Curve-GTD

David Vencato

Matricola 590954

Esercizio 1

Nei punti in cui è biregolare, calcola il riferimento di Frenet della curva
$$\gamma(t) = (\sec t, \sec t, \tan t), -\pi/2 < t < \pi/2.$$

Dunque la curva $\gamma(t)$ è regolare infatti $\gamma'(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} ; \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} ; \frac{1}{\cos^2(t)} \right) \neq (0,0,0) \quad \forall -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Quindi calcolo $K(t)$, la curvatura di $\gamma(t)$, attraverso la formula vista a lezione:
$$K(t) = \frac{\sqrt{\|\gamma'(t)\|^2 \cdot \|\gamma''(t)\|^2 - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Calcoliamo alcuni termini della formula:

- $\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{\sin^2(t)}{\cos^4(t)} + \frac{\sin^2(t)}{\cos^4(t)} + \frac{1}{\cos^4(t)} = \frac{2 \cdot \sin^2(t) + 1}{\cos^4(t)}$

- $\|\gamma''(t)\|^2$: $\gamma''(t) = \left(\frac{\cos^3(t) + 2 \cdot \sin^2(t) \cdot \cos(t)}{\cos^4(t)}, \frac{\cos^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t)}{\cos^4(t)}, \frac{2\cos(t)\sin(t)}{\cos^4(t)} \right)$

$$= \left(\frac{1 + \sin^2(t)}{\cos^3(t)}, \frac{1 + \sin^2(t)}{\cos^3(t)}, \frac{2\sin(t)}{\cos^3(t)} \right)$$ dove l'ultimo passaggio è lecito

poiché $\cos(t) \neq 0 \quad \forall -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Dunque:

$$\|\gamma''(t)\|^2 = \frac{2 + 2\sin^4(t) + 4\sin^2(t) + 4\sin^2(t)}{\cos^6(t)} = \frac{2\sin^4(t) + 8\sin^2(t) + 2}{\cos^6(t)}$$

- $\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 2 \cdot \frac{\sin(t) + \sin^3(t)}{\cos^5(t)} + 2 \cdot \frac{\sin(t)}{\cos^5(t)} = \frac{4 \cdot \sin(t) + 2\sin^3(t)}{\cos^5(t)}$

- $\|\gamma'(t)\|^3 = \frac{\sqrt{2 \cdot \sin^2(t) + 1}}{\cos^6(t)}$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot \sin^2(t) + 1}{\cos^4(t)} \cdot \frac{2\sin^4(t) + 8\sin^2(t) + 2}{\cos^6(t)} - \frac{16\sin^2(t) + 4\sin^6(t) + 16\sin^4(t)}{\cos^{10}(t)}}}{\frac{\sqrt{2 \cdot \sin^2(t) + 1}}{\cos^6(t)}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{\cancel{4\sin^6(t)} + \cancel{16\sin^4(t)} + 4\sin^2(t) + 2\sin^4(t) + 8\sin^2(t) + 2 - 16\sin^2(t) - \cancel{4\sin^6(t)} - \cancel{16\sin^4(t)}}}{\cancel{\cos^5(t)}}}{\dfrac{\left(\sqrt{2\sin^2(t)+1}\right)^3}{\cancel{\cos^6(t)}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\cdot\sin^4(t) - 4\sin^2(t) + 2}}{\left(\sqrt{2\cdot\sin^2(t)+1}\right)^3}$$ donque $K(t) = 0 \iff \sin^4(t) - 2\sin^2(t) + 1 = 0$

$\iff \left(\sin^2(t) - 1\right)^2 = 0 \iff \sin^2(t) = 1$ e dunque $\forall -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $K(t) \neq 0$.

Quindi la curva è biregolare $\forall -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo il riferimento di Frenet, sapendo appunto che la curva è biregolare:

- $$\underline{t}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\left(\dfrac{\sin(t)}{\cos^2(t)}; \dfrac{\sin(t)}{\cos^2(t)}; \dfrac{1}{\cos^2(t)}\right)}{\dfrac{\sqrt{2\cdot\sin^2(t)+1}}{\cos^2(t)}} = \boxed{\frac{(\sin(t), \sin(t), 1)}{\sqrt{2\cdot\sin^2(t)+1}}}$$

- $$\underline{n}(t) : \left(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\right) \wedge \gamma'(t) = \left(\gamma'(t)\cdot\gamma'(t)\right)\gamma''(t) - \left(\gamma''(t)\cdot\gamma'(t)\right)\gamma'(t) =$$

$$= \frac{2\cdot\sin^2(t)+1}{\cos^4(t)} \cdot \left(\frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)}, \frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)}, \frac{2\sin(t)}{\cos^3(t)}\right) -$$

$$- \frac{4\cdot\sin(t) + 2\sin^3(t)}{\cos^5(t)} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}; \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}; \frac{1}{\cos^2(t)}\right) =$$

$$= \left(\frac{2\sin^2(t) + 2\sin^4(t) + 1 + \sin^2(t)}{\cos^7(t)}, \frac{3\sin^2(t) + 2\sin^4(t) + 1}{\cos^7(t)}, \frac{4\sin^3(t) + 2\sin(t)}{\cos^7(t)}\right) -$$

$$- \left(\frac{4\sin^2(t) + 2\sin^4(t)}{\cos^7(t)}, \frac{4\sin^2(t) + 2\sin^4(t)}{\cos^7(t)}, \frac{4\sin(t) + 2\sin^3(t)}{\cos^7(t)}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^4(t)}\left(\cos^2(t), \cos^2(t), 2\sin^3(t) - 2\sin(t) = 2\sin(t)\left(\sin^2(t) - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^5(t)} \left(1, 1, -2\cdot\sin(t) \right)$$

$\| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \|$:

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} ; \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} ; \frac{1}{\cos^2(t)} \right) \wedge \left(\frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)} , \frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)} , \frac{2\sin(t)}{\cos^3(t)} \right) =$$

$$= \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \cdot 2\frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} - \frac{1}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)} , \frac{1}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)} - \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \cdot \frac{2\cdot\sin(t)}{\cos^3(t)} , \right.$$

$$\left. , \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)} - \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1+\sin^2(t)}{\cos^3(t)} \right) =$$

$$= \left(\frac{-\cos^2(t)}{\cos^5(t)} , \frac{\cos^2(t)}{\cos^5(t)} , 0 \right) = \left(-\frac{1}{\cos^3(t)} , \frac{1}{\cos^3(t)} , 0 \right)$$

$$\Rightarrow \| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \| = \frac{\sqrt{2}}{\cos^3(t)}$$

$$\underline{n}(t) = \frac{1}{\cancel{\cos^5(t)}} \left(1, 1, -2\sin(t) \right) \cdot \frac{\cancel{\cos^3(t)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{\cos^2(t)}}{\sqrt{2\sin^2(t)+1}} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{4\sin^2(t)+2}} \cdot \left(1, 1, -2\cdot\sin(t) \right)}$$

- $\underline{b}(t) = \left(-\frac{1}{\cos^3(t)} , \frac{1}{\cos^3(t)} , 0 \right) \cdot \frac{\cos^3(t)}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-1, 1, 0 \right)}$

Esercizio 2

Calcolare la lunghezza d'arco della curva $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ iniziando dal punto $(0, 1)$.

Dunque scriviamo il parametro di lunghezza $s(t)$ partendo da $t=0$ (dal momento che $\gamma(0) = (0,1)$):

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1+\sinh^2(u)}\, du = \int_0^t |\cosh(u)| du =$$

$$= \int_0^t \cosh(u) du \quad \left(\text{dal momento che } \cosh t = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x\right)$$

$$= \Big[\sinh(u)\Big]_0^t = \boxed{\sinh(t)}$$

Esercizio 3

Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva planare della forma

$$\gamma(s) = (s, f(s)), \text{ for } s \in [0,1],$$

per una qualche funzione liscia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Calcolare:

1) la lunghezza,
2) la normale orientata e
3) la curvatura orientata

di γ in termini di f e delle sue derivate.

① Per definizione di lunghezza di una curva:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(s)\| \, ds = \boxed{\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(s))^2} \, ds}$$

($\gamma'(s) = (1, f'(s))$, la curva é regolare)

② Come visto a lezione la normale orientata $\underline{\tilde{n}}(s)$ é l'unico versore t.c. $\underline{\tilde{n}}(s) \perp \underline{t}(s)$ e $(\underline{t}(s), \underline{n}(s))$ ha la stessa orientazione della base canonica. Dunque per queste condizioni se $\underline{t}(s) = (\underline{t}_1(s), \underline{t}_2(s))$ deve essere che $\underline{\tilde{n}}(s) = (-\underline{t}_2(s), \underline{t}_1(s))$.

Calcoliamo quindi:

$$\underline{t}(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} = \frac{(1, f'(s))}{\sqrt{1 + (f'(s))^2}}$$

Dunque $$\boxed{\underline{\tilde{n}}(s) = \frac{(-f'(s), 1)}{\sqrt{1 + (f'(s))^2}}}$$

③ Per la formula vista a lezione vale che la curvatura orientata $\underline{\tilde{K}}(s)$:

$$\underline{\tilde{K}}(s) = \frac{1}{\|\gamma'(s)\|^3} \cdot \det(\gamma', \gamma'')$$

Dunque $\det(\gamma', \gamma'') = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(s) & f''(s) \end{pmatrix} = f''(s) \Longrightarrow$

$$\boxed{\underline{\tilde{K}}(s) = \frac{f''(s)}{\left(\sqrt{1 + (f'(s))^2}\right)^3}}$$

Esercizio 4

Sia $\sigma : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma(t) = (\sin t, \frac{t+2}{1+t^2}, e^t).$$

(i) Mostrare che σ é una curva regolare.
(ii) Trovare il cerchio osculatore di σ in $\sigma(0)$.
(iii) Determinare la torsione di σ.

(i) $\sigma'(t) = \left(\cos t, \left(\frac{t+2}{1+t^2}\right)', e^t \right) \neq (0,0,0) \quad \forall t$ dato che $e^t > 0 \quad \forall t$

(ii) Dal momento che $\sigma(t)$ é una curva regolare possiamo calcolare $\underline{K}(0)$ e $\underline{n}(0)$ con le formule viste a lezione:

- $\underline{K}(0)$: $\sigma'(t) = \left(\cos t, \frac{1-4t-t^2}{(1+t^2)^2}, e^t \right) \Rightarrow \sigma'(0) = (1,1,1)$

$$\Rightarrow \|\sigma'(0)\| = \sqrt{3}$$

$$\sigma''(t) = \left(-\sin t, \frac{(-2t-4)(1+t^2)^2 - (1-4t-t^2)\cdot 2(1+t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^4}, e^t \right) =$$

$$= \left(-\sin t, \frac{(1+t^2)(-2t-4-2t^3-4t^2-4t+16t^2+4t^3)}{(1+t^2)^4}, e^t \right) =$$

$$= \left(-\sin(t), \frac{2t^3+12t^2-6t-4}{(1+t^2)^3}, e^t \right) = \left(-\sin(t), \frac{2\cdot(t^3+6t^2-3t-2)}{(1+t^2)^3}, e^t \right)$$

dunque $\sigma''(0) = (0, -4, 1) \Rightarrow \|\sigma''(0)\| = \sqrt{17}$.

E ancora: $\langle \sigma'(0), \sigma''(0) \rangle = -3$

Allora:

$$K(0) = \frac{\sqrt{\|\sigma'(0)\|^2 \cdot \|\sigma''(0)\|^2 - \langle \sigma'(0), \sigma''(0) \rangle^2}}{\|\sigma'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3\cdot 17 - 9}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

- $\underline{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{17 - \frac{9}{3}}} \cdot \left((0,-4,1) + \frac{3}{3}\cdot(1,1,1) \right) = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, -3, 2)$

Per quello visto a lezione il raggio r_0 di curvatura del cerchio cercato è:

$$r_0 = \frac{1}{\kappa(0)} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{14}}}$$

Mentre il centro c_0 del cerchio è:

$$c_0 = \sigma(0) + \underline{n}(0) \cdot r_0 = (0, 2, 1) + \frac{3}{\sqrt{14}} \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{14}} = \boxed{(0,2,1) + \frac{(3,-9,6)}{14}}$$

Per determinare, quindi, completamente il cerchio bisogna trovare il piano P_0 al quale appartiene.

$$P_0 = \mathrm{Span}\left\{ \underline{t}(0), \underline{n}(0) \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \frac{\sigma'(0)}{\|\sigma'(0)\|}, \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2) \right\} =$$

$$= \boxed{\mathrm{Span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2) \right\}}$$

(iii) Voglio mostrare che $\sigma(t)$ è biregolare; studio dunque $\underline{\kappa}(t)$ scrivendo

$$\sigma(t) = \left(\sin t, p(t), e^t \right) \quad \text{con } p(t) = \frac{t+2}{1+t^2}.$$

Per la formula visto nel punto (ii) $\kappa(t) = 0 \iff \|\sigma'(t)\|^2 \|\sigma''(t)\|^2 - \langle \sigma'(t), \sigma''(t) \rangle = 0$

$$\iff \|\sigma'(t) \wedge \sigma''(t)\|^2 = 0 \iff \|\sigma'(t) \wedge \sigma''(t)\| = 0 \iff \sigma'(t) \wedge \sigma''(t) = 0$$

Ora:

$$\sigma'(t) = (\cos(t), p'(t), e^t) \qquad \sigma''(t) = (-\sin(t), p''(t), e^t)$$

dunque:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(t) & p'(t) & e^t \\ -\sin(t) & p''(t) & e^t \end{pmatrix}$$

$$\sigma'(t) \wedge \sigma''(t) = \left(e^t (p'(t) - p''(t)) ; -e^t (\cos(t) + \sin(t)) ; \cos(t) \cdot p''(t) + \sin(t) \cdot p'(t) \right)$$

Perché questo vettore sia il vettore nullo:

$$\begin{cases} p'(t) = p''(t) \\ \cos(t) = -\sin(t) \end{cases}$$

ma dato che $t \in [-1,1]$ la 2° equazione è vera per $t = -\frac{\pi}{4}$ ma per il calcolo precedente di $\sigma'(t)$ e $\sigma''(t)$ si ha che $p'(-\frac{\pi}{4}) \neq p''(-\frac{\pi}{4})$. Dunque $\sigma(t)$ è biregolare.

Allora per trovare la torsione $\tau(t)$ posso usare:

$$\tau(t) = \frac{\langle \sigma'(t) \wedge \sigma''(t), \sigma'''(t) \rangle}{\| \sigma'(t) \wedge \sigma''(t) \|^2}$$

dunque $\sigma'''(t) = (-\cos(t), p'''(t), e^t)$. Allora:

$$\langle \sigma'(t) \wedge \sigma''(t), \sigma'''(t) \rangle =$$

$$= -e^t \cdot \cos t \left(p'(t) - p''(t) \right) - e^t \cdot p'''(t)(\cos t + \sin t) + e^t \cos t \cdot p''(t) + e^t \cdot \sin t \cdot p'(t) =$$

$$= e^t \Big(\cos t \left(p''(t) - p'(t) + p''(t) - p'''(t) \right) + \sin t \left(p'(t) - p'''(t) \right) \Big) =$$

$$= e^t \Big(\cos t \left(-p'(t) + 2p''(t) - p'''(t) \right) + \sin t \left(p'(t) - p'''(t) \right) \Big)$$

Invece:

$$\| \sigma'(t) \wedge \sigma''(t) \|^2 = e^{2t} \left(p'(t) - p''(t) \right)^2 + e^{2t} (\cos t + \sin t)^2 + \left(p''(t) \cdot \cos t + \sin t \cdot p'(t) \right)$$

Allora.

$$\boxed{\tau(t) = \frac{e^t \Big(\cos t \left(-p'(t) + 2p''(t) - p'''(t) \right) + \sin t \left(p'(t) - p'''(t) \right) \Big)}{e^{2t} \left(p'(t) - p''(t) \right)^2 + e^{2t} (\cos t + \sin t)^2 + \left(p''(t) \cdot \cos t + \sin t \cdot p'(t) \right)}}$$

con $p'(t) = \frac{1 - 4t - t^2}{(1+t^2)^2}$, $p''(t) = \frac{2(t^3 + 6t^2 - 3t - 2)}{(1+t^2)^3}$, $p'''(t) = -\frac{6(t^4 + 8t^3 - 6t^2 - 8t + 1)}{(1+t^2)^4}$

Exercise 5

Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞.

(i) Dimostrare che l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(y), y \in [0, 1]\}$$

è il supporto di una curva regolare e iniettiva.

(ii) Trovare una formula per la lunghezza di tale curva (in termini delle derivate di f).

(i) Come visto a lezione data $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione C^∞ allora $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $\alpha(t) = (t, f(t))$ é una curva. É ovviamente iniettiva (sulla 1° componente si ha la funzione identitá) ed é regolare dato che $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$ $\forall t \in [0,1]$.

Adesso considero il seguente isomorfismo $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Si ha dunque che $\gamma := A \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é una curva iniettiva dato che é composizione di mappe lisce e iniettive. Mostriamo che γ é regolare: $\gamma'(t) = (A \circ \alpha)'(t) = A'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = A \cdot \alpha'(t)$ ma per regolaritá di α $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t$ e dato che A é invertibile il $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ e dunque $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t$.

Infine, per costruzione, il supporto di γ é proprio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(y), y \in [0,1]\}$.

(ii) Dunque per definizione $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma(t)\| \, dt = \int_0^1 \|A \circ \alpha(t)\| \, dt = \int_0^1 \|\alpha(t)\| \, dt = \boxed{\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt}$, dove il terzo $\boxed{=}$ derivo dal fatto che A é ortogonale e dunque preserva la norma euclidea.

Exercise 6

Si consideri la curva planare

$$\sigma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \begin{bmatrix} (2+\cos t)\ \cos(2t) \\ (2+\cos t\ )\sin(2t) \end{bmatrix}$$

(i) Si dimostri che è una curva chiusa regolare liscia

(ii) Se ne determini l'indice di rotazione.

(i) La funzione data é liscia dal momento che lo e' nelle componenti $(2+\cos t)\cos(2t)$ e $(2+\cos t)\cdot\sin(2t)$. Perché sia chiusa, per la definizione data a lezione di curva chiusa serve verificare l'uguaglianza $\sigma(0)=\sigma(\pi)$:

- $\sigma(0)=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ e $\sigma(2\pi)=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

Infine per dire che é regolare bisogna mostrare che $\sigma'(t)\neq 0$ $\forall t\in[0,2\pi]$.

Ma $\sigma'(\bar{t})=0$ per un certo $\bar{t} \iff \|\sigma'(\bar{t})\| \iff \|\sigma'(\bar{t})\|^2=0$. Allora:

$$\sigma'(t)=\begin{bmatrix} -\sin t\cdot\cos(2t)-(2+\cos t)(\sin 2t)\cdot 2 \\ -\sin t\cdot\sin(2t)+(2+\cos t)(\cos 2t)\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$\|\sigma'(t)\|^2 = \sin^2 t\cdot\cos^2(2t)+4(2+\cos t)^2(\sin 2t)^2+\sin^2 t\cdot\sin^2(2t)+4(2+\cos t)^2(\cos 2t)^2 =$$

$$= \sin^2 t + 4(2+\cos t)^2 = \sin^2 t + 4\cos^2 t + 16 + 16\cos t = 3\cos^2 t + 16\cos t + 17$$

>0 $\forall t$ dato che $\cos t \leq 1$ $\forall t$

(ii) Vediamo che la richiesta é ben definita facendo vedere che anche $\underline{t}(t)$ e' una curva chiusa e cioe' $\sigma'(0)=\sigma'(2\pi)$ (infatti l'indice di rotazione é il grado di $\underline{t}(t)$ e quindi per essere ben definito $\underline{t}(t)$ deve essere chiusa):

- $\sigma'(0)=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$ e $\sigma'(2\pi)=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$

Ora considero la funzione $H := [0,1]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c.

$H(s,t)=(2+s\cdot\cos t)\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$. Questa é un'omotopia tra $\sigma(t)$ e

$\alpha(t) = 2\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Infatti:

- $H(0,t) = \alpha(t)$ e $H(1,t) = \sigma(t)$
- $H_s(t) := H(s,t)$ è una curva chiusa $\forall s \in [0,1]$ dato che $H_s(0) = \begin{pmatrix}2+s\\ 0\end{pmatrix} =$
  $= H_s(2\pi)$
- H è continua

Dunque considero:

$$\frac{d}{dt}H(s,t) = \begin{pmatrix}-s\cdot\sin t\cdot\cos(2t) - 2\cdot\sin(2t)(s\cdot\cos(t)+2)\\ 2\cos(2t)(s\cos(t)+2) - s\cdot\sin t\cdot\sin(2t)\end{pmatrix} =$$

$$= -s\cdot\sin t\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix} + 2(s\cos(t)+2)\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}$$

che è un'omotopia tra $\sigma'(t)$ e $\alpha'(t)$ infatti:

- $\frac{dH(s,t)}{dt}(0,t) = 4\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix} = \frac{d}{dt}2\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix} = \alpha'(t)$

  e $\frac{dH(s,t)}{dt}(1,t) = -\sin t\begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix} + 2(\cos(t)+2)\begin{pmatrix}-\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix} = \sigma'(t)$

- $\frac{d}{dt}H(s,t) = \frac{d}{dt}H_s(t)$ è una curva chiusa infatti $\frac{d}{dt}H_s(0) = \begin{pmatrix}0\\ 2(s+2)\end{pmatrix} =$
  $= \frac{d}{dt}H_s(2\pi)$
- $\frac{d}{dt}H(s,t)$ è continua

Dunque (ammesso che sia ben definita) $\overline{H} := \dfrac{\frac{d}{dt}H(s,t)}{\|\frac{d}{dt}H(s,t)\|}$ è ovviamente un'omotopia tra $\underline{t}^{\sigma}(t)$ e $\underline{t}^{\alpha}(t)$. (In generale dal momento che la derivazione e il fascio di curve omotope sono indicizzate da t e s rispettivamente, l'"azione" di derivazione e quella di omotopia "commutano" tra loro)

Per vedere la buona definizione dunque dobbiamo mostrare che

$$\left\| \frac{d}{dt} H(s,t) \right\| \neq 0 \quad \forall (s,t) \in [0,1] \times [0, 2\pi].$$

Quindi:

$$\left\| \frac{dH(s,t)}{dt} \right\|^2 = s^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2(2t) + 4\sin^2(2t)\,(s \cdot \cos(t)+2)^2 + 4 \cdot s \cdot \cancel{\sin t \cdot \cos(2t) \sin(2t)}\,(s \cdot \cos t + 2)$$
$$+ 4\cos^2(2t) \cdot (s\cos t + 2)^2 + s^2 \cdot \sin^2 t \cdot \sin^2(2t) - 4 \cdot s \cdot \cancel{\sin t \cdot \sin(2t) \cdot \cos(2t)}\,(s\cos t + 2) =$$
$$= s^2 \sin^2 t + 4\,(s \cdot \cos t + 2)^2$$ e se questo è $0 \Rightarrow s \cdot \cos t + 2 = 0 \Rightarrow s \cdot \cos t = -2$

ma $s \in [0,1]$ e $\cos t \in [-1,1]$ e dunque si ha un assurdo

Dunque la mappa è ben definita e quindi $\rho(\sigma) = \deg\left(\underline{t}^{\alpha}(t)\right)$ con

$$\underline{t}^{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Ora si vuole trovare un sollevamento $\tilde{\phi} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ di $\underline{t}^{\alpha}(t)$ cioè una mappa t.c. $\pi \circ \tilde{\phi}(t) = \underline{t}^{\alpha}(t) \quad \forall t\, [0, 2\pi]$ con $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ t.c. $\theta \xmapsto{\pi} (\cos\theta, \sin\theta)$. Dunque posso prendere $\tilde{\phi}(t) = 2t + \frac{\pi}{2}$.

Quindi:

$$\boxed{\rho(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\left(\tilde{\phi}(2\pi) - \tilde{\phi}(0)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2}$$

Compito Superfici - GTD

David Vencato
Matricola 590954

Esercizio 1

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa

$$\varphi(u, v) := (u, v, u^2 - v^2).$$

(1) Mostrare che l'immagine di φ è una superficie, che chiameremo Σ.
(2) Determina
- i coefficienti metrici,
- la prima forma fondamentale,

nella parametrizzazione φ.
(3) Determina
- una normale,
- i coefficienti di forma relativi a tale normale,
- la seconda forma fondamentale,

nella parametrizzazione φ.
(4) Determina
- la curvatura Gaussiana,
- la curvatura media,
- le curvature principali,

di Σ.

(1) Si mostra che la mappa $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Sigma$ é un omeomorfismo:

- é continua (é continua sulle componenti)
- é bigettiva: per definizione é surgettiva ed é iniettiva (sulle prime 2 componenti é l'identitá)
- $\varphi^{-1} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $(x, y, z) \in \Sigma \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é l'inversa di φ ed é continua.

Adesso si mostra che $d_{(u,v)}\varphi$ é iniettivo:

$$d_{(u,v)}\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{bmatrix} \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Questa matrice ha rango 2 e dunque l'applicazione lineare che rappresenta é iniettiva.

Quindi φ é una parametrizzazione globale di Σ e allora per definizione Σ é una superficie.

(2) Data la parametrizzazione si ha che:

$$\partial_1 |_{(u,v)} = (1, 0, 2u) \qquad \partial_2 |_{(u,v)} = (0, 1, -2v) \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

quindi:

$$E(u,v) = \langle \partial_1, \partial_1 \rangle_{\varphi(u,v)} = 1 + 4u^2$$

$$F(u,v) = \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_{\varphi(u,v)} = -4uv$$

$$G(u,v) = \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_{\varphi(u,v)} = 1 + 4v^2 \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Da cui se $w \in T_pS$ e $w = w_1 \partial_1 + w_2 \partial_2$ allora:

$$I_{\varphi(u,v)}(w) = (1+4u^2) w_1^2 - 8uv \cdot w_1 w_2 + (1+4v^2) w_2^2$$

③ Calcolo dato $p := \varphi(u,v)$:

$$N(p) := \frac{\partial_1|_p \wedge \partial_2|_p}{\|\partial_1|_p \wedge \partial_2|_p\|} ,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & -2v \end{pmatrix} \implies \partial_1|_p \wedge \partial_2|_p = (-2u, 2v, 1) \quad \text{e}$$

$$\|\partial_1|_p \wedge \partial_2|_p\| = \sqrt{4u^2+4v^2+1}$$

quindi $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ t.c. $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \dfrac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \in S^2$ è la

mappa di Gauss indotta dalla parametrizzazione φ.

Si calcolano ora:

$$\frac{d}{du}\left(-\frac{2u}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = \frac{-2 \cdot \sqrt{4u^2+4v^2+1} + \cancel{2}u \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \cdot 8u}{4u^2+4v^2+1} =$$

$$= \frac{-8u^2 - 8v^2 - 2 + 8u^2}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2(1+4v^2)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = \cancel{2}v \cdot \left(\frac{-\frac{1}{\cancel{2}}(4u^2+4v^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8u}{4u^2+4v^2+1}\right) = -\frac{8uv}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = \frac{-4u}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{-2u}{\sqrt{4v^2+4u^2+1}}\right) = \frac{8uv}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{2v}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = \frac{2(1+4u^2)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) = \frac{-4v}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

E quindi:

$$dN_p = -\frac{2}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ 4uv & -(1+4u^2) \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$$

Allora i coefficienti di forma sono:

$$e(u,v) = -\langle dN_p(\partial_1|_p), \partial_1|_p \rangle = (1+4v^2+4u^2)\frac{+2}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= +\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$$

$$f(u,v) = -\langle dN_p(\partial_1|_p), \partial_2|_p \rangle = -(4uv-4uv)\left(-\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}\right) = 0$$

$$g(u,v) = -\langle dN_p(\partial_2|_p), \partial_2|_p \rangle = (-1-4u^2-4v^2) \cdot \frac{+2}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

Allora se $w \in T_pS$ con $w = w_1\partial_1|_p + w_2\partial_2|_p$:

$$Q_p : T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$$

t.c. $Q_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle = -\langle dN_p(w_1\partial_1|_p + w_2\partial_2|_p), w_1\partial_1|_p + w_2\partial_2|_p \rangle$

$$= -\left\langle -\frac{2}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{bmatrix} 1+4v^2 & -4uv \\ 4uv & -(1+4u^2) \\ 2u & 2v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 2w_1u - 2w_2v \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= +\frac{2}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (1+4v^2+4u^2)(w_1^2-w_2^2) = \frac{2 \cdot (w_1^2-w_2^2)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}$$

(4) Per le formule viste a lezione si ha che:

- La curvatura gaussiana $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\dfrac{4}{4u^2+4v^2+1} \cdot \dfrac{1}{(1+4v^2)(1+4u^2) - 16u^2v^2} =$

$$= \frac{-4}{(4u^2+4v^2+1)^2}$$

- La curvatura media $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(1+4v^2)\left(\dfrac{+2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}\right) + (1+4u^2) \cdot \dfrac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}}{(1+4u^2)(1+4v^2) - 16u^2v^2} =$

$$= \frac{4(v^2-u^2)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

- Le curvature principali: $K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} = \dfrac{4(v^2-u^2)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \pm \sqrt{\dfrac{16(v^2-u^2)^2}{(4u^2+4v^2+1)^3} + \dfrac{4}{(4u^2+4v^2+1)^2}} =$

$$= \frac{4(v^2-u^2)}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}} \pm \sqrt{\frac{16(v^2-u^2)^2 + 4(4u^2+4v^2+1)}{(4u^2+4v^2+1)^3}} = \frac{4(v^2-u^2) \pm \sqrt{16(v^2-u^2)^2 + 4(4u^2+4v^2+1)}}{(4u^2+4v^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Esercizio 2

Sia $\tau(s) := (r(s), 0, h(s))$, al variare di $s \in \mathbb{R}$, una curva regolare parametrizzata per lunghezza d'arco in $\mathbb{R}^3$, con $r(s) > 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Sia Σ la superficie di rotazione ottenuta ruotando τ attorno all'asse z. Ovvero, Σ è l'immagine della mappa $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue

$$\varphi(s, \theta) := (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, h(s)).$$

(1) Nella parametrizzazione locale di cui sopra, calcolare i simboli di Christoffel di Σ.

(2) Data una curva liscia $\sigma(t) := (\alpha(t), \beta(t))$, dove t varia in un intervallo aperto I della retta reale, mostrare che il sistema di equazioni differenziali che deve essere soddisfatto dalle funzioni $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sull'intervallo I affinché la curva $\varphi(\sigma(t))$ sia una geodetica in Σ è

$$\begin{cases} \alpha'' - ((r\dot{r}) \circ \alpha)(\beta')^2 = 0, \\ \beta'' + \left(\frac{2\dot{r}}{r} \circ \alpha\right) \beta'\alpha' = 0, \end{cases}$$

dove $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ sono le derivate delle funzioni α, β nella variable $t \in I$ e $\dot{r}$ è la derivata della funzione r nella variabile $s \in \mathbb{R}$.

(1) Si calcolano:

$$\partial_1 \varphi = \left(\dot{r}(s)\cos\theta, \dot{r}(s)\sin\theta, \dot{h}(s)\right) \qquad \partial_2 \varphi = \left(-r(s)\sin\theta, r(s)\cos\theta, 0\right)$$

quindi

$E(s,\theta) = \langle \partial_1\varphi, \partial_1\varphi\rangle = \dot{r}(s)^2 + \dot{h}(s)^2 = 1$ dove l'ultimo uguale deriva dal fatto che $\tau(s)$ è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

$F(s,\theta) = \langle \partial_1\varphi, \partial_2\varphi\rangle = 0$

$G(s,\theta) = (\partial_2\varphi, \partial_2\varphi) = r(s)^2$

Con i seguenti coefficienti metrici (in particolare con $F \equiv 0$) i simboli di Christoffel si calcolano:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial s} \equiv 0 \qquad \Gamma^1_{12} \equiv \Gamma^1_{21} \equiv \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial \theta} \equiv 0 \qquad \Gamma^1_{22} \equiv -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial s} \equiv -r(s)\cdot\dot{r}(s)$$

$$\Gamma^2_{11} \equiv -\frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial E}{\partial \theta} \equiv 0 \qquad \Gamma^2_{12} \equiv \Gamma^2_{21} \equiv \frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial G}{\partial s} \equiv \frac{\dot{r}(s)}{r(s)} \qquad \Gamma^2_{22} \equiv \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial \theta} \equiv 0$$

(2) $\varphi(\sigma(t)) := \varphi(\alpha(t), \beta(t))$ è una geodetica se e solo se per $k = 1,2$:

$$\sigma_k'' + \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma^k_{ij} \circ (\varphi \circ \sigma)\right) \cdot \sigma_i' \cdot \sigma_j' = 0 \quad \text{dove} \quad \sigma_1 \equiv \alpha, \ \sigma_2 \equiv \beta$$

e questo si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} \sigma_1'' + \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_{ij}^{1} \circ (\varphi \circ \sigma) \right) \sigma_i' \sigma_j' = 0 \\ \sigma_2'' + \sum_{i,j=1}^{2} \left(\Gamma_{ij}^{2} \circ (\varphi \circ \sigma) \right) \sigma_i' \cdot \sigma_j' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha'' - \left((r \cdot \dot{r}) \circ \alpha \right) \cdot (\beta')^2 = 0 \\ \beta'' + \left(2 \cdot \frac{\dot{r}}{r} \circ \alpha \right) \beta' \alpha' = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

Ricordiamo che l'elicoide retto E è la superficie ottenuta come immagine della mappa $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue

$$\varphi_1(u,v) := (v\cos u, v\sin u, u).$$

Sia C l'immagine della mappa $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita come segue

$$\varphi_2(u,v) := (\cosh v\cos u, \cosh v\sin u, v).$$

(1) Mostrare che C è una superficie di rotazione, ottenuta ruotando una curva nel piano xz in $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse z. La superficie C è detta *catenoide*.
(2) Calcolare i coefficienti metrici relativi alla parametrizzazione φ_2 di C.
(3) Mostrare che la catenoide C è una superficie minima.
(4) Sia $\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la mappa

$$\chi(u,v) := (u, \sinh v).$$

Mostrare che, dato $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, la mappa $\varphi_1 \circ \chi$, opportunamente ristretta a un sottoinsieme aperto del suo dominio che contiene $\mathbf{u}$, è una parametrizzazione locale dell'elicoide E attorno al suo punto $\varphi_1 \circ \chi(\mathbf{u})$.
(5) Calcolare i coefficienti metrici della parametrizzazione locale $\varphi_1 \circ \chi$ dell'elicoide.
(6) Mostrare, usando i punti precedenti, che l'elicoide E è localmente isometrico alla catenoide C.

(1) Ponendo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $\varphi(t) = (\cosh t, 0, t)$ si ottiene una curva di Jordan C^∞ tale che il suo sostegno sta nel piano xz ed é disgiunto dall'asse z ($\cosh t > 0 \ \forall t$). Per quanto visto a lezione e per "esempio 3.1.18" dell' "Abate e Tovena" si ha che φ_2 é una parametrizzazione globale della superficie di rotazione C.

(2) Si calcolano:

$$\partial_u \varphi_2 = (-\cosh v \sin u, \ \cosh v \cdot \cos u, \ 0) \qquad \partial_v \varphi_2 = (\sinh v \cdot \cos u, \sinh v \cdot \sin u, \ 1)$$

dunque:

$$E(u,v) = \cosh^2(v) \qquad F(u,v) = 0 \qquad G(u,v) = \sinh^2(v) + 1 = \cosh^2(v)$$

(3) Per mostrare che la catenoide é una superficie minima bisogna mostrare che la curvatura media sia uguale a 0.

Calcolo dunque una mappa di Gauss:

$$N(p) = \frac{\partial_u|_p \wedge \partial_v|_p}{\|\partial_u|_p \wedge \partial_v|_p\|} \text{ con } \quad p = \varphi(u,v)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\cosh v \sin u & \cosh v \cos u & 0 \\ \sinh v \cos u & \sinh v \sin u & 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u|_p \wedge \partial_v|_p = (\cosh v \cos u, \ \cosh v \sin u, \ -\cosh v \sinh v)$$

$$\|\partial_u|_p \wedge \partial_v|_p\| = \sqrt{\cosh^2 v\,(1 + \sinh^2 v)} = \cosh^2 v$$

$$\Rightarrow N(p) = \frac{1}{\cosh v}\left(\cos u,\ \sin u,\ -\sinh v\right)$$

$$dN_p = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin u}{\cosh v} & -\cos u\,\dfrac{\sinh v}{\cosh^2 v} \\ \dfrac{\cos u}{\cosh v} & -\sin u \cdot \dfrac{\sinh v}{\cosh^2 v} \\ 0 & \dfrac{-1}{\cosh^2 v} \end{bmatrix}$$

Dunque i coefficienti di forma sono:

$$e(u,v) = -\left\langle \left(-\frac{\sin u}{\cosh v},\ \frac{\cos u}{\cosh v},\ 0\right), \left(-\cosh v \sin u,\ \cosh v \cdot \cos u,\ 0\right)\right\rangle =$$

$$= -(\sin^2 u + \cos^2 u) = -1$$

$$f(u,v) = -\left\langle \left(-\frac{\sin u}{\cosh v},\ \frac{\cos u}{\cosh v},\ 0\right), \left(\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u,\ 1\right)\right\rangle = 0$$

$$g(u,v) = -\left\langle \left(-\cos u\,\frac{\sinh v}{\cos^2 h v},\ -\sin u\,\frac{\sinh v}{\cosh^2 v},\ -\frac{1}{\cosh^2 v}\right), \left(\sinh v \cos u,\ \sinh v \sin u, 1\right)\right\rangle =$$

$$= -\left(-\frac{\sinh^2 v}{\cosh^2 v} - \frac{1}{\cosh^2 v}\right) = \frac{\cosh^2 v}{\cosh^2 v} = 1$$

Dunque:

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = 0$$

(4) Esplicitando: $\varphi_1 \circ X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $(u,v) \xmapsto{\varphi_1 \circ X} (\sinh v \cdot \cos u, \sinh v \cdot \sin u, u)$

dunque calcolando il differenziale:

$$d(\varphi_1 \circ X) = \begin{bmatrix} -\sinh v \cdot \sin u & \cosh v \cdot \cos u \\ \sinh v \cdot \cos u & \cosh v \cdot \sin u \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che é iniettiva per ogni $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ dal momento che la seconda colonna é un multiplo della prima se e solo se la seconda colonna è nulla. Questo non può mai succedere poiché $\cos(u)$ e $\sin(u)$ si annullano in punti differenti tra loro.

Dunque $\varphi_1 \circ X$ è una parametrizzazione locale dell'elicoide retto.

5

$$E(u,v) = \langle (-\sinh v \cdot \sin u,\ \sinh v \cdot \cos u,\ 1), (-\sinh v \cdot \sin u,\ \sinh v \cdot \cos u,\ 1) \rangle =$$

$$= \sinh^2 v + 1 = \cosh^2 v$$

$$F(u,v) = \langle (-\sinh v \cdot \sin u,\ \sinh v \cdot \cos u, 1), (\cosh v \cdot \cos u, \cosh v \cdot \sin u, 0) \rangle = 0$$

$$G(u,v) = \langle (\cosh v \cdot \cos u, \cosh v \cdot \sin u, 0), (\cosh v \cdot \cos u, \cosh v \cdot \sin u, 0) \rangle = \cosh^2 v$$

6 Per il punto 2 e 5 abbiamo trovato una parametrizzazione globale della catenoide e una parametrizzazione locale dell'elicoide con gli stessi coefficienti metrici.
Dunque dato $p \in C$ considero $u = \varphi_2^{-1}(p)$, $\mathcal{U}$ intorno di u in $\mathbb{R}^2$ rispetto al quale $\varphi_1 \circ X_{|\mathcal{U}}$ è un diffeomorfismo ristretto all'immagine, $\tilde{p} = \varphi_1 \circ X(u)$ e $\varphi_{2|\mathcal{U}}$.
Allora sono nelle ipotesi del teorema visto a lezione che mi permette di affermare che la catenoide e l'elicoide retto sono localmente isometrici.

Esercizio 4

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞. Supponiamo che

$$\text{per ogni } \mathbf{x} \in \Omega \text{ tale che } f(\mathbf{x}) = 0 \text{ vale } \nabla f(\mathbf{x}) \neq 0.$$

In queste ipotesi, ricordiamo che, come conseguenza del Teorema della Funzione Implicita (confronta con il *Suggerimento* sotto), $\Sigma := \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = 0\}$ è una superficie.

(1) Mostrare che

$$\Sigma \ni \mathbf{x} \mapsto N(\mathbf{x}) := \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|},$$

è una mappa di Gauss di Σ.

(2) Mostrare che la seconda forma fondamentale Q_N associata alla mappa N di cui al punto precedente verifica l'uguaglianza

$$(Q_N)_{\mathbf{x}} = -\frac{(\nabla^2 f)_{\mathbf{x}}}{|\nabla f(\mathbf{x})|}, \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \Sigma,$$

dove $(\nabla^2 f)_{\mathbf{x}}$ è l'*Hessiana* valutata in $\mathbf{x}$ della funzione f, essendo tale Hessiana vista come forma quadratica ristretta al tangente $T_{\mathbf{x}}\Sigma$. Ricordiamo che, essendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica su $\mathbb{R}^3$, e scrivendo un arbitrario $v \in \mathbb{R}^3$ come $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$ per qualche $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, si ha, per definizione,

$$(\nabla^2 f)_{\mathbf{x}}(v) := \sum_{i,j=1}^{3} v_i v_j (\partial_{ij} f)(\mathbf{x}),$$

dove $(\partial_{ij} f)(\mathbf{x})$ sono le derivate parziali seconde di f, rispetto alla variabile i e poi j in $\mathbb{R}^3$, valutate in $\mathbf{x}$.

(3) Mostrare che la curvatura media di Σ in un suo punto $\mathbf{x} \in \Sigma$ è

$$H(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)(\mathbf{x}),$$

dove ricordiamo che se $(X_1, X_2, X_3) = X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale C^∞ definito su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, allora, per ogni punto $\mathbf{x} \in \Omega$ si ha, per definizione, $\mathrm{div}(X)(\mathbf{x}) := (\partial_1 X_1)(\mathbf{x}) + (\partial_2 X_2)(\mathbf{x}) + (\partial_3 X_3)(\mathbf{x})$, dove ∂_i è l'operatore di derivata parziale rispetto alla i-esima componente in $\mathbb{R}^3$.

(1) Per definizione una mappa di Gauss di Σ é una funzione che dato elemento $x \in \Sigma$ questo ha come immagine un elemento perpendicolare a $T_x\Sigma$ e di norma unitaria.

Ora, dal momento che $\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$ t.c. $f(x) = 0$ significa che 0 é un valore regolare per f. Dunque per proposizione vista a lezione (dato che $\Sigma = f^{-1}(0)$) allora $T_x\Sigma = (\nabla f(x))^\perp \quad \forall x \in \Sigma$.

Dunque la funzione $x \xmapsto{N} \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ é una mappa C^∞ che associa ad ogni $x \in \Sigma$ un elemento perpendicolare a $T_x\Sigma$ e di norma unitaria e quindi é proprio una mappa di Gauss.

(2) Per definizione voglio mostrare che:

$$(Q_N)_x(v) := -\langle dN_x(v), v\rangle_x = -\frac{(\nabla^2 f)_x}{|\nabla f(x)|} \quad \forall v \in T_x\Sigma$$

Dunque dN_x é una matrice 3×3 che in componenti si scrive come:

$$(dN_x)_{ij} = (\partial_j \partial_i f)(x)\cdot A + (\partial_i f)(x)(\partial_j A)(x) \qquad \text{con } A = \frac{1}{|\nabla f(x)|}$$

allora se $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_x\Sigma$:

$$dN_x \cdot v = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} \left((\partial_i \partial_1 f)(x) \cdot A \cdot v_i + (\partial_1 f)(x) \cdot (\partial_i A)(x) \cdot v_i \right) \\ \sum_{i=1}^{3} \left((\partial_i \partial_2 f)(x) \cdot A \cdot v_i + (\partial_2 f)(x) \cdot (\partial_i A)(x) v_i \right) \\ \sum_{i=1}^{3} \left((\partial_i \partial_3 f)(x) \cdot A \cdot v_i + (\partial_3 f)(x) \cdot (\partial_i A)(x) v_i \right) \end{pmatrix}$$

Per linearità del prodotto scalare:

$$< dN_x \cdot v , v > = \sum_{j=1}^{3} v_j \sum_{i=1}^{3} \left((\partial_i \partial_j f)(x) \cdot A \cdot v_i + \sum_{j=1}^{3} v_j \sum_{i=1}^{3} (\partial_j f)(x) \cdot (\partial_i A)(x) v_i \right.$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} v_i \cdot v_j \cdot (\partial_i \partial_j f)(x) \cdot A + \sum_{i,j=1}^{3} v_i v_j (\partial_j f)(x) (\partial_i A)(x) =$$

$$= \frac{(\nabla^2 f)_x (v)}{|\nabla f(x)|} \quad , \forall v \in T_x \Sigma$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $v \in T_x\Sigma$ e dunque $v \perp \nabla f(x)$

cioè $\sum_{i=1}^{3} v_i \cdot (\partial_i f)(x) = 0$ e allora:

$$\sum_{i,j=1}^{3} v_i v_j (\partial_j f)(x) (\partial_i A)(x) = \sum_{j=1}^{3} v_j \cdot (\partial_j f)(x) \cdot \sum_{i=1}^{3} (\partial_i A)(x) v_i = 0$$

3 Per definizione di curvatura media:

$$II(x) = -\frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(dN_{x|T_x\Sigma} \right)$$

dunque per prima cosa scriviamo dN_x nella base vettoriale $\{\partial_1, \partial_2, N(x)\}$ con ∂_1, ∂_2 base vettoriale di $T_x\Sigma$. Dal momento che, come visto a lezione, $dN_{x|T_x\Sigma} : T_x\Sigma \longrightarrow T_x\Sigma$ (cioè $dN_{x|T_x\Sigma}$ è una mappa dal piano in sé) mostro che in realtà $dN_x : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ha come immagine un sottospazio di $T_x\Sigma$ cioè $dN_x(N(x)) \in T_x\Sigma$. Questo è vero poiché come abbiamo visto a lezione $\frac{\partial}{\partial_j}(N_x) \equiv v_j^1 \partial_1 + v_j^2 \partial_2 \quad \forall j \in \{1,2,3\}$. E quindi in particolare dN_x

nella base esplicitata inizialmente é:

$$dN_x = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{dN_x|_{T_x\Sigma}} & * \\ & & * \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e allora $tr(dN_x|_{T_x\Sigma}) = tr(dN_x)$.

Allora ritornando alla scrittura di dN_x in base canonica (esplicitata nel punto 2)

trovo che $tr(dN_x) = div\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)(x)$. Infatti:

$$tr(dN_x) = \sum_{i=1}^{3}\left((\partial_i \partial_i f)(x) \cdot \frac{1}{|\nabla f(x)|} + (\partial_i f)(x)\left(\partial_i \frac{1}{|\nabla f|}\right)(x)\right)$$

e in effetti per definizione:

$$div\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right)(x) := \sum_{i=1}^{3}\left(\partial_i\left(\frac{\partial_i f}{|\nabla f(x)|}\right)\right) = \sum_{i=1}^{3}\left((\partial_i \partial_i f)(x) \cdot \frac{1}{|\nabla f(x)|} + (\partial_i f)(x) \cdot \left(\partial_i \frac{1}{\nabla f}\right)(x)\right)$$

Dal momento che la traccia é invariante per cambiamento di base, si ha la tesi.

Esercizio 5

Ricordiamo che una superficie Σ in $\mathbb{R}^3$ è detta *rigata* se per ogni punto $p \in \Sigma$ esiste un segmento s_p tale che $s_p \subseteq \Sigma$ e p sta nell'interno di s_p.

Mostrare, seguendo il percorso indicato nei punti successivi, che una superficie rigata orientata non possiede alcuna geodetica chiusa liscia che racchiude una regione regolare omeomorfa a un disco.

(1) Mostrare che la curvatura Gaussiana K di una superficie rigata Σ verifica la disuguaglianza $K \leq 0$ su tutta Σ.

(2) Mostrare che se una superficie orientata Σ verifica la disuguaglianza $K \leq 0$ su tutta Σ, allora non può esistere una geodetica chiusa liscia che racchiude una regione regolare omeomorfa a un disco.

(1) Consideriamo una parametrizzazione $\sigma : (-\varepsilon, +\varepsilon) \longrightarrow \Sigma$ liscio rispetto alla longhezza d'arco del segmento t.c. $\sigma(0) = p$, $\dot{\sigma}(0) = v$. Per quanto visto a lezione $\langle \ddot{\sigma}(0), N(p) \rangle = Q_p(v)$.

Allo stesso tempo la curvatura normale K_n di σ é identicamente uguale alla funzione nulla poiché l'accelerazione $\ddot{\sigma}$ ha come direzione proprio il segmento e dunque $\langle \ddot{\sigma}, N(\sigma) \rangle = 0$.

Allora $v \in T_p\Sigma$ e $\|v\| = 1$ e dunque $0 \in \{ Q_p(v) : v \in T_p S, \|v\| = 1 \} =$
$= [K_1, K_2]$. Dunque $K_1 \leq 0$ e $K_2 \geq 0$ e perció $K = K_1 \cdot K_2 \leq 0$

(2) Se esistesse regione R omeomorfa a un disco con quelle caratteristiche allora R sarebbe compatta (la compattezza é invariante per omeomorfismo) ma quindi per teorema visto a lezione $\exists p \in R : K(p) > 0$. Questo é assurdo.