S

I

T

P

R

O

B

NOZIONI PRELIMINARI DAL CORSO DI "PROBABILITÀ"

Nozioni di base di misura

<u>σ-algebra</u>: Ω insieme, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è σ-algebra se: • $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$ • $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ • chiusa per unione num.

<u>$\sigma(I)$</u>: σ-algebra generata da $I \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

<u>Teorema</u> (classi monotone): $I \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ stabile per $\cap$ e t.c. $\Omega \in I$. Sia $M \supseteq I$ la più piccola famiglia di parti contenente I t.c.: • M stabile per unione numerabile crescente

• M stabile per differenza $(A, B \in M, B \subseteq A \Rightarrow A \setminus B \in M)$

Allora $M = \sigma(I)$.

<u>Misura</u>: $\mathcal{F}$ σ-algebra di Ω, $m: \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ σ-additiva $\left((A_n)_{n \geq 1},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ n \neq m \Rightarrow m\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n m(A_n)\right)$ è detta misura. Se $\exists (A_n)_n$ t.c. $\bigcup_n A_n = \Omega$ e $m(A_n) < +\infty$ $\forall n$ è detta σ-finita. Se $m(\Omega) < +\infty$ è detta finita. Se $m(\Omega) = 1$ è detta <u>probabilità</u>.

<u>Corollario</u> (classi monotone): I famiglia stabile per $\cap$. Se $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ sono 2 probabilità su $\sigma(I)$ t.c. $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ $\forall A \in I \Rightarrow \mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2$.

<u>σ-algebra prodotto</u>: $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ due spazi misurabili, si chiama σ-algebra prodotto $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ la σ-algebra su $E \times F$ generata dai rettangoli $A \times B$ con $A \in \mathcal{E}$ e $B \in \mathcal{F}$.

<u>Corollario</u> (classi monotone): Se $C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, $\forall x \in E$ la sezione $C_x = \{y \in F \mid (x,y) \in C\} \in \mathcal{F}$, uguale per C_y.

<u>Teorema</u> (di prolungamento): Sia $\mathbb{P}$ una funzione σ-additiva definita su un'algebra $\mathcal{A}$ di parti di Ω t.c. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. $\mathbb{P}$ si prolunga (in un solo modo) alla σ-algebra $\mathcal{F}$ generata da $\mathcal{A}$.

Integrazione v.a. reali

<u>Variabile aleatoria</u>: $X: (\Omega, \mathcal{F}, \underset{\text{misura finita (anche } \sigma\text{-finita)}}{m}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ misurabile $(X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{E})$ è detta v.a.

Se $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ è detta v.a. reale. È detta semplice se può essere scritta come $X = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$.

<u>Integrale</u>: • $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ v.a.r. semplice. $\int_\Omega X(\omega)\, dm(\omega) =: \int X\, d\mathbb{P} := \sum_{i=1}^{n} a_i\, m(A_i)$.

• Sia X una v.a. a valori positivi, allora $\exists$ una successione di v.a. semplici $(X_n)_n$ (a valori positivi) t.c. $X_n \uparrow X$. Dunque poniamo $\int X\, dm := \lim_{n \to +\infty} \int X_n\, dm$.

• X è detta integrabile se $\int |X|\, dP = \int X^+ dm + \int X^- dm < +\infty$ e si pone $\int X\, dm = \int X^+ dm - \int X^- dm$.

<u>Proprietà integrale</u>: 1 lineare 2 $X \geq 0$, $\int X\, dm = 0 \iff X = 0$ q.c. 3 $\int_A X\, dm = \int_A Y\, dm$ $\forall A \in \mathcal{F} \iff X = Y$ q.c.

Teorema (di Beppo-Levi): Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. non negative: se $X_n \uparrow X \Rightarrow \int X_n \, dm \uparrow \int X \, dm$

Teorema (Fatou): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. non negative: $\int \liminf_{n\to+\infty} X_n \, dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int X_n \, dm$

Teorema (della convergenza dominata): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.r. e supponiamo converga puntualmente ad X e che $\exists$ v.a. integrabile Y t.c. $|X_n| \leq Y$, allora: $\lim_{n\to+\infty} \int X_n \, dm = \int X \, dm$.

Legge di Probabilità di v.a.r.: X v.a.r. su sp. di probabilità. Posso portare in avanti la probabilità tramite X: $\mathbb{P}_X(A) =: \mathbb{P}_{\#}(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Formula integrazione rispetto a prob. immagine: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliana: $\int_\Omega \varphi(X(\omega)) \, d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$.

Valore atteso: X v.a.r. integr., $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega)$

Disuguaglianza di Jensen: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, X e $\varphi(X)$ integr. allora $\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X])$.

Misura definita da una densità e teorema di Radon-Nikodym

Setting: μ misura σ-finita su $(E, \mathcal{E})$ e $f : E \to [0, +\infty]$ misurabile e a valori positivi.

Misura definita da densità: $\nu(A) = \int_A f(x) \, d\mu(x) \quad \forall A \in \mathcal{E} \quad (\nu := f.\mu)$

Proprietà: • ν è σ-finita $\Leftrightarrow f(x) < +\infty \ \tilde{\forall} x$ • ν è finita $\Leftrightarrow f$ è integrabile • ν è prob. $\Leftrightarrow \int_E f \, d\mu = 1$

Formula int. rispetto misura def. da densità: ν σ-finita e $\varphi : E \to \mathbb{R}$ misurabile, allora:

$$\int_E \varphi(s) \, d\nu(s) = \int_E \varphi(x) \, f(x) \, d\mu(x).$$

Assoluta continuità: μ, ν misure σ-finite: ν è ass. cont. rispetto a μ se ogni insieme μ-trasc. è anche ν-trasc. $(\nu \ll \mu)$. Osserviamo che se $\nu = f.\mu \Rightarrow \nu \ll \mu$.

Equivalenza tra densità: $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = f_2 \ \tilde{\forall} x$. Notazione $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ (indica una classe di eq.).

Teorema (Radon-Nikodym): Siano μ, ν σ-finite e supponiamo $\mu \ll \nu$: allora $\exists f$ densità t.c. $\nu(A) = \int_A f(x) \, d\mu(x)$.

Misure equivalenti: $\mu \sim \nu \Leftrightarrow \mu \ll \nu \wedge \nu \ll \mu$.

Proprietà: • Se $\nu \ll \mu$ allora $\nu \sim \mu \Leftrightarrow f = \frac{d\nu}{d\mu}$ è strett. positiva q.o. $\left(\text{e } \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{1}{f}\right)$

• Se $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \sigma \Rightarrow \nu \ll \sigma$ e $\frac{d\nu}{d\sigma} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\sigma}$

Proposizione: Se $\mathbb{P}$ è una probabilità e μ una misura σ-finita, la condizione $\mathbb{P} \ll \mu$ è equivalente a:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \mu(A) < \delta \implies \mathbb{P}(A) < \varepsilon.$

<u>Prop.</u>: Una misura σ-finita su $(E, \mathcal{E})$ é equivalente a una probabilità.

<u>Misura portata</u>: μ misura σ-finita e' portata da $A \in \mathcal{E}$ se $\mu(A^c) = 0$. $\Big(\iff \mu(B) = \mu(A \cap B) \ \forall B \in \mathcal{E}$

$\iff \mu = \mathbb{1}_A \cdot \mu \Big)$

<u>Misure ortogonali</u>: μ, ν σ-finite su $(E, \mathcal{E})$ sono ortogonali se $\exists A \in \mathcal{E}$ t.c. μ é portata da A e ν da A^c.

<u>Teorema</u> (Decomposizione di Lebesgue): Siano μ, ν σ-finite su $(E, \mathcal{E})$: ν si può decomporre in un solo modo nella forma $\nu = f \cdot \mu + \gamma$ dove $f \cdot \mu$ é assolutamente continua e γ é singolare rispetto a μ.

<u>Corollario</u>: se in più μ é in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \implies \mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ con μ_1 discreta, μ_2 é definita da una densità rispetto a Lebesgue e μ_3 é diffusa ma singolare rispetto a Lebesgue.

Completamento di una probabilità

<u>Completamento di $\mathcal{F}$</u>: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. di probabilità e $\mathcal{N}$ famiglia dei sottoinsiemi $A \subseteq \Omega$ t.c. $\exists B \in \mathcal{F}$ con $A \subseteq B$ e $\mathbb{P}(B) = 0$. Sia $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} := \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N})$, questa é il completamento di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathbb{P}$.

<u>Teorema</u>: $A \subseteq \Omega$. $A \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}} \iff \exists B, C \in \mathcal{F}$ t.c. $B \subseteq A \subseteq C$ e $\mathbb{P}(C \setminus B) = 0$. Inoltre, $\mathbb{P}$ si prolunga in uno e un solo modo a $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ ponendo $\mathbb{P}(A) := \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$.

Complementi su misurabilità di variabili aleatorie

<u>Prop.</u>: $\mathcal{I}$ genera $\mathcal{F}$ σ-algebra. Per controllare che $X: (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (F, \mathcal{F})$ sia misurabile basta controllare su $\mathcal{I}$.

<u>Criterio di misurabilità di Doob</u>: Siano $(\Omega, \mathcal{F})$ e $(E, \mathcal{E})$ due spazi misurabili. $X: \Omega \longrightarrow E$, e supponiamo che $\mathcal{F} = X^{-1}(\mathcal{E})$ sia la σ-algebra generata da X: $\forall Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a. $\mathcal{F}$-mis. $\exists$ fattorizzazione $Y = g \circ X$ con $g: E \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione misurabile.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\forall Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[dl, "\exists g"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

<u>σ-algebra prodotto</u>: $E := \prod_{i=1} E_i$ $\quad \pi_i : E \longrightarrow E_i$ proiezione. Si chiama σ-algebra prodotto su E $\Big(\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i \Big)$ la più piccola σ-algebra che rende misurabili le proiezioni $\pi_i \ \forall i$. (i.e. generata da $\pi_i^{-1}(A_i) \ \forall i \ \forall A_i \in \mathcal{E}_i$).

<u>Proprietà</u>:

- $X: \Omega \longrightarrow E$ mis. $\iff \pi_i \circ X : \Omega \longrightarrow E_i$ mis. $\forall i$.
- $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$ é generata dai rettangoli cilindrici $\pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k)$ $\forall \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$ $\forall A_h \in \mathcal{E}_{i_h}$.

  (sono stabili per $\cap$ dunque 2 prob. che coincidono su loro sono uguali).

Indipendenza e prime proprietà

Indipendenza 2 eventi : A, B eventi sono detti indipendenti se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Indipendenza σ-algebre : Le σ-algebre $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ ($\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra con probabilità $\mathbb{P}$) sono dette indipendenti se presi $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ allora $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n)$.

Indipendenza di n eventi : $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti se lo sono le loro σ-algebre generate (nel caso di 2 coincide con la prima).

Prop.: $A_1, \dots, A_n$ sono indipendenti $\iff \forall\, 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ vale $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$.

Indipendenza v.a. : $X_1, \dots, X_n$ v.a. a valori in spazi diversi $(E_i, \mathcal{E}_i)$ sono indipendenti se lo sono le σ-algebre generate da esse.

Prop.: $X_1, \dots, X_n$ ind. e $f_i : E_i \longrightarrow F_i$ mis. $\forall i \Rightarrow f_1 \circ X_1, \dots, f_n \circ X_n$ indipendenti.

Prop: Siano X_1, X_2 due v.a. rispettivamente in $(E_1, \mathcal{E}_1)$ e $(E_2, \mathcal{E}_2)$ e sia, $\forall i$, $\tilde{\mathcal{I}}_i$ una famiglia di parti stabile per l'$\cap$ che genera $\mathcal{E}_i$: affinché X_1, X_2 siano indipendenti è sufficiente che valga

$$\mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2)) = \mathbb{P}(X_1^{-1}(B_1)) \cdot \mathbb{P}_2(X_2^{-1}(B_2)) \quad \forall\, B_1 \in \tilde{\mathcal{I}}_1 \text{ e } B_2 \in \tilde{\mathcal{I}}_2$$

Indipendenza v.a. infinite : Sia $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia infinita di v.a. : queste sono dette indipendenti se, $\forall$ sottoinsieme finito di indici $i_1, \dots, i_k$, le v.a. $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ sono indipendenti.

Costruzione probabilità prodotto

Siano $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$, $(F, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ due spazi di probabilità : il nostro scopo è costruire sullo sp. prodotto $E \times F$ munito della σ-algebra prodotto $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ una probabilità (indicata $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$) t.c. $\forall$ rettangolo misurabile $A \times B$, $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}(A \times B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{Q}(B)$. (Se $\exists$ è unica).

Prop. : $f : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ misurabile a valori positivi. Allora:

- $\forall x \in E$ fissato, la funzione $y \longmapsto f(x,y)$ è $\mathcal{F}$-misurabile.
- la funzione $x \longmapsto \int_F f(x,y)\, d\mathbb{Q}(y)$ è $\mathcal{E}$-misurabile,

N.B. il primo di questi enunciati si estende a f misurabile di qualsiasi segno ed il secondo a f misurabile limitata

Teorema (Fubini - Tonelli) : Definiamo per $C \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, $\mathbb{R}(C) = \int_E \mathbb{Q}(C_x)\, d\mathbb{P}_x$ $\quad (C_x = \{y \in F \mid (x,y) \in C\})$.

La funzione $\mathbb{R}$ è la probabilità cercata. Inoltre $\forall f$ funzione mis. positiva su $E\times F$:

$$\iint_{E\times F} f(x,y)\, d\,\mathbb{P}\otimes\mathbb{Q}\,(x,y) = \int_E \left[\int_F f(x,y)\, d\mathbb{Q}(y)\right] d\mathbb{P}(x) = \int_F \left[\int_E f(x,y)\, d\mathbb{P}(x)\right] d\mathbb{Q}(y).$$

N.B. A una funzione misurabile f di segno qualsiasi si può applicare F.T. dopo aver verificato che è integrabile.

Prop.: • 2 v.a. X, Y sono indipendenti $\iff \mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$ (leggi in probabilità)

• X, Y indipendenti $\iff \forall f,g$ limitate mis. $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(Y)]$.

Legge 0-1 di Kolmogorov e Lemma di Borel Cantelli

Consideriamo $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. reali indipendenti e sia $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, $\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$. Una v.a. Z è terminale se è misurabile rispetto $\mathcal{F}_\infty$. Cioè $\forall n$ è $\mathcal{F}_n$-mis. e per Doob, cioè, $\exists g_n$ t.c. $Z = g_n(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. Ad esempio $\{\omega\in\Omega \mid \sum_{n\geq 1} |X_n(\omega)| < +\infty\} \in \mathcal{F}_\infty$ ma non lo è $\{\omega\in\Omega \mid \sum_{n\geq 1} |X_n(\omega)| \leq 1\}$.

Teorema (Legge 0-1 Kolmogorov): Sia $A\in\mathcal{F}_\infty$; allora $\mathbb{P}(A)$ può assumere valori 0 o 1.

Poniamo $A := \limsup_n A_n$ (N.B.: A è terminale $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0, 1$, vediamo sotto quali condizioni è uno o l'altro).

Lemma (Borel-Cantelli I parte): Se $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, l'insieme A è trascurabile.

Lemma (Borel-Cantelli, II parte): Supponiamo che gli eventi $(A_n)_{n\geq 1}$ siano ind. e $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1$.

N.B. vale per eventi a 2 a 2 indipendenti.

Funzioni caratteristiche

Una funzione da $(E, \mathcal{E}, \mu\ \sigma\text{-finita})$ in $\mathbb{C}$ $f = f_1 + i f_2$ è misurabile se lo sono f_1, f_2. È integrabile se lo sono f_1, f_2 e in tal caso $\int f\, d\mu = \int f_1\, d\mu + \int f_2\, d\mu$. Vale $\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

Funzione caratteristica: $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mathbb{P}_X(x)$ con X v.a.r.

N.B. la funzione caratteristica dipende solo dalla legge in probabilità. In caso di $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i\langle u, X\rangle}]$.

Proprietà: • $\forall t$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$ e $\varphi_X(0) = 1$; inoltre $t \longmapsto \varphi_X(t)$ è uniformemente continua.

• se $a, b\in\mathbb{R}$, $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)\, e^{itb}$

• Se X, Y ind. $\Rightarrow \varphi_{X,Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$.

Oss. (legami con trasformata di Fourier): supponiamo che la v.a. X abbia densità f: allora

$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx$ mentre la sua trasformata se $\exists$ è $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\,dx$. Questo perché

la f.c. è la trasformata di Fourier della misura che ha densità f rispetto a Lebesgue e, in generale,

la trasformata di Fourier per misure è l'aggiunto della trasformata di Fourier per le funzioni.

Teorema (derivabilità funzione caratt.): X v.a.r. con momento $k \Rightarrow \varphi_X(t)$ derivabile k-volte e

$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k\,\mathbb{E}\left[X^k e^{itk}\right]$.

Teorema (inverso): $\varphi_X(\cdot)$ derivabile k volte in 0, con k pari $\Rightarrow X$ ha momento di ordine k.

Se la v.a. possiede momento finito fino a k, possiamo applicare Taylor in un intorno di 0. Se possiede

tutti i momenti, la f.c. ammette derivate di ogni ordine ma non è detto che sia sviluppabile in serie di

potenze. Tuttavia è facile fornire cond. nec. e suff. affinché questo sviluppo sia possibile: sia X

v.a. t.c. $\forall n$ $m_n = \mathbb{E}[X^n] < +\infty$. $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k m_k t^k}{k!} + R_{n+1}(t)$ $\forall n$, con

$|R_{n+1}(t)| = \frac{2|t|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathbb{E}\left[|X|^{n+1}\right]$.

Corollario: Se $\exists M > 0, r > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}\left[|X|^n\right] \le \frac{M n!}{r^n} \Rightarrow$ per $|t| < r$ vale

$\varphi_X(t) = \sum_{n \ge 0} \frac{i^n m_n}{n!} t^n$

Corollario: Siano X, Y v.a.r. dotate di ogni momento, supponiamo che $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ $\forall n$ e

sia soddisfatta la maggiorazione del corollario sopra: allora $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Esempi:
- $X \sim Bin(n,p)$ $\varphi_X(t) = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n$
- $X \sim Geom(p)$ $\varphi_X(t) = \frac{p}{p - 1 + e^{-it}}$
- $X \sim Poisson(\lambda)$ $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$
- $X \sim N(m, \sigma^2)$ $\varphi_X(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
- $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^r$

Inversione funzione caratteristica

__Notazione__: X v.a.r. e F funzione di ripartizione, $\int g(x)dF(x) := \int g(x)\, d\mathbb{P}_X(x)$.

__Prop.__ (formula di inversione): se a, b sono punti di continuità per la funzione di ripartizione F ed $a<b$, si ha:

$$F(b)-F(a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \varphi(t) \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right) dt$$

__Teorema__: Siano X, Y v.a.r. con funzione di ripartizione F e G e supponiamo $\varphi_X \equiv \varphi_Y \Rightarrow F \equiv G$.

__Corollario__ (Formula per densità): Se la funzione caratteristica φ della v.a. X è t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| < +\infty \Rightarrow$

X ha densità data da $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$

__Corollario__: Supponiamo che le v.a.r. X, Y abbiano momento di ogni ordine e che $\forall n$ $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$

e che $\mathbb{E}[|X|^n] \leq \frac{M n!}{r^n}$. Allora X e Y sono equidistribuite.

Funzione generatrice dei momenti

__Funzione generatrice dei momenti__: X v.a.r., $\psi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

In realtà ci restringiamo a dove $\psi_X(t) < +\infty$.

__Teorema__: Sia X v.a. e supponiamo che la sua f.g.m. $\psi_X(t)$ sia definita in un intorno di 0: allora X

possiede i momenti di ogni ordine.

__Teorema__ Siano X e Y due variabili e supponiamo che le loro f.g.m. siano definite e siano eguali in

un intorno di 0: allora X e Y sono equidistribuite.

Vettori aleatori gaussiani

__Vettore gaussiano__: un vettore aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$ (a valori in $\mathbb{R}^d$) è detto vettore gaussiano se,

$\forall u \in \mathbb{R}^d$, $\langle u, X \rangle = \sum_{j=1}^{d} u_j X_j$ è una variabile aleatoria gaussiana.

__N.B.__ le costanti le consideriamo gaussiane: $a \sim N(a, 0)$. Siano $m = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])$ il vettore dei

valori attesi e $Q_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ la matrice delle covarianze (è simmetrica e semidefinita positiva).

__Prop.__: Il vettore m e la matrice Q identificano la legge di X, indicata con $N_d(m, Q)$.

__N.B.__: Indipendenza $\Rightarrow$ incorrelazione ma $\not\Leftarrow$. In questo caso però:

__Corollario__: Sia X vettore gaussiano: due componenti X_i e X_j sono indipendenti $\Leftrightarrow$ sono incorrelate.

__N.B.__ Affinché X sia gaussiano non basta che le componenti siano Gaussiane.

Teorema: Assegnati $m \in \mathbb{R}^d$ e una matrice $d \times d$ simmetrica e definita semipositiva $Q \Rightarrow \exists$ vettore gaussiano di legge $N_d(m, Q)$.

Corollario: $X \sim N_d(m, Q)$ e supponiamo Q invertibile $\Rightarrow X$ ha densità della forma:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det Q}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle Q^{-1}(x-m), (x-m) \rangle\right)$$

Convergenza di variabili aleatorie

Spazio L^p: fissiamo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $1 \le p < +\infty$. $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è lo spazio delle classi di equivalenza delle v.a. X t.c. $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ ($X \sim Y \iff X = Y$ $\mathbb{P}$-q.c.). Per Minkowski $\|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}}$ è una norma su L^p (ben definita $d(X,Y) = \|X - Y\|_p$).

Spazio L^∞: è lo sp. delle v.a. t.c. $\exists M > 0$ t.c. $|X(\omega)| \le M$ q.c. e $\|X\|_\infty$ = min tra queste costanti (è effettivamente un minimo).

Convergenze v.a.: $(X_n)_{n \ge 1}$ converge a X:

- In probabilità ($X_n \xrightarrow{P} X$): $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.
- Quasi certamente ($X_n \xrightarrow{q.c.} X$): $\tilde{\forall} \omega$ $X_n(\omega) \xrightarrow{n} X(\omega)$ o $\mathbb{P}(|$ limsup
- In L^p ($X_n \xrightarrow{L^p} X$): $X_n \in L^p$ $\forall n$, $X \in L^p$ e $\lim_n \|X_n - X\|_p = 0$.

Prop.:
- $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$
- $X_n \xrightarrow{q.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$
- $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow \exists$ s. succ. $\{X_{n_k}\}_k$ t.c. $X_{n_k} \xrightarrow{q.c.} X$

Prop. $X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall$ sottosuccessione si può estrarre una sotto-sotto-successione convergente a X q.c.

N.B.:
- il limite della convergenza in probabilità è unico;
- la convergenza q.c. non viene da una distanza (nemmeno da una topologia)
- $X_n \xrightarrow{P} X$ e f continua $\Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ (vale anche col limite q.c.)
- $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow (X_n + Y_n) \xrightarrow{P} X + Y$ e $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ (t.c. f. continue)

Teorema (rafforzamento Teorema di Lebesgue): $X_n \xrightarrow{P} X$ e $\exists Y$ integr. t.c. $\forall n$ $|X_n| \le Y \Rightarrow$ $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Successione di Cauchy in probabilità: $(X_n)_{n\geq 1}$ è di Cauchy in probabilità se $\forall \varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ $\exists \bar{n}$ t.c. $\forall n, m > \bar{n}$ si abbia $\mathbb{P}\{|X_n - X_m| > \varepsilon\} \leq \delta$.

Teorema: Ogni successione di v.a. di Cauchy in probabilità converge in probabilità.

Corollario: $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $1 \leq p < +\infty$ è completo (L^∞ è completo è ovvio).

Convergenza di misure

Supponiamo le misure limitate su $\mathbb{R}$. $\mu(f) := \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu$.

Vagamente, debolmente, strettamente: Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una succ. di misure limitate su $\mathbb{R}$ e μ misura limitata su $\mathbb{R}$.

- $\mu_n \longrightarrow \mu$ vagamente se $\forall f$ continua a supporto compatto $\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$
- $\mu_n \longrightarrow \mu$ debolmente se $\forall f$ continua e infinitesima all'infinito $\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$
- $\mu_n \longrightarrow \mu$ strettamente se $\forall f$ continua e limitata $\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$

N.B. strettamente $\Rightarrow$ debolmente $\Rightarrow$ vagamente.

Prop.: $\mu_n \longrightarrow \mu$ strettamente $\Longleftrightarrow$ $\mu_n \longrightarrow \mu$ vagamente e $\mu_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mu(\mathbb{R})$.

Prop.: Se $\mu_n \longrightarrow \mu$ vagamente e $\sup_n \mu_n(\mathbb{R}) < +\infty$ $\Longrightarrow$ $\mu_n \longrightarrow \mu$ debolmente

Prop.: Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ succ. di misure di probabilità su $\mathbb{R}$, μ misura limitata e F_n ed F le relative funzioni di ripartizione. Allora:

- se $\mu_n \longrightarrow \mu$ strettamente, $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ $\forall x$ t.c. F è continua in x;
- se $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ in tutti i punti x di un denso di $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\mu_n \longrightarrow \mu$ vagamente.

Teorema (di Helly): Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ succ. di misure di prob. su $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\exists$ sottosucc. convergente debolmente a una misura μ t.c. $\mu(\mathbb{R}) \leq 1$.
← purtroppo non è una probabilità, vediamo di dare condizioni affinché lo sia

Famiglia tesa: Una famiglia di probabilità $\mathcal{M}$ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ è detta tesa se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K$ compatto t.c. $\forall \mu \in \mathcal{M}$ vale che $\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$.

N.B. ogni famiglia finita di prob. è tesa.

Teorema (di Prohorov): Sia $\mathcal{M}$ una famiglia di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sono equivalenti:

- La famiglia $\mathcal{M}$ è relativamente compatta per successioni rispetto alla convergenza stretta
- La famiglia $\mathcal{M}$ è tesa.

Teorema: Supponiamo che $\mu_n \to \mu$ strettamente e sia f una funzione boreliana limitata t.c. l'insieme dei suoi punti di discontinuità sia trascurabile per la misura limite μ: allora $\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$.

Convergenza in Legge di v.a.

Convergenza in legge: $(X_n)_{n\geq 1}$ succ. di v.a.r. converge in legge alla v.a. X $\left(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X\right)$ se le relative leggi di probabilità $P_{X_n} \longrightarrow P_X$ strettamente. Cioè $\forall f$ continua e limitata:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mathbb{P}_{X_n}(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mathbb{P}_X(x) \qquad \Big(\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]\Big)$$

Oss. • dato che $1 = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$ $\Rightarrow$ per Prop. precedente si può richiedere solo vagamente

Proprietà: • $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ e g è continua $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$

• $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ e f continua a valori positivi $\Rightarrow \mathbb{E}[f(X)] \leq \liminf_n \mathbb{E}[f(X_n)]$.

Prop.: • $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ • $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$

Oss. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ $\not\Rightarrow$ $(X_n + Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$

Teorema: Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a., $(F_n)_{n\geq 1}$ le relative funzioni di ripartizione ed X v.a. con funzione di ripartizione F. Sono equivalenti:

• $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ • $F_n(\cdot)$ converge a $F(\cdot)$ in tutti i punti in cui F è continua • $F_n(\cdot)$ converge a F in un denso

Teorema (Paul-Lévy): $(X_n)_{n\geq 1}$ succ. di v.a., siano $\varphi_n(\cdot)$ funzioni caratteristiche e sia X una v.a.:

- Se $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow \varphi_n(t) \longrightarrow$ puntualmente a $\varphi_X(t)$
- Se $\varphi_n(t) \longrightarrow$ puntualmente a φ continua in $0 \Rightarrow \varphi$ funzione caratteristica di una v.a. X e $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Corollario: Se X_n è gaussiana $\forall n$ e $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Rightarrow X$ è gaussiana.

Corollario (Teorema di Slutsky): X_n, Y_n, X t.c. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \Rightarrow (X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$

Teorema (di rappresentazione di Skorohod): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a.r. e supponiamo $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$:

$\exists\ (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$, Y v.a. su questo sp. t.c. $X_n(P) = Y_n(P')$, $X(P) = Y(P')$ e $Y_n \xrightarrow{q.c.} Y$.

Teoremi Limite

Teorema (Limite Centrale di Paul-Lévy): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a. i.i.d. dotate di momento secondo, e siano $\mu := \mathbb{E}[X_i]$ e $\sigma^2 = Var(X_i) > 0$: allora

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim N(0,1)$$

<u>Teorema</u> (Estensione al caso vettoriale): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a. i.i.d. a valori in $\mathbb{R}^d$ dotate di momento secondo, e siano $m = \mathbb{E}[X_i]$ e $Q_{ij} = Cov(X_i, X_j)$: allora

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n \cdot m}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim N_d(0, Q)$$

<u>Succ. per cui vale T.L.C.</u> : in generale data una successione $X_1, X_2, \ldots$ di v.a.r., si dice che vale un Teorema Limite Centrale se la successione $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim N(0,1)$ $(S_n := X_1 + \ldots + X_n)$.

Disuguaglianze e Teoremi di Kolmogorov

<u>Disuguaglianze di Kolmogorov</u>: Siano $X_1, X_2, \ldots$ centrate indipendenti di quadrato integrabile e sia $c>0$; si ha $\mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq c\right\} \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{c^2}$.

Se inoltre le variabili sono unif. limitate, cioè se $\exists \lambda$ t.c. $|X_n(\omega)| \leq \lambda$, preso $c>0$ si ha:

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| < c\right\} \leq \frac{(c+\lambda)^2}{\mathbb{E}[S_n^2]}$$

<u>Teorema</u> : Sia $X_1, X_2, \ldots$ una succ. di v.a.r. indipendenti centrate e supponiamo che si abbia $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$: allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ converge q.c.

Inoltre se le variabili sono unif. limitate e la serie converge q.c. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$.

<u>Teorema</u> (delle due serie di Kolmogorov): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a. ind unif. limitate ; condizione necessaria e sufficiente affinché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ converge q.c. è che le due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n] \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} Var(X_n) \quad \text{convergano.} \quad (\Leftarrow: \text{non serve unif. limitate})$$

<u>Teorema</u> (delle tre serie di Kolmogorov): Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a. ind., prendiamo $c>0$ e sia $Y_n = X_n \cdot 1_{\{|X_n| < c\}}$: condizione necessaria e sufficiente affinché converga q.c. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ è che convergano le 3 serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[Y_n]$ $\sum_{n=1}^{+\infty} Var(Y_n)$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\{X_n \neq Y_n\}$

Legge dei Grandi Numeri

<u>Legge dei Grandi Numeri</u> : Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una succ. di v.a.r. dotate di momento primo, e sia $S_n = X_1 + \ldots + X_n$;

si dice che vale la legge debole dei grandi numeri (risp. " forte ") se :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{in prob.} \quad (\text{risp. q.c.})$$

<u>Teorema</u> (Legge forte dei grandi numeri): Supponiamo che le v. a. $X_1, X_2, \dots$ siano indipendenti e t.c. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} \longrightarrow +\infty$: allora vale la legge forte dei grandi numeri.

<u>Teorema</u> (Legge Forte di Kolmogorov): Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di v.a.r. indipendenti e equidistribuite, dotate di momento primo: allora vale la legge forte dei Grandi Numeri.

Speranza condizionale

<u>Prop.</u> ($\exists!$ speranza condizionale): Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. Allora $\exists!$ Y $\mathcal{E}$-mis. t.c. $\forall A \in \mathcal{E}$ $\int_A X \, d\mathbb{P} = \int_A Y \, d\mathbb{P}$. Questa Y è chiamata speranza condizionale di X rispetto a σ $(Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{E}])$.

<u>Proprietà</u>:
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]]$.
- Se X è $\mathcal{E}$-ind. $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{E}] = \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[aX + Y|\mathcal{E}] = a\,\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$
- Se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$
- Se $X \leq Y$ q.c. $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{E}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$ q.c.
- Se Y è $\mathcal{E}$-mis e limitata $\mathbb{E}[XY|\mathcal{E}] = Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$
- Se X è $\mathcal{E}$-mis. $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}] = \mathbb{E}[X]$
- Se $X_n \uparrow X$ q.c. $\Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{E}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ q.c.

<u>Prop.</u> (Disuguaglianza di Jensen): $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa ; X, $\varphi(X)$ int. $\Rightarrow \varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{E}]$ q.c.

<u>Corollario</u>: $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{E}] \in L^p(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$

<u>Prop.</u>: X, Y v.a. di quadrato integrabile (oppure $X \in L^p$ e $Y \in L^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), vale:

$$\mathbb{E}[X\,\mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]\,Y]$$

<u>Prop.</u>: Sia $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}]$ coincide con la proiezione ortogonale di X sul sottospazio chiuso $L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. $\left(\langle X, Y \rangle_{L^2} = \langle \mathbb{E}[X|\mathcal{E}], Y \rangle_{L^2} \;\; \forall Y \in L^2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P}) \right)$.

<u>Teorema</u> (Formula di Bayes): Sia $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, sia $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ una versione della densità e sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, vale:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{E}] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{E}]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{E}]}$$

<u>Prop.</u>: Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-alg., siano X, Y v.a.r., supponiamo X ind. da $\mathcal{G}$ e Y $\mathcal{G}$-mis. Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ boreliana limitata, poniamo $g(y) = \mathbb{E}[\varphi(X, y)]$. Allora $y \longmapsto g(y)$ boreliana e $\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|\mathcal{G}] = g(Y)$.

<u>Prop.</u>: (X, Y) con densità $f(x, y)$, φ boreliana e limitata, $g(y) := \int \varphi(x) \frac{f(x,y)}{f(y)} dy$. Allora $\mathbb{E}[\varphi(X)|Y] = g(Y)$.

LEZIONI

1. Lun 27/02/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Processi stocastici, loro legge e distribuzioni finito dimensionali. Introduzione euristica al moto Browniano, processi Gaussiani. Spazi di Hilbert Gaussiani e misure Gaussiane su uno spazio di misura. White noise sulla retta e prima definizione del moto Browniano. Continuità quasi certa di processi stocastici, versioni e modifiche di processi stocastici, indistinguibilità. Criterio di continuità di Kolmogorov, versione continua del Moto Browniano. Proprietà di base del moto Browniano. (Francesco Grotto)
2. Lun 06/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Lemma di continuità di Kolmogorov, enunciato e dimostrazione. Applicazione al moto Brownianio (Hölder continuità delle traiettorie). Modulo di continuità di Lèvy per il moto Browniano, enunciato e dimostrazione. (Dario Trevisan)
3. Mar 07/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Funzioni a variazione finita e limitata, definizioni e proprietà di base. Cenni all'integrale di Riemann-Stieltjes. Processi stocastici a variazione quadratica finita, definizione. Il moto Browniano ha variazione quadratica finita, dimostrazione, e semplici conseguenze. Processo canonico sullo spazio delle traiettorie (prodotto), processi a traiettorie continue. Spazio e misura di Wiener. Operatore di shift, processi stazionari. Processi gaussiani. (Dario Trevisan)
4. Mer 08/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Filtrazioni e processi adattati. Tempi d'arresto, sigma-algebra degli eventi antecedenti a un tempo d'arresto. Processi progressivamente misurabili. (Dario Trevisan)
5. Lun 13/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Completamento di una filtrazione. Ipotesi abituali su una filtrazione. Cenno all'estensione a famiglie di probabilità. Martingale, sub- e super-martingale. Definizione. Trasformazione di martingale tramite funzioni convesse. Esempi di martingale (moto browniano, esponenziale stocastico del moto browniano). Trasformata di martingale tramite un processo prevedibile. Esempio: martingala arrestata è martingala. Teorema d'arresto opzionale (caso tempi discreti e limitati). (Dario Trevisan)
6. Mar 14/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Diseguaglianze massimali di Doob (versione debole, versione forte, a tempi discreti e infine a tempi continui). Applicazione al massimo del moto Browniano. Diseguaglianze di Doob sugli attraversamenti. Teorema di convergenza di sub-martingale limitate in L^1 (enunciato). (Dario Trevisan) (Lezione dopo: dim. teorema, uniforme integr., teorema di Vitali (sub enun.), Teoremi)
7. Lun 20/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Nuclei di probabilità, versione regolare della probabilità condizionale, probabilità di transizione. Processi di Markov, loro caratterizzazione ed esistenza di un processo di Markov avente distribuzione iniziale e probabilità di transizione assegnate. Esempio: Moto Browniano e il suo integrale nel tempo. (Francesco Grotto)
8. Mar 21/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Proprietà di Markov. Semigruppi di Feller e (sub)probabilità di transizione Feller, processi di Feller. I processi di Feller hanno modificazione cadlag. Esercizio: processi di Markov Gaussiani. (Francesco Grotto)
9. Mer 22/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Semigruppi di convoluzioni come processi di Feller, moto Browniano e processo di Poisson. Proprietà forte di Markov per processi di Feller. Equazione Chapman-Kolmogorov con tempi d'arresto. Principio di riflessione del moto Browniano. (Francesco Grotto)
10. Lun 27/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi/proposizioni dal libro capitolo 3, processi di Markov: 1.8, 1.11, 1.12. (Dario Trevisan)
11. Mar 28/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi/proposizioni dal libro capitolo 3, processi di Markov: 2.28, 1^0 punto e Legge 0-1 di Blumenthal (solo per processi a incrementi indipendenti); 2.23; 2.24. (Dario Trevisan)
12. Mer 29/03/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi/proposizioni dal libro capitolo 3, processi di Markov: 3.14 (principio di riflessione) e conseguenze: legge del massimo del BM 3.7, insieme degli zeri del BM 3.12. (Dario Trevisan)
13. Lun 03/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi dal capitolo 2 (martingale): 1.13, 1.15 (+ lemma di Scheffé), 1.16, 3.15. (Dario Trevisan)
14. Mar 04/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi/proposizioni dal capitolo 2 (martingale): 2.13, prop. 3.7, 3.8 (rovina del giocatore), 3.9, 3.11. (Dario Trevisan)
15. Mer 05/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Decompozione di Doob per una submartingala (tempi discreti): esistenza e unicità. Compensatore prevedibile associato a una martingala di quadrato integrabile, esempi e proprietà. ``Isometria di Ito'' per trasformate martingale a tempi discreti. Enunciato delle diseguaglianze di Burkholder-Gundy a tempi discreti, dimostrazione di una diseugaglianza nel caso p=4 (come esercizio). (Dario Trevisan)
16. Lun 17/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Teorema di esistenza per la variazione quadratica di una martingala continua e limitata. (Dario Trevisan)

17. Mar 18/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Martingale locali (continue), estensione della variazione quadratica a martingale locali. Processo di covariazione. Diseguaglianza di Kunita-Watanabe. (Dario Trevisan)
18. Mer 19/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Semimartingale. Spazi di martingale a quadrato integrabile (H^2), caratterizzazione di una martingale locale continua in H^2. (Dario Trevisan)
19. Lun 24/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi vari su martingale, martingale locali e variazione quadratica. (Dario Trevisan)
20. Mer 26/04/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Integrazione stocastica: spazio L^2(M), teorema dell'esistenza e caratterizzazione dell'integrale per una martingala in H^2 e integrando in L^2(M). (Dario Trevisan)
21. Mar 02/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Proprietà dell'integrale stocastico, estensione a martingale locali e integrandi in L^2_loc(M). Integrazione rispetto ad una semimartingala, definizione e proprietà (incluso il teorema di convergenza dominata). (Dario Trevisan)
22. Mer 03/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Formula di Ito: enunciato e dimostrazione (caso semimartingala vettoriale). Applicazioni: martingale esponenziali, teorema di Levy sul moto browniano, integrali stocastici iterati e polinomi di Hermite. (Dario Trevisan)
23. Lun 08/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Diseguaglianze di Burkholder-Davis-Gundy (enunciato generale per martingale locali continue): dimostrazione casi p>=2 e p >= 4. Esercizi su integrazione stocastica. (Dario Trevisan)
24. Mar 09/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Equazioni differenziali stocastiche: concetti di esistenza, unicità in legge, unicità per traiettorie, soluzioni forti. Teorema di Yamada-Watanabe (solo enunciato). Esempio di soluzione (strettamente) debole. (Dario Trevisan)
25. Mer 10/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Equazioni differenziali stocastiche con coefficienti Lipschitz. Teorema di esistenza e unicità (con dimostrazione). (Dario Trevisan)
26. Lun 15/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Definizione astratta di generatore e calcolo del generatore per processi di diffusione associati a equazioni differenziali stocastiche (con coefficienti regolari e limitati). Proprietà di Markov delle soluzioni di equazioni differenziali stocastiche con coefficienti Lipschitz e limitati. (Dario Trevisan)
27. Mar 16/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Martingale esponenziali, rappresentazione di soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche lineari guidate da semimartingale continue. Esempi: processo di Ornstein-Uhlenbeck, moto Browniano Geometrico e loro proprietà. (Francesco Grotto)
28. Mer 17/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Esempio: diffusione di Ito e sua misura invariante. Esercizi 2.6,2.7,2.18 capitolo IX Revuz-Yor. (Francesco Grotto)
29. Lun 22/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Teorema di Girsanov: martingala D associata alla densità di Q rispetto a P (e una filtrazione F), proprietà (positività, criterio di uniforme integrabilità). Teorema di Girsanov (enunciato e dimostrazione). (Dario Trevisan)
30. Mar 23/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Proprietà della trasformata di Girsanov. Scrittura della densità come esponenziale stocastico, e riformulazione della trasformata di Girsanov. Coppie di Girsanov. Trasformata di Girsanov di un BM è BM. (Dario Trevisan)
31. Mer 24/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) lezione: Criteri di Kazamaki e Novikov (enunciati e dimostrazione). Applicazione di Girsanov alle equazioni differenziali stocastiche. (Dario Trevisan)
32. Lun 29/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi sul teorema di Girsanov ed equazioni differenziali stocastiche. (Dario Trevisan)
33. Mar 30/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi vari di riepilogo. (Dario Trevisan)
34. Mer 31/05/2023 11:00-13:00 (*2:0 h*) esercitazione: Esercizi vari di riepilogo. (Dario Trevisan)

Introduzione ai processi stocastici

Def. (processo stocastico): Fissiamo uno sp. di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ e un insieme T. Definiamo processo stocastico una famiglia $(X_t)_{t\in T}: \Omega \to E$ di variabili aleatorie.

Def. (traiettoria): $(X_t)_{t\in T}: \Omega \to E$ processo stocastico allora definiamo traiettoria di $\omega \in \Omega$ la mappa $t \mapsto X_t(\omega)$.

Oss.: un processo si può identificare come una v.a. a valori in $(E^T, \mathcal{E}^T)$, dove $\mathcal{E}^T$ è la σ-algebra generata dagli $\overbrace{\text{insiemi cilindrici}}^{\text{sono per } \cap \text{ dunque se due prob. coincidono su loro, sono uguali}}$ $\{A_{t_1} \times \dots \times A_{t_k} \mid t_i \in T,\ A_{t_i} \in \mathcal{E}\}$.

Def. (moto Browniano): Sia $(B_t)_{t\in T}$ un processo stocastico con $T = [0, t]$ a valori in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^d$). È un moto Browniano se:

1. le traiettorie continue quasi certamente;
2. gli incrementi $B_t - B_s$ per $t > s$ sono indipendenti su intervalli disgiunti; } traducono il comportamento microscopico delle particelle
3. $\forall t \in T$ B_t è una v.a. gaussiana centrata con varianza t. } non ci sorprende alla luce del teorema del limite centrale

Andiamo a dimostrare l'esistenza del moto Browniano.

Teo (Ionescu-Tulcea): data una misura di probabilità μ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ boreliani), $\exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. di prob. e una succ. di variabili aleatorie ind. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}: \Omega \to \mathbb{R}$ con legge $\underbrace{(X_i)_\# \mathbb{P} = \mu}_{\mu(A) = \mathbb{P}(X \in A)}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

dim. NO DIM.

Spazi di Hilbert gaussiani

Prop.: Sia H uno $\overbrace{\text{sp. di Hilbert reale}}^{\text{Sp. vett. reale con pr. scalare def. positivo + completo}}$ $\underbrace{\text{separabile}}_{\text{def. topologica} \iff \text{ammette base ortonormale numerabile}}$. Allora $\exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. di prob. e un processo stocastico $(X_h)_{h\in H}$ t.c.:

completa $\left(\overline{\operatorname{span}\left(\bigcup_{\substack{J \subseteq \mathbb{N} \\ J \text{ finito}}} e_i,\ i \in J\right)} = H\right)$

1. $\forall \omega \in \Omega$, $H \ni h \xrightarrow{X} X_h =: X(h)$ è lineare;
2. $\forall h \in H$, $X_h \sim \mathcal{N}(0, \|h\|_H^2)$.

dim. Fissiamo base ortonormale $\{e_n\}$ di H. Per il teorema precedente possiamo trovare $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. di prob. e $\{a_n: \Omega \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ succ. di v.a. indipendenti con legge $\mathcal{N}(0,1)$.

Poniamo $X_h := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \langle h, e_n\rangle_H$. Questa serie converge in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Inoltre converge anche quasi certamente per il teorema delle due serie di Kolmogorov dato che $\mathbb{E}[a_n \langle h, e_n\rangle_H] = 0$ (a_n centrata) e

condizione sufficiente perché converga essendo di Hilbert è che $\sum_n \|\cdot\|_L^2 < +\infty$
ma $\|a_n \langle h, e_n\rangle\|_{L^2}^2 = (\mathbb{E}[(a_n \langle h, e_n\rangle)^2]^{\frac{1}{2}})^2 = \operatorname{Var}(a_n \langle h, e_n\rangle)$ (*)

(*) $\operatorname{Var}(a_n \langle h, e_n\rangle_H) = \langle h, e_n\rangle_H^2 \Rightarrow \sum_n \langle h, e_n\rangle_H^2 = \underbrace{\|h\|_H^2}_{\text{proprietà sp. Hilbert}} < +\infty$. □

Oss. Notiamo che la mappa X ristretta all'immagine è un isomorfismo tra H e un sottospazio di $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (è iniettiva infatti $X(h)=0 \Leftrightarrow X_h \sim N(0,0)$ ma $X_h \sim N(0, \|h\|_H^2) \Rightarrow h=0$). Ora, $\mathbb{E}[X(h)\cdot X(h')] = $
$= \mathbb{E}\left[\sum_{n,m} a_n a_m \langle h, e_n\rangle_H \langle h', e_m\rangle_H\right] = \langle h, h'\rangle_H$. Ma $\mathbb{E}[X(h)\cdot X(h')]$ è il prodotto scalare in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e inoltre $X(H)$ è un ssp gaussiano di $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e l'indipendenza in un ssp gaussiano è equivalente all'ortogonalità, dunque: $X(h), X(h')$ ind. $\Leftrightarrow X(h) \perp X(h') \Leftrightarrow h \perp h'$.

Def. (misura gaussiana di intensità μ): Sia $(A, \mathcal{A}, \mu)$ sp. misura σ-finito separabile. Se nella prop. precedente scegliamo $H = L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$, la mappa X è chiamata misura Gaussiana di intensità μ. Se $F \in \mathcal{A}$, poniamo $X(F) := X(\mathbb{1}_F)$. (Se $A = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu = dx$, X è detto white noise su $\mathbb{R}^d$).

Oss.: il termine "misura" nella def. precedente deriva dal seguente fatto: se $\{F_n \in \mathcal{A}\}$ è una successione di insiemi disgiunti misurabili con $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mu(F_i) < +\infty$ allora $X\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) \overset{\text{linearità}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} X(F_i)$ ← converge q.c. per teorema. Attenzione, però, perché il q.c. dipende dalla successione di $\{F_n\}$ dunque non ci dice che X è una misura (gli insiemi trascurabili sono diversi).

Oss. Siano $F, G \in \mathcal{A}$ t.c. $\mu(F), \mu(G) < +\infty$ allora: $\mathbb{E}[X(F)\cdot X(G)] = \langle \mathbb{1}_F, \mathbb{1}_G\rangle_H = \int \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G \, d\mu = \mu(F\cap G)$ dunque se F e G sono disgiunti $\Rightarrow X(F) \perp X(G) \Rightarrow X(F), X(G)$ indipendenti.

Facciamo un passo verso la costruzione del moto Browniano. Prendiamo come spazio $(A, \mathcal{A}, \mu)$ la semiretta $\mathbb{R}^+$ con la σ-algebra di Borel e la misura di Lebesgue. Sia X la solita mappa costruita precedentemente ($\nearrow H = L^2([0,+\infty), dx)$) e poniamo $B_t := X([0,t])$. Vediamone alcune proprietà:

1): $\mathbb{E}[B_t] = 0$ e $Var(B_t) = t$ per costruzione di X;

2): Incrementi indipendenti: se $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$ allora $B_{t_1} - B_{s_1}$ e $B_{t_2} - B_{s_2}$ sono indipendenti per l'ultima osservazione;

$$B_{t_1} - B_{s_1} = X(\mathbb{1}_{[0,t_1]}) - X(\mathbb{1}_{[0,s_1]}) = X(\mathbb{1}_{[0,t_1]} - \mathbb{1}_{[0,s_1]}) = X(\mathbb{1}_{[t_1,s_1]})$$

3): B è un processo gaussiano cioè se $t_0 < \ldots < t_n$ allora $(B_{t_0}, \ldots, B_{t_n})$ è un vettore gaussiano. Segue dal fatto che gli incrementi sono indipendenti e le singole variabili sono gaussiane; ?

4): se $t > s \Rightarrow B_t - B_s \sim N(0, t-s)$. Infatti:

$B_t = B_s + (B_t - B_s)$ ma B_s e $B_t - B_s$ sono indip. ($B_0 = 0$ per linearità di X) dunque passando alle funzioni caratteristiche: $\exp\left(-\frac{t u^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{s u^2}{2}\right)\mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))]$ e dunque $\mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))] = \exp\left(-\frac{t-s}{2}u^2\right)$

⑤ se $t > s$:

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s) B_s] = \mathbb{E}[B_s^2] + \mathbb{E}[\underset{\uparrow\ \text{centrato}}{(B_t - B_s)}\underset{\uparrow\ \text{centrata}}{(B_s - B_0)}] = s + 0 \cdot 0 = s = \min(t, s).$$

A priori, non abbiamo niente sulla continuità di B.

Continuità dei processi stocastici

Def. (q.c. continuo): Sia E sp. top. e $\mathcal{E}$ la σ-algebra dei boreliani. Un processo X a valori in $(E, \mathcal{E})$ è q.c. continuo se $\tilde{\forall} \omega$ la funzione $t \longmapsto X_t(\omega)$ è continua.

Oss.: nel controllare se un processo è q.c. continuo incontriamo la seguente difficoltà: nessuno ci assicura che $\{\omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ continua}\}$ è misurabile. Allo stesso modo, altri oggetti che vorremmo considerare come $\inf\{t : X_t(\omega) > 0\}$.

Def. (equivalenti / versioni): Due processi X e X' definiti risp. sugli spazi di prob. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ a valori entrambi in $(E, \mathcal{E})$, sono detti equivalenti oppure versioni l'uno dell'altro se $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_Y$, dove $\mathcal{M}_X := \{\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n} \mid t_1, \dots, t_n \in T\}$ e $\mathbb{P}_{t_1, \dots, t_n} := (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})_{\#} \mathbb{P}$ è probabilità su E^n.

Def. (modificazione): Due processi X e X' definiti sullo stesso sp. di prob. e a valori nello stesso sp. sono detti modificazione l'uno dell'altro se $\forall t$: $\boxed{X_t = X_t' \quad \text{q.c.}}$

Def. (indistinguibili): Stesse hp. modificazione ma ora $\tilde{\forall} \omega$: $\boxed{X_t(\omega) = X_t'(\omega) \quad \forall t.}$

N.B.: Indistinguibili: c'è un solo insieme di misura nulla. Modificazione: a ogni tempo t fissato c'è un insieme di misura nulla. Dunque indistinguibili $\Rightarrow$ modificazione.

$\not\Leftarrow$: T v.a. con distr. continua su $\mathbb{R}^+$, $X_t = 0$, $Y_t = \mathbb{1}_{\{T = t\}}$

N.B. Modificazione $\Rightarrow$ versione ; modificazione + q.c. continuo $\Rightarrow$ indistinguibili.

$\not\Leftarrow$: $X_t \sim N(0,1)$ ind. $Y_t = -X_t$

$\forall t\ \exists A_t$ t.c. $\mathbb{P}(A_t) = 1$ e $X_t(\omega) = X_t'(\omega)\ \forall \omega \in A_t$.

$\exists A$ t.c. $\mathbb{P}(A) = 1$ e $t \longmapsto X_t(\omega)$ continua $\forall \omega \in A$.

Poniamo $\{A_{q_n}\}_{q_n \in \mathbb{Q}}$, $\bar{A} := A \cap (\bigcap_n A_{q_n})$ (misura 1). $\forall t\ \forall \omega \in \bar{A}$:

$$\underset{\uparrow\ \text{cont. traiett.}}{X_t(\omega) =} \lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{Q}}} \underset{\uparrow\ \text{modif.}}{X_s(\omega) =} \lim_{\substack{s \to t \\ s \in \mathbb{Q}}} \underset{\uparrow\ \text{traiett. cont.}}{X_s'(\omega) =} X_t'(\omega)$$

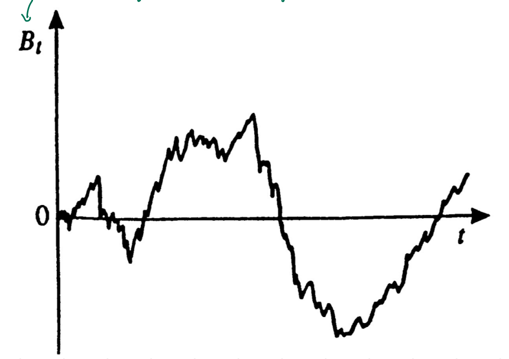
Teorema (Criterio di continuità di Kolmogorov): Sia X un processo stocastico a valori reali per cui esistono $\alpha, \beta, C > 0$ t.c. $\forall t, s$: $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \le C |t - s|^{1+\beta}$. Allora X ha una versione q.c. continua.

Prop.: Sia $X \sim N(0, \sigma^2)$. Allora $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$.

dim. $Z := \frac{X}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Dunque la funzione generatrice dei momenti è $M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$, in particolare $M_Z''''(t) = 3 M_Z''(t) + t M_Z'''(t)$. Dunque $\mathbb{E}(X^4) = \mathbb{E}(\sigma^4 Z^4) = \sigma^4 M_Z''''(0) = 3\sigma^4$. □

Dunque, riprendendo il processo B, si ha $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^4] = 3|t - s|^2 \Rightarrow$ per il teorema di Kolmogorov otteniamo un processo $\tilde{B}$ che è effettivamente un moto browniano (tutte le proprietà di B sono ereditate da $\tilde{B}$ dato che sono versioni l'uno dell'altro). Lo chiameremo "Moto Browniano standard".

$B_t(\omega)$ (sto guardando la traiettoria)



Prop.: Se $\{B_t\}_t$ è MB standard:

① Omogeneità nel tempo: $\forall s>0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_t$ $\forall t \geq 0$ è un moto browniano.

② Simmetria: $\{-B_t\}_t$ $t \geq 0$ è un moto browniano.

③ Riscalamento: $\forall c>0$ il processo $c\, B_{t/c^2}$ per $t \geq 0$ è un moto browniano.

④ Inversione del tempo: $X_t := \begin{cases} 0, & t=0 \\ t\, B_{\frac{1}{t}}, & t>0 \end{cases}$ è un moto browniano.

dim. L'unica cosa non banale è verificare la continuità in 0 di ④. Viene dal fatto che X_t e B_t sono equivalenti per $t>0$ e dunque i due limiti per $t \longrightarrow 0$ devono coincidere ma $B_0 = 0$ per def.

↳ hanno stessa media (0) e stessa varianza $\left(t^2 \cdot \frac{1}{t} = t\right)$ + sono gaussiani

□

Proprietà locali dei cammini browniani

Def. (α-Hölder continua): dato $\alpha \in (0,1)$ si dice che $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è α-Hölder continua se:

$$\sup_{s \neq t \in [a,b]} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty$$

(il membro di sx è anche indicato con $[f]_{C^\alpha}$)

Teorema: Sia $(X_t)_{t \in [0,1]}$ un processo stocastico a valori in $\mathbb{R}$ (basta in un Banach) t.c. $\exists\, c, \varepsilon, \gamma > 0$ t.c. $\forall s,t \in [0,1]$:

↙ vale anche in $\mathbb{R}^d$ con hp. $d+\varepsilon$ al posto di $1+\varepsilon$

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\gamma\right] \leq c|t-s|^{1+\varepsilon}$$

Allora $\exists$ una modificazione $(\tilde{X}_t)_{t \in [0,1]}$ t.c. $\mathbb{P}$-q.c. le traiettorie sono α-Hölder continue con $\alpha \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$. Inoltre $\mathbb{E}\left[[\tilde{X}]_{C^\alpha}^\gamma\right] < \infty$.

dim. • $D_n := \{t = k\,2^{-n} : k=0,\dots,2^n\}$. Poniamo $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, chiamato anche insieme dei numeri diadici;

- $\Delta_n := \{(s,t) : s,t \in D_n \wedge |s-t| = 2^{-n}\}$ (coppie consecutive di D^n e scambiate). $|\Delta_n| = 2^n 2$ (perché (s,t) abbia senso s può occupare dalla posizione 0 alla 2^{n-1} cioè 2^n possibilità; fissato s t è obbligato)

- $K_n := \max_{(s,t)\in\Delta_n} |X_t - X_s|$. Vale: $K_n^\gamma \overset{\text{in realtà è = perché sono + e dunque }x^\gamma\text{ crescente}}{\leq} \max_{\Delta_n} |X_t - X_s|^\gamma \leq \sum_{\Delta_n} |X_t - X_s|^\gamma$, e passando ai valori attesi:

$$\mathbb{E}[K_n^\gamma] \leq \sum_{\Delta_n} \mathbb{E}[|X_t - X_s|^\gamma] \leq 2^{n+1} c\, 2^{-n(1+\varepsilon)} = c\, 2^{-n\varepsilon+1} = \tilde{c} \cdot 2^{-n\varepsilon}$$

- Siano $s,t \in D$ con $|s-t| \leq 2^{-n}$, supponiamo $s\leq t$. Allora, $\forall m$ sia $s_m \in D_m$ il più piccolo diadico di passo m a destra di s, analogamente per $t_m \in D_m$. (non è detto che $s_m \leq t$ se t e s sono sufficientemente vicini). Abbiamo dunque due successioni $\{s_m\}_m$ e $\{t_m\}_m$ t.c.:

    1. $\overset{m=n}{s_n} = t_n$ oppure $(s_n, t_n) \in \Delta_n$ (dato che $|s-t|\leq 2^{-n}$).
    2. Per m sufficientemente grande da m in poi si ha $s_m = s$ e $t_m = t$ (dato che $s,t \in D$)
    3. $(s_{m+1}, s_m) \in \Delta_{m+1}$ e $(t_{m+1}, t_m) \in \Delta_{m+1}$ se non sono già diventati lo stesso.

- $X_s - X_t = (X_t - X_{t_n}) + (X_{t_n} - X_{s_n}) + (X_{s_n} - X_s) = \sum_{m\geq n} (X_{t_{m+1}} - X_{t_m}) + (X_{t_n} - X_{s_n}) +$
$+ \sum_{m\geq n} (X_{s_{m+1}} - X_{s_m})$ dove per convergenza di $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ queste sono somme finite.

Passando ai moduli, usando 1+2+3 + def. K_n: $|X_t - X_s| \leq K_n + 2\sum_{m>n} K_m \leq 2\sum_{m\geq n} K_m$.

Allora, per $s,t\in D$ si ha: $\sup_{s\neq t} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} \overset{\text{spezzo sulla taglia }|t-s|}{\leq} \sup_{n\geq 0} \sup_{\{2^{-n-1} < |t-s| \leq 2^n\}} \frac{|X_t - X_s|}{(2^{-n-1})^\alpha} \overset{\text{stima precedente}}{\leq}$

$\leq \sup_{n\geq 0} \sup_{\{2^{-n-1}<|t-s|\leq 2^n\}} \left(2\sum_{m\geq n} K_m\right) \overset{\text{non dipende più da } s,t}{=} \sup_{n\geq 0} 2^{(n+1)\alpha} \left(2\sum_{m\geq n} K_m\right) \overset{\text{prendiamo la coda}}{\leq} 2\sum_{m\geq 0} K_m\, 2^{(m+1)\alpha}$

- Dividiamo in due casi:

    1. $\gamma \geq 1$: per Minkowski $\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\neq t\in D} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \leq 2\sum_{m\geq 0} \left(\mathbb{E}[K_n^\gamma]^{\frac{1}{\gamma}} 2^{(m+1)\alpha}\right) \leq$
    $\leq 2\sum_{m\geq 0} \left(2^{-\frac{\varepsilon}{\gamma}m} 2^{(m+1)\alpha}\right)$ che converge per $\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma}$.
    2. $\gamma \in (0,1)$: stessa cosa ma con disuguaglianza triangolare.

Dunque, ristretta ai diadici, è α-Hölder, in particolare $\tilde{\forall}\, \omega \in X$ è uniformemente continua e ha senso definire: $\tilde{X}(\omega) = \lim_{D\ni s\to t} X_s(\omega)$. Allora $(\tilde{X})_{t\in[0,1]}$ è la modificazione cercata.

Per confermarlo verifichiamo che $X_t = \tilde{X}_t$ quasi certamente:

$$\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|^\gamma] = \mathbb{E}[|X_t - \lim_{D\ni s\to t} X_s|^\gamma] = \mathbb{E}[\lim_{D\ni s\to t} |X_t - X_s|^\gamma] \leq \liminf_{D\ni s\to t} \mathbb{E}[|X_t - X_s|^\gamma] \overset{\text{hp. teorema}}{=} 0.$$

□

<u>Corollario</u>: Il MB ammette una versione α-Hölder continua (su ogni intervallo finito) $\forall \alpha < \frac{1}{2}$.

dim. Riscaliamo sull'intervallo $[0,1]$. Fissato γ:

$$\mathbb{E}\left[|B_t - B_s|^\gamma\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{B_t - B_s}{\sqrt{t-s}}\right)^\gamma\right] \cdot |t-s|^{\frac{\gamma}{2}} = C_\gamma \cdot |t-s|^{\frac{\gamma}{2}},$$ dove C_γ è una costante

(non è altro che il momento γ di una gaussiana standard). Usiamo teorema precedente con ε t.c.

$1+\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$. Allora, per Teorema, $\alpha < \frac{\varepsilon}{\gamma} < \frac{\frac{\gamma}{2}-1}{\gamma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$ □

Teorema (Modulo di continuità del MB di Lévy): Sia $h(t) = \sqrt{2t \log\frac{1}{t}}$, $t>0$. Allora:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{\varepsilon \to 0^+}\left(\sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ 0<|t-s|<\varepsilon}} \frac{|B_t - B_s|}{h(\varepsilon)}\right) = 1\right) = 1$$

$\Rightarrow \frac{|B_t-B_s|}{\sqrt{2\varepsilon}} \le \frac{|B_t-B_s|}{|t-s|^{\frac12}}$ ma LHS esplode per teorema (gli ho tolto $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$) e dunque non può avere traiettorie $\frac12$-Hölder continue

Oss.: ricordiamo le disuguaglianze di code gaussiane: $Z \sim N(0,1)$ allora $\forall z>0$

$$\frac{z}{z^2+1}\,\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underset{(*_3)}{\le} P(Z>z) \underset{(*_1)}{\le} \frac{1}{z}\,\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

dim. • Fissiamo $\delta, \varepsilon, \eta \in (0,1)$. Poniamo D_n come sopra e $\Delta_n = \{(s,t) \in D_n \mid 0<|s-t|<2^{-n(1-\delta)}\}$

$|\Delta_n| \le 2^{n+1} \cdot 2^{n\delta} \cdot 2$ $(*_2)$

max cose $\le \sum$ cose $\Rightarrow \mathbb{P}(\max \text{''}) \le \mathbb{P}(\sum \text{''}) \le \sum \mathbb{P}(\text{''})$

• $$\mathbb{P}\left(\max_{s,t\in\Delta_n} \frac{|B_t-B_s|}{h(|t-s|)} \ge 1+\varepsilon\right) \le \sum_{(s,t)\in\Delta_n} \mathbb{P}\left(\frac{|B_t-B_s|}{\sqrt{2|t-s|\log\frac{1}{|t-s|}}} \ge 1+\varepsilon\right) = \sum_{(s,t)\in\Delta_n} \mathbb{P}\left(\underbrace{|Z|}_{N(0,1)} \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2\log\frac{1}{|t-s|}}\right)$$

$$\underset{(*_1)}{\le} \sum_{(s,t)\in\Delta_n} \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log\frac{1}{|t-s|}}} \exp\left(-\frac{1}{\cancel{2}}(1+\varepsilon)^2 \cancel{2}\log\frac{1}{|t-s|}\right) \underset{2^{-n(1-\delta)} \ge |t-s|}{\le} \sum_{(s,t)\in\Delta_n} \frac{C(\varepsilon,\delta)}{\sqrt{n}} \cdot 2^{(-(1+\varepsilon)^2(1-\delta)n)} \le$$

↳ il $|\cdot|$ mi dà fattore 2 che maggioro $\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \le 1\right)$

$$\underset{(*_2)}{\le} \frac{C(\varepsilon,\delta)}{\sqrt{n}} 2^{n[(1+\delta)-(1+\varepsilon)^2(1-\delta)]}$$

Borel-Cantelli 1ª parte: ho che $\sum \max$ converge perché la coda per punto precedente va come $\frac{1}{\sqrt{n}}2^{-n}$

• Imponiamo $(1+\delta) < (1+\varepsilon)^2(1-\delta) \Longrightarrow \mathbb{P}$-q.c. $\exists n(\omega)$ t.c. $\forall n \ge n(\omega)$ $\max_{(s,t)\in\Delta_n} \frac{|B_t-B_s|}{h\cdot|t-s|} < 1+\varepsilon$.

Come in Kolmogorov, dati $s,t\in D$, $s\le t$ consideriamo $s_m, t_m \in D_m$. Se $t-s \le 2^{-n(t-\delta)}$ scriviamo

$$B_t - B_s = \sum_{m\ge n}\left(B_{t_{m+1}} - B_{t_m}\right) + \left(B_{t_n} - B_{s_n}\right) + \sum_{m\ge n}\left(B_{s_m} - B_{s_{m+1}}\right)$$ con $(s_n, t_n) \in \Delta_n$. Se

← dettagli: serve $\bar{n} = \bar{n}(\omega,\eta,\delta)$

$n \ge n(\omega)$ si ha $|B_t - B_s| \le \left[2\sum_{m\ge n} h\left(2^{-(m+1)}\right) + h\left(|t-s|\right)\right](1+\varepsilon)$.

$\forall \eta, \delta > 0$ $\exists \bar{n} = \bar{n}(\delta,\eta)$ $\forall n \ge \bar{n}$ $\sum_{m\ge n} h\left(2^{-(m+1)}\right) \le \eta\, h\left(2^{-(n+1)(1-\delta)}\right)$. Allora

$$|B_t - B_s| \le \left[2\eta\, h\big(\underbrace{2^{-(n+1)(1-\delta)}}_{\overset{\wedge\!|}{|t-s|}}\big) + h(|t-s|)\right](1+\varepsilon) \underset{\substack{\text{raccolgo e}\\ \text{mando } \eta\to 0}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}\left(\limsup_{\mu\to 0^+} \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ 0<|s-t|<\mu}} \frac{|B_t - B_s|}{h(\mu)} \le 1+\varepsilon\right) = 1.$$

• Per l'altro caso, sia $\delta > 0$ e consideriamo:

$$L_n := \mathbb{P}\left(\max_{1\le k\le 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{h(2^{-n})} \le 1-\delta\right) \overset{\text{incrementi indipendenti}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{\sqrt{2^{-n}}} \le (1-\delta)\sqrt{2\log 2^n}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(|Z| \le (1-\delta)\sqrt{2\log 2^n}\right)^{2^n} = \left(1 - \mathbb{P}\left(Z > (1-\delta)\sqrt{2\log 2^n}\right)\right)^{2^n} \underset{(*_3)}{\le} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1-\delta)\sqrt{2\log 2^n}}{\left((1-\delta)\sqrt{2\log 2^n}\right)^2+1}\right) 2^{-n(1-\delta)^2}\right)^{2^n} \le$$

$1-x \le e^x$

$$\le \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{\sqrt{n}}\, 2^{n(1-(1-\delta)^2)}\right) \xrightarrow[\text{velocemente}]{n\to+\infty} 0 \overset{\text{B.C.}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}\text{-q.c. } \exists n(\omega) \text{ t.c. } \forall n \ge n(\omega) \text{ t.c.:}$$

$$\max_{1\le k\le 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{h(2^{-n})} > 1-\delta \Rightarrow \text{frequentemente } |B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}| > (1-\delta)\, h(2^{-n}).$$

al variare di n con k fissato (es. la terza coppia frequentemente su n realizza il >).

□

Funzioni di variazione finita

Setting: $A: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $t\in[0,+\infty)$, $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$. Ampiezza: $|\Delta| = \max_{i=1,\dots,n} |t_i - t_{i-1}|$

Def.: $S_t^\Delta = \sum_{i=1}^n |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|$.

Def. (variazione): la variazione di A su $[0,t]$ è $S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta$. A è a variazione finita se $S_t < +\infty$ $\forall t$. A è a variazione limitata se $\exists M$ t.c. $S_t \le M$ $\forall t$.

Da ora in poi, A è continua a destra.

Oss.: • Se $\Delta \ge \Delta'$ partizioni di $[0,t]$, $S_t^\Delta \ge S_t^{\Delta'}$ ← dis. triangolare

• Se $t' \ge t$, $S_{t'} \ge S_t$ ← prendo partizione Δ di $[0,t] \Rightarrow \Delta \cup \{t'\}$ partizione di $[0,t']$

• Se A è crescente, $S_t = S_t^\Delta = A_t - A_0$ $\forall t$ $\forall \Delta$. ← somma telescopica

Prop.: Se A è a variazione finita allora $A_t = I_t - D_t$ dove I_t, D_t sono funzioni crescenti (positive).

dim. Basta porre $I_t = \frac{S_t + A_t}{2}$ e $D_t = \frac{S_t - A_t}{2}$. Sono crescenti: se $t' > t$ allora (scriversi $I_{t'} - I_t$, $D_{t'} - D_t$)

$$S_{t'} - S_t = \sup_{\Delta'} S_{t'}^{\Delta'} - \sup_\Delta S_t^\Delta \ge \sup_\Delta \left(S_t^\Delta + |A_{t'} - A_t|\right) - \sup_\Delta S_t^\Delta = |A_{t'} - A_t|.$$

□

Oss. Se A è continua a dx allora lo sono anche I_t, D_t.

Prop. Sia $F: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ crescente e continua a destra, allora $\exists$ misura μ di Borel t.c. $\mu((-\infty, t]) = F(t)$ (F è la misura di ripartizione di μ).

Dunque, grazie a questo fatto, prendo A continua a dx e a variazione finita, associo ad A I e D crescenti, positive e continue a dx e troviamo due misure μ^+ e μ^-.

Def. (Integrale di Riemann-Stieltjes): Se f è una funzione di Borel localmente finita su $\mathbb{R}^+$ allora possiamo definire l'integrale di Riemann-Stieltjes:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f_s\, dA_s := \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu^+ - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu^-}$$

Oss.: Se $f \in C([0,t])$ questa definizione recupera l'integrale di Riemann:

$$\int_0^{+\infty} f_s\, dA_s = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=0}^n f_{t_i}\left(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}\right)$$

Oss.: Se $A \in C^1([0,+\infty))$ allora è a variazione finita e: $\int_0^{+\infty} f_s\, dA_s = \int_0^{+\infty} f(s) \frac{dA}{ds}(s)\, ds$

ha senso derivare A

__Def.__: Dato $X : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $t \in [0, \infty)$ e Δ partizione di $[0,t]$, poniamo:

$$T_t^\Delta = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^2$$

__Def.__ (variazione quadratica): dato un processo stocastico a valori reali $(X_t)_{t\geq 0}$ si dice che ha variazione quadratica finita se esiste un processo $\langle X \rangle_t := (\langle X, X\rangle_t)_{t\geq 0}$ t.c. $\langle X, X\rangle_t < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall t$

e t.c. $\lim_{n\to\infty} T_t^{\Delta_n} = \langle X, X\rangle_t$ in probabilità $\forall t$, dove Δ_n è una qualsiasi sequenza di partizioni di $[0,t]$ t.c. $|\Delta_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

→ definita pensando X_t v.a. adesso

__Oss.__ X variazione quadratica finita $\not\Leftrightarrow$ $\sup_\Delta T_t^\Delta < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. con Δ partizione di $[0,t]$. Ad esempio per il πB.

__Teorema__: Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è πB $\Rightarrow$ $\langle B, B\rangle_t = t$ $\forall t$. In generale, se X è una misura gaussiana con intensità μ e F è tale che $\mu(F) < \infty$ e $\{F_k^n\}_k$ partizione di F con $\lim_{n\to\infty} \left(\sup_k \mu(F_k^n)\right) = 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \sum (X(F_k^n))^2 = \mu(F)$ in probabilità (in realtà in L^2).

__dim.__

- Deduciamo la tesi per il πB dalla generalizzazione: πB è una misura gaussiana con $\mu(A) = |A|$ con $A \subset [0,+\infty)$ e $B_t = X([0,t])$ quindi $T_t^\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |X((t_i, t_{i+1}])|^2$. Poniamo $F_i^n := (t_i, t_{i+1}]$ partizione di $F = (0,t]$, applicando la tesi il limite cercato è proprio $\mu(F) = |[0,t]| = t$.

essendo partizione $F = \biguplus_k F_k^n \Rightarrow \mu(F) = \sum_k \mu(F_k^n)$

- Vediamo la tesi generale: mostriamo che $\sum_k \left(|X(F_k^n)|^2 - \mu(F_k^n)\right) \longrightarrow 0$ in L^2. Ora,

$X(F_k^n) \sim N(0, \mu(F_k^n))$, $(X(F_k^n))_k$ sono indipendenti al variare di k:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_k \left(|X(F_k^n)|^2 - \mu(F_k^n)\right)\right)^2\right] \overset{\text{linearità}}{=} \sum_k \mathbb{E}\left[\left(|X(F_k^n)|^2 - \mu(F_k^n)\right)^2\right] = 2\sum_k \left(\mu(F_k^n)^2\right) \leq 2\left(\max_k \mu(F_k^n)\right)\mu(F)$$

$\max_k \mu(F_k^n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$$\mathbb{E}[(X^2-\mu)(Y^2-\tilde{\mu})] \overset{\text{indip.}}{=} \mathbb{E}[(X^2-\mu)]\,\mathbb{E}[Y^2-\tilde{\mu}] \overset{\text{def. varianza}}{=} 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\underbrace{|X(A)|^2}_{Y} - \underbrace{\mu(A)}_{\mathbb{E}[Y] \text{ perché } X(A) \text{ centrata}}\right)^2\right] = Var(|X(A)|^2) = \mu(A)^2\, Var\left(\left|\frac{X(A)}{\sqrt{\mu(A)}}\right|^2\right) \overset{Z\sim N(0,1)}{=} Var(Z^2)\mu(A)^2 = 2\mu(A)^2$$

□

__Corollario__: (1) Le traiettorie del πB non sono $\mathbb{P}$-q.c. a var. finita $\forall t > 0$.

(2) Le traiettorie del πB non sono $\mathbb{P}$-q.c. α-Hölder continue per $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

__dim.__ (1) Supponiamo che per $\omega \in \Omega$ si ha $S_t < +\infty$. Allora $\forall \Delta$ partizione di $[0,t]$, si ha:

$$T_t^\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 \leq \left(\sup_{i=0,\dots,n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|\right) \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|$$ e prese Δ_n t.c.

$|\Delta_n| \to 0$, allora: $0 < t = \lim_{n\to+\infty} T_t^{\Delta_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(\sup_{i=0,\dots,n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|\, S_t^{\Delta_n}\right) \leq$

$$\leq S_t \underbrace{\liminf_{n\to+\infty} \sup_{i=0,\dots,n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|}_{\to \text{ continuità della traiettoria del moto browniano}} \leq 0$$, assurdo

$\sum_{i=0}^{n-1}(|t_{i+1}-t_i|^{2\alpha-1}|t_{i+1}-t_i|) \le \sup_i |t_{i+1}-t_i|^{2\alpha-1} \cdot \underbrace{\sum_i |t_{i+1}-t_i|}_{= t}$

(2) $T_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 \le [B]^2_{C^\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1}-t_i|^{2\alpha} \le [B]^2_{C^\alpha} \left(\sup_{i=0,\dots,n-1} \left(|t_{i+1}-t_i|^{2\alpha-1} \right) \right) t.$

Poi passo come sopra al $\lim_{n\to+\infty}$ e per $\alpha \ge \frac{1}{2}$ quello a dx va a 0 ($[B]^2_{C^\alpha}$ limitato). $\square$

Notazione: $Y_t : E^T \to E \quad (x_t)_{t\in T} \xmapsto{Y_t} x_t \quad \forall t \in T$. $S \subseteq T$, $Y_S : E^T \to E^S \quad (x_t)_{t\in T} \xmapsto{Y_S} (x_t)_{t\in S}$

Se $(E, \mathcal{E})$ mis., la σ-algebra prodotto $\mathcal{E}^{\otimes T}$ é generata dalle Y_t (eq. dai cilindri).

Def. (versione canonica): dato un processo $(X_t)_{t\in T}$ definito su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ a valori in $(E, \mathcal{E})$, la sua versione canonica é il processo $(Y_t)_{t\in T}$ su $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T}, \mu)$ dove μ é la legge di X.

Problema: Assegnate delle misure $\{\mu_S \mid S \subseteq T,\ S \text{ finito},\ \mu_S \text{ misura su } \mathcal{E}^{\otimes S}\}$ esiste una misura μ su $\mathcal{E}^{\otimes T}$ t.c. μ_S sia la legge di Y_S rispetto a μ $\forall S \subseteq T$ finito?

Oss. Se esiste μ allora é unica. (se $\exists \mu, \mu' \Rightarrow \mu(A_{t_1} \times \dots \times A_{t_s}) \underset{S=\{t_1,\dots,t_s\}\subseteq T}{\overset{\uparrow}{=}} \mu_S(A_{t_1} \times \dots \times A_{t_s}) = \mu'(A_{t_1} \times \dots \times A_{t_s}) \Rightarrow \mu = \mu'$)

Def. (famiglia proiettiva): la famiglia $\{\mu_S\}$ é proiettiva se: $S' \subseteq S$, $\mu_{S'}(A) = \mu_S(Y_{S'} \in A)$ $\forall A \in \mathcal{E}^{\otimes S'}$, cioé $\mu_{S'}$ é la legge di $Y_{S'}$ rispetto a μ_S.

Teorema (di estensione di Kolmogorov): sia $\{\mu_S\}_{S\subseteq T}$ una famiglia proiettiva di prob. $\mu_S : \mathcal{E}^{\otimes S} \to [0,1]$. Allora $\exists!$ prob. $\mu : \mathcal{E}^{\otimes T} \to [0,1]$ t.c. $\mu_S(A) = \mu(Y_S \in A)$ $\forall S \subseteq T$ finito e $\forall A \in \mathcal{E}^{\otimes S}$.

dim. no dim.

Supponiamo che E sia metrico, completo e separabile (sp. polacco), allora se $(X_t)_{t\ge0}$ é a valori in E a traiettorie continue possiamo pensarlo come v.a. a valori in $C([0,+\infty); E)$ munito della σ-algebra di Borel oppure munito della traccia della σ-algebra $\mathcal{E}^{\otimes T}$ (A é mis. se $\exists \tilde{A} \in \mathcal{E}^{\otimes T}$ t.c. $A = \tilde{A} \cap C([0,+\infty); E)$).

É ben definita la legge μ di $(X_t)_{t\ge0}$ ponendo $\mu(A) := \mathbb{P}(X \in \tilde{A})$.

sia $\mathcal{E}^{\otimes T}$ che $C([0,+\infty); E)$ sono insiemi di sottoins. di E indicizzati sui tempi

Def. (processo di Wiener): la legge μ del moto browniano visto come processo a valori in $C([0,+\infty); \mathbb{R})$ é detta misura di Wiener. Lo spazio $(C([0,+\infty); \mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0,+\infty); \mathbb{R})), \mu)$ é detto spazio di Wiener.

Def. (operatore di shift): Sia $T = [0, +\infty)$ l'operatore di shift θ_t, $t \ge 0$, é $\theta_t : E^{[0,+\infty)} \to E^{[0,+\infty)}$

$(x_s)_{s\ge0} \longmapsto (x_{s+t})_{s\ge0}$. ← guardiamo una traiettoria da t

Si può anche restringere a $C([0,+\infty); E)$. Un processo $(X_t)_{t\ge0}$ é stazionario se la sua legge non cambia con l'azione θ_t $\forall t$.

θ_t lo estendo a un processo: ogni traiettoria $s \to X_s(\omega)$, ω fissato, la guardo dal tempo t. Stazionario: $\mathbb{P}(X_{s_1} \in A_1, \dots, X_{s_n} \in A_n) = \mathbb{P}(X_{s_1+t} \in A_1, \dots, X_{s_n+t} \in A_n)$

Def.: $(X_t)_{t\ge0}$ a valori in $\mathbb{R}^d$ é gaussiano se $\forall t_1, \dots, t_n \ge 0$ la v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ a valori in $\mathbb{R}^{dn}$ é gaussiana.

Oss. dato un processo gaussiano, la sua legge é identificata dalla funzione di media $t \longmapsto \mathbb{E}[X_t]$ e e dalla funzione di autocovarianza $(s,t) \longmapsto \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.

$\boxed{\Rightarrow}$: ovvio (per prop. prec.)

$\boxed{\Leftarrow}$: per prop. prec. $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = F(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_t], \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\ i,j) = F(\mathbb{E}[X_0], \Gamma(0, |i-j|))$ ma stessa cosa per $\mathbb{P}(X_{1+t} \in A_1, \dots, X_{n+t} \in A_n)$

certa funzione

Ex.: un processo $(X_t)_{t \geq 0}$ a valori reali gaussiano è stazionario se e solo se:

- $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] \quad \forall t$
- $\Gamma(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \Gamma(0, |t-s|) \quad \forall s,t \geq 0.$

Prop.: la funzione di covarianza di un processo gaussiano è semidefinita positiva, cioè $\forall t_1, \dots, t_n \geq 0$ $(\Gamma(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simmetrica e semidefinita positiva. Viceversa, data una funzione $(\Gamma(s,t))_{s,t \geq 0}$ semidefinita positiva e $(m_t)_{t \geq 0}$ $\exists$ un processo gaussiano con $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ e $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \Gamma(s,t)$.

dim. $\boxed{\Rightarrow}$ bilinearità Cov + non negatività di Var.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dato $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ poniamo $\mu_S = \mathcal{N}\left((m(t_i))_{i=1}^n, (\Gamma(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,n}\right)$ misura su $\mathbb{R}^{\otimes S}$.

la legge di lei

Notiamo che se $S' \subseteq S$ $Y_{S'}: \mathbb{R}^{\otimes S} \longrightarrow \mathbb{R}^{\otimes S'}$ ha legge $\mathcal{N}\left((m(t))_{t \in S'}, (\Gamma(t,s))_{s,t \in S'}\right) = \mu_{S'}$

Dunque per Kolmogorov $\exists$ μ misura di probabilità su $\left(\mathbb{R}^{[0,+\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,+\infty)}\right)$ che estende $\forall \mu_S$. $\square$

Es.:

- se $m(t) = 0$ e $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\}$, $(X_t)_t$ è MB "grossolano"
- $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\} - st$, $s,t \in [0,1]$. Possiamo riscrivere $\Gamma(s,t)$:

$$\Gamma(s,t) = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,s]}(r)\, \mathbb{1}_{[0,t]}(r)\, dr - \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,s]}(r)\, dr \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}(r)\, dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\mathbb{1}_{[0,s]} - \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,s]}\right)\left(\mathbb{1}_{[0,t]} - \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}\right) dr.$$ Se $m(t) = 0$, $\mathrm{Var}(X_t) = t - t^2 = t(1-t)$

e il processo è detto ponte browniano ($X_0 = X_1 = 0$). Oss.: se $(B_t)_{t \geq 0}$ è MB allora $X_t := B_t - t B_1$ è ponte browniano (bisogna verificare che sia gaussiano, medie e varianze).

sono $0 - 0 = 0$

$\mathrm{Cov}(B_t - tB_1, B_s - sB_1) = $ torna! $\forall t,s \in [0,1]$ e $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \min\{s,t\}$

- data una misura finita (e positiva) su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ μ, la sua funzione caratteristica è $\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mu(x) \in \mathbb{C}$. Se μ è simm. ($\mu(A) = \mu(-A)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ borel) allora $\varphi_\mu(t)$ è reale. Allora $\Gamma(s,t) := \varphi_\mu(t-s)$, $s,t \in \mathbb{R}$ è semidef. positiva, $\Gamma(t,s) =$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-isx}\, d\mu(x) = \langle \varphi_t, \overline{\varphi_s} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)}.$$

Ad esempio $\dfrac{d\mu(x)}{d\mathrm{Leb}} = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \rightsquigarrow \varphi_\mu(t) = e^{\frac{-\sigma^2 t^2}{2}} \Longrightarrow \Gamma(s,t) = e^{-\frac{\sigma^2 (t-s)^2}{2}}$ è semidef. positiva.

Ex.: $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ con $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = e^{\frac{-\sigma^2 (t-s)^2}{2}}$, $m(t) = 0$ ammette una modificazione α-hölderiana, per quali α?

Es.: $\dfrac{d\mu}{d\mathcal{L}eb} = \underbrace{\dfrac{1}{\beta\pi}}_{\beta>0} \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^2} \rightsquigarrow \varphi_\mu(t) = e^{-|t|\beta} \Rightarrow \Gamma(s,t) = e^{-\beta|t-s|}$

Def.: un processo gaussiano t.c. $\mathbb{E}[X_t]=0$ e $Cov(X_t, X_s) = c\, e^{-\beta|t-s|}$ é detto di Ornstein-Uhlenbeck (di parametri β e c) stazionario. Ex.: $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2] \leq 2c\beta|t-s|$

Es.: White noise gaussiano. $\Gamma(s,t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } s=t \\ 0 & , \text{ se } s\neq t \end{cases}$, $m(t)=0 \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non ha una versione continua}}}{(X_t)_{t\geq 0}}$.

Filtrazione e tempi di arresto

Def. (Filtrazione): dato $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio mis. una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é una famiglia di sotto σ-algebre $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ crescente: $\forall s\leq t \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

Def. (processo adattato): dato $(X_t)_{t\geq 0}$ processo stoc. e una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, esso si dice adattato se X_t é $\mathcal{F}_t$-mis. $\forall t\geq 0$. Dato $(X_t)_{t\geq 0}$ la sua filtrazione naturale é $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s \mid s\leq t)$

Es. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ var. indip. uniformi su $\{0,1\}$. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i \,;\, i=0,\dots,n)$ rende $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adattato.

Anche $\left(S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma $(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ non é adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Def.: $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrazione. Si definiscono $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\mathcal{F}_s \mid s<t) = \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s$ e $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. Osserviamo che $\mathcal{F}_{t^-} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$. Se $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é detta continua a destra.

Def. (tempo di arresto): dato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, una v.a. $T: \Omega \longrightarrow [0,+\infty]$ é detta tempo di arresto (rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) se vale che $\{T>t\}, \{T\leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t\geq 0$ $\left(\Rightarrow \{T<+\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T\leq n) \in \mathcal{F}\right)$.

$\boxed{\text{richiedere queste implica } \{T<t\}\in\mathcal{F}_t \text{ e dunque } \{T\geq t\}\in\mathcal{F}_t}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\Leftarrow}$ per questa freccia non serve continua a dx

Oss. $\{T<t\} = \bigcup_{\substack{s<t \\ s\in\mathbb{Q}}} \{T\leq s\} \in \mathcal{F}_{t^-}$. Se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ é continua a dx, $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t \;\; \forall t \Leftrightarrow T$ é tempo di arresto

$\boxed{\Rightarrow}$: $\{T\leq t\} = \bigcap_{\substack{t+\varepsilon>s>t \\ s\in\mathbb{Q}}} \{T<s\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \;\; \forall\varepsilon>0 \Rightarrow$ $\{T\leq t\} \in \mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_t$; $\{T>t\} = \{T\leq t\}^c \Rightarrow \in \mathcal{F}_t$

$\boxed{\Leftarrow}$: $\{T<t\} = \{T\geq t\}^c = \left(\bigcap_{\substack{t>s>t-\varepsilon \\ s\in\mathbb{Q}}} \{T>s\}\right)^c$ ma $\{T>s\}\in\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$

Def.: dato un t.d.a. T, si pone $\mathcal{F}_T$ la σ-algebra degli $A\in\mathcal{F}$ t.c. $A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t \;\; \forall t\geq 0$.

Oss. T é $\mathcal{F}_T$-misurabile. $\mathcal{F}_T$-misurabile $\Leftrightarrow \forall s\geq 0 \; T^{-1}(-\infty,s] \in \mathcal{F}_T$ (é una base in $\mathbb{R}^+$) $\Leftrightarrow \{T\leq s\}\in\mathcal{F}_T$; Ma: $\{T\leq s\}\cap\{T\leq t\} = \{T\leq \min\{s,t\}\} \in \mathcal{F}_{\min\{s,t\}} \subseteq \mathcal{F}_t$

Ex. Se $S\leq T$ t.d.a. $\Rightarrow \mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

basta notare che $\{S\leq t\} \supseteq \{T\leq t\}$ e dunque $A\cap\{T\leq t\} = \overbrace{A\cap\{S\leq t\}}^{\in\,\mathcal{F}_t} \cap \overbrace{\{T\leq t\}}^{\in\,\mathcal{F}_t}$

Prop.: Sia (E,d) s.m. e siano $C\subseteq E$ chiuso, $A\subseteq E$ aperto, $(X_t)_{t\geq 0}$ processo adatta a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a traiettorie continue. Sia $T_C := \inf\{t\geq 0 \mid X_t\in C\}$ e $T_A = \inf\{t\geq 0 \mid X_t\in A\}$. Allora:

① T_C é t.d.a. rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ② T_A é t.d.a. rispetto a $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$.

dim. ① Sia $d_C: E\longrightarrow [0,+\infty)$, $d_C(x) = \inf_{y\in C} d(x,y)$, allora $T_C = \inf\{t \mid d_C(X_t)=0\}$. Ora:

$\{T_C>t\} = \{d_C(X_s)>0 \;\; \forall s\in[0,t]\} \overset{\text{traiettorie continue: approssimo } X_s \xrightarrow{s\in\mathbb{Q}} X_t}{=} \bigcup_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}} \bigcap_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \underbrace{\{d_C(X_s)\geq\varepsilon\}}_{\in\,\mathcal{F}_s\,\subseteq\,\mathcal{F}_t \;\leftarrow\; d_C \text{ é continua}}$, $\{T_C\leq t\}$ é il complementare.

② $\{T_A \le t\} = \bigcap_{\substack{t<r<t+\varepsilon_0 \\ r\in\mathbb{Q}}} \{T_A < r\} = \bigcap_{\substack{t<r<t+\varepsilon_0 \\ r\in\mathbb{Q}}} \bigcup_{\substack{s<r \\ s\in\mathbb{Q}}} \{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t+\varepsilon_0} \quad \forall \varepsilon_0>0$. ($\{T_A > t\}$ e' il complementare).

Traiettorie continue

qui uso che A è aperto

$\square$

Dato un processo $(X_t)_{t\ge0}$ adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ e un t.d.a. T, vogliamo definire la v.a. $X_T : \Omega \to E$

$\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$. È $\mathcal{F}_T$-misurabile?

Def. (progressivamente misurabile): un processo $(X_t)_{t\ge0}$ si dice progressivamente misurabile rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ se $\forall t\ge0$ la "restrizione" $X : \Omega\times[0,t] \to E$ $(\omega,s)\mapsto X_s(\omega)$ è misurabile con $\Omega\times[0,t]$ munito della σ-algebra $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$.

Oss.: X è pr. misurabile $\Rightarrow$ adattato. $\to X_t : \Omega \to E \quad X\circ i_t = X_t$ con $i_t : \Omega \to \Omega\times\{t\}$, $\omega \mapsto (\omega,t)$ $\mathcal{F}_t$-mis.

Ex.: Se $(X_t)_{t\ge0}$ è adattato e ha traiettorie continue (a dx) allora è pr. misurabile.

Prop.: Se $(X_t)_{t\ge0}$ è pr. misurabile e T è t.d.a. allora $X_T \cdot 1\!\!1_{\{T<+\infty\}}$ è $\mathcal{F}_T$-misurabile.

Def.: se T è t.d.a. e $(X_t)_{t\ge0}$ è progressivamente misurabile, il processo arrestato a T è

$X_t^T = X_{T\wedge t}$; è pr. misurabile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\ge0}$.

$\forall T$ t.d.a. $\exists \{T_k\}_k \downarrow T$, T_k v.a. semplici a valori in $[0,+\infty]$ e t.d.a.: $T_k = \begin{cases} q2^{-k} & \text{se } (q-1)2^{-k} < T \le 2^{-k}q \le K \\ +\infty & \text{se } T > K \end{cases}$

Completamento di una filtrazione: $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, $(X_t)_{t\ge0}$ adattato. $(Y_t)_{t\ge0}$ modificazione, è adattato?

Def. (completamento): sia $N \subseteq \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t \mid t\ge0)$ $(\subseteq \mathcal{F})$ l'insieme degli eventi $\mathbb{P}$-trascurabili. Allora le σ-algebre $(\mathcal{F}_t^{\mathbb{P}})_{t\ge0} = (\sigma(\mathcal{F}_t \cup N))_{t\ge0}$ sono una filtrazione detta il $\mathbb{P}$-completamento di $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$. Si chiama l'allargamento abituale la filtrazione $(\mathcal{F}_{t^+}^{\mathbb{P}})_{t\ge0}$ che è $\mathbb{P}$-completa e continua a dx (ipotesi abituali).

Oss. Se invece di una singola $\mathbb{P}$ disponiamo di una famiglia $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, poniamo $N_\theta = \{A\in\mathcal{F}_\infty \mid \mathbb{P}^\theta(A)=0\}$ e $N_\Theta = \bigcap_{\theta\in\Theta} N_\theta$. La def. sopra si estende.

Def.: un insieme $F \subseteq \Omega$ è trascurabile rispetto a una famiglia $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ se $F \subseteq A_\theta \in N_\theta$ $\forall\theta\in\Theta$.

Martingale: Idea: uno scommettitore gioca una sequenza di giochi d'azzardo puntando 1 € in ogni partita e registra l'andamento del suo capitale $M_{t_0} \rightsquigarrow M_{t_1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow M_{t_d}$. Se i giochi sono onesti ci si aspetta che $\mathbb{E}[M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = M_{t_{i-1}}$.

Def.: Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sp. di prob. e sia $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ una filtrazione ($T=\{t_0<t_1<\dots<t_d\}$, $T=\mathbb{N}$, $T=[a,b]$, $T=[0,+\infty)$). Allora un processo a valori reali $(M_t)_{t\in T}$ è detto $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$-martingala se:

1. È integrabile: $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \quad \forall t \in T$;

2. È adattato;

3. $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s \quad \forall s \le t; \ s,t \in T$ (ortogonalità degli incrementi: $\mathbb{E}[(M_t - M_s) \mid \mathcal{F}_s] = 0$)

$\mathbb{E}[(M_t - M_s) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[M_s \mid \mathcal{F}_s]$, $\mathbb{E}[M_s \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ poiché $\mathcal{F}_s$-mis.

Se in (3) c'è il $\ge$ si dice submartingala; se $\le$ supermartingala

Oss. • $(M_t)_{t\in T}, (N_t)_{t \in T}$ submart. $\Rightarrow (\alpha N_t + \beta M_t)_{t\in T}$ submart. $\forall \alpha, \beta \ge 0$. Se sono martingala vale $\forall \alpha, \beta$ (sono uno sp. vettoriale).

• Se $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e $(M_t)_{t\in T} \in I \ \forall t \in T$ (q.c.) e $\varphi(M_t)$ è integrabile e $(M_t)_{t\in T}$ martingala

$\to (\varphi(M_t))_{t\in T}$ è submartingala (per Jensen $\mathbb{E}[\varphi(M_t) \mid \mathcal{F}_s] \ge \varphi(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]) = \varphi(M_s)$).

• Lo stesso vale se $(M_t)_{t\in T}$ è submartingala e φ è convessa e crescente.

Es.: $(B_t)_{t\ge 0}$ MB munito della filtrazione naturale $(\mathcal{F}_t^0)_{t\ge 0}$.

1. $(B_t)_{t\ge0}$ è martingala 2. $(B_t^2 - t)_{t\ge 0}$ è mart. 3. $\left(\exp\left(\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}\right)\right)_{t\ge0}$ è martingala.

dim. Integrabilità e adattato ok. Siano $s \le t$:

1. $\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s^0] = \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}_s^0] + B_s \overset{B_t - B_s \sim N(0,\, t-s)}{=} B_s$

2. $\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s^0] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s^0] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 \mid \mathcal{F}_s^0] + B_s^2 + 2\,\mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s \mid \mathcal{F}_s^0] =$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mathbb{E}[X]^2}_{=0}$; $(B_t - B_s), (B_s - B_0)$ indipendenti $\Rightarrow$ spezzo e $=0$

$= t - s + B_s^2$.

3. $\mathbb{E}[\exp(\alpha B_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\exp(\alpha(B_t - B_s)) \mid \mathcal{F}_s] \exp(\alpha B_s) = \exp(\alpha^2 (t-s)/2) \exp(\alpha B_s)$.

ex. $Z \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}[\exp(\alpha Z)] = \exp\left(\alpha m + \frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right)$

$\square$

Ex.: Siano $(X_i)_{i=1}^{+\infty}$ v.a. ind., $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i \mid i = 1, \dots, n)$; allora:

1. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ è martingala (se $\mathbb{E}[X_i] = 0 \quad \forall i$);

2. $V_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i^2])$ (");

3. $M_n = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\exp(\alpha X_i)}{\mathbb{E}[\exp(\alpha X_i)]} \right)$ (").

Def. (esponenziale stocastico): $\exp\left(\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}\right)$ è detta "esponenziale stocastico" di $(B_t)_{t\ge 0}$.

Def. (portafoglio): $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala, al tempo "$n-1$" possiamo puntare H_n (≥ 0) "euro" e otteniamo $H_n \cdot (M_n - M_{n-1})$. Di conseguenza il portafoglio si descrive così: $\begin{cases} Y_0 = M_0 \\ Y_n = Y_{n-1} + H_n (M_n - M_{n-1}) \quad \forall n \ge 1 \end{cases}$

Supponiamo che • H_n sia $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile • $H_n(\omega) \le C_n$ costante $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$

Allora si ha che $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è martingala (analogo se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingala):

① Integrabilità: per induzione ② Adattato: per induzione ③ $\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[H_n(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$

$= H_n\, \mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$ (Notazione: il processo Y si indica con $Y = HM$ ("$H \cdot dM$")).

<u>Esempio</u>: $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ t.d.a. Poniamo $\boxed{H_n = 1_{\{T > n-1\}} = 1_{\{T \geq n\}} = 1_{[0,T]}(n)}$. Allora

$Y_n = Y_0 + \sum_{k\leq n,\ k \leq T} H_k(M_k - M_{k-1}) = M_0 + (M_{n\wedge T} - M_0)$

si trova che $\underbrace{Y_n = M_n^T = M_{n\wedge T}}_{(*)}$. Dunque $\mathbb{E}[M_{T\wedge n}] \overset{M_{T\wedge n} = Y_n \text{ che è martingala}}{=} \mathbb{E}[M_{T\wedge 0}] = \mathbb{E}[M_0]$ $\forall n$ $\forall T$ t.d.a.

<u>Prop.</u>: (teorema di arresto opzionale, versione discreta e limitata): Sia $(M_n)_n$ adattato e integrabile. Allora è martingala $\iff \forall S, T$ t.d.a. t.c. $\overbrace{S \leq T}^{\text{sono sui naturali}} \leq \overset{\text{costante}}{C}$ si ha $\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T]$. Inoltre, vale $\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S$ (Se $(M_n)_n$ è submart c'è il $\geq$, supermart. c'è il $\leq$).

<u>dim.</u> $\boxed{\Longrightarrow}$ Sia $(M_n)_n$ martingala. Poniamo $H_n = 1_{\{T>n-1\}} - 1_{\{S>n-1\}} = 1_{\{S \leq n-1 \leq T\}}$ ($\in \mathcal{F}_{n-1}$). Allora

$\mathbb{E}[Y_C] = \mathbb{E}[(H\cdot M)_C] = \mathbb{E}[(1_{\{T>\cdot\}} \cdot M)_C - (1_{\{S>\cdot\}}\cdot M)_C] \overset{(*)}{=} \mathbb{E}[M_C^T - M_C^S] = \mathbb{E}[M_T - M_S]$ ma $\mathbb{E}[Y_C] =$ $\mathbb{E}[Y_0] = 0$. (WLOG $M_0 = 0$).

sono nel caso (*) sopra

$(H\cdot M)_C = \sum_{k\leq C} H_k(M_k - M_{k-1}) = \sum_{k \leq C} 1_{\{T \geq c-1\}}(M_k - M_{k-1}) - \sum_{k\leq C} 1_{\{S \leq c-1\}}(M_k - M_{k-1}) = (1_{\{T>\cdot\}} \cdot M)_C - (1_{\{S>\cdot\}}\cdot M)_C$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Dati $S \leq T \leq C$ t.d.a. limitati e $B \in \mathcal{F}_S$ definiamo $S^B(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{se } \omega \in B \\ +\infty & \text{se } \omega \notin B \end{cases}$. Ex: S^B è t.d.a.

Similmente definiamo T^B che è t.d.a. ($\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$). I tempi $S^B \wedge C$, $T^B \wedge C$ sono t.d.a. limitati. Allora: $\mathbb{E}[M_{S^B\wedge C}] = \mathbb{E}[M_{T^B} \wedge C] \overset{\text{spezzo sui casi}}{\iff} \mathbb{E}[M_S 1_B + M_C 1_{B^c}] = \mathbb{E}[M_T 1_B + M_C 1_{B^c}]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[M_S 1_B] = \mathbb{E}[M_T 1_B] \Rightarrow \mathbb{E}[(M_T - M_S)1_B] = 0$ $\forall B \in \mathcal{F}_S \Rightarrow \mathbb{E}[M_T - M_S \mid \mathcal{F}_S] = 0$. Dato che M_S è $\mathcal{F}_S$-mis. (ex.) $\Rightarrow \mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S$, in particolare vale per $S = s$ e $T = t$, tesi. □

?

<u>Prop.</u>: Siano $(M_n)_{n=0}^N$ submart. e $\lambda > 0$. Allora: $\mathbb{P}\left(\max_{n=0,\dots,N} M_n \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left[M_N \cdot 1_{\{\max_{n=0,\dots,N} M_n \geq \lambda\}}\right] / \lambda$

<u>dim.</u> Poniamo $S_K = \inf\{n \in \{0,1,\dots,N\} \mid M_n \geq \lambda\}$. S è t.d.a., infatti:

$\{S > k\} = \bigcap_{n=0}^{k} \{M_n < \lambda\} \in \mathcal{F}_k$ ($\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_k$). S è a valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (inf$(\emptyset) := +\infty$, S non è limitato). $T = N$ (prendo T costante) $\overset{\text{arresto opzionale}}{\Longrightarrow}$ (*) $\mathbb{E}[\underbrace{M_{S\wedge N}}_{\text{lui è limitato}}] \leq \mathbb{E}[M_N]$ (*)

$A = \{\max_{n=0,\dots,N} M_n \geq \lambda\} = \{S < +\infty\}$. $\mathbb{E}[M_{S\wedge N}] = \mathbb{E}[M_{S\wedge N} \cdot 1_{\{S<+\infty\}} + M_{S\wedge N} \cdot 1_{\{S=+\infty\}}] =$

$= \mathbb{E}[M_S \cdot 1_{\{S<+\infty\}} + M_N \cdot 1_{\{S=+\infty\}}] \geq \lambda\, \mathbb{P}(S<+\infty) + \mathbb{E}[M_N \cdot 1_{\{S=+\infty\}}]$ (*) Ma

$\mathbb{E}[M_N] \overset{(*)}{=} \mathbb{E}[M_N \cdot 1_{\{S<+\infty\}} + M_N \cdot 1_{\{S=+\infty\}}] \Rightarrow \lambda\, \mathbb{P}(S < +\infty) \leq \mathbb{E}[M_N \cdot 1_{\{S<+\infty\}}]$. □

<u>Corollario</u>: Sia $(M_n)_{n=0}^N$ una submartingala positiva o una martingala. Allora $\forall p \geq 1$ $\forall \lambda > 0$ $\mathbb{P}\left(\max_{n=0,\dots,N} |M_n| \geq \lambda\right) \leq \dfrac{\mathbb{E}[|M_N|^p]}{\lambda^p}$.

Inoltre, $\forall p > 1$ $\mathbb{E}\left[\max_{n=0,\dots,N} |M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \dfrac{p}{p-1}\, \mathbb{E}[|M_N|^p]^{\frac{1}{p}}$.

<u>dim.</u> • Se M_n è mart., $|\cdot|$ convesso $\Rightarrow |M_n|$ submartingala positiva. Se M_n è submartingala positiva e $\mathbb{E}[M_N^p] < +\infty$

allora $\forall n=0,\dots,N$ $\mathbb{E}[M_n^p]<+\infty$: $0\le M_n\le\mathbb{E}[M_N\mid\mathcal{F}_n]\overset{\text{Jensen}}{\Longrightarrow}M_n^p\le\mathbb{E}[M_N^p\mid\mathcal{F}_n]$ → passo ai valori attesi

↗ sennò sarebbe ovviamente vera la dis. ↗ $|M_n|$ sub., $\wedge^p$ convessa, int. per hp.

WLOG $M_n\in L^p$, allora $(|M_n|^p)_n$ è submartingala $\Rightarrow$ $\forall c>0$ $\mathbb{P}\left(\max_{n=0,\dots,N}|M_n|^p\ge c\right)\le\dfrac{\mathbb{E}\left[|M_N|^p\cdot\mathbb{1}_{\{\max_{n=0,\dots,N}|M_n|^p\ge c\}}\right]}{c}$ ← prop. prec.

con $c=\lambda^p$. $\mathbb{P}\left(\overbrace{\max_{n=0,\dots,N}|M_n|}^{M^*\ \leftarrow\ \text{per il II punto}}\ge\lambda\right)\le\dfrac{\mathbb{E}\left[|M_N|^p\cdot\mathbb{1}_{\{\max_{n=0,\dots,N}|M_n|\ge\lambda\}}\right]}{\lambda^p}\le\dfrac{\mathbb{E}[|M_N|^p]}{\lambda^p}$

$$\mathbb{E}[(M^*)^p]=\int_0^{+\infty}\mathbb{P}\left((M^*)^p>r\right)dr\overset{r=\lambda^p,\ dr=p\lambda^{p-1}d\lambda}{=}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(M^*>\lambda)\,p\,\lambda^{p-1}d\lambda\overset{\text{Prop.}}{\le}\int_0^{+\infty}\mathbb{E}\left[|M_N|\cdot\mathbb{1}_{\{M^*\ge\lambda\}}\right]p\,\lambda^{p-2}d\lambda=$$

Fubini – Tonelli (funzioni positive)

$$=\mathbb{E}\left[|M_N|\cdot p\cdot\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{M^*\ge\lambda\}}\lambda^{p-2}d\lambda\right]=\mathbb{E}\left[|M_N|\cdot p\cdot\int_0^{M^*}\lambda^{p-2}d\lambda\right]=\mathbb{E}\left[|M_N|\frac{p}{p-1}(M^*)^{p-1}\right]\le$$

Hölder $p,\frac{p}{p-1}$

$$\le\frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_N|^p]^{\frac1p}\cdot\mathbb{E}[(M^*)^p]^{1-\frac1p}.$$

Per assicurare che il termine da dividere sia finito, si considera $M^*\wedge K$, $K>0$ costante, si manda $K\to+\infty$ e si usa Beppo-Levi. □

→ controllo $\forall K$ $\mathbb{E}[(M^*\wedge K)^p]^{\frac1p}\le\frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|M_N|^p]^{\frac1p}<+\infty$ ← non dipende da K

<u>Teorema</u> (disuguaglianze massimali di Doob): Se $(X_t)_{t\in T}$ mart. continua a dx, $T\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, allora, posto $X^*=\sup_{t\in T}|X_t|$, $\forall p\ge1$ $\forall\lambda>0$ $\mathbb{P}(X^*\ge\lambda)\le\sup_{t\in T}\dfrac{\mathbb{E}[|X_t|^p]}{\lambda^p}$, $\forall p>1$ $\mathbb{E}[(X^*)^p]^{\frac1p}\le\frac{p}{p-1}\sup_{t\in T}\mathbb{E}[|X_t|^p]^{\frac1p}$.

<u>dim.</u> Per $F\subseteq T$ finito poniamo $X_F^*=\sup_{t\in F}|X_t|$. Se $D\subseteq T$ è un denso numerabile, scriviamo le disuguaglianze per $F_n=\{t_i\}_{i=1}^n$, $D=\{t_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Per Beppo-Levi otteniamo le disuguaglianze per X_D^*; per continuità a dx, $X_D^*=X^*$. (# dis. uguale). □

<u>Esempio</u>: Sia $(B_t)_{t\ge0}$ BM. Poniamo $S_t=\max_{0\le s\le t}B_s$. Allora $\forall a>0$ $\forall t>0$ $\mathbb{P}(S_t>at)\le\exp\left(-\frac{a^2t}{2}\right)$.

$\boxed{\text{Oss.: vedremo che } \mathbb{P}(S_t>\lambda)=\mathbb{P}(|B_t|>\lambda)\ \forall\lambda.}$

dim.

porto dentro il sup con l'= e poi ho il ≥ perché ci metto

Ricordiamo la martingala $M_t^\alpha:=\exp\left(\alpha B_t-\frac{\alpha^2t}{2}\right)$, $\alpha>0$ $t\ge0$. $\sup_{0\le s\le t}M_s^\alpha\ge\exp\left(\alpha S_t-\alpha^2\frac t2\right)$. Nell'evento $S_t>at\Rightarrow\sup_{0\le s\le t}M_s^\alpha\ge\exp\left(\alpha at-\alpha^2\frac t2\right)\Rightarrow\mathbb{P}(S_t>at)\le\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}M_s^\alpha\ge\exp\left(\alpha at-\alpha^2\frac t2\right)\right)\overset{\text{Doob con }p=1}{\le}$

se $A\Rightarrow B$ allora $\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B)$

$\le\sup_{0\le s\le t}\overbrace{\mathbb{E}[M_s^\alpha]}^{1}\cdot\exp\left(-\alpha at+\alpha^2\frac t2\right)$, $\alpha=a$.

<u>Teorema</u> (degli attraversamenti di Doob): dato un insieme di tempi $F=\{t_1<t_2<\dots<t_d\}$ e un processo $(M_t)_{t\in F}$, definiamo i seguenti t.d.a. ($a<b\in\mathbb{R}$): $S_1=\inf\{t\in F\mid M_t\le a\}$ $S_2=\inf\{t\in F\mid t\ge S_1,\ M_t\ge b\}$ e analogamente S_{2k+1}, S_{2k+2}, alternando a e b. (Oss. $S_k=+\infty$ $\forall k>d$).

Definiamo $U(M,F,[a,b])=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{1}_{\{S_{2k}<+\infty\}}$ → # di attraversamenti in salita. (Oss. $D(M,F,[a,b])=U(-M,F,[-b,-a])$).

Se T è infinito numerabile, $U((M_t)_{t\in T},T,[a,b])=\sup_{F\subseteq T\text{ finito}}U((M_t)_{t\in F},F,[a,b])$.

Sia $(M_t)_{t\in T}$ una supermartingala, T numerabile. $\mathbb{E}\left[U((M_t)_{t\in T},T,[a,b])\right]\le\dfrac{\sup_{t\in T}\mathbb{E}[(M_t-a)^-]}{b-a}$ ← parte negativa

(Oss. $\sup_{t\in T}\mathbb{E}[(M_t-a)^-]\overset{\text{ovvio}}{\le}\sup_{t\in T}\mathbb{E}[|M_t|]+a$.)

<u>dim.</u> WLOG basta il caso $T=F=\{t_1<\dots<t_d\}$ finito. $\forall k=0,\dots,d$ applichiamo arresto opzio-

← come nella dis. di Doob passo al denso D

nale ai tempi $S_{2K+1} \le S_{2K+2}$, o meglio $S_{2K+1} \wedge t_d \le S_{2K+2} \wedge t_d \le t_d$:

$$\mathbb{E}\left[M_{S_{2K+1}\wedge t_d}\right] \ge \mathbb{E}\left[M_{S_{2K+2}\wedge t_d}\right] \Rightarrow 0 \ge \mathbb{E}\left[M_{S_{2K+2}\wedge t_d} - M_{S_{2K+1}\wedge t_d}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(M_{S_{2K+2}\wedge t_d} - M_{S_{2K+1}\wedge t_d}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{S_{2K+2}<+\infty\}} + \left(M_{S_{2K+2}\wedge t_d} - M_{S_{2K+1}\wedge t_d}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{S_{2K+2}=+\infty\}}\right] \ge$$

$$\ge (b-a)\,\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{2K+2}<+\infty\}}\right] + \mathbb{E}\left[\left(M_{t_d} - M_{S_{2K+1}}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{S_{2K+2}=+\infty,\ S_{2K+1}<+\infty\}}\right] \ge$$

rispezzo; ma se $S_{2K+2} = S_{2K+1} = +\infty \Rightarrow t_d$ è il minimo e si annullano

$$\ge (b-a)\,\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_{2K+2}<+\infty\}}\right] - \mathbb{E}\left[\left(M_{t_d} - a\right)^- \cdot \mathbb{1}_{\{S_{2K+1}<S_{2K+2}=+\infty\}}\right].$$

spezzo $f = f^+ - f^-$ ma $\mathbb{E}[f^+] \ge 0$

Sommiamo per $K = 0, \_\_, d$

A_K disgiunti perché se $K<K'$ allora $+\infty = S_{K+2} \le S_{2K'+1}$

$$\Rightarrow 0 \ge (b-a)\,\mathbb{E}\left[U(M,F,[a,b])\right] - \mathbb{E}\Big[(M_{t_d} - a)^- \cdot \sum_{K=0}^{d} \mathbb{1}_{\underbrace{\{S_{2K+1}<S_{2K+2}=+\infty\}}_{A_K}}\Big] \ge$$

$\sum \mathbb{1}_{A_K} \le \mathbb{1}_\Omega = 1$

$$\ge (b-a)\,\mathbb{E}\left[U(M,F,[a,b])\right] - \mathbb{E}\left[(M_{t_d}-a)^-\right]. \quad \square$$

<u>Teorema</u>: Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala t.c. $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$. Allora $\mathbb{P}$-q.c. $\exists \lim_{n\to+\infty} X_n$ (finito $\mathbb{P}$-q.c.).

manca costante ma non ci interessa; hp.

<u>dim.</u> sappiamo che $\forall a<b$ $\mathbb{E}[D(X,\mathbb{N},[a,b])] \le \sup_n \mathbb{E}[(X_n-b)^+] \le \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] + |b| < +\infty$

$\Rightarrow D(X,\mathbb{N},[a,b]) < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$-q.c. $D(X,\mathbb{N},[a,b]) < +\infty$ $\forall a,b\in\mathbb{Q}$, $a<b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \liminf_n X_n = \limsup_n X_n$ $\mathbb{P}$-q.c. infatti: se $\liminf_n X_n(\omega) < \limsup_n X_n(\omega)$, $\exists a,b\in\mathbb{Q}$ t.c.

sto frequentemente sotto a e sopra b

$\liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup_n X_n(\omega) \Rightarrow D(X(\omega),\mathbb{N},[a,b]) = +\infty$, ma $\{\liminf X_n < \limsup X_n\} \subseteq \underbrace{\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \{D(\cdot) = +\infty\}}_{\text{trascur.}}$

Allora $\lim_n X_n(\omega)$ $\exists$ in $\overline{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow \lim_n |X_n(\omega)|$ esiste in $[0,+\infty]$. Per Fatou, $\mathbb{E}[\lim_n |X_n|] \le$

$\le \liminf_n \mathbb{E}[|X_n|] \le \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$, quindi $\lim_n |X_n|$ è integrabile. $\square$

<u>N.B.</u>: possiamo anche dire che $\lim_{n\to+\infty} X_n = X_\infty$ in L^1? No.

indip. gaussiane $N(0,1)$

<u>Esempio</u>: siano $(B_t)_{t\ge 0}$ BM, $\alpha\in\mathbb{R}$, $M_t^\alpha := \exp\left(\alpha B_t - \alpha^2 \frac{t}{2}\right)$. $B_n := \sum_{i=1}^{n} (B_i - B_{i-1})$

$\Rightarrow \liminf_n B_n = -\infty$, $\limsup_n B_n = +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. Allora $(M_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa le hp. del teorema,

lungo la sottosuccessione

$M_n^\alpha \to 0$ lungo una sottosucc. $\Rightarrow \lim_n M_n^\alpha = 0$ $\mathbb{P}$-q.c. Non può essere limite in L^1, altrimenti

1, risultato standard

$0 = \mathbb{E}[\lim_n M_n^\alpha] = \lim_n \mathbb{E}[M_n^\alpha] = 1$, $\lightning$.

<u>Esempio</u>: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}([0,1])$, $\mathcal{F}_n = \sigma\left([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \mid k = 0, \_\_, 2^n - 1\right)$, μ misura di prob.

su $[0,1]$. Poniamo $X_n(\omega) = 2^n \mu\left([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\right)$ se $\omega\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$, $X_n(1) = 0$.

Ex: con $\mathbb{P} = \mathcal{L}$ebesgue, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è mart., $\mathbb{E}[X_n] = 1$. Se $\mu = \delta_x$ fissato, $X_\infty = 0$, $X_n \to 0$ quando $n\to+\infty$

$\mathbb{P}$-q.c. ma non in L^1.

X_n fa 2^n in un intervallo che tende a un punto e 0 altrove

$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$

$\cdot \int_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} X_{n+1} = \int_{[k2^{-n}, 2^{-n}(k+\frac{1}{2})]} X_{n+1} + \int_{[2^{-n}(k+\frac{1}{2}),(k+1)2^{-n}]} X_{n+1}$

$[(2k)2^{-n-1}, 2^{-n-1}(2k+1)]$

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} 2^n \mu([\,''\,])\, d\mathcal{L} = \cancel{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu([\,''\,]) \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}} = \mu(\cup[\,''\,]) = \mu([0,1]) = 1$$

Uniforme integrabilità e teorema di Vitali

Def. (uniformemente integrabile): una famiglia $(X_i)_{i\in I}$ di v.a. reali è detta uniformemente integrabile se $\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] = 0$.

Oss. • Se $(X_i)_{i\in I} = (X)$ con X integrabile $\Rightarrow$ è unif. integrabile.

$|X| \cdot \mathbb{1}_{\{|X|\geq\lambda\}} \leq |X|$ ma $\exists \bar\lambda$ $|X| \leq \bar\lambda$ per integr $\Rightarrow$ tesi

• Se $(X_i)_{i\in I}$ è unif. int. $\Rightarrow \underbrace{\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|] < +\infty}$.

sia λ t.c. $\sup_i \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] \leq 1$ $\Rightarrow$
$\mathbb{E}[|X_i|] \leq \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|\leq\lambda\}}] + 1 \leq \lambda + 1$

Lemma: $(X_i)_{i\in I}$ è unif. integrabile $\Longleftrightarrow$ è limitata in L^1 e $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) < \delta$ allora $\mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_A] < \varepsilon \quad \forall i \in I$.

dim. $\boxed{\Rightarrow}$ limitata ok. Dato $\varepsilon>0$, sia $\lambda>0$ t.c. $\sup_{i\in I} [|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] < \frac{\varepsilon}{2}$. Se $\mathbb{P}(A) < \delta := \frac{\varepsilon}{2\lambda}$,

$$\mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|\leq\lambda\}}] + \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] < \lambda\,\mathbb{P}(A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lambda\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

la faccio su più roba

$\boxed{\Leftarrow}$ $\underset{\text{Markov}}{\mathbb{P}(|X_i|>\lambda) \leq} \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{\lambda} \leq \frac{\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|]}{\lambda}$. Dato $\varepsilon>0$ troviamo $\delta>0$ e $\lambda = 2\,\frac{\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|]}{\delta}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] \leq \varepsilon$. $\quad \to A,\ \mathbb{P}(A)<\delta$ $\quad\square$

Teorema (Vitali): Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unif. integr. e convergente in prob. a X_∞. Allora $X_\infty \in L^1$ e $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] = 0$.

dim.: no. $\square$

Oss.: • Se $(Y_j)_{j\in J}$ unif. integr., $(X_i)_{i\in I}$ t.c. $\forall i\in I\ \exists j\in J$ t.c. $|X_i| \leq |Y_j|$, allora $(X_i)_{i\in I}$ unif. integr.; infatti dato $\lambda>0$ $\mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] \leq \mathbb{E}[|Y_j| \cdot \mathbb{1}_{\{|Y_j|>\lambda\}}]$.

• Se $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$ allora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ è unif. int. (ex.).

• Da un certo $\bar n$ $\forall n \geq X_{\bar n}$ $|X_{\bar n}| \leq |X_\infty| + \varepsilon$ $\Rightarrow \mathbb{E}[X_{\bar n}] \leq \mathbb{E}[X_\infty] + \varepsilon \leq C + \varepsilon$ ($X_\infty \in L^1$). Per quelle prima di $\bar n$ sono dominate dal massimo, wlog C.
• Dunque per λ abbastanza grande quello che voglio va a 0.

Esempio: Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ allora $(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])_{\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}\ \sigma\text{-alg.}}$ è uniformemente integrabile.

Osserviamo che $|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X|\,|\mathcal{G}]$. Inoltre, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[|X|\,|\mathcal{G}] \cdot \mathbb{1}_{\underbrace{\{\mathbb{E}[|X|\,|\mathcal{G}]>\lambda\}}_{\in\mathcal{G}\ =\ A}}] = \mathbb{E}[|X| \cdot \mathbb{1}_A] \Rightarrow \mathbb{P}(A) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[|X|\,|\mathcal{G}]]}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\lambda}$. Siccome (X) è unif. int., dato $\varepsilon>0\ \exists \lambda(\varepsilon)$ t.c. $\mathbb{E}[|X|]/\lambda(\varepsilon) < \delta \underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \forall \lambda > \lambda(\varepsilon)\ \mathbb{E}[|X| \cdot \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}[|X|\,|\mathcal{G}]>\lambda\}}] < \varepsilon$.

Teorema: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mart. Sono equivalenti:

1. $\lim_n M_n\ \exists$ in L^1
2. $\exists M_\infty \in L^1$ t.c. $\mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_n] = M_n$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$ (la martingala è chiusa da M_∞)
3. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è unif. integrabile

viene da uniforme integrabilità

Oss. • Se vale una di queste condizioni $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ e $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}\text{-q.c.}} M_\infty$

• (1), (2), (3) valgono se $\exists p>1$ t.c. $\sup_n \mathbb{E}[|M_n|^p] < +\infty$, perché $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è dominata da $\sup_n |M_n| \in L^p$ e $M_n \xrightarrow{L^p} M_\infty \in L^p$ (Doob + Lebesgue in L^p) $\Rightarrow M_\infty \in L^1$ ($L^p \subseteq L^1$) $\Rightarrow$ vale 1.

<u>dim.</u> 1 $\Rightarrow$ 2: Se $\exists M_\infty = \lim_n M_n$ limite in L^1 (oss. $M_\infty \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$). Fissato $n \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq n$ $\mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_n] = M_n$. Osserviamo che $\mathbb{E}[\,|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]|\,] \leq \mathbb{E}[|X-Y|]$. Ma $M_m \xrightarrow{L^1} M_\infty \Rightarrow \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ (metto $X = M_\infty$ $Y = M_m$ e $\mathcal{G} = \mathcal{F}_n$ qua).

Esempio prec.

2 $\Rightarrow$ 3: $M_n = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n]$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \left(\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{G}]\right)_{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\infty\ \sigma\text{-alg}} \Rightarrow (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unif. integr.

3 $\Rightarrow$ 1: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unif. int. $\Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[|M_n| < +\infty] \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} M_n = M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\overset{\text{Vitali}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] \longrightarrow 0$. □

Teorema su submart.

<u>Esempio</u>: Sia $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ martingala. Allora $\lim_{n\to-\infty} M_n = M_{-\infty}$ $\exists$ $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1 e coincide con $\mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$, $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{-n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Infatti: $M_n = \mathbb{E}[M_0 \mid \mathcal{F}_n] \Rightarrow (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è unif. integrabile. *teorema equivalenze*

La convergenza q.c. è lo stesso argomento usato per il limite a $+\infty$. Vitali $\Rightarrow \lim_n M_n = M_{-\infty}$ $\exists$ L^1 e $\mathbb{P}$-q.c.. $M_{-\infty}$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_n$ $\forall n \leq 0 \Rightarrow$ è $\mathcal{F}_{-\infty}$-mis. Sia $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$.
$\mathbb{E}[M_k \cdot 1_A] = \mathbb{E}[M_n 1_A]$ ma $\mathbb{E}[M_k \cdot 1_A] \longrightarrow \mathbb{E}[M_{-\infty} \cdot 1_A] \Rightarrow M_{-\infty} = \mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{-\infty}]$.

<u>Corollario</u>: Sia $(X_n)_{n=0}^{+\infty}$ v.a. dominate da $Y \in L^1(\mathbb{P})$ e $X_n \longrightarrow X$ $\mathbb{P}$-q.c. e $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrazione. Allora $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] \longrightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$ in L^1 e $\mathbb{P}$-q.c.

<u>dim.</u> no. □

Passiamo a tempi continui: $(M_t)_{t\geq 0}$ mart. t.c. $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$. Dato $t \geq 0$ poniamo

serve $t>0$

$M_{t^-} = \lim_{\substack{s\to t^- \\ s\in\mathbb{Q}}} M_s$ e M_{t^+} analogo.

<u>Teorema</u>: se $(M_t)_t$ è mart. limitata, allora $\mathbb{P}$-q.c. $\exists M_{t^-}, M_{t^+}$ $\forall t$.

<u>dim.</u>: no. □

Vale che $\forall t$ $\mathbb{P}$-q.c. $M_t = \mathbb{E}[M_{t^+} \mid \mathcal{F}_t]$, $M_{t^-} = \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_{t^-}]$.

<u>Teorema</u>: Se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ soddisfa le hp. abituali allora $\exists$ modificazione $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ di $(M_t)_{t\geq 0}$ mart. limitata in L^1 che ha traiettorie cadlag. *continue a dx + limitate a sx*

<u>dim.</u> no. □

a meno di un insieme $\mathcal{F}_t$-trascurabile

<u>Oss</u>: $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ è mart.; $\forall t$ $\mathbb{P}$-q.c. $\tilde{M}_t = M_t$ e $\tilde{M}_s = M_s = \mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\tilde{M}_t \mid \mathcal{F}_s]$.

<u>Teorema</u>: Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è mart. cadlag. e $\exists$ $+\infty > C > 0$ costante t.c. $S \leq T \leq C$ t.d.a. allora

$\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T]$. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è unif. integr., lo stesso vale $\forall S \leq T \leq +\infty$ t.d.a., dove

$M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M_t$.

dim. no. $\square$

Nuclei di probabilità

Def. (nucleo): se $(E,\mathcal{E})$ è spazio misurabile, $N: E\times\mathcal{E}\longrightarrow[0,+\infty]$ è un nucleo su E se

① $\forall A\in\mathcal{E}$ $x\longmapsto N(x,A)$ è misurabile. ② $\forall x\in E$ $A\longmapsto N(x,A)$ è una misura su $(E,\mathcal{E})$.

Se nella condizione ② è di prob. $\forall x$ $\Rightarrow$ si chiama nucleo di probabilità.

Oss.: un nucleo agisce sulle funzioni misurabili non negative: $f\in L^0_+(E,\mathcal{E})$, $Nf(x)=\int_E N(x,dy)\, f(y) \in L^0_+(E,\mathcal{E})$. Se M, N sono nuclei su E, $MNf(x) = \int_E M(x,dy)\, Nf(y) \in L^0_+$.

Oss.: Se N è nucleo di probabilità su E finito, la successione di misure di prob. δ_x, $N(x,A)$, $N^2(x,A)$, $\ldots$ è la legge di una catena di Markov a stat. finiti.

Memento: Se $X:\Omega\longrightarrow(E,\mathcal{E})$ v.a., $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(X\in A\,|\,\mathcal{G}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\,|\,\mathcal{G}]$ è una v.a. $\mathcal{G}$-mis. ← non è nucleo di prob. in generale

Teorema (versione regolare): Se $(\Omega,\mathcal{F})$ è polacco (topologico + metrizzabile in modo completo + denso numer.), $\mathcal{F}$: boreliani, $\exists$ modificazione del processo stocastico $(\mathbb{P}(X\in A\,|\,\mathcal{G}))_{A\in\mathcal{E}}$ t.c.:

① $A\longmapsto \mathbb{P}(X\in A\,|\,\mathcal{G})(\omega)$ (fissato ω) è prob. $\mathbb{P}$-q.e. ② $\forall A\in\mathcal{E}$ $\omega\longmapsto \mathbb{P}(X\in A\,|\,\mathcal{G})(\omega)$ è misurabile.

Se $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è un processo stocastico a valori in $(E,\mathcal{E})$, $\mathcal{F}^X_t = \sigma(X_s\,|\,s\leq t)$ ed esistono nuclei di probabilità $P_{s,t}$, $s<t$ t.c. $\mathbb{P}(X_t\in A\,|\,\mathcal{F}^X_s) = P_{s,t}(X_s,A)$ (equivalentemente $\forall f\in L^0_+$ $\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}^X_s] = P_{s,t}f(X_s)$), allora se $s<t<r$ $P_{s,r}(X_s,A) = \mathbb{P}(X_r\in A\,|\,\mathcal{F}^X_s) \overset{\mathcal{F}^X_s\subseteq\mathcal{F}^X_t}{=}$

$= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_r)\,|\,\mathcal{F}^X_t]\,\big|\,\mathcal{F}^X_s\big] = \mathbb{E}[P_{t,r}(X_t,A)\,|\,\mathcal{F}^X_s] = \int_E P_{s,t}(X_s,dy)\,P_{t,r}(y,A)$.

$f := P_{t,r}(\cdot,A) \Rightarrow = P_{s,t}P_{t,r}(X_s,A) = \int_E P_{s,t}(X_s,dy)\,P_{t,r}(y,A)$

Def. (probabilità di transizione): una famiglia $(P_{s,t})_{s,t\in[0,+\infty)}$ di nuclei di probabilità su $(E,\mathcal{E})$ si dice probabilità di transizione se (Chapman-Kolmogorov) $\forall s<t<r$ $\forall x\in E$

$P_{s,r}(x,A) = \int_E P_{s,t}(x,dy)\,P_{t,r}(y,A)$. Se $P_{t,s}(x,A)$ dipende solo da $t-s$, $P_{s,t}(x,A) = P_{0,t-s}(x,A) =: P_{t-s}(x,A)$, si dice che la prob. di trans. è omogenea nel tempo e (C-K) dice che $(P_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è un semigruppo.

→ non ha l'inverso e l'operazione di semigruppo è $P_{t+s}(x,A) = \int P_t(x,dy)\,P_s(y,A)$