Homework 1

Istituzioni di Algebra 22/23

David Vencato

Matricola 590954

1. Let k be a field. Show that in the k-algebra $A := k[x,y]/(xy)$ the image of x generates a prime ideal of height 0 (and hence the Hauptidealsatz holds with strict inequality).

[*Warning*: Be careful, A is not an integral domain!]

<u>Svolgimento</u> :

A é noetheriano. Consideriamo la proiezione $p: K[x,y] \longrightarrow A$. Allora per il terzo teorema di isomorfismo si ha:

$$A/_{p(x)} \simeq \left(K[x,y]/(xy)\right) / \left((x)/(xy)\right) \simeq K[x,y]/_{(x)} \simeq K[y]$$

Dato che $K[y]$ é un dominio allora $p(x)$ é un ideale primo di A.

Supponiamo per assurdo che l'altezza non sia zero. Allora $\exists Q \subsetneq (p(x))$

$\Longrightarrow (p^{-1}(Q)) \subsetneq (p^{-1}(x)) = (x) + (xy) = (x)$ con $(p^{-1}(Q))$ ideale primo contenente (xy). Dunque o contiene (x) o contiene (y). In entrambi otteniamo un assurdo: nel primo avremmo $(x) \subsetneq (x)$ e nel secondo $(y) \subsetneq (x)$.

2. Let A be a Noetherian ring of Krull dimension $r \geq 2$. Show that for every $0 < i < r$ there exist infinitely many prime ideals in A of height i. [*Hint:* Start with the case where $r = 2$ and A is a local integral domain.]

Svolgimento :

Dimostriamo l' hint :

basta far vedere che esistono infiniti ideali Q_i t.c. $(0) \subsetneq Q_i \subsetneq P$, dove P é l'ideale massimale di A (che deve essere di altezza 2).

Supponiamo per assurdo siano in numero finito: $Q_1, \ldots, Q_n$. Allora per massimalitá $\exists\, x \in P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$. In particolare P é un ideale minimale sull'ideale (x) e dunque usando " Generalization of Krull's Hauptidealsatz" si avrebbe $ht(P) \leq 1$, assurdo.

Dimostriamo il caso generale:

consideriamo la catena che realizza $\dim(A) = r$: $P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_r$. Ora, $ht(P_i) = i$ poiché la catena precedente ci assicura che $ht(P_i) \geq i$, ma se fosse $ht(P_i) > i$ allora $\dim(A) > r$. L'insieme $(A/P_i)_{P_{i+2}}$ é un dominio locale. Ma $\dim((A/P_i)_{P_{i+2}}) = ht(P_{i+2}/P_i)$ in A/P_i che é 2 per l'osservazione precedente. Per l'hint si hanno infiniti primi q e $(A/P_i)_{P_{i+2}}$ di altezza 1. Chiamiamo P_q la preimmagine in A, allora : $ht(P_q) \geq ht(P_i) + \overbrace{ht(P_q/P_i)}^{\text{altezza in } A/P_i} \geq i+1$. Se $ht(P_q) > i+1$ avremmo $P_q \subsetneq P_{i+2} \subsetneq \ldots \subsetneq P_r$ e dunque $\dim(A) > r$, assurdo

3. Let $A \subset B$ be an integral extension of integral domains with fraction fields $K \subset L$.
(a) Show that $\dim(A) = \dim(B)$.
(b) Assume moreover A is integrally closed, the extension $L|K$ is finite and B is integral over A. If $Q \subset B$ is a prime ideal with $P = Q \cap A$, show that $\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(P)$.

<u>Svolgimento</u>:

(a) Per il "Going up Theorem of Cohen – Seidenberg" data $P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ catena di ideali primi di A, le possiamo associare la catena di ideali primi in B:

$Q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_n$ con $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i$. Dunque $\dim(A) \leq \dim(B)$.

Vale anche il processo inverso per quanto visto a lezione: se $Q_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_n$ e' una catena di ideali primi in B, definendo $P_i = Q_i \cap A$ $\forall i$ allora $P_i \subseteq A$ e' primo e $P_0 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n$ e' catena in A. Allora $\dim(A) \geq \dim(B)$.

(b) Notiamo che siamo nelle ipotesi del "Going down Theorem of Cohen – Seidenberg".

Presa $P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n \subsetneq P$ catena in A si ha che esiste $Q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_n \subsetneq Q$ t.c. $Q_i \cap A = P_i$; $ht(P) \leq ht(Q)$. Ma allo stesso modo se $Q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_n \subsetneq Q$ e' una catena di ideali primi di B allora $P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n \subsetneq P$ con $P_i = Q_i \cap A$ e' una catena di ideali primi di A; $ht(P) \geq ht(Q)$.

4. Let A be an integrally closed integral domain with fraction field K of characteristic $p > 0$, $L|K$ a finite *purely inseparable* extension of K and B the integral closure of A in L.
a) Show that $B = \{b \in L \mid \exists r \geq 0 : b^{p^r} \in A\}$.
b) If moreover A is a discrete valuation ring, show that B is also a discrete valuation ring. [*Hint:* Find the discrete valutation associated with B.]

Svolgimento (in collaborazione con Dania Lazzarini):

a) Per definizione $B = \{ b \in L \mid \exists f(x) \in A[x]$ monico t.c. $f(b) = 0 \}$. Dunque:

$\boxed{\supseteq}$ se $b^{p^r} \in A$ allora b é radice di $f(x) = x^{p^r} - b^{p^r} \in A[x]$;

$\boxed{\subseteq}$ Se $b \in B$, $b \in L$ ed é purely inseparable $\Rightarrow$ il suo polinomio minimo su K é $\mu_b(x) = x^{p^r} - c \in K[x] \Rightarrow b^{p^r} - c \in K$. Ma B é estensione integrale di A e b é integrale su $A \Rightarrow b$ é radice di $f(x) \in A[x] \setminus \{0\}$ polinomio monico; dato che siamo in char $= p$, $f(x)^{p^r} = f(x^{p^r}) \Rightarrow f(b^{p^r}) = f(b)^{p^r} = c \Rightarrow b^{p^r} \in K$ é integrale sull'anello A (integralmente chiuso) $\Rightarrow b^{p^r} \in A$.

b) Sia $\mu: K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valutazione discreta per cui $A = \{x \in K \mid \mu(x) \geq 0\}$. Cerchiamo una valutazione discreta υ su B. Per il punto (a) sappiamo che, se $b \in B$, $\exists r > 0$ tale che $b^{p^r} = a \in A \Rightarrow \upsilon(a) = \upsilon(b^{p^r}) = p^r \upsilon(b)$ cioe' $\upsilon(b) = \frac{\upsilon(a)}{p^r}$.

Per quanto visto a lezione, $\exists N$ t.c. $L^{p^N} \subseteq K$. Definiamo $\upsilon(b) = \mu(b^{p^N})$. Ora, $\upsilon(B) \subseteq \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Vediamo che é una valutazione discreta: ① $\upsilon(b) = \infty \Leftrightarrow \mu(b^{p^N}) = \infty \Leftrightarrow b^{p^N} = 0 \Leftrightarrow b = 0$;

② $\upsilon(bb') = \mu((bb')^{p^N}) = \mu(b^{p^N} b'^{p^N}) = \mu(b^{p^N}) + \mu(b'^{p^N}) = \upsilon(b) + \upsilon(b')$;

③ $\upsilon(b+b') = \mu((b+b')^{p^N}) \overset{\text{char} = p}{=} \mu(b^{p^N} + b'^{p^N}) \geq \min\{\mu(b^{p^N}), \mu(b'^{p^N})\} = \min\{\upsilon(b), \upsilon(b')\}$.

Allora $\upsilon(\text{frac}(B)) \subseteq \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$: $0 = \upsilon(1) = \upsilon(b\frac{1}{b}) = \upsilon(b) + \upsilon(\frac{1}{b}) \Rightarrow \upsilon(\frac{1}{b}) = -\upsilon(b) \in \mathbb{Z}$.

Dunque $B = \{\exists r > 0 \text{ t.c. } b^{p^r} \in A\} = \{\exists r > 0 \text{ t.c. } \mu(b^{p^r}) \geq 0\} = \{\upsilon(b) \geq 0\}$

$\mu(b^{p^r}) = p^r \mu(b) \geq 0 \Leftrightarrow \mu(b) \geq 0 \Leftrightarrow \upsilon(b) = p^N \mu(b) = \mu(b^{p^N}) \geq 0$

5. Let k be a field, and consider the extension of k-algebras $A \subset B$, where $A = k[x, y]$, $B = k[x, y, x/y]$. Consider moreover the ideal $Q = (y, x/y) \subset B$. Show that it is a prime ideal whose intersection with A is the ideal $P = (x, y) \subset A$, and verify that the strict inequality

$$\mathrm{ht}(Q) < \mathrm{ht}(P) + \dim B_Q/PB_Q$$

holds.

Svolgimento:

$B = K[x, y, x/y] = K[y, x/y]$. Allora $\dim B = \dim A = 2$. Inoltre

$B/Q = K[y, \frac{x}{y}] / (y, x/y) = K \Rightarrow Q$ è un ideale primo massimale.

Allo stesso modo $A/P = K[x, y] / (x, y) = K$ dunque P è massimale ma

$(x, y) \subseteq Q \cap A = (y, \frac{x}{y}) \cap K[x, y] \Rightarrow Q \cap A = P$. Si ha allora $ht(Q) = \dim B = 2$

e $ht(P) = \dim A = 2$. Vediamo che $\dim B_Q / PB_Q \geq 1$: data la massimalità di Q

si ha che $\dim B_Q / PB_Q = \dim B / PB$. Ma $B / PB = K[y, \frac{x}{y}] / (x, y) K[y, \frac{x}{y}] = K[\frac{x}{y}]$.

Allora $\dim B_Q / PB_Q = 1$ e da questo segue la tesi.

Homework 2

Istituzioni di Algebra 22/23

David Vencato

Matricola 590954

1. Let $\varphi : A \to B$ be a homomorphism of Noetherian rings, $Q \subseteq B$ be a prime ideal, and $P := \varphi^{-1}(Q)$. Show that if moreover B is a flat A-module via φ, then

$$\mathrm{ht}(Q) = \mathrm{ht}(P) + \dim B_Q/PB_Q.$$

Per quanto visto a lezione dobbiamo solo mostrare $ht(Q) \geq ht(P) + \dim B_Q/PB_Q$. Per corrispondenza possiamo considerare al posto di A e B rispettivamente A_P e B_Q. Inoltre notiamo che per il Remark 5.24 vale il Lemma 5.23 per A e B via φ. Sia $ht(Q/PB) = m$, allora esiste una catena $q_1 \subsetneq \ldots \subseteq q_m \subsetneq Q$ con $PB \subseteq q_1$. Ma quindi ricordando che $P = \varphi^{-1}(Q)$ si ha $P = \varphi^{-1}(q_i)$ $\forall i$.

Sia $ht(\varphi^{-1}(Q)) = n$ allora esiste una catena $p_1 \subsetneq \ldots \subsetneq p_n \subsetneq \varphi^{-1}(Q)$ di ideali primi di A e dunque esiste una catena $Q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_n \subsetneq q_1$ con $Q_i \subseteq B$ primi tali che $\varphi^{-1}(Q_i) = p_i$ $\forall i$. Dunque abbiamo trovato la catena $Q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_n \subsetneq q_1 \subsetneq \ldots \subsetneq q_m \subsetneq Q$ di ideali primi e di lunghezza $m+n$. Da qui segue la tesi.

2. Let A be a complete local ring with algebraically closed residue field and $f \in A[x]$ a polynomial of degree n whose leading coefficient is a unit in A and whose derivative f' satisfies $(f, f') = (1)$ in the ring $A[x]$. Show that $A[x]/(f)$ is isomorphic to a finite direct product of n copies of A.

Per prima cosa $(f, f') = (1)$ é equivalente a dire che $\exists\, p, q \in A[x]$ t.c. $pf + qf' = 1$. Dunque se chiamiamo P l'ideale massimale di A allora l'equazione é vera anche in $(A/P)[x]$ e dunque f ha radici distinte anche in $(A/P)[x]$. Ma (A/P) é algebricamente chiuso dunque $\exists\, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \in A/P$ t.c. $f = (x - \bar{a}_1) \cdot \ldots \cdot (x - \bar{a}_n)$. Per il Lemma di Hensel $\exists!\, a_i \in A$ con $f(a_i) = 0$. In particolare se $f(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ allora $f(x) = f(x) - f(a_i) = (x^n - a_i^n) + b_{n-1}(x^{n-1} - a_i^{n-1}) + \ldots + b_1(x - a_i) = (x - a_i)\, p$ con $\deg p \leq n-1$; cioe $(x - a_i) \mid f$. Vediamo ora che se prendiamo $a_j \neq a_i$ allora $p(a_j) = 0$ e dunque con lo stesso argomento precedente $p = (x - a_j) \cdot q$ con $\deg q \leq n-2$.

Ma $0 = f(a_j) = (a_j - a_i)\, p(a_j)$ e dunque basta mostrare che $a_j - a_i$ é invertibile in A. Supponiamo per assurdo che non lo sia e sia $I = (a_j - a_i) \subseteq P$. Allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi_I"] \arrow[dr, "\pi"'] & (A/I) \arrow[d, "\pi_P"] \\
 & (A/P)
\end{tikzcd}$$

Ora, $\pi(a_i) = \bar{a}_i \neq \bar{a}_j = \pi(a_j)$ invece $\pi_P \circ \pi_I(a_i) = \pi_P \circ \pi_I(a_j)$ dato che per costruzione $\pi_I(a_i) = \pi_I(a_j)$. Dunque assurdo. Allora $f = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ in $A[x]$.

Ricordiamo ora il teorema cinese del resto il quale afferma che se $I_1, \ldots, I_k$ sono ideali di un anello R comassimali a due a due, e $I = \bigcap_{i=1}^{k} I_i = \prod_{i=1}^{k} I_i$ allora $R/I \simeq R/I_1 \times \ldots \times R/I_k$.

Prendiamo come $R = A[x]$ e come $I_i = (x-a_i)$. Ora $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n} (x-a_i)$. Ora se $i \neq j$ per il fatto che $a_i - a_j$ é invertibile allora $1 \in (I_i, I_j)$ e dunque I_i e I_j sono comassimali. Allora:

$$A[x]/(f) = A[x] \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n} (x-a_i)\right) \simeq \prod_{i=1}^{n} A[x]/(x-a_i) \simeq A^n .$$

3. Let A be a local ring with maximal ideal P, and $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ a polynomial in $A[x]$ such that $a_i \in P$ for all i but $a_0 \notin P^2$. Consider the A-algebra $B := A[x]/(f)$.

(a) Show that B is a local ring, and if A is a complete local ring, then so is B. [*Hint:* For completeness show first that B is complete with respect to PB.]

(b) If A is a regular local ring, show that B is also a regular local ring. [*Hint:* Start with a regular system of parameters of A containing a_0 and modify it to obtain a regular system of parameters in B.]

a) • Notiamo che definendo $(PA[x], x) =: I'$ si ottiene un ideale di $A[x]$ che contiene f. Inoltre:

$$A[x]/I' = A[x]/(PA[x], x) \simeq ((A/P)[x])/(x) \simeq A/P$$

e dato che A/P é un campo allora I' é massimale in $A[x]$. Per la nota corrispondenza considerando $\pi : A[x] \longrightarrow B$ la proiezione al quoziente si ha che $I := \pi(I')$ é un ideale massimale di B. Quello che vogliamo fare ora é dire che I' é l'unico ideale massimale di $A[x]$ che contiene f e dunque per la corrispondenza giá citata si avrebbe che I é l'unico ideale massimale di B. Sia J un ideale massimale di B. Dato che B é un A-modulo finitamente generato da $(1, x, \ldots, x^{n-1})$, se $PB \not\subseteq J$ per massimalitá $PB + J = B$. Per Nakayama $J = B$, assurdo. Allora $PB \subseteq J$ e quindi per la solita corrispondenza $PA[x]$ é contenuto in ogni ideale massimale J' di $A[x]$ che contiene f. Non solo, dato che $(PA[x], f) \subseteq J'$ allora $x^n \in J'$ $(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in J'$ con $a_0, \ldots, a_{n-1} \in P)$; J' é massimale quindi primo, allora $x \in J'$. Per massimalitá di $(PA[x], x)$ deve essere $(PA[x], x) = J'$. Quindi B locale.

• Per la proposizione 5.3 basta mostrare che B é completo rispetto a PB. Dato che $P^k B \subseteq$ $\subseteq (P, \bar{x})^{nk}$ (poiché $PB \subseteq (P, \bar{x})$), basta mostrare che l'altro contenimento. Per induzione su k:

$k = 1$: per definizione ogni elemento in $(P, \bar{x})^n$ si può scrivere come $(p_1 + \lambda_1 \bar{x}) \ldots (p_n + \lambda_n \bar{x})$

con $p_i \in PB$. Il prodotto precedente è della forma $\bar{p} + \lambda x^n$ con $\bar{p} \in PB$. Inoltre $\bar{x}^n = -a_{n-1}\bar{x}^{n-1} - \_\_ - a_0$

$\in PB \Rightarrow \bar{x}^n \in PB$;

$\underline{k \to k+1}$: $(P, \bar{x})^{n(k+1)} B = (P, \bar{x})^{nk} B \cdot (P, \bar{x})^{k} B \subseteq P^k B \cdot PB = P^{k+1} B$. Dobbiamo mostrare che B è completo

rispetto a PB. Vediamo che ogni sequenza di Cauchy converge rispetto a PB: sia $(t_i)_{i \geq 1}$ una sequenza di

Cauchy rispetto a PB, allora $\forall r \ \exists \bar{j}$ t.c. $\forall j > \bar{j}$ $\ t_j - t_{j+1} \in P^r B$; cioè $t_j - t_{j+1} = \sum_{i \geq 1} c_{ji} \bar{x}^i$ con

$c_{ji} \in P^{n(j)} B \cap A$ e $n(j) \xrightarrow{j \to +\infty} +\infty$. Dato che A è completo, $\sum_{m \geq 1} c_{mi}$ converge a qualche $c_i \in A$.

Dunque $t_j = \sum_{n=1}^{j} (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i \left(\sum_{m=1}^{j} c_{mi} \right)$. Passando al limite, $\lim_{j \to +\infty} t_j = \sum_{j=1}^{n} c_i \bar{x}^i$.

Data la convergenza di $(t_i)_{i \geq 1}$, B è completo.

(b) Poiché $a_0 \not\equiv 0 \mod P^2$ e $a_0 \in P$ allora $0 \neq a_0 \in P/P^2$. Sia quindi $a_0, b_1, \_\_, b_m$ una base

dello spazio vettoriale P/P^2 ottenuta completando a base il vettore non nullo a_0, ma allora $a_0, b_1,$

$\_\_, b_m$ sono un sistema minimale di generatori per P in A. Pertanto $a_0 \bmod f$, $b_1 \bmod f, \_\_,$

$b_m \bmod f$, $\bar{x}$ sono un sistema di generatori per $(PB, \bar{x})$ in B. Notiamo però:

$$a_0 \equiv x(-x^{n-1} - a_{n-1} x^{n-2} - \_\_ - a_1) \mod f$$

Dunque anche $b_1, \_\_, b_m, x$ sono un sistema di generatori per $(PB, \bar{x})$ (infatti $(a_0, b_1, \_\_, b_m, x)$

lo sono e per quanto visto $a_0 \in (x) \subseteq (b_1, \_\_, b_m, x)$. Per Nakayama $\dim (PB, \bar{x})/(PB, \bar{x})^2 \leq$

$\leq m+1 = \dim A$. Ora, però, f è una sequenza regolare nell'anello noetheriano locale $A[x]_{(P,x)}$

dunque $\dim A[x]_{(P,x)} / (f) = \dim A[x]_{(P,x)} - 1$. Ma $A[x]_{(P,x)} / (f) \simeq B_{(P,\bar{x})} \underset{\substack{\downarrow \\ B \text{ locale}}}{\simeq} B$

e per un esercizio della consegna precedente: $\dim A[x]_{(P,x)} = ht(P, x) = ht(P) + 1 = \dim A + 1$.

Quindi $\dim B = \dim A + 1 - 1 = \dim A$. Per un corollario di Nakayama $\dim B \leq \dim (PB, \overline{x})/(PB, \overline{x})^2$

dunque $\dim B \leq \dim (PB, \overline{x})/(PB, \overline{x})^2 \leq \dim A = \dim B \implies \dim B = \dim (PB, \overline{x})/(PB, \overline{x})^2$ che ci

dà la regolarità.

4. This exercise shows that the strong form of the Cohen structure theorem fails for complete regular local rings of mixed characteristic if p is contained in the square of the maximal ideal. Consider the ring $B := \mathbf{Z}_p[[t]][x]/(x^2 + tx + p)$. By the previous exercise this is a complete regular local ring of dimension 2.

(*a*) Check that $p \in Q^2$, where Q is the maximal ideal of B.

(*b*) Show that B cannot be isomorphic to a power series ring of the form $C[[u]]$, with C a complete discrete valuation ring with residue characteristic p. [*Hint:* Observe first that in $C[[u]]/(p)$ there is only one minimal prime ideal.]

a) Per esercizio 3 in $\mathbb{Z}_p[[t]][x]$ l'ideale $I = (p, t, x)$ è un ideale massimale che contiene $x^2 + tx + p$, dunque per corrispondenza abbiamo che $\pi(I) = Q$. Ora, $x^2 + tx \in I^2 \Rightarrow \pi(x^2 + tx) \in Q^2$ ma $x^2 + tx \equiv -p \mod x^2 + tx + p$ dunque $-p \in Q^2 \Rightarrow p \in Q^2$.

b) Per assurdo $C[[u]] \simeq B$ con C D.V.R. completo con caratteristica residua p. Poiché B ha caratteristica 0 anche $C[[u]]$ la avrà. In particolare C avrà caratteristica 0 dunque $\mathbb{Z} \subseteq C$ quindi ha senso considerare $p \in C$ e $C[[u]]/(p)$. Sia $P = (t)$ l'ideale massimale di C, poiché C/P ha caratteristica p allora $p \equiv 0 \mod P$ dunque $p \in P$ e quindi per la caratterizzazione dei D.V.R. $\exists n \in \mathbb{N}$ e $a \in C^*$ t.c. $p = at^n$. Sia $p \in C[[u]]$ e sia I un ideale primo che contiene p, allora $at^n = p \in I \Rightarrow t^n \in I$ $(a \in C^* \Rightarrow a \in C[[u]]^*)$. Ma I è primo, dunque $t \in I$ ma allora poiché I è un ideale $PC[[u]] = tC[[u]] \subseteq I$. Notiamo che:

$$C[[u]] / PC[[u]] \simeq (C/P)[[u]]$$ che è un dominio poiché C/P è un campo.

Dunque $PC[[u]]$ è un ideale primo di $C[[u]]$ contenuto in tutti gli ideali primi che contengono p, quindi per corrispondenza $PC[[u]]/(p)$ è l'unico primo minimale di $C[[u]]/(p)$.

Prendiamo, ora, in $\mathbb{Z}_p[[T]][x]$ gli ideali (p, x) e $(p, t+x)$. Questi sono due ideali primi che contengono p e $x^2 + tx + p = x(x+t) + p$. Vediamo che sono anche minimali su $(p, x^2 + tx + p)$: sia

J un ideale primo t.c. $J \supseteq (p, x^2+tx+p) \Rightarrow x(x+t) = x^2+tx = (x^2+tx+p)-p \in J$. Ma J è primo dunque o $x \in J \Rightarrow (x,p) \subseteq J$ o $t+x \in J \Rightarrow (p, t+x) \subseteq J$. Per la corrispondenza tra ideali di $\mathbb{Z}_p[[t]](x)$ che contengono (x^2+tx+p) e gli ideali B ho che in B vi sono 2 primi minimali che contengono $(\tilde{p})$, da cui assurdo $B \cong \mathbb{C}[[u]]$.

5. Let A be a complete discrete valuation ring of characteristic 0 with perfect residue field k of characteristic $p > 0$. Let P be the maximal ideal of A and v the discrete valuation associated with A. Show that A contains the Witt ring $W(k)$ as a subring in such a way that $P \cap W(k) = (p)$ and A is a finitely generated free $W(k)$-module of rank $v(p)$.

[*Hint:* You may want to use the fact that a finitely generated torsion free module over a principal ideal ring is free.]

Per quanto visto a lezione poiché A é un dominio completo locale di caratteristica misto con campo residuo K perfetto e di caratteristica $p>0$, allora esiste una mappa iniettiva $W(K) \longrightarrow A$ t.c. $P \cap W(K) = (p)$.

Rimane da dimostrare che A é un $W(K)$-modulo libero di rango $v(p)$. Ora A é un D.V.R. dunque la dimensione di A é pari a 1 quindi per la Proposizione 6.17 delle dispense A é un $W(K)$-modulo finitamente generato. Inoltre A é libero di torsione: $\forall\, 0 \neq \omega \in W(K)$ e $\forall\, 0 \neq a \in A$ allora $a\omega \neq 0$ perché A é un dominio e la struttura di $W(K)$-modulo é data dal suo prodotto interno. Dunque A é un $W(K)$-modulo libero da torsione e quindi é un $W(K)$-modulo libero perché $W(K)$ é PID.

Calcoliamone il rango. Sia $P = (t)$ l'ideale massimale di A allora per la forma canonica dei D.V.R., detta $n = v(p)$ esiste $u \in A^*$ t.c. $p = ut^n$; per un corollario di Nakayama $rk_{W(K)}(A) = \operatorname{Dim}_{W(K)}(A) =$

$= \operatorname{Dim}_{W(K)/pW(K)}(A/pA)$, infatti (p) é l'ideale massimale di $W(K)$. Ora, $W(K)/pW(K) \simeq K$ dunque debbiamo studiare $\operatorname{Dim}_K A/pA$. Ora, $\forall a \in A$ per la forma canonica dei D.V.R. $\exists\, j \in \mathbb{N}$ e $s \in A^*$ t.c. $a = st^j$, in particolare in A/pA vale che $\bar{a} = \bar{s}\bar{t}^j$; ora noto che se $A^* = A - P \Rightarrow$ $\bar{s} \in (A-P)/pA \subset (A-P)/P = K - \{0\}$ dunque $\bar{s} \in K - \{0\}$, ora se $j \geq n \Rightarrow a = st^{n+(j-n)} = \frac{s}{u} t^{j-n} p \Rightarrow$ $a \in (p) \Rightarrow \bar{a} = 0$, se invece $j < n$ allora $\bar{a} = \bar{s}\bar{t}^j$ e $\bar{s} \in K - \{0\}$ dunque, in ogni caso, $a \in \operatorname{span}_K\{1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{n-1}\}$. Quindi $1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{n-1}$ sono un sistema di generatori per il K-spazio vettoriale

$A/_pA$. Sono anche linearmente indipendenti perché se per assurdo $\sum_{\substack{i \in I, |I|<n \\ I=\{1,\dots,n\}}} K_i \bar{t}^i = 0$ a coefficienti non tutti nulli, allora in A avrei $\sum_{\substack{i \in I, |I|<n \\ I=\{1,\dots,n\}}} K_i t^i = r t^m$ con $m > n$ e $r \in A^*$ ma allora ponendo $l = \min\{i \mid K_i \neq 0\}$ avrei che $r t^{m-i} \in A^*$ (infatti dividendo da ambo le parti per t^l, il membro di sinistra é la somma di un invertibile con un elemento di P che dunque é invertibile); ma quindi per le proprietá della valutazione $m - l = 0$ $\Rightarrow m = l$ che é assurdo poiché $n < m = l < n$. Quindi $\{1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{n-1}\}$ sono una base di A/pA che dunque ha dimensione $n = v(p)$.

Homework 3 – Istituzioni di Algebra

David Vencato

Matricola 590954

1. Let p be a prime number.

a) Compute the Ext-groups of abelian groups $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ for all $i > 0$.

b) For every $c \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ find an extension of abelian groups

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to E \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 0$$

whose equivalence class is c.

(a) Consideriamo la risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dove $\cdot p : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è la moltiplicazione per p e $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ è la proiezione al quoziente.

Applichiamo, quindi, il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, ottenendo:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot p^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

Abbiamo quindi:

- $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) / \mathrm{Imm}\, p^*$ ma

  $\mathrm{Imm} \cdot p^* \cong 0$ allora $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;

- Per la risoluzione segue immediatamente che $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0 \ \forall i > 1$.

(b) Procediamo come nella dimostrazione della Proposizione 5.9. Sia $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, vogliamo costruire il "pushout" dell'estensione:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

lungo la mappa ϕ. Otteniamo, dunque, il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, "f_\phi"] & X_\phi \arrow[r, "g_\phi"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove $X_\phi = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \{(\phi(n), -pn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e le mappe f_ϕ e g_ϕ sono:

$$\begin{aligned} f_\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\longrightarrow X_\phi \\ [n] &\longmapsto [([n], 0)] \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g_\phi : X_\phi &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ [([n], b)] &\longmapsto [b] \end{aligned}$$

Dato che $\mathbb{Z}$ e' proiettivo come $\mathbb{Z}$-modulo allora ogni $\phi \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ fattorizza attraverso $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dunque abbiamo che $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{\phi_m\}_{m=0,\dots,p-1}$ dove $\phi_m : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con $\phi_m(n) = [mn]$.

Ora, il pushout lungo ϕ_0 da':

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{i_1} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dove l'isomorfismo tra X_{ϕ_0} e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é dato da:

$$\begin{aligned} h_0 : X_{\phi_0} &\longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ [([0], 1)] &\longmapsto ([0], [1]) \\ [([1], 0)] &\longmapsto ([1], [0]) \end{aligned}$$

Nel caso in cui $m \not\equiv 0 \pmod p$, sia $a \in \mathbb{Z}$ tale che $am \equiv 1 \pmod p$, allora il pushout lungo ϕ_m da':

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot pa} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

con $h_m : X_{\phi_m} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ isomorfismo.

$$[([0],1)] \longmapsto [1]$$

$$[([1],0)] \longmapsto [pa]$$

2. Let A be a finitely generated abelian group, and denote by A_{tors} its torsion subgroup (i.e. the subgroup of elements of finite order). Construct an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}}(A, \mathbf{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{tors}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

[*Hint*: Compute the Ext group using a well-chosen injective resolution of $\mathbf{Z}$.]

Consideriamo la seguente risoluzione iniettiva di $\mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Applicando dunque il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q})$ otteniamo:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Dunque $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \big/ \pi_*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}))$.

Per il teorema di struttura di gruppi abeliani finitamente generati $\exists n \in \mathbb{N}$ per cui $A \simeq \mathbb{Z}^n \oplus A_{tors}$. Definiamo, ora, la mappa:

$$\gamma : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{tors}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$\alpha \longmapsto \alpha_{|A_{tors}}$$

Ora per la proprietà universale della somma diretta e per il fatto che $\mathbb{Z}^n$ é un gruppo abeliano libero, fissata una mappa in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{tors}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ é possibile estenderla alla somma diretta $\mathbb{Z}^n \oplus A_{tors} \simeq A$. Dunque γ é suriettivo.

Vediamo ora che $\pi_*(\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})) = \mathrm{Ker}\,\gamma$:

$\boxed{\subseteq}$ Sia $\overline{\beta} = \pi_*(\beta)$ con $\beta \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$. Dobbiamo mostrare che $\gamma(\overline{\beta}) \equiv 0$ cioé $\overline{\beta}|_{A_{tors}} \equiv 0$. Ma sia $a \in A_{tors}$ allora $\overline{\beta}(a) = [\beta(a)]_{\mathbb{Z}} = 0$ ma $\mathbb{Q}$ é senza torsione donque $\beta(a) = 0$;

$\boxed{\supseteq}$ Sia $\overline{\beta} \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, dato che $\mathbb{Z}^n$ è un gruppo abeliano e proiettivo allora possiamo sollevare $\overline{\beta}|_{\mathbb{Z}^n}$ a una mappa $\tilde{\beta} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $\overline{\beta}|_{\mathbb{Z}^n} \equiv \tilde{\pi} \circ \tilde{\beta}$ (dove pensiamo $\mathbb{Z}^n$ come $\mathbb{Z}^n \oplus 0$). Basta quindi estendere $\tilde{\beta}$ a $\beta : \mathbb{Z}^n \oplus A_{tors} \longrightarrow \mathbb{Q}$ che mappa A_{tors} a 0.

Allora $\overline{\beta} = \tilde{\pi}_*(\beta)$ con $\beta \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q})$.

Per il I teorema di isomorfismo applicato a γ: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \mathrm{Ker}\,\gamma \cong \mathrm{Imm}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) / \pi_*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q})) \simeq \mathrm{Hom}(A_{tors}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

3. Consider the ring $A = k[t]/(t^2)$ and the natural projection $p : A \to k$.

a) Show that $\ker(p)$ is not a projective A-module.

b) Construct an infinite projective resolution of the A-module k whose terms are all equal to A.

c) Examining the resolution constructed in *b*), conclude that A has infinite global dimension. [*Note:* Since A is Noetherian local but not regular, this follows from Serre's theorem but you should prove this special case directly.]

ⓐ Notiamo per prima cosa che A è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{M} := (t)/(t^2)$.

In particolare per il teorema di corrispondenza si ha proprio che $\operatorname{Ker} p = \mathfrak{M}$.

Ora, $\mathfrak{M}$ è generato da $t/(t^2)$ e notiamo che $t/(t^2) \cdot t/(t^2) = 0$ dunque $\mathfrak{M}$ non è libero. Allora per la Proposizione 2.17 $\mathfrak{M}$ non può essere proiettivo.

ⓑ Consideriamo la risoluzione proiettiva:

$$\cdots \xrightarrow{\cdot t} A \xrightarrow{\cdot t} \cdots \xrightarrow{\cdot t} A \xrightarrow{p} k \longrightarrow 0$$

dove $\cdot t : A \longrightarrow A$ con $p(t) \in k[t]$.

$$p(t)/(t^2) \longmapsto t \cdot p(t)/(t^2)$$

Vediamo che la successione è esatta:

① $\operatorname{Imm}(\cdot t) = \operatorname{Ker}(\cdot t)$: $\boxed{\subseteq}$ $t \cdot (t\, p(t))/(t^2) = t^2 p(t)/(t^2) = 0$; $\boxed{\supseteq}$ sia

$p(t)/(t^2) \in \operatorname{Ker}(\cdot t) \Rightarrow t \cdot p(t)/(t^2) = 0$ cioè $t\, p(t) = t^2 \cdot q(t)$ con $q(t) \in A[t]$,

$p(t) = t\, q(t)$. Cioè $p(t)/(t^2) \in \operatorname{Imm}(\cdot p)$.

② $\operatorname{Imm}(\cdot t) = \operatorname{Ker} p$: abbiamo visto che $\operatorname{Ker} p = (t)/(t^2) \overset{\exists p(t) \in A[t]}{=} t \cdot p(t)/(t^2) = \operatorname{Imm}(\cdot p)$.

ⓒ Vogliamo calcolare $\operatorname{gldim}(A)$ tramite il Corollario 6.9. per il quale:

$$\mathrm{gldim}(A) = \max\{d : \mathrm{Tor}_d^A(K,K) \neq 0\}.$$

Per calcolare $\mathrm{Tor}_d^A(K,K)$ usiamo la risoluzione proiettiva del punto (b):

$$\cdots \xrightarrow{\cdot t \otimes \mathrm{Id}_K} A \otimes K \xrightarrow{\cdot t \otimes \mathrm{Id}_K} \cdots \xrightarrow{\cdot t \otimes \mathrm{Id}_K} A \otimes K \xrightarrow{p \otimes \mathrm{Id}_K} K \otimes K \longrightarrow 0$$

Siano $a \in A$ e $q \in K$. Allora $(\cdot t \otimes \mathrm{Id}_K)(a \otimes q) = ta \otimes q \underset{ta \in K}{=} 1 \otimes taq = 0$, dunque

$t \otimes \mathrm{Id}_K \equiv 0$.

Ma quindi $\mathrm{Tor}_d^A(K,K) \simeq A \otimes K \simeq K$. Dunque $\mathrm{gldim}(A) = +\infty$

4. This exercise gives another proof of the fact that the polynomial ring $A = k[t_1, \dots, t_d]$ has global dimension $\leq d$.

a) Let M be a finitely generated A-module. Show that there exists an exact sequence of finitely generated A-modules

$$0 \to M_d \to F_{d-1} \to F_{d-2} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0,$$

with the F_i free.

b) Using the fact that A is regular, show that M_d is projective and conclude that $\mathrm{pd}(M) \leq d$.

(a) Supponiamo che $M = \langle m_1, \dots, m_s \rangle_A$. Definiamo $F_0 := A^s$ e $\varphi_0 : F_0 \longrightarrow M$

con $\varphi_0(a_1, \dots, a_s) := \sum_{i=1}^{s} a_i m_i$. Chiaramente φ_0 è surgettiva $\left(e_i \overset{\varphi_0}{\longmapsto} m_i \right)$.

Notiamo ora che $\operatorname{Ker} \varphi_0$ è un sottomodulo di un noetheriano e dunque è finitamente generato.

Allora possiamo costruire $\varphi_1 : F_1 \longrightarrow F_0$ dove $F_1 := A^{\operatorname{rk}(\operatorname{Ker}\varphi_0)}$ e $\varphi_1 \equiv i_1 \circ \psi_1$ con

$\psi_1 : F_1 \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi_0$ è la mappa costruita come φ_0 e $i_1 : \operatorname{Ker}\varphi_0 \longrightarrow F_0$ è l'inclusione.

Cioè:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & F_0 \arrow[r, "\varphi_0"] & M \arrow[r] & 0 \\ & \operatorname{Ker}\varphi_0 \arrow[u, "i_1"'] & & \end{tikzcd}$$

Possiamo iterare questo procedimento considerando $\varphi_j : F_j \longrightarrow F_{j-1}$ con $F_j := A^{\operatorname{rank}(\operatorname{Ker}\varphi_{j-1})}$

e $\varphi_j \equiv i_j \circ \psi_j$ con $i_j : \operatorname{Ker}\varphi_{j-1} \longrightarrow F_{j-1}$ inclusione e $\psi_j : F_j \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi_{j-1}$

definita come sopra. Chiaramente possiamo porre $M_d := \operatorname{Ker}\varphi_{d-1}$ con la mappa di inclusione.

(b) Per la Prop. 2.19, per dire che M_d è proiettivo, possiamo mostrare che $M_d \otimes A_P$

è libero su A_P $\forall P$ massimale. Sia $M_i := \operatorname{Ker}(F_i \longrightarrow F_{i-1})$ $(F_{-1} := M)$; presa una sequenza

regolare per A $\{x_1, \dots, x_d\}$, vogliamo mostrare che $\{x_1, \dots, x_i\}$ è regolare per M_i

$\forall i \in \{1, \dots, d\}$. Procediamo per induzione:

$\boxed{i = 1}$: poiché $\{x_1, \dots, x_d\}$ è regolare su A allora la moltiplicazione per x_1 è iniettiva ed in particolare lo è anche ristretta a M_1;

$\boxed{i-1 \longrightarrow i}$ Sia $I_j = (x_1, \dots, x_j)$ e mostriamo per induzione per $0 \le j \le i-1$ che:

$$0 \longrightarrow M_i / I_j M_i \longrightarrow F_{i-1} / I_j F_{i-1} \longrightarrow M_{i-1} / I_j M_{i-1} \longrightarrow 0$$

è esatta e la mappa di moltiplicazione $\cdot x_{j+1}$ è iniettiva su $M_i / I_j M_i$:

- $\boxed{j=0}$ $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow 0$ è esatta per costruzione e la moltiplicazione per x_1 è il caso $\boxed{i=1}$;

- $\boxed{j-1 \longrightarrow j}$: consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_i / I_{j-1} M_i \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x_j"] & F_{i-1} / I_{j-1} F_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x_j"] & M_{i-1} / I_{j-1} M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot x_j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_i / I_{j-1} M_i \arrow[r] & F_{i-1} / I_{j-1} F_{i-1} \arrow[r] & M_{i-1} / I_{j-1} M_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Per hp. induttiva le mappe verticali sono iniettive, dunque per lo snake lemma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(\cdot x_j) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\cdot x_j) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\cdot x_j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_i / I_j M_i \arrow[r] & F_{i-1} / I_j F_{i-1} \arrow[r] & M_{i-1} / I_j M_{i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

è esatta; inoltre $F_{i-1} / I_j F_{i-1}$ è libero su A / I_j e quindi $\cdot x_{j+1}$ è iniettiva per regolarità $\Longrightarrow$ lo è anche $\cdot x_{j+1}$ ristretta a $M_i / I_j M_i$.

Sia, ora, $i \in \{1, \dots, d\}$; vediamo che $M_d / I_i M_d$ è libero su A / I_i:

$\boxed{i=d}$: $A / I_d \simeq A / p \simeq K$ e quindi $M_d / I_d M_d$ è libero poiché è un K-sp. vettoriale;

$\boxed{i < d}$: ipotizziamo che $\left(M_d / I_j M_d\right) \simeq \left(A / I_j A\right)^r \simeq \langle \overline{m_1}, \dots, \overline{m_r} \rangle$. Consideriamo:

$$\begin{tikzcd}
(A/I_i)^n \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & M_d / I_i M_d \arrow[d] \\
(A/I_{i+1})^n \arrow[r, "\sim"] & M_d / I_{i+1} M_d
\end{tikzcd}$$

con $f(e_i) = m_i \ \forall i$ e mostriamo che esiste il sollevamento $\tilde{f}$.

Sia $m_i \in M_d / I_i M_d$ t.c. $\overline{m_i} = m_i \mod (x_{i+1})(M_d / I_i M_d)$ e $N = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$.

Allora $M_d / I_i M_d = x_{i+1}(M_d / I_i M_d) + N$, in particolare $(x_{i+1}) \subseteq (x_{i+1}, \dots, x_d) \in \operatorname{Spec}(A/I_i)$

e dunque per un corollario di Nakayama $M_d / I_i M_d = N = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$. É quindi ben

definita $\tilde{f}(e_i) = m_i$ e che fa commutare.

Infine, sia il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A/I_i)^n \arrow[r, "\cdot x_{i+1}"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & (A/I_i)^n \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & (A/I_{i+1}A)^n \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_d/I_i M_d \arrow[r, "\cdot x_{i+1}"] & M_d / I_i M_d \arrow[r] & M_d / I_{i+1} M_d \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Applicando lo snake lemma, si ha $\operatorname{Ker} \tilde{f} \simeq (x_{i+1}) \operatorname{Ker} \tilde{f}$ allora per Nakayama $\operatorname{Ker}(\tilde{f}) = 0$ cioé

$M_d / I_i M_d \simeq (A/I_i)^n$. Per $i=0$ si ha che M_d libera.

5. Let A be a regular local ring of dimension d with residue field k. Show that $\mathrm{Ext}^i_A(k,k)$ is a finite-dimensional k-vector space for all $i \geq 0$ and compute its dimension.

Prendiamo una sequenza regolare $\{x_1, \dots, x_d\}$. Per il Teorema 8.9 delle note abbiamo che $K(\underline{x})$ è una risoluzione libera e proiettiva per $A/(x_1, \dots, x_d) \simeq K$. In particolare se $f: A^d \longrightarrow A$ t.c. $f(a_1, \dots, a_d) = \sum_{i=1}^{d} a_i x_i$ allora $K(\underline{x}) = K(f)$. Dato che $\Lambda^i A^d$ è un modulo libero su A con base $\{e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i} \mid 1 \leq j_1 < \dots j_i \leq d\}$, da cui $\Lambda^i A^d \simeq A^{\binom{d}{i}}$.

Prendiamo ora la seguente risoluzione proiettiva:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial_f^{d-1}} A^d \xrightarrow{\partial_f^{d-2}} \dots \longrightarrow A^{\binom{d}{2}} \xrightarrow{\partial_f^1} A^d \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\pi} A/(x_1, \dots, x_d) \simeq K \longrightarrow 0$$

Da cui, applicando il funtore $\mathrm{Hom}_A(\cdot, K)$ otteniamo:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A,K) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(A^d, K) \xrightarrow{(\partial_f^1)^*} \dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^d, K) \xrightarrow{(\partial_f^{d-1})^*} \mathrm{Hom}_A(A,K) \longrightarrow 0$$

Dato che $\mathrm{Hom}_A(\cdot, K)$ è esatto a sinistra $\mathrm{Ker}\, f^* = \mathrm{Im}(\pi^*) \simeq \mathrm{Hom}(A, K)$ ma π^* è una mappa lineare iniettiva tra spazi di stessa dimensione ($\dim = 1$) e dunque è un isomorfismo.

Per cui $f^* \equiv 0$. Sia, ora, $(\partial_f^i)^*$ con $i \in \{2, \dots, d\}$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(\Lambda^{i-1} A^d, K)$, vale che $(\partial_f^i)^* \circ \varphi = \varphi \circ (\partial_f^{i-1})$. Inoltre:

$$\partial_f^{i-1}(e_1 \wedge \dots \wedge e_{i_j}) = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} f(e_{i_k}) \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k+1} x_{i_k} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_j$$

Per definizione $x_j = f(e_j) \in \mathrm{Ann}_A(K)$ dunque $\mathrm{Im}((\partial_f^{i-1})) \subseteq \mathrm{Ann}_A(K)(\Lambda^{i-1} A^d)$. Per A-linearità presa φ come prima, $\varphi \circ \partial_f^{i-1} \equiv 0$. Allora $\mathrm{Ext}_A^i(K,K) \simeq \mathrm{Hom}_A(A^{\binom{d}{i}}, K) \simeq K^{\binom{d}{i}}$.

Homework 4

Istituzioni di Algebra 2022/23

David Vencato

Matricola 590954

1. *a*) Let $\mathcal{A}$ be an abelian category, and let $D^0(\mathcal{A})$ be the full subcategory of $D(\mathcal{A})$ spanned by objects with $H^i(A^\bullet) = 0$ for $i \neq 0$. Show that the functor $A^\bullet \overset{G}{\mapsto} H^0(A^\bullet)$ induces an equivalence of categories between $D^0(\mathcal{A})$ and $\mathcal{A}$.

b) Is there a similar equivalence between the full subcategory of $D(\mathcal{A})$ spanned by objects with $H^i(A^\bullet) = 0$ for $i \neq 0, 1$ and the category of 2-term complexes in $\mathcal{A}$ (concentrated in degrees 0 and 1)?

a) Consideriamo i funtori: $F: \mathcal{A} \longrightarrow D^0(\mathcal{A})$ che prende un oggetto A e gli associa $[\dots \to \_ \to 0 \to A \to 0 \to \dots]$ e $F(\varphi)$ è φ sulla componente A $\forall \varphi$ morfismo in $\mathcal{A}$;

e $G: D^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ che prende $A^\bullet$ e gli associa $H^0(A^\bullet)$ e $G(\psi)$ è $H(\psi)$.

Notiamo che per definizione $GF(A) = A$ e $GF(\varphi) = \varphi$. Dunque dobbiamo mostrare che esiste un diagramma commutativo come segue dove le mappe verticali sono isomorfismi:

$$\begin{tikzcd} FG(A^\bullet) \arrow[r, "\substack{H(\phi) \\ \shortparallel \\ FG(\phi)}"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & FG(B^\bullet) \arrow[d, "\wr"] \\ A^\bullet \arrow[r, "\phi"] & B^\bullet \end{tikzcd}$$

Per la Costruzione 10.13 $\tau_{\geq 0}(\tau_{\leq 0}(A^\bullet)) = [\dots \to 0 \to H^0(A) \to 0 \to \dots] = FG(A^\bullet)$

e in particolare $\tau_{\geq 0}$ e $\tau_{\leq 0}$ sono quasi isomorfismi e dunque possiamo prendere come mappe verticali proprio $\tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0}$.

2. *a*) Give an example of a morphism of complexes that induces the zero morphism in the derived category but not in the homotopy category. [*Hint:* For instance, you may want to take one, or both, of the complexes to be the cone of some morphism.]

b) Give an example of a morphism $\phi : A^\bullet \to B^\bullet$ in a derived category such that $H^i(\phi) = 0$ for all i but $\phi \neq 0$. [*Hint:* For instance, associate a morphism with the extension of abelian groups $0 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$.]

(a) Consideriamo il seguente complesso $A^\bullet$:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{(-1)}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{(0)}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \xrightarrow{[\,]_2} \underset{(1)}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

dove $\cdot 2$ é la moltiplicazione per due e $[\,]_2$ é la valutazione modulo due (ben definito come complesso dato che $\mathrm{Imm}(\cdot 2) \subseteq \mathrm{Ker}([\,]_2)$).

Consideriamo $id : A^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ l'identitá tra complessi.

Per prima cosa notiamo che $id \neq 0$ in $K(A)$ cioé non é omotopa alla mappa nulla. Se lo fosse, per definizione esisterebbe $h^\bullet : A^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ omotopia tale che in grado 0:

$$id = (\cdot 2) \circ h^0 + h^1 \circ [\,]_2$$

Valutando in $[2]_4$ l'uguaglianza precedente:

$$[2]_4 = (\cdot 2) \circ h^0([2]_4) + h^1\left[[2]_4\right]_2 = [0]_4 + [0]_4 = [0]_4 \quad \text{, assurdo.}$$

Ora per dire che $id = 0$ in $D(A)$ ci basta dire che la mappa tra complessi $\varphi : A^\bullet \longrightarrow 0$ é un quasi-isomorfismo tale che $\varphi \circ id$ é omotopo a 0. Essendo $\varphi \equiv 0$ é chiaro che $\varphi f \sim 0$; inoltre φ é un quasi-isomorfismo poiché $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é esatta.

(b) Consideriamo il complesso $A^i = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i = 0,1 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$ con mappe di bordo $\partial_i : \begin{cases} p & , i = 0 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

dove $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è la moltiplicazione per p primo. Sia poi $B^\cdot$ il complesso $B^i = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i=0 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

e d_i le ovvie mappe di bordo. Sia $\phi : A^\cdot \longrightarrow B^\cdot$ t.c. $\phi^0 \equiv id$ e $\phi^i = 0$ per $i \neq 0$.

Ora $H^\cdot(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & , i=1 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$ e $H^\cdot(B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i=0 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

Dunque $H^i(\phi) \equiv 0 \quad \forall i$.

Vediamo che $\phi \neq 0$ in $D(A)$ cioè $\nexists\, \varphi : B^\cdot \to C^\cdot$ quasi isomorfismo t.c. $\varphi \circ \phi \sim 0$.

Se così non fosse $\exists\, h : A^\circ \longrightarrow C^\cdot$ omotopia:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, "h_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, "h_1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, "h_2"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{-1} \arrow[r, "d_C^{-1}"'] & C^0 \arrow[r, "d_C^0"'] & C^1 \arrow[r, "d_C^1"'] & C^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

dove in particolare vale $\varphi^0 \circ \phi^0 = d_C^{-1} \circ h_0 + h_1 \circ p \Rightarrow \varphi^0 = d_C^{-1} \circ h_0 + h_1 \circ p$ e φ^0

è un ciclo dato che per commutatività del quadrato $d_C^0 \circ \varphi^0 = 0$.

Dunque $\varphi^0(1) = d_C^{-1} \circ h_0(1) + h_1(p) = d_C^{-1} \circ K^0(1) + p\, h_1(1)$. Ora φ è un quasi

isomorfismo dunque $H(\varphi^0) : \mathbb{Z} \to H^0(C^\cdot)$ è un isomorfismo che manda $1 \longmapsto [\varphi^0(1)]$.

Allora $[\varphi^0(1)]$ è un generatore di $H^0(C)$ ma se guardo l'equazione precedente modulo

$\mathrm{Im}(d_C^{-1})$ ho che $[\varphi^0(1)] = p\,[h_1(1)]$ che non genera. Assurdo.

4. Let $\mathcal{A}$ be an abelian category.

a) Show that an exact triangle $A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \xrightarrow{f} A^\bullet[1]$ in $D(\mathcal{A})$ is isomorphic to the exact triangle coming from the natural exact sequence of complexes $0 \to A^\bullet \to A^\bullet \oplus C^\bullet \to C^\bullet \to 0$ if and only if $f = 0$.

b) Assume moreover that $\mathrm{Ext}^i(A, B) = 0$ for all $i \geq 2$ and all objects A, B in $\mathcal{A}$. Show that for each object $A^\bullet$ of $D^b(\mathcal{A})$ there is a (non-canonical) isomorphism

$$A^\bullet \cong \bigoplus_i H^i(A^\bullet)[-i].$$

[*Hint:* Use induction exploiting the exact triangles $\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \to \tau_{\leq i}(A^\bullet) \to H^i(A^\bullet)[-i] \to \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]$ and statement *a*).]

a $\boxed{\Rightarrow}$ Dato che $0 \to A^\bullet \to A^\bullet \oplus C^\bullet \to C^\bullet \to 0$ è esatta allora

$A^\bullet \to A^\bullet \oplus C^\bullet \to C^\bullet \xrightarrow{0} A^\bullet[1]$ è un triangolo esatto per cui il seguente diagramma commutativo

ha le mappe verticali che sono isomorfismi:

$$\begin{tikzcd}
A^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & B^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & A^\bullet[1] \arrow[d, "\wr"] \\
A^\bullet \arrow[r] & A^\bullet \oplus C^\bullet \arrow[r] & C^\bullet \arrow[r, "0"] & A^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

Dunque chiaramente $f = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per il Lemma 9.10. delle note abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet[-1] \arrow[r, "0"] \arrow[d, "id"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & B^\bullet \arrow[r, "f"] & C^\bullet \arrow[d, "id"] \\
C^\bullet[-1] \arrow[r, "\gamma"] & A^\bullet \arrow[r] & A^\bullet \oplus C^\bullet \arrow[r, "0"] & C^\bullet
\end{tikzcd}$$

Ma se $0 \to A^\bullet \xrightarrow{i} A^\bullet \oplus C^\bullet \underset{\overset{r}{\dashleftarrow}}{\xrightarrow{\pi}} C^\bullet \to 0$ allora $\gamma = \gamma \circ (\pi \circ r) = (\gamma \circ \pi) \circ r = 0$.

Dunque il diagramma commuta e sempre per il Lemma 9.10 ho un morfismo

$\psi : B^\bullet \to A^\bullet \oplus C^\bullet$ che è un isomorfismo per il Corollario 9.11.

5. Let $\mathcal{A}$ be the category of modules over a commutative ring R, and let $A^\bullet, B^\bullet$ be two objects in $D^-(\mathcal{A})$. Show that there is a canonical isomorphism

$$A^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} B^\bullet \xrightarrow{\sim} B^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} A^\bullet$$

in $D^-(\mathcal{A})$. [*Warning:* Be careful with signs!]

Come viene notato nel Remark 11.8 $A^\bullet \otimes^L B^\bullet \simeq P_A^\bullet \otimes P_B^\bullet$. Dunque se troviamo un isomorfismo tra $P_A^\bullet \otimes P_B^\bullet$ avremmo la tesi: $A^\bullet \otimes^L B^\bullet \simeq P_A^\bullet \otimes P_B^\bullet \simeq P_B^\bullet \otimes P_A^\bullet \simeq B^\bullet \otimes^L A$.

Definiamo $\varphi^n : \bigoplus_{p+q=n} A^p \otimes B^q \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} B^p \otimes A^q \qquad \varphi^i(x \otimes y) = (-1)^{p\cdot q}\, y \otimes x.$

La mappa e' chiaramente un isomorfismo, dobbiamo mostrare che commuta con le mappe di bordo di $\bigoplus_{p+q=n} A^p \otimes B^q$ e $\bigoplus_{p+q=n} B^p \otimes A^q$ che chiamiamo rispettivamente $\partial^n_{A\otimes B}$ e $\partial^n_{B\otimes A}$.

$$\partial^n_{B\otimes A} \circ \varphi^n(x \otimes y) = \partial^n_{B\otimes A}\left((-1)^{p\cdot q}\, y \otimes x\right) = (-1)^{p\cdot q}\left(\partial_B^q(y) \otimes x + (-1)^q y \otimes \partial_A^p(x)\right)$$

$$\varphi^{n+1} \circ \partial_{A\otimes B}(x \otimes y) = \varphi^{n+1}\left(\partial_A^p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \partial_B^q(y)\right) = (-1)^{(p+1)q}\, y \otimes \partial_A^p(x) +$$

$$+ (-1)^{p(q+1)}\, \partial_B^q(y) \otimes (-1)^p x = (-1)^{pq}\left((-1)^q\, y \otimes \partial_A^p(x) + \partial_B^q(y) \otimes x\right)$$

$$\downarrow$$

$$p(q+1) + p \equiv pq \pmod 2$$

Dunque tesi.