala:

① $(B_t)_{t\ge 0}$ MB

② $(\overset{\text{MB}}{B_t^2} - t)_{t\ge 0}$

③ $\left(\exp\left(\alpha \overset{\text{MB}}{B_t} - \alpha^2 \frac{t}{2}\right)\right)_{t \ge 0}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

① – ③ sono martingala rispetto alla filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t^0)_{t\ge 0}$

④ $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

⑤ $V_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i^2])$

⑥ $M_n = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\exp(\alpha X_i)}{\mathbb{E}[\exp(\alpha X_i)]} \right)$

④ – ⑥ sono martingala rispetto a $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$

Decomposizione di Doob (caso discreto): $T = \{0, \dots, N\}$ con $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e $(\mathcal{F}_n)_{n\in T}$ filtrazione.

$(M_n)_n$ submart. $\Rightarrow \exists!$ (a meno di indist.) processo $(A_n)_n$ t.c.:

① $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prevedibile (A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mis. $\forall n$)

② $A_0 = 0$

③ $A_n \ge A_{n-1} \quad \forall n$

④ $(N_n := M_n - A_n)_n$ è martingala, cioè $M_n = N_n + A_n$ è detta decomp. di Doob

Prop. (Integrale stocastico discreto): $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrazione, $(M_n)_n$ mart. o submart. o supermart. $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ processo non negativo, prevedibile e t.c. $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists C_n \ge 0$ t.c. $|H_n| \le C_n$.

Allora il processo $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definito come: $\begin{cases} Y_0 = M_0 \\ Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1}) & \forall n \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$

é una mart. o submart. o supermart. a seconda di $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definiamo l'integrale stocastico discreto il processo $\boxed{(H\cdot M)_n = Y_n - M_0}$.

Teorema di arresto opzionale (versione discreta e limitata): Sia $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adattato e integrabile. Allora é martingala $\iff \forall S, T$ t.d.a. a valori in $\mathbb{N}$ t.c. $S \le T \le C$ costante si ha $\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T]$. Inoltre $\mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_S] = M_S$. (Se $(M_n)_n$ é sub c'é il $\ge$ prima e $\le$ qui; contrario per super.)

Corollario: $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrazione e T t.d.a. Se M_n mart. $\Rightarrow$ $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ é mart. (idem con sub e super)

Prop.: $(\mathcal{F}_n)_{n\in N}$ filtrazione, $N \in \mathbb{N}$. $(M_n)_{n\in N}$ submart. e $\lambda > 0$ allora $\mathbb{P}\left(\max_{0\le n\le N} M_n > \lambda\right) \le \dfrac{\mathbb{E}\left[M_N \cdot \mathbb{1}_{\{\max_{0\le n\le N} M_n > \lambda\}}\right]}{\lambda}$

$\downarrow$

Disuguaglianze massimali di Doob, tempi finiti: $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ filtrazione. $(M_n)_{n=0}^N$ submart positiva o martingala. $\lambda > 0$. Allora:

1. $\mathbb{P}\left(\max_{0\le n\le N} |M_n| > \lambda\right) \le \dfrac{\mathbb{E}[|M_N|^p]}{\lambda^p} \quad \forall p \in [1, +\infty)$

2. $\mathbb{E}\left[\max_{0\le n\le N} |M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \dfrac{p}{p-1}\, \mathbb{E}\left[|M_N|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in (1, +\infty)$

Disuguaglianze massimali di Doob, tempi continui: $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Se $(M_t)_{t\in I}$ martingala continua a dx, allora $\forall \lambda > 0$:

1. $\mathbb{P}\left(\sup_{t\in I} |M_t| > \lambda\right) \le \dfrac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[|M_t|^p]}{\lambda^p} \quad \forall p \in [1, +\infty)$

2. $\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in I} |M_t|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \dfrac{p}{p-1} \sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in (1, +\infty)$

Esempio: Sia $(B_t)_{t\ge 0}$ MB. $S_t := \max_{0\le s\le t} B_s \Rightarrow \mathbb{P}(S_t > at) \le \exp\left(-\frac{a^2 t}{2}\right) \quad \forall a \ge 0 \ \forall t > 0$

Upcrossing e downcrossing: $F = \{t_i\}_{i=1}^d$ con $t_0 < \dots < t_d$ tempi di un processo stocastico $(M_t)_{t\in F}$. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, i seguenti sono tempi d'arresto:

$S_1(a,b) := \inf\{t \in F \mid M_t \le a\} \qquad S_2(a,b) = \inf\{t \in F \mid t \ge S_1, M_t \ge b\}$

e ricorsivamente $\forall k \in \mathbb{N}^+$:

$S_{2k+1}(a,b) = \inf\{t \in F \mid t \ge S_{2k}(a,b), M_t \le a\} \qquad S_{2k+2}(a,b) = \inf\{t \in F \mid t \ge S_{2k+1}(a,b), M_t \ge b\}$

Notiamo che essendo $|F| = d$ $S_n(a,b) = +\infty$ $\forall n > d$.

Dunque definiamo gli up-crossing:

$$U\left((M_t)_{t\in F}, [a,b]\right) := \sum_{k\in\mathbb{N}^+} \mathbb{1}_{\{S_{2k} < +\infty\}}$$

e i down crossing:

$$D\left((M_t)_{t\in F}, [a,b]\right) := U\left((-M_t)_{t\in F}, [-b,-a]\right)$$

Nel caso in cui F e' infinito numerabile:

$$U\left((M_t)_{t\in F}, [a,b]\right) := \sup_{\substack{I\subseteq F \\ I \text{ finito}}} U\left((M_t)_{t\in I}, [a,b]\right)$$

$$D\left((M_t)_{t\in F}, [a,b]\right) = \sup_{\substack{I\subseteq F \\ I \text{ finito}}} D\left((M_t)_{t\in I}, [a,b]\right)$$

<u>Teorema degli attraversamenti di Doob a tempo discreto</u>: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ numerabile. Fissiamo una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ e consideriamo un processo stocastico $(M_t)_{t\in I}$ e due numeri $a,b\in\mathbb{R}$ t.c. $a<b$.

Se $(M_t)_{t\in T}$ e' una supermartingala:

$$\mathbb{E}\left[U\left((M_t)_{t\in I}, [a,b]\right)\right] \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[\underbrace{(M_t-a)^-}_{\text{parte neg}}\right]}{b-a} \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[|M_t|\right]+|a|}{b-a}$$

Se invece $(M_t)_{t\in I}$ é una submartingala allora vale:

$$\mathbb{E}\left[D\left((M_t)_{t\in I}, [a,b]\right)\right] \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[\underbrace{(M_t-b)^+}_{\text{parte pos}}\right]}{b-a} \leq \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[|M_t|\right]+|b|}{b-a}$$

<u>Teorema di Convergenza per supermart./submart. a tempo discreto</u>: $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtr. e $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-supemart./submart. limitata in $L^1(\mathbb{P})$ cioé:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|M_n|\right] < +\infty$$

allora $\exists \lim_{n\to+\infty} M_n$ $\mathbb{P}$-q.c. finito e tale limite e' integrabile.

<u>$(M_n)_n$ converge anche in $L^1(\mathbb{P})$?</u>: $(B_t)_{t\geq 0}$ MB std. e $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sia $B_t^\alpha := \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$.

<u>No</u>

B_t^α é una martingala positiva rispetto alla filtrazione naturale di B_t. Consideriamola a tempi discreti. Ora, $\mathbb{E}\left[|B_t^\alpha|\right] = \mathbb{E}\left[B_t^\alpha\right] = \mathbb{E}\left[B_0^\alpha\right] =$

$= 1$. Dunque soddisfa hp. Teorema $\Rightarrow \exists \lim$ q.c. che deve essere 0 perché

limsup $B_n = +\infty$, limsup $B_n = -\infty$ $\Rightarrow$ taglia 0 freq. $\Rightarrow \exists$ sott.succ. che va a 0

il lim in prob. é 0 (verifica) e allora lungo una sottosucc. e' q.c. 0 ma quindi 0. Però in L^1 dovrei avere $1 \overset{\text{ris. prec}}{=} \lim_n \mathbb{E}\left[|B_n^\alpha|\right] \overset{\text{vorrei questo}}{=} 0$, $\lightning$.

<u>Teorema</u>: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una $(\mathcal{F}_n)_n$-mart. Allora sono equivalenti:

1. $\lim_{n\to+\infty} M_n \;\exists$ in $L^1(\mathbb{P})$
2. $\exists M_\infty \in L^1(\mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$.
3. $\{M_n\}_{n\in I}$ UI

<u>Corollario</u>: Per Teorema sopra + Teorema conv., se vale una tra le cond. sopra (e quindi tutte e 3) allora $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ (viene da UI) e $M_\infty = \lim_{n\to+\infty} M_n$ $\mathbb{P}$-q.c.

<u>Corollario</u>: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_n)_n$-mart. Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in $L^p(\mathbb{P})$ $p\in(1,+\infty)$ ossia:

$$\sup_n \mathbb{E}\left[|M_n|^p\right] < +\infty$$

allora valgono 1, 2, 3 (in particolare $M_\infty \in L^p(\mathbb{P})$ e $M_n \longrightarrow M_\infty$ in $L^p(\mathbb{P})$).

(é di più perché $L^p \subseteq L^1$)

<u>Teorema di convergenza per submart. a tempo discr. neg.</u>: $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ una $(\mathcal{F}_n)_n$-submartingala. Allora $\exists \lim_{n\to-\infty} M_n$ $\mathbb{P}$-q.c. e in $L^1(\mathbb{P})$ (in particolare $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ é UI). Chiamando tale limite $M_{-\infty}$ vale che $M_{-\infty} \leq \mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$ $\mathbb{P}$-q.c. in cui $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\in-\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ con l'uguaglianza se é martingala.

<u>Teorema di conv. dominata condizionale con filtrazione</u>: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-processo stocastico dominato da v.a. $Y\in L^1(\mathbb{P})$ e X v.a. t.c. $X_n \longrightarrow X$ $\mathbb{P}$-q.c., allora $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1 in cui $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

<u>Teorema d'arresto opzionale continuo</u>: Sia $(M_t)_{t\geq0}$ $(\mathcal{F}_t)$-adattato, integr. e $\mathbb{P}$-q.c. continue a dx. Allora é martingala $\Leftrightarrow \forall S, T$ t.d.a. t.c. $S \leq T \leq +\infty$ vale che $M_S, M_T \in L^1(\mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T]$. Inoltre $\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S$. (Se $(M_t)_{t\geq0}$ é sub c'é il $\geq$ prima e $\leq$ qui; contrario per super.)

<u>Corollario</u>: $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ filtrazione e T t.d.a. Se $(M_t)_{t\geq0}$ mart. $\Rightarrow (M_{T\wedge t})_{t\geq0}$ é mart. (idem con sub e super)

Prop.: $(M_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}_t$-mart. continua a dx e UI $\Rightarrow$ $\forall S,T$, $S\leq T$ t.d.a. $\mathbb{P}$-q.c. finiti vale

$$M_S = \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_S]$$ in cui $M_\infty \in L^1(\mathbb{P})$ è il limite di $(M_t)_{t\geq 0}$.

Teorema di convergenza per supermartingale/submartingale a tempo continuo: Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ una $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ supermart./sub mart. $\mathbb{P}$-q.c. continua a dx e limitata in $L^1(\mathbb{P})$ cioè t.c.: $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$. Allora $\exists \lim_{t\to+\infty} M_t = M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e tale limite è integrabile.

Teorema: $(M_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)$-mart. $\mathbb{P}$-q.c. continua a dx, sono equivalenti:

1. $\lim_{t\to+\infty} M_t$ $\exists$ in $L^1(\mathbb{P})$
2. $\exists M_\infty \in L^1(\mathbb{P})$ t.c. $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_t] = M_t$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall t\geq 0$
3. $\{M_t\}_{t\geq 0}$ UI

Corollario: Per Teorema sopra + Teorema conv., se vale una tra le cond. sopra (e quindi tutte e 3) allora $\sup_t \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$ e $M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M_t$ $\mathbb{P}$-q.c.

Corollario: $(M_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-mart. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ limitata in $L^p(\mathbb{P})$ $p\in(1,+\infty)$ ossia:

$$\sup_t \mathbb{E}[|M_t|^p] < +\infty$$

allora valgono 1, 2, 3 (in particolare $M_\infty \in L^p(\mathbb{P})$ e $M_t \longrightarrow M_\infty$ in $L^p(\mathbb{P})$). è di più perché $L^p \subseteq L^1$

Regolarizzazione di submart. a tempo continuo: vorremmo lavorare con modificazioni continue a dx (anche solo $\mathbb{P}$-q.c.) perché possiamo applicare i risultati precedenti. Fissiamo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrazione e processo stocastico $(M_t)_{t\geq 0}$, sia $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t \mid t\geq 0)$. Poniamo:

$$M_{t^-} = \limsup_{\substack{s\to t^- \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s,\ t>0 \qquad M_{t^+} = \limsup_{\substack{s\to t^+ \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s,\ t\geq 0$$

Teorema: Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una sub.mart. $\Rightarrow \exists$ $\mathbb{P}$.q.c. i limiti $\lim_{\substack{s\to t^- \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s$ per $t>0$ e $\lim_{\substack{s\to t^+ \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s$ per $t\geq 0$. Quando esistono chiaramente coincidono con M_{t^-} e M_{t^+} rispettivamente.

Lemma: Supponiamo anche che M_t sia integrabile. Allora $(M_{t^+})_t$ è integrabile e

$M_t \leq E[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_t] \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}$-q.c.

Inoltre questa disuguaglianza é un'uguaglianza nel caso $t \longmapsto E[M_t]$ é continua a dx, in particolare se $(M_t)_{t\geq 0}$ é mart.. Infine $(M_{t^+})_t$ é submart. rispetto a $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$ e é una mart. se lo é $(M_t)_{t\geq 0}$.

<u>Processo stocastico cadlag</u>: $(X_t)_{t\geq 0}$ é detto cadlag se $\forall \omega \in \Omega \ \exists \lim_{s \to t^+} X_s(\omega) = X_t(\omega) \ \forall t \geq 0$ e $\lim_{s \to t^-} X_s(\omega) \in \mathbb{R} \ \forall t > 0$.

Diremo che é $\mathbb{P}$-q.c. cadlag se valgano le condiz. $\mathbb{P}$-q.c.

<u>Teorema di modif. $\mathbb{P}$-q.c. cadlag. di mart. e submart.</u>: Filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continua a dx. Allora:

1. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ submart. con $t \longmapsto E[t]$ continua a dx $\Rightarrow$ M_t ammette modif. $\mathbb{P}$-q.c. cadlag che é sempre submart.
2. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ é martingala $\Rightarrow$ $(M_t)_{t\geq 0}$ ammette modif. $\mathbb{P}$-q.c cadlag che é sempre mart.

<u>Teorema di modif. cadlag. di mart. e submart.</u>: Filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ che soddisfi hp abituali: adesso é completa!

1. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ submart. con $t \longmapsto E[t]$ continua a dx $\Rightarrow$ M_t ammette modif. cadlag che é sempre submart.
2. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ é martingala $\Rightarrow$ $(M_t)_{t\geq 0}$ ammette modif. cadlag che é sempre mart.

Variazione quadratica - martingale locali - martingale locali continue - Spazi $\mathbb{H}^2$

<u>Processo crescente</u>: Un processo stocastico A è crescente se è adattato e $\mathbb{P}$-q.c. la traiettoria $t \longrightarrow A_t$ è continua a dx e crescente.

<u>Processo a variazione finita</u>: Un processo stocastico A è a variazione finita se è adattato e $\mathbb{P}$-q.e. la traiettoria $t \longrightarrow A_t$ è continua a dx e a variazione finita. Chiameremo $(V_t(A))_{t \geq 0} =: V(A)$ il processo variazione di A.

<u>Osservazione</u>: Se X è un processo continuo a dx e a variazione quadratica finita allora $\langle X \rangle$ è un processo a variazione finita: è adattato, continuo a dx e crescente.

<u>Osservazione</u>: Abbiamo definito $T_t^\Delta(X)$ con Δ partizione di $[0,t]$. Estendiamo per Δ partizione di $[0,\infty)$ t.c. $\#\left(\Delta \cap [0,t]\right) < +\infty$ $\forall t \geq 0$ nel seguente modo:

$$T_t^\Delta(X) = \sum_{i=0}^{K-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_K}) \quad \text{in cui } t_K = \max(\Delta \cap [0,t])$$

Così X è a variazione finita se $T_t^\Delta(X) \longrightarrow \langle X \rangle_t$ $\forall t \geq 0$ per $|\Delta \cap [0,t]| \longrightarrow 0$

<u>Lemma</u>: Una martingala continua M è a variazione finita $\Leftrightarrow M = M_0$.

<u>Processo limitato</u>: Un processo X è limitato se $\exists C$ t.c. $|X_t(\omega)| < C$ $\forall t \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$

<u>Teorema</u>: Sia M martingala continua e limitata, allora:

1. M è a variazione quadratica finita
2. $\langle M \rangle$ è l'unico processo adattato, continuo, crescente e nullo in 0 (e quindi in particolare non negativo) t.c. $M^2 - \langle M \rangle$ è una martingala continua

<u>Prop.</u>: Sia M una martingala continua e limitata e T t.d.a., allora: $\langle M \rangle^T = \langle M^T \rangle$

<u>Martingala locale</u>: Un processo X adattato e continuo a dx è detto $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingala locale se $\exists$ dei tempi di arr. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitati t.c. (1) $T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.

Esempio di martingala che non è mart. locale

(2) $X^{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}}$ è martingala UI $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Proprietà</u>:
1. Una martingala UI è una martingala locale
2. Possiamo prendere i t.d.a. t.c. $T_n \uparrow +\infty$ ovunque

3. Se X é continuo la II propr. é equiv. a chiedere $X^{T_n} 1\!\!1_{\{T_n>0\}}$ mart. limitata

4. Se $X_0=0 \Rightarrow X^{T_n} 1\!\!1_{\{T_n>0\}} = X^{T_n}$ $\left(X^{T_n} 1\!\!1_{\{T_n>0\}} = \begin{cases} X^{T_n}, & T_n>0 \\ 0, & T_n=0 \end{cases} \right.$ ma se $T_n=0 \Rightarrow$
$X^{T_n} = X_0 = 0$ e si ha comunque l'uguaglianza$)$

5. Se X mart. locale allora anche $X-X_0$ lo é con gli stessi t.d.a.

6. B_t MB std. é una martingala locale con t.d.a. $T_n=n$

7. M,N mart. locali $\Rightarrow M+N$ mart. locale

Prop.: Se X é martingala locale limitata $\Rightarrow X$ é una martingala limitata.

Prop.: Se X é una martingala locale positiva $\Rightarrow X$ é una supermartingala positiva.

Teorema: Se M é una martingala locale continua, allora $\exists!$ processo $\langle M \rangle$ adattato, continuo, crescente e nullo in 0 t.c. $M^2 - \langle M \rangle$ é mart. locale continua. Inoltre $\forall t \geq 0$, presa $(\Delta_n)_n$ succ. di part. finite di $[0,t]$ si ha: $\sup_{0\leq s\leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M \rangle_s| \xrightarrow{P} 0$ per $|\Delta_n| \longrightarrow 0$. Il processo $\langle M \rangle$ é detto variazione quadratica di M

Prop.: M mart. locale continua nulla in $0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[M_t^2] \leq \mathbb{E}[\langle M \rangle_t]}$

Teorema (Covariazione quadratica): Date M,N due martingale locali continue, $\exists!$ un unico processo $\langle M,N \rangle$ adattato, continuo, nullo in 0, a variazione finita t.c. $MN - \langle M,N \rangle$ é una martingala locale continua. Inoltre $\forall t \geq 0$, presa succ. $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di part. $= \{0 = t_0^{(n)} < \dots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ di partizioni finite di $[0,t]$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \left(M_{t_i^{(n)}} - M_{t_{i-1}^{(n)}}\right)\left(N_{t_i^{(n)}} - N_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M,N \rangle_t$$

per $|\Delta_n| \longrightarrow 0$. Il processo $\langle M,N \rangle$ é detto covar. quadratica di M ed N.

Oss.: $\langle M,M \rangle$ coincide con $\langle M \rangle$ dell'altro teorema (nelle hp. cioé continua)

Identità di polarizzazione: M,N mart. locali continue: $\langle M,N \rangle = \dfrac{\langle M+N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle}{2}$

$\boxed{N = N_0 \text{ costante} \Rightarrow \langle M,N \rangle = 0}$

$\boxed{M \text{ mart. loc. continua}, \ \langle M \rangle = 0 \iff M \text{ costante}}$

$\boxed{M, N \text{ mart. loc. continue} \Rightarrow MN \text{ mart. locale continue}}$

$\boxed{M, N \text{ mart. loc. continue indip.} \Rightarrow \langle M+N \rangle = \langle M \rangle + \langle N \rangle}$

$\boxed{M, N \text{ mart. locali continue ind.} \Rightarrow \langle M, N \rangle = 0}$

↓

$\boxed{B \text{ MB std } d\text{-dim.} \Rightarrow \langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij} t \quad \forall \geq 0}$

<u>Lemma:</u> N mart. locale continua, T t.d.a. e ξ v.a. $\mathcal{F}_T$-mis. $\Rightarrow \xi(N - N^T)$ mart. locale continua

<u>Prop.</u>: T t.d.a., M e N mart. loc. continue $\Rightarrow \langle M, N \rangle^T = \langle M, N^T \rangle = \langle M^T, N \rangle$.

↓

<u>Corollario</u>: M, N mart. loc. continue e $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.d.a. t.c. $S_n \uparrow +\infty \Rightarrow \langle M, N \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle M, N^{S_n} \rangle$.

<u>Semimartingala continua</u>: Una $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ - semimartingala continua é un processo X t.c. $X = M + A$ con M una $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingala locale continua e A un processo continuo variazione finita e adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. La decomposizione é unica a meno di una funzione $\mathcal{F}_0$-misurabile.

<u>Prop.</u>: $X = M + A$ semimart. continua $\Rightarrow$ X var. quadr. finita con $\langle X \rangle = \langle M \rangle$

<u>Corollario</u>: A processo continuo a var. finita $\Rightarrow \langle A \rangle = 0$.

<u>Covariazione quadratica di semimartingale continue</u>: $X = M + A$, $Y = N + B$ sono due semimartingale continue, la covariazione quadratica é definita come $\langle X, Y \rangle := \langle M, N \rangle$.

↓

<u>Oss.</u>: $X = M + A$, $Y = B$ continuo a variazione finita $\Rightarrow \langle X, Y \rangle = 0$.

<u>Oss.</u>: data una semimartingala continua la sua variazione quadratica non cambia se cambiamo filtrazione o probabilitá $\mathbb{P}$. Chiaramente cambiando filtrazione potremmo perdere l'adattabilitá. Se peró $\mathcal{F}_t$ é continua a dx e ne faccio il completamento rispetto a $\mathbb{P}$, $(\mathcal{F}_{\mathbb{P}})_t$, allora la sua variazione quadratica, a meno di indistinguibilitá, puó essere presa adattata sia alla filtrazione completa e non.

<u>Spazi $\mathbb{H}^2$, H^2 e H_0^2</u>: $\mathbb{H}^2 := \{ M \mid M \text{ Martingala e } \overbrace{\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < +\infty}^{\text{limitata in } L^2(\mathbb{P})} \} /_{\sim \text{indisting.}}$

$H^2 := \{ M \in \mathbb{H}^2 \mid M \text{ ha rappresentante continuo} \}$

$H_0^2 = \{ M \in \mathbb{H}^2 \mid M \text{ ha rappresentante continuo e nullo in } 0 \}$.

Esempi: • il moto browniano non è in $\mathbb{H}^2$ ma arrestato ai t.d.a. $T_n = n$ lo diventa

• le martingale limitate sono in $\mathbb{H}^2$.

Lemma: $M \in \mathbb{H}^2$ e M_∞ il limite puntuale $\mathbb{P}$.q.c. Vale che $M_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P) \subseteq L^2(\mathbb{P})$ e converge in $L^2(P)$.

Inoltre $\Phi : \mathbb{H}^2 \longrightarrow L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ t.c. $\Phi(M) = M_\infty$ é isomorfismo lineare.

Teorema: $\mathbb{H}^2$ é uno sp. di Hilbert con prodotto scalare $\langle M, N \rangle_{\mathbb{H}^2} = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}[M_t N_t]$ $\forall M, N \in \mathbb{H}^2$ che

induce la norma $\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \|M_\infty\|_{L^2(P)}$. Inoltre H^2 é ssp. lineare chiuso di $(\mathbb{H}^2, \|\cdot\|_{\mathbb{H}^2})$.

Prop.: Una martingala locale continua M é in $\mathbb{H}^2$ $\iff \begin{cases} M_0 \in L^2(\mathbb{P}) \\ \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] < +\infty \end{cases}$

In tal caso M é martingala continua, $\langle M \rangle$ é $\mathbb{P}$-q.c. limitato, $M^2 - \langle M \rangle$ é martingala UI e

vale $\|M\|^2_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty]$.

$\downarrow$

Corollario: M mart. locale continua, allora $\exists$ v.a. M_∞ t.c. $M_t \longrightarrow M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. su $\{\langle M \rangle_\infty < +\infty\}$.

Prop.: $M_t \in H^2 \Rightarrow$ unif. integrabile.

Integrale stocastico rispetto a martingale

Processo misurabile: H pr. stocastico è detto misurabile se la mappa $\Omega \times [0,\infty) \longmapsto H_t(\omega)$ è $\mathcal{F}_\infty \times \mathcal{B}([0,\infty))$-mis.

Processo elementare: $K = K_{-1} \mathbb{1}_{\{0\}} + K_0 \mathbb{1}_{(0,t_1]} + \dots + K_{n-1} \mathbb{1}_{(t_{n-1}, t_n]}$ in cui $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \dots < t_n < +\infty$,

K_{-1} v.a. $\mathcal{F}_0$-mis. lim. e K_i v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mis. lim. $\forall i$. $\mathcal{E} := \{\text{processi elementari}\}$.

Lemma: Siano A processo a variazione finita, $p \geq 1$, H un processo misurabile e t.c. $H(\omega) \in L^p([0,\infty), dA(\omega))$ $\mathbb{P}$-q.c. (ad es. H limitato) e $t \geq 0$. Definiamo i processi elementari: $H^{(n)} := \sum_{i=0}^{n-1} H_i^{(n)} \mathbb{1}_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})}$

in cui $\{0 = t_0^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t\}$ sono i punti in $[0,t]$ t.c. $t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} = \frac{t}{n}$ $\forall i$ e

ben def. perché A var. finita

$$H_i^{(n)} := \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \dfrac{1}{A_{t_i^{(n)}} - A_{t_{i-1}^{(n)}}} \displaystyle\int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} H_s \, dA_s = \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} H_s \, dA_s & , i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Allora $\forall p \in [1, +\infty)$, $\forall t \geq 0$, vale:

$$\int_0^t |H_s^{(n)} - H_s|^p \, dA_s \longrightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-q.c. per } n \longrightarrow +\infty.$$

Prop.: M, N mart. locali continue, H e K pr. misurabili, allora $\forall t \in [0, +\infty]$ vale $\mathbb{P}$-q.c. la dis.:

vale anche se metto $d\,\mathrm{Var}(M,N)$

$$\boxed{\int_0^t |H_s| |K_s| \, d\langle M, N\rangle_s \leq \left[\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t K_s^2 \, d\langle N\rangle_s\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Dis. Kunita-Watanabe: hp. come sopra e p, q coniugati:

vale anche se metto $d\,\mathrm{Var}(M,N)$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s| |K_s| \, d\langle M, N\rangle_s\right] \leq \left\| \left(\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{P})} \cdot \left\| \left(\int_0^t K_s^2 \, d\langle N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\mathbb{P})}}$$

Spazio $L^2(M)$: Sia $M \in H^2$, poniamo $\mathcal{L}^2(M)$ lo sp. dei processi K t.c.:

① K progr. misurabile ② $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] < +\infty$

Sia $L^2(M) = \mathcal{L}^2(M) /_{\sim \text{indist.}}$

Oss.: • $K \sim K' \iff \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (K_s - K'_s)^2 \, d\langle M\rangle_s\right] = 0$

• $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}^2(M)$

• Se $M \in \mathbb{H}^2$ (come è da def.), $\mathcal{L}^2(M)$ è di Hilbert con $\langle H, M\rangle_{\mathcal{L}^2(M)} := \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s H_s \, d\langle M\rangle_s\right]$.

Notazione: $(K \cdot A)_t := \int_0^t K_s \, dA_s$

<u>Teorema di $\exists$ e !</u> : Sia $M \in H^2$, $\forall K \in L^2(M)$ $\exists!$ elemento di H_0^2, denotato con $K \cdot M$, t.c.

<u>dell'integrale stocastico</u>

$$\boxed{\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle \quad \forall N \in H^2}$$

<u>per martingale in H^2</u>

<u>Notazione</u> : $(K \cdot M)_t := \int_0^t K_s dM_s \quad \forall t \in [0, +\infty)$

<u>Oss.</u> : $\boxed{K \cdot M = K \cdot (M - M_0)}$ (per unicità)

<u>Teorema di Isometria di Itô</u>: $M \in H^2$, $L^2(M) \ni K \longmapsto K \cdot M \in H_0^2$ é isometrica, vale allora:

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, d\langle M \rangle_s\right]}$$

<u>Corollario</u> : $M \in H^2$, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(M)$ e $K \in L^2(M)$. Se $K_n \longrightarrow K$ in $L^2(M)$ allora

$\boxed{K_n \cdot K \longrightarrow K \cdot M}$ in H_0^2.

<u>Prop.</u> : $M \in H^2$, $K \in L^2(M)$, $H \in L^2(K \cdot M)$, allora $HK \in L^2(M)$ e : $\boxed{(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)}$

<u>Prop.</u> : $M \in H^2$ e T t.d.a., allora $1_{[0,T]} \in L^2(M)$ e vale: $\boxed{M^T = 1_{[0,T]} \cdot M = 1_{[0,T)} \cdot M}$

<u>Corollario</u> : $M \in H^2$, T t.d.a. e $K \in L^2(M)$. Allora: $\boxed{(K \cdot M)^T = (K 1_{[0,T]} \cdot M) = K \cdot M^T = K^T \cdot M^T}$

Integrale stocastico rispetto a martingale locali continue

Oss.: un processo in H^2 è una martingala UI e dunque martingala locale continua. Proviamo a estendere, quindi, la nozione di integrale stocastico.

Spazi $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$, $L^2_{loc}(M)$: Se M è una martingala locale continua, chiameremo $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$ la famiglia dei processi K t.c.:

1. K è pr. misurabile;
2. $\exists$ t.d.a. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $T_n \uparrow \infty$ t.c. $K^{T_n} \in \mathcal{L}^2(M)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ossia:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} K_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La 2 è equiv. a $\int_0^t K_s^2 \, d\langle M\rangle_s < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall t \geq 0$.

$$L^2_{loc}(M) := \mathcal{L}^2_{loc}(M) / \sim_{indist.}$$

Teorema di $\exists$ e ! dell'integrale stocastico rispetto mart. loc. continue: M mart. locale continua, $K \in L^2_{loc}(M)$, allora $\exists!$ martingala locale continua $K\cdot M$, nulla in 0 e t.c. $\forall N$ martingala locale continua:

$$\boxed{\langle K\cdot M, N\rangle = K\cdot\langle M, N\rangle}$$

Prop.: M mart. loc. continua e $K \in \mathcal{E}$ $\left(K = K_{-1}\mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} K_i \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}\right)$. Allora $\forall t \geq 0$, preso $t_{n_t} := \sup\{t_i \mid i = 0, \dots, n-1 \ \ t_i \leq t\}$, vale:

$$(K\cdot M)_t = \sum_{i=0}^{n_t - 1} K_i \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right) + K_{n_t}\left(M_t - M_{t_{n_t}}\right).$$

Prop.: M mart. locale continua e $K \in L^2_{loc}(M)$ allora $\forall t \in [0, +\infty]$ vale:

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s \, dM_s\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right]}$$

Prop.: M mart. loc. continua, $K \in L^2_{loc}(M)$ e $H \in L^2_{loc}(K\cdot M)$, allora $HK \in L^2_{loc}(M)$ e:

$$\boxed{(HK)\cdot M = H\cdot(K\cdot M)}$$

Prop.: Sia M una martingala locale continua e T t.d.a., allora $\mathbb{1}_{[0,T]} \in L^2_{loc}(M)$ e vale:

$$\boxed{M^T = \mathbb{1}_{[0,T]}\cdot M = \mathbb{1}_{[0,T]}\cdot M}$$

Corollario: Siano M una martingala locale continua, T t.d.a. e $K \in L^2_{loc}(M)$. Allora:

$$\boxed{(K\cdot M)^T = \left(K\mathbb{1}_{[0,T]}\cdot M\right) = K\cdot M^T}$$

Integrale stocastico rispetto a semimartingale continue

- **Processo localmente limitato**: Un processo K é detto localmente limitato se $\exists (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists C_n>0$ t.c.: $|K^{T_n}|\le C_n$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n\in\mathbb{N}$

Oss.: ogni processo continuo é localmente limitato.

Integrale stocastico di Itô rispetto a semimart. continue: Se $X=M+A$ é una semimartingala continua e K é un processo stocastico e progressivamente mis. e loc. limitato, poniamo:

$$\boxed{K\cdot X = K\cdot M + K\cdot A}$$

ben def. perché $K\in L^2_{loc}(M)$ — ben def. perché loc. limitatezza

Proprietà: Siano K, H due processi progr. misurabili e loc. limitati, $X=M^X+A^X$ $Y=M^Y+A^Y$ due semimart. continue. Allora:

1. $K\cdot(X+Y)=K\cdot X+K\cdot Y$
2. $(K+H)\cdot X = K\cdot X + H\cdot X$
3. $(KH)\cdot X = K\cdot(H\cdot X)$
4. α v.a. $\mathcal{F}_0$-mis. e limitata allora $(\alpha K)\cdot X = \alpha(K\cdot X)$
5. $(K\cdot X)^T = (K\mathbb{1}_{[0,T]})\cdot X = K\cdot X^T$
6. $K\cdot X$ é semimart. continua con decomp. $K\cdot X = K\cdot M + K\cdot A$
7. $\langle K\cdot X, H\cdot Y\rangle = \langle K\cdot M^X, H\cdot M^Y\rangle = (KH)\cdot\langle M^X, M^Y\rangle = (HK)\cdot\langle X,Y\rangle$

Teorema di convergenza dominata stocastica: X semimart. continua, $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ succ. di processi progr. mis. e K^∞ processo progr. misurabile t.c. $\exists$ t.d.a. $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ t.c. $T_m\uparrow\infty$ e $\forall m\in\mathbb{N}$ $\exists C_m>0$ t.c.: $|(K^n)^{T_m}|\le C_m$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall m,n\in\mathbb{N}$.

Inoltre supponiamo che $K^n\longrightarrow K^\infty$ puntualmente. Allora $K^n\cdot X\longrightarrow K^\infty\cdot X$ uniformemente su ogni intervallo limitato in probabilità, cioé $\forall t\ge 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |(K^n\cdot X)_s - (K^\infty\cdot X)_s| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad \forall\varepsilon>0$$

Oss.: le hp. del teorema sono verificate se $(K^n)_n$ é t.c. $\exists H$ processo non negat. e loc. limitato t.c. $|K^n|\le H$ $\forall n$.

Corollario: K processo continuo (serve solo perché $K^n\to K$ puntualmente), progr. mis. e localmente limitato, X semimart. continua e $t\ge 0$. Sia inoltre $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. di partizioni finite di $[0,t]$ t.c. $|\Delta_n|\to 0$. Allora se $\forall n\in\mathbb{N}$ é $\Delta^{(n)}=\{0=t_0^{(n)}<\dots<t_{k_n}^{(n)}\}$, vale:

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} K_{t_i^{(n)}}\left(X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \int_0^t K_s\,dX_s = (K\cdot X)_t$$

Formula di Itô

Integrazione per parti stocastica: X, Y semimartingale continue, allora $\forall t \geq 0$:

$$\boxed{X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \langle X, Y \rangle_t}$$

$$\boxed{d(X_t Y_t) = X_t \, dY_t + Y_t \, dX_t + d\langle X, Y \rangle_t}$$

Oss.: $\boxed{\int_0^t X_s \, dX_s = \frac{X_t^2 - \langle X \rangle_t}{2}}$

Formula di Itô: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $X = (X^i)^{i=1,\dots,d}$ una semimart. vettoriale continua a valori in Ω e $F \in C^2(\Omega)$. Allora $F(X)$ è una semimart. continua e:

$$\boxed{F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} F(X_s) \, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} F(X_s) \, d\langle X^i, X^j \rangle_s}$$

$$\boxed{dF(X_t) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} F(X_t) \, dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \partial_{x_j} F(X_t) \, d\langle X^i, X^j \rangle_t}$$

Oss. Se, ad esempio, le componenti di X sono a var. finita $\Rightarrow$ i processi di covariazione sono nulli quindi basta meno regolarità.

Oss. Possiamo estendere a F vettoriale componente per componente.

Esponenziale stocastico di Doleans-Dade: M mart. locale continua, definiamo il suo "—" il processo:

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t\right)$$

È una martingala locale continua per prop. seguente con $\lambda = 1$

Corollario: Sia $F : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ t.c. $\partial_x F$, $\partial_y F$, $\partial_x^2 F$ esistono continue e sia M una martingala locale continua. Allora il processo $F(M, \langle M \rangle)$ è una martingala locale continua complessa qualora $\partial_y F + \frac{1}{2} \partial_x^2 F = 0$. In particolare $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ il processo:

$$\left(\mathcal{E}^\lambda(M)\right)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t\right)$$

è una martingala locale continua complessa.

↓

Prop.: $\mathcal{E}(M)_t$ è l'unica soluzione a meno di indistinguibilità dell'eq. diff. stocastica $d\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_t \, dM_t$ con $\mathcal{E}(M)_0 = \exp(M_0)$.

Corollario: Sia $f \in L^2([0,+\infty), \mathcal{L}^1)$, B un $(\mathcal{F}_t)$-MB std e $\forall t \geq 0$ sia $M_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$. Allora:

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(\int_0^t f(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds \right) \quad \forall t \geq 0$$

è una martingala in H^2.

Corollario: $B = (B^i)^{i=1,\dots,d}$ un $(\mathcal{F}_t)$-MB^d std e $f \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$, allora vale:

$$f(B_t, t) = f(0,0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x_i} f(B_s, s)\, dB_s^i + \int_0^t \left(\partial_t f(B_s,s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i} f(B_s,s) \right) ds$$

da cui segue che $\forall t \geq 0$:

$$M_t^f := f(B_t, t) - \int_0^t \left(\partial_t f(B_s,s) + \frac{1}{2}\Delta f(B_s,s) \right) ds$$

è una martingala locale continua.

Corollario: Sia $B = (B^i)^{i=1,\dots,d}$ un $(\mathcal{F}_t)$-MB^d std e $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (non dipende dal tempo ora) armonica, allora $f(B)$ è una martingala locale continua.

Lemma: Sia Y v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{E}$ una σ-algebra. Se $\forall A \in \mathcal{E}$ vale:

$$\mathbb{E}\left[\exp(i\lambda Y) \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{E}\left[\exp(i\lambda Y)\right] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d$$

allora Y è indipendente da $\mathcal{E}$.

Teorema di caratterizzazione del MB di Lèvy: Sia $x \in \mathbb{R}^d$ e sia X un processo adattato a valori in $\mathbb{R}^d$ t.c. $\mathbb{P}$-q.c. $X_0 = x$.

Sono equivalenti:

1. X è un $(\mathcal{F}_t)$-MB^d che parte da x.
2. X è una martingala locale vettoriale continua e $\langle X^i, X^j \rangle = \delta_{ij}\, t \quad \forall t \geq 0\ \forall i,j$.
3. X è una semimart. vettoriale continua e $\forall f_1, \dots, f_d \in L^2([0,\infty), \mathcal{L}^1)$ se $f = (f_1, \dots, f_d)$, il processo:

$$\mathcal{E}_t^{if} = \exp\left(i \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(s)\, dX_s^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(s)^2 ds \right) \quad \forall t \geq 0$$

è una mart. continua limitata a valori in $\mathbb{C}$ (nel senso che parte reale e parte immag. sono martingale continue e limitate).

Corollario: Un processo X è una martingala locale continua nulla in 0 con $\langle X \rangle_t = t \quad \forall t \geq 0 \iff X$ è un $(\mathcal{F}_t)$-MB std.

Disuguaglianze di BDG: $\forall p \in (0,+\infty)$ $\exists$ due costanti $c_p, C_p > 0$ t.c. $\forall$ martingala locale continua M nulla in 0 vale:

$$\boxed{c_p \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \le \mathbb{E}\left[\sup_{t \ge 0} |M_t|^p\right] \le C_p \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right]}$$

Corollario: $\forall p \in (0,+\infty)$ $\exists$ due costanti $c_p, C_p > 0$ t.c. $\forall$ martingala locale continua M nulla in 0 vale:

$$\boxed{c_p \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \le \mathbb{E}\left[\sup_{t \le T} |M_t|^p\right] \le C_p \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]}$$

Processi di Markov

Nucleo di transizione: N è un nucleo di trans. su $(E,\mathcal{E})$ sp. mis. se $N: E\times\mathcal{E} \to [0,+\infty)$ t.c.

1. $\forall x\in E$ $\quad \mathcal{E}\ni A \longmapsto N(x,A)$ è una misura
2. $\forall A\in\mathcal{E}$ $\quad E\ni x \longmapsto N(x,A)$ è $\mathcal{E}$-mis.

Se $N(x,E)=1$ $\forall x\in E$ è mark. (di prob), se $N(x,E)\leq 1$ submark.

Notazione: • $Nf(x) := \int_E f(y)\, dN(x,y)$ $\quad$ ($dN(x,\cdot)$ è la misura) $\Rightarrow Nf\in\mathcal{E}^+$ se $f\in\mathcal{E}^+$ (famiglia funzioni reali $\mathcal{E}$-mis. non neg.). Dunque $N:\mathcal{E}^+\to\mathcal{E}^+$ è un'operatore lineare.

In particolare $f=\mathbb{1}_A$ con $A\in\mathcal{E}$ $\Rightarrow Nf(x) := N(x,A)$

• M, N come prima $\Rightarrow MN:\mathcal{E}^+\longrightarrow\mathcal{E}^+$ e $\quad MNf(x) := \int_E\int_E f(z)\, dN(y,z)\, dM(x,y)$

Funzione di transizione: Una famiglia $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ di nuclei (sub)mark di transizione su $(E,\mathcal{E})$ è funzione di trans. (sub)mark. se vale la condizione di Chapman-Kolmogorov:

$$\forall x \quad P_{s,t}(x,A) = \int_E P_{s,r}(y,A)\, dP_{r,t}(x,y) \quad \forall s,r,t\in I,\ s\leq r\leq t \quad \forall A\in\mathcal{E},$$

che per come abbiamo definito MN è proprio $\boxed{P_{s,t} = P_{r,t}\, P_{s,r}}$

Se inoltre $\forall s,t\in I$ vale $P_{s,t} = P_{0,t-s}$ allora $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ è <u>omogenee</u> e scriveremo P_t. Dunque C.K diventa $\boxed{P_{t+s} = P_t\, P_s \quad \forall s,t\geq 0}$

Processo di Markov: Siano $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ uno sp. di prob. filtrato, $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ una funzione di transizione su $(E,\mathcal{E})$, X un processo adattato a valori in $(E,\mathcal{E})$ e ν una misura su $(E,\mathcal{E})$. Se $\forall f\in\mathcal{E}_+$ e $\forall s,t\in I$, $s\leq t$ vale:

$$\mathbb{E}[f(X_t)\mid\mathcal{F}_s] = P_{s,t}\, F(X_s)$$

e $(X_0)_\#\mathbb{P}=\nu$, diremo che X è processo di Markov rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ e distribuzione iniziale ν.

Prop.: Siano $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ uno sp. di prob., X un processo a valori in $(E,\mathcal{E})$. Allora X è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale $\Leftrightarrow$ $\forall f\in\mathcal{E}_+$ e $\forall s,t\geq 0$, $s\leq t$ vale:

$$\mathbb{E}[f(X_t)\mid\mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}[f(X_t)\mid X_s]$$

Inoltre, in tal caso, la funzione di transizione è $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ t.c.:

$$P_{s,t} f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t) \mid X_s = x \right] \quad \forall x \in E$$

<u>Prop.</u>: Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. di prob., X processo a valori in $\mathbb{R}$ gaussiano centrato e $\Gamma : [0, +\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione di covarianza. Supponiamo $\Gamma(s,s) \neq 0 \ \forall s$. Vale che X è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale $\iff \forall u, s, t \geq 0$, $u < s < t$, vale: $\Gamma(u,t) = \dfrac{\Gamma(u,s)\Gamma(s,t)}{\Gamma(s,s)}$

<u>Prop.</u>: Un processo X a valori nello sp. misurabile $(E, \mathcal{E})$ è di Markov rispetto alla sua filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ con funzione di transizione $(P_{s,t})_{0\leq s\leq t}$ e distribuzione iniziale $\nu \iff \forall\, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ ed ogni $f_0, f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}_+$ vale:

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})\right] = \int_E f_0(x_0) \int_E f_1(x_1) \dots \int_E f_k(x_k)\, dP_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1}; x_k) \dots dP_{0,t_1}(x_0, x_1)\, d\nu(x_0)$$

<u>Spazio $C_0(E)$</u>: $C_0(E) = \left\{ f \in C(E) \mid \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \subset E \text{ compatto t.c. } \sup_{x \in K_\varepsilon^c} |f(x)| < \varepsilon \right\}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

<u>Semigruppo di Feller</u>: un semigruppo di Feller su $C_0(E)$ è una famiglia $(T_t)_{t\geq 0}$ di operatori lineari continui positivi (cioè se $f \geq 0 \Rightarrow Tf \geq 0$) t.c.:

1. $T_0 = id$ e $\|T\|_{op} \leq 1 \quad \forall t \geq 0$;
2. $T_{s+t} = T_s T_t \quad \forall s, t \geq 0$;
3. $\lim_{t\to 0} \|Tf - f\|_\infty = 0 \quad \forall f \in C_0(E)$

<u>Prop.</u>: Se $(T_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo di Feller ed $f \in C_0(E)$, la mappa $t \longrightarrow T_t f$ è continua

<u>Prop.</u>: Ad ogni semigruppo di Feller $(T_t)_{t\geq 0}$ possiamo associare un'unica funzione di transizione submarkoviana $(P_t)_{t\geq 0}$ t.c. $\forall f \in C_0(E)$, ogni $t \geq 0$ e ogni $x \in E$: $T_t f(x) = P_t f(x)$.

<u>Funzione di transizione di Feller</u>: Una funzione di transizione submarkoviana su E è detta di Feller se è associata ad un semigruppo di Feller di $C_0(E)$.

<u>Prop.</u>: Una funzione di transizione submarkoviana $(P_t)_{t\geq 0}$ su E è di Feller se e soltanto se:

1. $P_t f \in C_0(E) \ \forall f \in C_0(E)$
2. $\lim_{t\to 0^+} P_t f(x) = f(x) \quad \forall x \in E \ \forall f \in C_0(E)$

Processo di Feller: Un processo di Markov con funzione di transizione di Feller è detto processo di Feller.

Prop.: Ogni processo di Feller ammette una modificazione cadlag.

Legge 0-1 di Blumenthal: Sia X un processo di Feller rispetto alla sua filtrazione naturale a valori in E cadlag con distribuzione iniziale δ_x per un qualche $x \in E$. Allora $\forall A \in \mathcal{F}^X_{0^+}$ vale $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

Applicazioni al moto browniano: $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t \geq a\} = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$ t.d.a. e $S_t = \max_{s \leq t} B_s$. Allora:

- $\mathbb{P}(S_t > x) = 1$ e $\mathbb{P}\left(\max_{s \leq t} B_s > x, \min_{s \leq t} B_s < x\right) = 1$
- $\mathbb{P}\left(\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty\right) = \mathbb{P}\left(\liminf_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty\right) = 1$ ($\Rightarrow B$ non ammette limite q.c.)
- Sia $Z = \{t \geq 0 \mid B_t = x\}$, allora $\mathbb{P}$-q.c. Z è chiuso, senza punti isolati e illimitati. Inoltre $\mathbb{P}$-q.c. $\mathcal{L}^1(Z) = 0$, quindi in particolare ha parte interna vuota.
- (Principio di riflessione) $\forall a > 0$ $\forall t \geq 0$ vale $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(T_a \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$. In particolare S e $|B|$ hanno la stessa legge.

Caso discreto: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Markov $\iff \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$

- È omogeneo se $\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_1 = x_n \mid X_0 = x_{n-1})$ (non dipende da n).

Equazioni differenziali stocastiche

Equazione differenziale stocastica: $dX_t = g(t,X)\,dt + f(t,X)\,dB_t$ (f,g con le giuste hp.)

$$\left.\begin{array}{l} dX_t = g(t,X)\,dt + f(t,X)\,dB_t \\ X_t = X_0 + \int_0^t g_i(s,X)\,ds + \int_0^t f(s,X)\,dB_s \end{array}\right] =: e(f,g)$$

N.B. data una soluzione dell'eq. differenziale $\Rightarrow$ è una semimartingala vettoriale continua.

Unicità per traiettorie / unicità in legge: Diciamo che $e(f,g)$ gode di:

- unicità per traiettorie se $\forall$ spazio filtrato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ e $\forall B$ $(\mathcal{F}_t)$-MB^n, se (X,B) e $(\tilde{X}, B)$ sono sol. di $e(f,g)$ con $X_0 = \tilde{X}_0$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow X = \tilde{X}$
- unicità in legge se prese comunque due sol. (X,B), $(\tilde{X}, \tilde{B})$ di $e(f,g)$ (anche def. su sp. di prob. differenti) con $X_0 \overset{D}{=} \tilde{X}_0 \Rightarrow X \overset{D}{=} \tilde{X}$

Soluzione forte: Se la sol. X è adattata a $\mathcal{F}_t^{\,r,B}$ filtrazione naturale completata rispetto a $\mathbb{P}$.

Teorema di Yamada-Watanabe: Fissiamo $e(f,g)$. Se vale l'unicità per traiettorie allora vale anche l'unicità in legge e ogni sol. del problema con condizione iniziale deterministica $X_0 = x \in \mathbb{R}$ è $\mathbb{P}$-q.c. sol. forte.

Ipotesi IL: Data $e(f,g)$ diciamo che f,g soddisfano le hp. (IL) se $\exists$ un $K>0$ t.c.:

$$\|f(t,\varepsilon) - f(t,\eta)\| + \|g(t,\varepsilon) - g(t,\eta)\| \leq K \sup_{s\in[0,t]} \|\varepsilon(s) - \eta(s)\| \quad \forall \varepsilon,\eta \in \mathbb{R}^d \ \forall t\geq 0$$

e se $\forall x \in \mathbb{R}^d$, indicando con $\varepsilon^x \in W^d$ la funzione costante in x, vale $t \longrightarrow f(t,\varepsilon^x)$ e $t \longrightarrow g(t, \varepsilon^x)$ sono loc. limitate.

Lemma di Gronwall: $\varepsilon, \eta: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabili e $C\geq 0$ t.c. $\varepsilon(t) \leq \eta(t) + C\int_0^t \varepsilon(s)\,ds$ $\forall t\in[0,T]$ $\Rightarrow$ $\varepsilon(t) \leq C\int_0^t e^{C(t-s)}\eta(s)\,ds$ $\forall t\in[0,T]$.

In particolare se $\eta(t) = K$ costante $\Rightarrow$ $\varepsilon(t) \leq K e^{Ct}$ $\forall t \in [0,T]$.

Teorema di $\exists$ e ! per EDS con cond. iniziale deterministica: $x\in\mathbb{R}^d$ e $e_x(f,g)$ e supponiamo che valgano le hp. IL. Allora $\forall$ spazio filtrato con hp. abituali e $\forall B$ $(\mathcal{F}_t)$-MB^d std, $\exists X^x$ t.c. (X^x, B) sol. forte di $e_x(f,g)$. Inoltre è unica a meno di indistinguibilità.

Ipotesi ILb: hp IL + f,g unif. limitate

Prop.: nelle hp. ILb, fissato $e(f,g)$ e un moto browniano, la mappa $(t,x) \longmapsto X_t^x$ dove X_t^x

é la sol. di $e(f,g)$ con dato iniziale $x \in \mathbb{R}^d$ é continua.

__Prop.__: nelle hp. precedenti, ponendo $T_t h(x) := \mathbb{E}[h(X_t^x)]$ $\forall h \in C_0(\mathbb{R}^d)$ si ha una mappa lineare e continua da $C_0(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$.

__EDS__: Una EDS é detta lineare se puó essere scritta nella forma:

$$dY_t = dH_t + Y_t\, dX_t \,, \quad Y_0 = H_0 \quad \text{o equivalentemente}$$

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_s\, dX_s \quad \text{con } H \text{ e } X \text{ due semimartingale continue.}$$

__Soluzione per EDS__: data una EDS lineare $dY_t = dH_t + Y_t\, dX_t$, $Y_0 = H_0$, questa ha come soluzione il processo $Y_t = \mathcal{E}(t)\left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(t)_s^{-1}\,(dH_s - d\langle H, X\rangle_s)\right)$

con $\mathcal{E}(X)$ esponentiale stocastico.

__Corollario__: Consideriamo una EDS del tipo: $dY_t = a(t)\, Y_t\, dt + b(t)\, dB_t$, $X_0 = x$

con B un MB std, Y_t processo a valori reali e $a,b : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue.

Allora la sol. Y é data da: $Y_t = e^{\int_0^t a(s)ds}\left(x + \int_0^t e^{-\int_0^s a(r)dr}\, dB_s\right)$.

$\hookrightarrow$ __Esempi__:
- __Ornstein – Uhlenbeck__: $dV_t = -\beta V_t\, dt + \sigma\, dB_t$, $V_0 = v$ dove B é MB std., $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ e $v \in \mathbb{R}$. In questo caso $H_t = \sigma B_t + v$ e $X_t = -\beta$ e dunque

$$V_t = e^{-\beta t}\left(v + \int_0^t e^{\beta s} \sigma\, dB_s\right) = e^{-\beta t} v + \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \sigma\, dB_s$$

é gaussiano e di Feller con generatore infinitesimale $Ah(x) = -\beta x\, \partial_x h(x) + \frac{\sigma}{2} \partial_x^2 h(x)$.

- __Moto browniano geometrico__: $dG_t = \mu G_t\, dt + \sigma G_t\, dB_t$ $G_0 = x$ $(H_t = 0$ e $X_t = \mu t + \sigma B_t)$

la cui sol. é $G_t = G_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} t\right) + \sigma B_t\right) = G_0\, \mathcal{E}(\mu t + \sigma B_t)$ che é ancora di Feller con generatore infinitesimale per $h \in C_c^2(\mathbb{R})$ dato da:

$$Ah(x) = \mu x\, \partial_x h(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_x^2 h(x)$$