

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su \mathbb{R} . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{A} = \{id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{A}' = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \phi(x) = x^3\}$ due atlanti su \mathbb{R} . Essendo entrambi composti da un solo omeomorfismo, i due atlanti hanno come sola mappa di transizione l'identità, dunque sono lisci. Non sono compatibili: considerato $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$, la mappa di transizione di $id \circ \phi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ non è liscia. $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{A}')$ sono comunque due varietà diffeomorfe: $\phi^{-1} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ è infatti un diffeomorfismo, letta in carte è infatti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi^{-1}} & \mathbb{R} \\ id \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \end{array}$$

con $F = \phi \circ \phi^{-1} \circ (id)^{-1} = id$ liscia. Allo stesso modo $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{A}')$ letta in carte è:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R} \\ \phi \downarrow & & \downarrow id \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} \end{array}$$

con $G = id \circ \phi \circ \phi^{-1} = id$ liscia. □

Esercizio 1.4. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa:

$$p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \quad t.c. \quad z \longrightarrow p(z)$$

è un rivestimento liscio di grado d .

Dimostrazione. Per prima cosa notiamo che p è una funzione liscia e dunque ha senso calcolarne il differenziale, in particolare per quanto visto al corso di "Geometria 2":

$$dp_x = p'(x).$$

Allora, $\forall x \in \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S))$ dp_x è invertibile (non è nullo) e dunque per il teorema di invertibilità locale p è un diffeomorfismo locale.

Vediamo che è un rivestimento topologico di grado d . Fissato $w \in \mathbb{C} \setminus p(S)$, la cardinalità della sua controimmagine è uguale al numero di radici distinte del polinomio $p(z) - w$ in $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S))$. Ma, per il criterio della derivata, una radice multipla \bar{w} di $p(z) - w$ deve soddisfare l'equazione $p'(\bar{w}) = 0$ cioè $\bar{w} \in p(S)$. Dunque, per il teorema fondamentale dell'algebra, le radici distinte di $p(z) - w$ in $\mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S))$ sono proprio d (grado del polinomio). Sia $\{z_1, \dots, z_d\}$ la controimmagine di w . Dato che, per quanto detto, $p^{-1}(p(S))$ è un insieme di cardinalità finita allora, a meno di restringere gli intorni dati dal teorema di invertibilità locale, riusciamo a trovare V_i intorno di z_i e W_i intorno di w tale che $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow W_i$ è un diffeomorfismo $\forall i = 1, \dots, d$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Ponendo $V := \bigcap_{i=1}^d V_i$ si ottiene un intorno ben rivestito di w dato che $p^{-1}(V) \cap V_i$ e V restano diffeomorfi.

□

Esercizio 1.5. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da:

$$f(x, y) = (x + 1, y), \quad g(x, y) = (-x, y + 1).$$

Mostra che Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo e che il quadrato Q di vertici $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ è un dominio fondamentale.

Dimostrazione. Notiamo per prima cosa la seguente legge di commutazione:

$$f \circ g(x, y) = f(-x, y + 1) = (-x + 1, y + 1) = g(x - 1, y) = g \circ f^{-1}(x, y)$$

Dunque un generico elemento di Γ si può scrivere nella forma:

$$f^m \circ g^n(x, y) = ((-1)^n x + m, y + n) \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Allora l'azione del gruppo è:

1. *libera:* $((-1)^n x + m, y + n) = (x, y) \iff n = 0 \wedge (-x + m, y) = (x, y) \iff n = 0 \wedge m = 0;$
2. *propriamente discontinua:* dati $a = (a_x, a_y)$ e $b = (b_x, b_y)$ consideriamo le palle aperte di raggio $\frac{1}{2}$ centrate rispettivamente in a e b , $U := B(a, \frac{1}{2})$ e $V := B(b, \frac{1}{2})$. Dato che Γ è un sottogruppo delle isometrie, un suo elemento manda palle di raggio r in palle di raggio r . Dunque, ponendo $\gamma := f^m \circ g^n$:

$$\gamma(U) \cap V \iff |\gamma(a) - b| < 1$$

Otteniamo, dunque, come condizioni necessarie che:

$$|a_y + n - b_y| < 1 \quad \text{e} \quad |(-1)^n a_x + m - b_x| < 1$$

Quindi, dalla prima, si ottiene che n deve stare in un intervallo aperto limitato di \mathbb{R} e fissato n , si ottiene la stessa cosa dalla seconda condizione per m . Dovendo essere m, n degli interi otteniamo la tesi.

Ora, chiaramente Q è un chiuso. In particolare:

$$f^m \circ g^n(x, y) \in Q \iff \left\{ -\frac{1}{2} \leq (-1)^n x + m \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad -\frac{1}{2} \leq y + n \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Dunque n sta in un intervallo chiuso di lunghezza 1 e dunque può assumere uno o due valori, allo stesso modo m una volta fissato n . Quindi ogni orbita interseca Q in almeno un punto. Inoltre per avere i punti di un'orbita che intersecano la parte interna di Q basta considerare le diseguaglianze strette nelle condizioni sopra e quindi abbiamo al più una soluzione per il sistema.

□

Esercizio 2.1. Sia $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che la mappa inclusione $i : S \rightarrow M$ è un embedding. Mostra che i è propria se e solo se S è un sottoinsieme chiuso.

Dimostrazione. Per definizione di sottovarietà se $\{\phi_i\}_{i \in I}$ è un atlante di M allora $\{\phi_{i|S}\}_{i \in I}$ è un atlante per S dunque l'inclusione tra varietà letta in carte rimane un'inclusione, quindi è liscia. Inoltre è un'immersione poiché $d(i)_p : T_p(S) \rightarrow T_p(M)$, per definizione, è l'inclusione naturale tra gli spazi tangenti, in particolare è iniettivo. Infine, consideriamo $i^{-1} : i(M) \rightarrow S$ tale che $x \mapsto x$, come prima questa mappa è liscia e dunque i è un omeomorfismo con l'immagine.

Per la seconda parte della dimostrazione, supponiamo S chiuso. Sia $K \subset M$ un compatto, dato che M è $T2$ allora K è chiuso in M e quindi lo è anche $S \cap K = i^{-1}(K)$ (S è un chiuso di M). Ma $S \cap K$ è un chiuso nel compatto K allora è compatto.

Supponiamo ora i propria. Dato che M è compattamente generata per vedere che S è chiuso basta mostrare che $S \cap K$ è chiuso $\forall K \subset M$ compatto. Ma $S \cap K = i^{-1}(K)$ che è compatto perché i propria. Come prima, si conclude osservando che un compatto in uno spazio di Hausdorff è chiuso.

□

Esercizio 2.2. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ t.c. $f(t) = (e^{ipt}, e^{iqt})$ è un'immersione iniettiva e che l'immagine è densa in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. H_t

Dimostrazione. Partiamo vedendo che è un'immersione iniettiva:

1. *iniettività:* $e^{ipt_1} = e^{ipt_2} \wedge e^{iqt_1} = e^{iqt_2}$ se e soltanto $p(t_1 - t_2), q(t_1 - t_2) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dunque o $t_1 = t_2$ oppure $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ che è assurdo;
2. *immersione:* notiamo che $f = g \circ k$ dove $k(t) = (pt, qt)$ e $g(x, y) = (e^{ix}, e^{iy})$. Il differenziale di k è la funzione stessa essendo una mappa lineare da \mathbb{R} in \mathbb{R}^2 ; allo stesso modo:

$$dg_{(x,y)} = \begin{bmatrix} ie^{ix} & 0 \\ 0 & ie^{iy} \end{bmatrix}.$$

Dunque, per la "chain rule", df_t è la moltiplicazione di due matrici con kernel banale, quindi è iniettivo.

Mostriamo ora la seconda parte dell'esercizio. Fissiamo $\epsilon > 0$ e $p := (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Troviamo quindi un elemento nell'immagine di f che dista meno di ϵ da p . Consideriamo $t := \frac{\beta}{q} + \frac{2\pi k}{q}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Notiamo che rispetto a k la funzione $\frac{\beta}{q} + \frac{2\pi k}{q}$ è iniettiva proprio perché $\frac{p}{q} \neq \mathbb{Q}$. Scegliendo n t.c. $\frac{2\pi}{n} < \epsilon$, per $k \in [0, 2^n]$ devono esistere $k_1 < k_2$ tali che $|e^{i\frac{p}{q}(\beta+2k_1\pi)} - e^{i\frac{p}{q}(\beta+2k_2\pi)}| < \epsilon$. Ma allora $\{e^{i\frac{p}{q}(\beta+2(k_2-k_1)\pi m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ sono equidistanti con distanza minore di ϵ . Allora $e^{i\alpha}$ si troverà tra due di loro, scegliamone uno che indichiamo con $e^{i\frac{p}{q}(\beta+2\bar{k}\pi)}$. Quindi:

$$|p - f(\frac{\beta}{q} + \frac{2\pi\bar{k}}{q})| < \sqrt{\epsilon^2 + 0} < \epsilon.$$

□

Esercizio 2.5. Sia $f : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la mappa:

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è embedding.

Dimostrazione. Fissiamo l'atlante di \mathbb{RP}^2 visto a lezione: $\{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{i=1,2,3}$ dove $U_i = \{[x_1, x_2, x_3] | x_i \neq 0\}$ e $\phi_1([x_1, x_2, x_3]) = (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1})$ (analogo per $i = 2, 3$).

Per dire che f è embedding basta vedere che è un'immersione iniettiva dato che \mathbb{RP}^2 è compatto. Allora f è:

1. *liscia:* se $[x, y, z] \in U_1$ allora f letta in carte diventa $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ t.c. $F(y, z) = id \circ f \circ \phi_1^{-1}(y, z) = f([1, y, z]) = \frac{1}{1+y^2+z^2}(1 - y^2, y, z, yz)$ che è liscia. Allo stesso modo si vede per le altre due carte. Dunque f è liscia;
2. *immersione:* per vedere che df_p è iniettivo, leggiamolo in carte e dunque sfruttando il punto precedente, rinomino $(y, z) = \phi^{-1}(p) \in U_1$ allora:

$$d(F)_{(y,z)} = \frac{1}{(1+y^2+z^2)} \begin{bmatrix} -2y(z^2 + 2) & 2(y^2 - 1)z \\ -y^2 + z^2 + 1 & -2yz \\ -2yz & y^2 - z^2 + 1 \\ z(-y^2 + z^2 + 1) & y(y^2 - z^2 + 1) \end{bmatrix}$$

Ora, notiamo che il minore 2×2 dato dalla seconda e terza riga, chiamiamolo M_1 , ha determinante:

$$\det(M_1) = -y^4 - 2y^2z^2 - z^4 + 1.$$

Dunque $\det(M_1) = 0 \iff y^2 + z^2 = 1 \iff (y, z) \in \mathbb{S}^1$. Allora per i punti fuori dalla circonferenza unitaria la matrice ha un minore 2×2 invertibile e quindi ha rango almeno 2 cioè kernel banale per la formula delle dimensioni.

Prendiamo quindi in considerazione il minore M_2 dato dalla terza e quarta riga, vale che:

$$\det(M_2) = z^5 - (y^2 + 1)z.$$

Allora, se $z = 0$ il determinante è nullo e i punti in \mathbb{S}^1 con $z = 0$ sono $(1, 0), (-1, 0)$. Se $z \neq 0$ si ha che $\det(M_2) = 0 \iff z^2 - y^2 = 1$, cioè (y, z) stanno in un'iperbole che ha intersezione con \mathbb{S}^1 nei punti $(0, 1), (0, -1)$. Per i quattro punti rimanenti si verifica direttamente che la matrice è iniettiva. Allo stesso modo per le altre due carte. Dunque f è un'immersione.

3. *iniettiva:* se $x_1y_1 = x_2y_2$ e $x_1z_1 = x_2z_2$ questo già implica che $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ e cioè $[x_1, y_1, z_1] = [x_2, y_2, z_2]$.

□

Esercizio 3.1. Mostra che l'isomorfismo canonico:

$$Mult(V, \dots, V; V) \longrightarrow Mult(V^*, V, \dots, V; \mathbb{R}) = \mathcal{T}_1^k(V)$$

definito mandando $F \in Mult(V, \dots, V; V)$ nella mappa

$$(w^*, v_1, \dots, v_k) \longrightarrow w^*(F(v_1, \dots, v_k))$$

è effettivamente un isomorfismo.

Dimostrazione. Chiamiamo Ψ la mappa che vogliamo dimostrare essere un isomorfismo. Notiamo subito che la dimensione di dominio e codominio di Ψ è la stessa, cioè $\dim(V)^{k+1}$. Dunque per dire che è un isomorfismo basterà mostrare che è un omomorfismo iniettivo.

1. *omomorfismo:* $\Psi(\lambda F_1 + \mu F_2)(w^*, v_1, \dots, v_k) = w^*((\lambda F_1 + \mu F_2)(v_1, \dots, v_k)) = w^*(\lambda F_1(v_1, \dots, v_k) + \mu F_2(v_1, \dots, v_k)) = \lambda w^*(F_1(v_1, \dots, v_k)) + \mu w^*(F_2(v_1, \dots, v_k)) = \lambda \Psi(F_1)(w^*, v_1, \dots, v_k) + \mu \Psi(F_2)(w^*, v_1, \dots, v_k).$
2. *iniettività:* Ora, $\Psi(F) = 0$ se e soltanto se $\forall (w^*, v_1, \dots, v_k) \in (V^*, V, \dots, V)$ si ha che $w^*(F(v_1, \dots, v_k)) = 0$. Ma, se $F \neq 0$ allora $\exists (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \in (V, \dots, V)$ tale che $F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \bar{w} \neq 0$. Dunque $\bar{w}^*(F(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)) = 1$, ovvero $\ker(\Psi) = \{0\}$.

□

Esercizio 3.3. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

- (1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.
- (2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è elemento puro.

Dimostrazione. (1) Supponiamo per assurdo che $v \otimes w = \lambda(v' \otimes w')$ con $\lambda \neq 0$.

Per prima cosa notiamo che $\ker(v) \neq \ker(v')$. Infatti se fossero uguali dato che le immagini di v e v' hanno dimensione 1 deve essere che $V = \ker(v) \oplus \text{Span}(\bar{v}) = \ker(v') \oplus \text{Span}(\bar{v})$. Allora $\forall z \in V$ si ha che $z = k + \lambda\bar{v}$ con $k \in \ker(v) = \ker(v')$. Dunque $v(z) = \lambda v(\bar{v})$ e $v'(z) = \lambda v'(\bar{v})$, cioè $v = \frac{v(\bar{v})}{v'(\bar{v})} v'$, assurdo.

Senza perdita di generalità posso supporre che $\exists \tilde{v} \in \ker(v') \setminus \ker(v)$. Adesso, basta prendere \tilde{w} tale che $w(\tilde{w}) \neq 0$ che si ha:

$$0 \neq v \otimes w(\tilde{v}, \tilde{w}) = \lambda(v' \otimes w')(\tilde{v}, \tilde{w}) = 0.$$

- (2) Supponiamo per assurdo che $\exists u, z \in V^*$ t.c.:

$$v \otimes w + v' \otimes w' = u \otimes z$$

Con gli stessi ragionamenti fatti al punto precedente, notando che per dimensione se $\ker(v') \setminus \ker(v) \neq \emptyset$ allora anche $\ker(v) \setminus \ker(v') \neq \emptyset$, a meno di moltiplicazione per scalare possiamo trovare $\tilde{v}, \tilde{v}', \tilde{w}, \tilde{w}'$ tale che:

$$v(\tilde{v}) = v'(\tilde{v}') = w(\tilde{w}) = w'(\tilde{w}') = 1 \quad v(\tilde{v}') = v'(\tilde{v}) = w(\tilde{w}') = w'(\tilde{w}) = 0$$

Ora, $u \otimes z(\tilde{v}, \tilde{w}') = 0$ quindi per definizione almeno uno tra $u(\tilde{v})$ e $z(\tilde{w}')$ deve essere nullo contraddicendo una delle uguaglianze $u \otimes z(\tilde{v}, \tilde{w}) = 1$ e $u \otimes z(\tilde{v}', \tilde{w}') = 1$.

□

Esercizio 3.4. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1 .

Dimostrazione. L'isomorfismo è $v \otimes w^* \mapsto (\phi_{v,w^*} : (v' \mapsto w^*(v')v))$.

Se considero un elemento puro, allora questo per definizione è mandato in un endomorfismo che ha l'immagine contenuta nello span di un solo vettore, quindi ha rango al più uno.

Sia $f \in \text{End}(V)$, se $\text{rk}(f) = 0$ allora $f = 0$ e dunque, ad esempio, è immagine dell'elemento puro $0 \otimes 0$. Se $\text{rk}(f) = 1$, supponendo $\dim(V) = n$, allora $\ker(f) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Completo a base con v_n . Dunque $\forall v' \in V$ si ha $v' = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, cioè $f(v') = a_n f(v_n)$. Definisco $v_n^* \in V^*$ t.c $v_n^*(v') = a_n$ (segue immediatamente la buona definizione e il fatto che sia un omomorfismo dall'unicità della scrittura in base). Dunque l'elemento puro $f(v_n) \otimes v_n^*$ è mandato in f tramite l'isomorfismo.

□

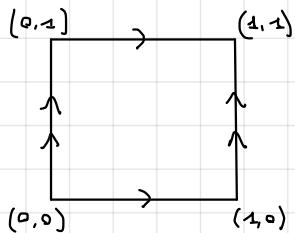
Consegne

Ist. Geo.



Esercizio 4.1. Mostra che il fibrato tangente TK della bottiglia di Klein K ha una sezione mai nulla ma non ha due sezioni indipendenti.

Per vedere che K ammette un campo vettoriale mai nullo partiamo mostrando che il toro T è un rivestimento liscio di grado 2 di K . In effetti:



$$T = [0,1] \times [0,1] / (x,0) \sim (x,1) \\ (0,y) \sim (1,y)$$

$$\varphi: T \longrightarrow T$$

$$[x,y] \longmapsto [1-x, y + \frac{1}{2} \bmod 1], \text{ e' ben definita perche':}$$

$$(0,y) \longmapsto (1, y + \frac{1}{2} \bmod 1) \quad (x,0) \longmapsto (1-x, \frac{1}{2} \bmod 1)$$

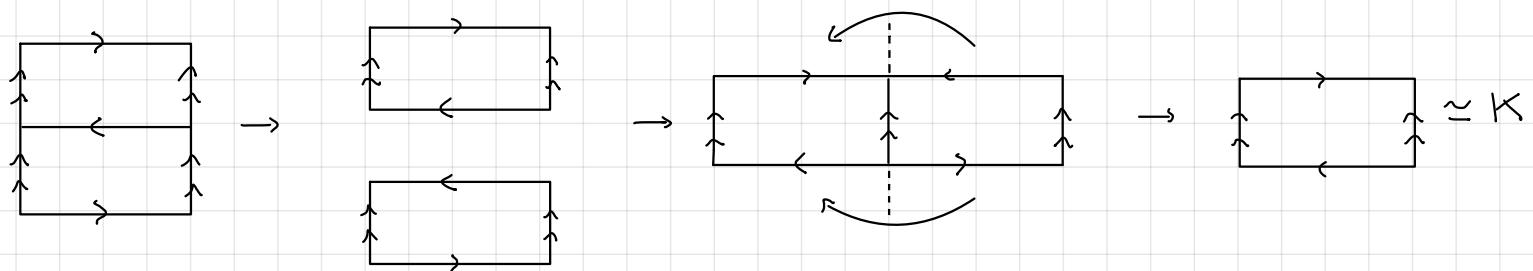
$$(1,y) \longmapsto (0, y + \frac{1}{2} \bmod 1) \quad (x,1) \longmapsto (1-x, \frac{3}{2} \bmod 1 = \frac{1}{2} \bmod 1)$$

$$\text{Inoltre } \varphi^2([x,y]) = \varphi\left([1-x, y + \frac{1}{2} \bmod 1]\right) = [1 - 1 + x, y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \bmod 1] = [x,y].$$

Evidentemente $\langle \varphi \rangle \supseteq T$ in maniera libera liscia e propriamente discontinua dunque

$\pi: T \rightarrow T/\langle \varphi \rangle$ e' un rivestimento liscio di grado 2. Ora, come possiamo vedere dal disegno

si puo' ottenere $T/\langle \varphi \rangle$ tramite un "taglia e cucisci":



Fissati $a, b \in \mathbb{R}$ con $(a,b) \neq (0,0)$ allora $a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ e' un campo vettoriale mai nullo su

T . Vogliamo che questo campo sia invariante tramite push forward per φ , cioe':

$$D^\varphi_{(x,y)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -a = a \\ b = b \end{cases}.$$

Dunque $\forall b \neq 0 \quad b \frac{\partial}{\partial y}$ e' un campo vettoriale mai nullo che passa al quoziente e dunque definisce un campo vettoriale mai nullo su K .

Supponiamo per assurdo esistano s_1, s_2 sezioni indipendenti di $T\mathbb{K}$. Allora, per dimensione

s_1, s_2 sarebbero un frame di $T\mathbb{K}$ e dunque $T\mathbb{K} \cong \mathbb{K} \times \mathbb{R}^2$. Ma, per "Esercizio 4.2" $T\mathbb{K}$ c'è
orientabile e il prodotto di due varietà è orientabile se e soltanto se lo sono entrambe.

Dunque \mathbb{K} sarebbe orientabile, assurdo.

□

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Sia $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ un atlante per M . Allora $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^n$ con $\tilde{\varphi}_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^n$ e.c. $(p, v) \mapsto (\varphi_i(p), d(\varphi_i)_p(v))$ è un atlante liscio per $T\pi$ (come visto a lezione).

Mostriamo che questo è un atlante orientato. Una mappa di transizione $\tilde{\varphi}_{ij}$ è della forma:

$$\tilde{\varphi}_{ij}(x, y) = \tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}(x, y) = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x), d\varphi_i|_{\varphi_j^{-1}(x)} \circ (d\varphi_j|_x)^{-1}[y]) = (\varphi_{ij}(x), d(\varphi_{ij})_x[y])$$

dove φ_{ij} è una mappa di transizione per M .

Ora, $d(\tilde{\varphi}_{ij})_{(x,y)}(w,z)$ in forma matriciale è:

$$\begin{bmatrix} d(\varphi_{ij})_x & 0 \\ d^2(\varphi_{ij})_x[-, y] & d(\varphi_{ij})_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}$$

Infatti differenziando $\varphi_{ij}(x)$ rispetto a y ottieniamo il blocco nullo, differenziando la seconda componente lungo x ottieniamo una derivata seconda mentre lungo y (essendo y lineare) si ha lei stessa.

Abbiamo quindi:

$$\det((\tilde{\varphi}_{ij})_{(x,y)}) = (d(\varphi_{ij})_x)^2 > 0, \text{ cioè la tesi.}$$

□

Esercizio 4.5. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

Per il teorema di Whitney la varietà \mathbb{M}^m può essere vista come sottovarietà di \mathbb{R}^{2m+1} . Dunque,

è ben definito il fibrato normale $v\mathbb{M}$. Per quanto visto a lezione $V_p\mathbb{M} = T_p\mathbb{M}^\perp \subseteq T_p\mathbb{R}^{2m+1}$.

In particolare $T_p\mathbb{M} \oplus V_p\mathbb{M} \cong T_p\mathbb{R}^{2m+1} \cong \mathbb{R}^{2m+1}$. Allora la mappa:

$$q : T\mathbb{M} \otimes v\mathbb{M} \longrightarrow i^*(T\mathbb{R}^{2m+1})$$

$$(x, (p, v)) \longmapsto (x, p+v)$$

è un isomorfismo di fibrati $\Rightarrow T\mathbb{M} \otimes v\mathbb{M} \cong \mathbb{M} \times \mathbb{R}^{2m+1}$.

□

Esercizio 5.1. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Guardiamo l'espressione in coordinate (usiamo per comodità la notazione $\partial_j^i := \frac{\partial z^i}{\partial x_j}$):

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z]^i &= [X, Y]^j \partial_j^i z^i - z^j \partial_j^i [X, Y]^i = \\ &= (X^m \partial_m Y^j - Y^m \partial_m X^j) \partial_j^i z^i - z^j \partial_j (X^m \partial_m Y^i - Y^m \partial_m X^i) = \\ &= X^m \partial_m Y^j \partial_j^i z^i - Y^m \partial_m X^j \partial_j^i z^i - z^j \partial_j X^m \partial_m Y^i - z^j X^m \partial_j \partial_m Y^i + \\ &\quad + z^j \partial_j Y^m \partial_m Y^i + z^j Y^m \partial_j \partial_m X^i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[Y, Z], X]^i &= Y^m \partial_m Z^j \partial_j X^i - Z^m \partial_m Y^j \partial_j X^i - X^j \partial_j Y^m \partial_m Z^i - X^j Y^m \partial_j \partial_m Z^i + X^j \partial_j Z^m \partial_m Y^i + \\ &\quad + X^j Z^m \partial_j \partial_m Y^i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[Z, X], Y]^i &= Z^m \partial_m X^j \partial_j Y^i - X^m \partial_m Z^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j Z^m \partial_m X^i - Y^j Z^m \partial_j \partial_m X^i + Y^j \partial_j X^m \partial_m Z^i + \\ &\quad + Y^j X^m \partial_j \partial_m Z^i. \end{aligned}$$

Sommendo ogni termine e usando il Lemma di Schwartz si ottiene la tesi. \square

Esercizio 5.2. Data una matrice quadrata A , sia X_A il campo vettoriale su \mathbb{R}^n dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

In coordinate.

LHS

$$\frac{\partial X_A^i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(A_j^i x_j) = A_j^i, \text{ dunque:}$$

$$[X_A, X_B]^i(x) = X_A^j(x) \frac{\partial X_B^i(x)}{\partial x_j} - X_B^j(x) \frac{\partial X_A^i(x)}{\partial x_j} = B_k^i A_j^k x^j - A_k^i B_j^k x^j$$

Allo stesso modo:

RHS

$$X_{A+B}^i(x) = X_A^i(x) + X_B^i(x) = A_j^i x^j + B_j^i x^j \quad e \quad X_{AB}^i(x) = (AB)_j^i x^j = A_k^i B_j^k x^j$$

$$X_{BA-AB}^i(x) = (B_k^i A_j^k - A_k^i B_j^k) x_j$$

□

Esercizio 5.3. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Lavoriamo in coordinate. Poniamo $\partial_k z := \frac{\partial z}{x_k}$.

$$\begin{aligned} [fX, gY]^i &= (fX)^j \partial_j (gY)^i - (gY)^j \partial_j (fX)^i = \\ &= (fX)^j (g \partial_j Y^i + Y^j \partial_j g) - (gY^j) (f \partial_j X^i - X^j \partial_j f) = \\ &= fg (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i) + f (X^j \partial_j g) Y^i - g (Y^j \partial_j f) X^i = \\ &= fg [X, Y]^i + f (Xg) Y^i - g (Yf) X^i. \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 6.3. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1 . Mostra che

$$\textcircled{a} \int_{\gamma_1} \omega = 0, \quad \textcircled{b} \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Dato che γ_1, γ_2 sono sottovarietà compatte di T , allora sono ben definite le 1-forme a supporto compatto $i_1^* \omega \in \mathcal{R}^1(\gamma_1) \subset i_2^* \omega \in \mathcal{R}^1(\gamma_2)$ con $i_i : \gamma_i \rightarrow T$ le inclusioni $i=1,2$.

(a) Si sia $(0, x) \in \gamma_1$. Allora $i_1^* d\theta^1((0, x))[\nu] = d\theta^1((0, x))[(0, \nu)] = 0$, quindi:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\{0\} \times S^1} i_1^* \omega = \int_{\{0\} \times S^1} 0 = 0.$$

(b) Poniamo $\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow (0, 2\pi) \times \{0\}$ la proiezione. Ora:

$$x \longmapsto (x, 0)$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{S^1 \times \{0\}} i_2^* \omega = \int_{(0, 2\pi) \times \{0\}} i_2^* \omega = \int_{(0, 2\pi)} \varphi^* i_2^* \omega.$$

insieme di misura nulla

Per se $x \in 2\pi$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi^* i_2^* \omega(x)[\alpha] = i_2^* \omega((x, 0))[\alpha] = d\theta^1((x, 0))[(\alpha, 0)] = \alpha$

cioè $\varphi^* i_2^* \omega = d\mathcal{L}^1$ (misura di Lebesgue 1-dimensionale).

Ottieniamo:

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{(0, 2\pi)} d\mathcal{L}^1 = 2\pi.$$

□

Esercizio 6.4. Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

$\forall x \in M \quad \forall v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+h} \in T_p N$ abbiamo:

$$\cdot \boxed{\text{LHS}} : f^*(\omega \wedge \eta)(x) = (\omega \wedge \eta)(f(x)) (df_x(v_1), \dots, df_x(v_{k+h})) =$$

$$= \frac{1}{k! h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(f(x)) \theta \eta(f(x)) (df_x(v_1), \dots, df_x(v_{k+h})) =$$

$$= \frac{1}{k! h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(f(x)) (df_x(v_{\sigma(1)}), \dots, df_x(v_{\sigma(k)})) \eta(f(x)) (df_x(v_{\sigma(k+1)}), \dots, df_x(v_{\sigma(k+h)}))$$

$$\cdot \boxed{\text{RHS}} : (f^*(\omega) \wedge g^*(\eta))(x) (v_1, \dots, v_{k+h}) =$$

$$= \frac{1}{k! h!} \sum_{\sigma \in S_{h+k}} \operatorname{sgn}(\sigma) f^*(\omega)(x) (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f^*(\eta)(x) (v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h)}) =$$

$$= \frac{1}{k! h!} \sum_{\sigma \in S_{h+k}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(f(x)) (df_x(v_{\sigma(1)}), \dots, df_x(v_{\sigma(k)})) \eta(f(x)) (df_x(v_{\sigma(k+1)}), \dots, df_x(v_{\sigma(h+k)})).$$

□

Esercizio 6.5. Sia N una m -varietà senza bordo. Se $\varphi: M \rightarrow N$ è una mappa liscia e $\omega \in \Omega^k(N)$, otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e \wedge . \square

1. Supponiamo $\omega = f \in \Omega^0(N) = C^\infty(N)$. Fissato $x \in M$ e $v \in T_x M$:

$$d(\varphi^*\omega)(x)(v) = d(\varphi^*f)(x)(v) = d(f \circ \varphi)_x(v) = df_{\varphi(x)}(d\varphi_x(v))$$

$$\varphi^*(d\omega)(x)(v) = d\omega(\varphi(x))(d\varphi_x(v)) = df_{\varphi(x)}(d\varphi_x(v))$$

2. Supponiamo $\omega = dg \in \Omega^1(N)$. Per il punto precedente $\varphi^*\omega = \varphi^*dg = d(\varphi^*g)$, allora:

$$d(\varphi^*\omega) = d(d(\varphi^*g)) = 0 = \varphi^*(d(dg)) = \varphi^*(d\omega).$$

3. Supponiamo $\omega \in \Omega^k(N)$. Essendo d un'applicazione locale, possiamo provare la tesi in un intorno di ciascun punto. Presa le coordinate (x^1, \dots, x^m) allora ω è della forma:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq m} f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Inoltre, per linearità basta considerare il caso $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$:

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \underbrace{\varphi^*(df)}_{\text{Es. 6.4.}} \wedge \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx^{i_k}) =$$

$$= d(\varphi^*f) \wedge d(\varphi^*x^{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi^*x^{i_k}) = \\ \text{punto 1}$$

$$= d(f \circ \varphi) \wedge d(x^{i_1} \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ \varphi) =$$

$$= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k} = d((f \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}) = d(\varphi^*\omega).$$

\square

Esercizio 7.1. Sia $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà E e M sono omotopicamente equivalenti.

Consideriamo la \circ -sezione di E : $s_0: \Pi \rightarrow E$ e $\tilde{\pi}: E \rightarrow \Pi$ la proiezione.

Per definizione $\tilde{\pi} \circ s_0 = id_{\Pi}$, in particolare $\tilde{\pi} \circ s_0 \sim id_{\Pi}$.

Resta da mostrare che $s_0 \circ \tilde{\pi} \sim id_E$. In effetti, $F_t: E \rightarrow E$ t.c. $F_t(p, v) = (p, tv)$ è

l'omotopia cercata infatti $F_0(p, v) = (p, 0) = s_0(p) = s_0 \circ \tilde{\pi}(p, v)$ e $F_1(p, v) = (p, v) = id_E(p, v)$.

Esercizio 7.2. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \xrightarrow{f_k} 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Per la formula delle dimensioni $\dim V_i = \dim(\text{Ker } f_i) + \dim(\text{Imm } f_i) \quad \forall i = 1, \dots, k-1$

Inoltre, per esattezza $\text{Imm } f_i = \text{Ker } f_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, k-1$.

$$\text{Dunque: } \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (\dim(\text{Ker } f_i) + \dim(\text{Imm } f_i)) + \dim V_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (\dim(\text{Ker } f_i) + \dim(\text{Ker } f_{i+1})) + \dim V_k \stackrel{\text{per somma telescopica}}{=} \dim V_k$$

$$= -\dim \text{Ker } f_1 + \dim \text{Ker } f_k + \dim V_k = 0.$$

per esattezza: f_1 iniettiva, f_k surgettiva

Esercizio 7.4. Calcola i numeri di Betti della varietà M ottenuta da \mathbb{R}^3 rimuovendo gli assi x e y .

Notiamo che se pongo $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{ \text{asse } x \}$ e $V := \mathbb{R}^3 \setminus \{ \text{asse } y \}$, aperti di \mathbb{R}^3 , allora $M = U \cap V$.

Inoltre $U \sim V \sim \mathbb{S}^2$, mentre $U \cup V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \sim \mathbb{S}^2$.

Dunque per H.v.:

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^0(\mathbb{S}^1) \oplus H^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow \\ \overset{1}{\mathbb{R}} \qquad \qquad \qquad \overset{1}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} \qquad \qquad \qquad \overset{1}{0}$$

da cui per esercizio precedente $0 = 1 - 2 + b^0(M) \Rightarrow b^0(M) = 1$.

Poi:

$$H^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^1(M) \rightarrow H^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^2(\mathbb{S}^1) \oplus H^2(\mathbb{S}^1) \\ \overset{1}{\mathbb{R}} \qquad \qquad \qquad \overset{1}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} \qquad \qquad \qquad \overset{1}{\mathbb{R}} \qquad \qquad \qquad \overset{1}{0}$$

da cui $0 = 2 - b^1(M) + 1 \Rightarrow b^1(M) = 3$.

Infine $b^k(M) = 0 \quad \forall k \geq 2$ dato che $H^k(\mathbb{S}^1) = 0 \quad \forall k \geq 2$ e $H^k(\mathbb{S}^2) = 0 \quad \forall k \geq 3$.

Esercizio 8.2. Sia M una n -varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

Facciamo per casi:

$\boxed{n=0}$: $\mathcal{N} = \{\text{punto}\}$, $N = \emptyset \Rightarrow b^i(N) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$ e $b^i(\mathcal{N}) = \begin{cases} 1, & \text{se } i=0 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$

$\boxed{n \geq 1}$: notiamo che $N \setminus \{\text{punto}\}$ è connessa ma non compatta. Usando quindi la debolezza di Poincaré:

$$b^0(\mathcal{N}) = b^0(N) = 1 \quad \text{e} \quad b^0(N) = 1, \quad b^0(\mathcal{N}) = 0.$$

Resta da vedere che $b^i(\mathcal{N}) = b^i(N) \quad \forall 1 \leq i \leq n-1$. Per $n=1$ non ci sono altri casi da analizzare.

Usiamo ora Mayer-Vietoris con gli aperti $U = N$ e $V \subseteq \mathcal{N}$ intorno aperto del "punto" diffeomorfico a \mathbb{R}^n

tramite carta. Se ho, quindi: $U \cup V = \mathcal{N}$, $U \cap V = \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\} \cong \mathbb{S}^{n-1}$.

$\hookrightarrow \boxed{n=2}$: usiamo R.V. per H_c :

$$0 \rightarrow H_c^0(\mathcal{N}) \rightarrow H_c^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_c^1(N) \rightarrow H_c^1(\mathcal{N}) \rightarrow 0 \quad \text{che diventa,}$$

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_c^1(N) \rightarrow H_c^1(\mathcal{N}) \rightarrow 0$$

da cui, per esercizio precedente, $1 - 1 + b_c^1(N) - b_c^1(\mathcal{N}) = 0 \Rightarrow b^1(N) = b_c^1(N) = b_c^1(\mathcal{N}) = b^1(\mathcal{N})$.

$\hookrightarrow \boxed{n \geq 3}$ per prima cosa vediamo $b^i(\mathcal{N}) = b^i(N)$. Applicando R.V. per H :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^1(N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow 0$$

$$\text{da cui } 1 - 1 + 1 - b^1(\mathcal{N}) + b^1(N) \Rightarrow b^1(\mathcal{N}) = b^1(N).$$

Ora se $0 < k < n-2$ si ha $0 \rightarrow H^{k+1}(\mathcal{N}) \rightarrow H^{k+1}(N) \rightarrow 0$ infatti:

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \rightarrow H^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \\ &\quad \overset{\text{"}}{H}^k(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \overset{\text{"}}{H}^{k+1}(\mathcal{N}) \quad \overset{\text{"}}{H}^{k+1}(N) \oplus \overset{\text{"}}{H}^{k+1}(\mathbb{R}^n) \quad \overset{\text{"}}{H}^{k+1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ &\quad \overset{0}{\underset{0}{\oplus}} \quad \quad \quad \overset{0}{\underset{0}{\oplus}} \quad \quad \quad \overset{0}{\underset{0}{\oplus}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^i(\mathcal{N}) = b^i(N) \quad \forall 2 \leq i \leq n-2.$$

Infine per $k=n-1$:

$$0 \rightarrow H^{n-1}(\mathcal{N}) \rightarrow H^{n-1}(N) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H^n(\mathcal{N}) \rightarrow H^n(N) \rightarrow 0$$

$$\text{da cui } b^{n-1}(\mathcal{N}) - b^{n-1}(N) + \underbrace{- b^n(M)}_{1} + \underbrace{b^n(N)}_{0} = 0 \Rightarrow b^{n-1}(\mathcal{N}) = b^{n-1}(N)$$

Esercizio 8.4. Dimostra il Lemma dei 5.

Dobbiamo mostrare che dato il diagramma commutativo di gruppi abeliani con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \xrightarrow{i} E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{j} & B' & \xrightarrow{k} & C' & \xrightarrow{l} & D' & \xrightarrow{m} & E' \end{array}$$

se $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sono isomorfismi $\Rightarrow \tau$ isomorfismo.

Suriettività:

Dato $c' \in C'$, $\exists! d + c. \quad l'(c) = \delta(d) \Rightarrow$ per esattezza $o = m(l(c')) = m(\delta(d)) = \varepsilon(i(d))$, ma

ε è isomorfismo $\Rightarrow i(d) = o$. Dunque $d \in \ker(i) = \text{Im}(h) \Rightarrow \exists c \in C + c. \quad h(c) = d$.

Ora, $l(c' - \gamma(c)) = l(c') - \delta(h(c)) = l(c') - \delta(d) = o \Rightarrow \exists b' \in B + c. \quad k(b') = c' - \gamma(c) \in \exists b \in B$

+ c. $b' \in \beta(b)$. Dunque $\tau(\beta(b) + c) = \tau(\gamma(g(b)) + \delta(c)) = k(\beta(b)) + \delta(c) = k(b') + \gamma(c) = c'$.

Iniezione:

Sia $c \in C + c. \quad \gamma(c) = o \Rightarrow l(\gamma(c)) = \delta(h(c)) = o \Rightarrow h(c) = o \Rightarrow \exists b \in B + c. \quad g(b) = c \Rightarrow$

$o = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = k(\beta(b)) \Rightarrow \exists a' \in A + c. \quad j(a') = \beta(b) \in \exists a \in A + c. \quad \alpha(a) = a' \Rightarrow$

$\beta(b) = j(a') = j(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \xrightarrow{\beta \text{ iso}} f(a) = b \Rightarrow o = g(f(a)) = \gamma(b) = c$,

Esercizio 8.7. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Supponiamo $\dim(M) = m$ e $\dim(N) = n$. Dunque .

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M) \quad \chi(N) = \sum_{j=0}^n (-1)^j b^j(N).$$

Allora:

$$\begin{aligned} \chi(N) \times \chi(M) &= \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i b^i(M) \right) \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j b^j(N) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \left(\sum_{i=0}^m b^i(M) b^{k-i}(N) \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k b^k(N \times M) = \chi(N \times M). \end{aligned}$$

Esercizio 9.1. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ .

Sia $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Esiste U_p t.c. $(\theta, \rho) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ è l'inversa di una cartina su U_p . Dunque:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \theta.$$

Inoltre, dato che g è un tensore e $g_{xx} = g_{yy} = 1$, $g_{xy} = g_{yx} = 0$, si ha:

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} g_{yy} = \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2;$$

$$g_{\rho\rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \rho} g_{yy} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1;$$

$$g_{\theta\rho} = g_{\rho\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \rho} g_{xx} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \rho} g_{yy} = -\rho \sin \theta \cos \theta + \rho \cos \theta \sin \theta = 0;$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}, \quad g^{\rho\theta} = g^{\theta\rho} = 0, \quad g^{\rho\rho} = 1.$$

Calcoliamo i simboli di Christoffel usando $\Gamma_{ij}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\kappa} \right)$ e la simmetria

della ∇_{LC} :

$$\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\theta\theta} = 0; \quad \Gamma_{\rho\rho}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\rho\rho} = 0; \quad \Gamma_{\rho\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\rho}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\rho g_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\rho = \frac{1}{\rho};$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} (-\partial_\rho g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} (-2\rho) = -\rho; \quad \Gamma_{\theta\rho}^\rho = \Gamma_{\rho\theta}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} (\partial_\rho g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\rho\rho} - \partial_\rho g_{\theta\rho}) = 0;$$

$$\Gamma_{\rho\rho}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} \partial_\rho g_{\rho\rho} = 0.$$

Esercizio 9.2. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$

Qui g^E è il tensore euclideo. In altre parole

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2} \delta_{ij}.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n :

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che il gruppo di isometrie $\text{Isom}(H^n)$ di H^n agisce transitivamente sulla varietà riemanniana H^n .

- Una traslazione è un'isometria per il tensore metrico euclideo e il suo differenziale è l'identità, allora:

$$g(f(x))(df_x(v), df_x(w)) = g(x_1 + b_1, \dots, x_{n-1} + b_{n-1}, x_n)(df_x(v), df_x(w)) =$$

$$= \frac{1}{x_n^2} g^E(x_1 + b_1, \dots, x_{n-1} + b_{n-1}, x_n)(v, w) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x_1, \dots, x_n)(v, w) = g(x)(v, w).$$

- Un prodotto per scalare $\lambda > 0$ è un'isometria per il tensore metrico euclideo e il suo differenziale è $\lambda \cdot \text{id}$,

dunque: $g(f(x))(df_x(v), df_x(w)) = g(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)(\lambda v, \lambda w) = \frac{1}{(\lambda x_n)^2} g^E(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)(\lambda v, \lambda w) =$

$$= \frac{1}{\lambda^2 x_n^2} g^E(x_1, \dots, x_n)(v, w) = g(x)(v, w).$$

- Dati $(x_1, \dots, x_n) \in (y_1, \dots, y_n)$, $\frac{y_n}{x_n} > 0$ e vale:

$$(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\downarrow} \left(x_1 \cdot \frac{y_n}{x_n}, \dots, x_n \cdot \frac{y_n}{x_n} \right) \xrightarrow{\downarrow} \begin{aligned} & \left(x_1 \frac{y_n}{x_n} - b_1, \dots, x_{n-1} \frac{y_n}{x_n} - b_{n-1}, y_n \right) \\ & b_i = y_i - \lambda x_i \\ & = (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Dunque traslazioni e omotetie agiscono transitivamente sul semispazio. Questo conclude perché traslazioni e omotetie generano le isometrie di H^n .

Esercizio 9.3. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2 .

Consideriamo $\omega = \sqrt{\det(g)} dx \wedge dy$ la forma volume, dunque $g(x, y) = \frac{1}{y^2} g^E = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$.

Allora l'area del dominio $D = [-a, a] \times [b, +\infty)$ è:

$$\int_D \sqrt{\det(g)} dx dy = \int_D \frac{1}{y^2} dx dy = 2a \left[-\frac{1}{y} \right]_b^{+\infty} = \frac{2a}{b}.$$

Esercizio 10.2. Considera la connessione ∇ su \mathbb{R}^3 con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$

$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g , ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

Usiamo la Proposizione 9.3.5. di "Manifolds": ∇ è compatibile con $g \Leftrightarrow$ in carte $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li}$.

Nel nostro caso $g_{ij} = \delta_{ij}$ dunque deve valere $\Gamma_{ki}^l \delta_{lj} + \Gamma_{kj}^l \delta_{li} = 0$. Effettivamente se $\{i, j, k\} = 3$

\Rightarrow gli unici termini non nulli sono $\Gamma_{ki}^j \delta_{jj} + \Gamma_{kj}^i \delta_{ii} = \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{kj}^i = \pm 1 \neq 0$; se $\{i, j, k\} < 3$ allora tutti i

termini della somma sono nulli.

Poi, ∇ non è simmetrica infatti $\Gamma_{12}^3 = 1 \neq -1 = \Gamma_{21}^3$.

Per quanto visto a lezione, le geodetiche massimali passanti per x_0 e con direzione v soddisfano l'equazione:

$$\begin{cases} \ddot{x}^k = -\dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k \quad (k=1,2,3) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases}$$

Per $k=1$ la 1 eq. diventa $\ddot{x}^1 = -\dot{x}^2 \dot{x}^3 \Gamma_{23}^1 - \dot{x}^3 \dot{x}^2 \Gamma_{32}^1 = 0$; allo stesso modo troviamo $\ddot{x}^2 = \ddot{x}^3 = 0$.

Dunque le geodetiche massimali sono le rette $x(t) = x_0 + tv$.

Esercizio 10.3. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g) ,

DAVID VENCATO S90954

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} v.$$

Per quanto visto a lezione la geodetica massimale deve soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x}^k = -\dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases}$$

dove come Γ_{ij}^k usiamo i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita.

Dunque, calcoliamoli:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) =$$

$$g_{ij} = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \delta_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \|x\|^2}{2} \right)^2 \delta^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \|x\|^2}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) =$$

Allora se i, j, k sono tutti diversi tra loro $\Gamma_{ij}^k = 0$. Poi:

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \|x\|^2}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \|x\|^2}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \frac{2x_i}{(1 - \|x\|^2)^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) x^i .$$

$$\Gamma_{ij}^j = \Gamma_{ji}^j = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \|x\|^2}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) x^i \quad (j \neq i).$$

per quanto visto a lezione sono simmetrici negli indici in basso

$$\Gamma_{ii}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \|x\|^2}{2} \right)^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \right) = \left(-\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) x^k \quad (k \neq i).$$

Allora l'eq. per la geodetica diventa:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k &= \ddot{x}^k + (\dot{x}^k)^2 \Gamma_{kk}^k + \sum_{i \neq k} ((\dot{x}^i)^2 \Gamma_{ii}^k + \dot{x}^i \dot{x}^k \Gamma_{ik}^k) + \sum_{j \neq k} \dot{x}^k \dot{x}^j \Gamma_{kj}^k = \\ &= \ddot{x}^k + (\dot{x}^k)^2 \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) x^k + \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) \sum_{i \neq k} (\dot{x}^i \dot{x}^k x^i - (\dot{x}^i)^2 x^k) + \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) \sum_{j \neq k} \dot{x}^k \dot{x}^j x^j = \\ &= \ddot{x}^k + \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) \left((\dot{x}^k)^2 x^k + \sum_{i \neq k} (\dot{x}^i \dot{x}^k x^i) - \sum_{i \neq k} (\dot{x}^i)^2 x^k + \sum_{j \neq k} \dot{x}^k \dot{x}^j x^j \right) = \\ &= \ddot{x}^k + \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right) \left(-\sum_{i \neq k} \dot{x}^i x^i + x^k \left(\sum_{i \neq k} ((\dot{x}^i)^2 - (\dot{x}^i)^2) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \gamma'(t)^k = \left(\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \right)' v^k = \frac{1}{\cosh^2(t)} v^k \quad \gamma''(t)^k = -\frac{2 \cosh(t) \sinh(t)}{\cosh^4(t)} v^k = -2 \frac{\tanh(t)}{\cosh^2(t)} v^k.$$

e sostituendo nell'eq. precedente:

$$\begin{aligned} & -z \frac{\tanh(t)}{\cosh^2(t)} v^k + \left(\frac{z}{1 - \tanh^2(t)} \right) \left(\frac{z}{(\cosh^2(t))^2} v^k \tanh t \sum_{i \neq k} (v^i)^2 - v^k \tanh \frac{1}{(\cosh^2 t)^2} \left(\sum_{i \neq k} (v^i)^2 - (v^k)^2 \right) \right) = \\ & = -\frac{z \tanh(t)}{\cosh^2(t)} v^k + \left(\frac{z}{1 - \tanh^2(t)} \right) \left(\frac{v^k \tanh t}{(\cosh^2(t))^2} \right) \underbrace{\left(z \sum_{i \neq k} (v^i)^2 - \left(\sum_{i \neq k} (v^i)^2 - (v^k)^2 \right) \right)}_{\text{1 poiché } v \in S^{n-1}} = \\ & = 0 \end{aligned}$$

↓

$$1 - \tanh^2(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}$$

Esercizio 10.6 (Il toro di Clifton – Pohl). Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$g(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria per questa metrica. In particolare possiamo quoientare M con l'isometria $f(x, y) = (2x, 2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T . Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0 \right), \quad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geometricamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per Hopf – Rinow).

Calcoliamoci i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita compatibile con g :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \text{ notando che } g_{ii} = 0, g_{ij} = \frac{2}{x^2 + y^2} \text{ se } i \neq j \text{ e } g^{ij} = \frac{x^2 + y^2}{2} g_{ij}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2} \left(x \cdot \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot x \right) = -\frac{2x}{x^2 + y^2};$$

$$\Gamma_{22}^2 = -\frac{2y}{x^2 + y^2};$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x} - \frac{\partial g_{12}}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x} \right) = 0;$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y} + \frac{\partial g_{22}}{\partial y} - \frac{\partial g_{22}}{\partial y} \right) = 0.$$

L'equazione per le geodetiche massimali è $\ddot{x}^k = -\dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k$ che diventa $\ddot{x}^1 = \frac{2x}{x^2 + y^2} \dot{x}^2$ e $\ddot{y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \dot{y}^2$.

Vediamo che $\gamma(t)$ e $\eta(t)$ soddisfano quest'equazione:

$$\gamma(t): \left(\frac{\dot{x}}{1-t} \right) = \left(\frac{1}{(1-t)^2} \right) = \left(\frac{+2(1-t)}{(1-t)^4} \right) = \frac{2}{(1-t)^3} \text{ e } \frac{2 \left(\frac{1}{1-t} \right)}{\left(\frac{1}{1-t} \right)^2} \cdot \frac{1}{(1-t)^4} = \frac{2}{(1-t)^3}$$

e per la II componente di $\gamma(t)$ è evidente che valga.

$$\eta(t): \left(\frac{\dot{y}}{\cos^2 t} \right) = \left(\frac{1}{\cos^4 t} \right) = \frac{2 \cos^2 \sin t}{\cos^4 t} = 2 \frac{\sin t}{\cos^3 t} \text{ e } 2 \frac{\frac{\sin t}{\cos^3 t}}{\tan^2 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^4 t} = 2 \frac{\sin t}{\cos^4 t} \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t}$$

è anche in questo caso per la II componente è evidente che $\dot{y} = \ddot{y} = 0$.

Esercizio 11.3. Una varietà riemanniana connessa è isotropa in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_p M$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Per prima cosa notiamo che la definizione di isotropia è equivalente se al posto di richiedere che i vettori siano di norma unitaria

richiediamo che valga per $v, w \in T_p M$ con $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle$. Infatti se prendo f l'isometria data dalla definizione dell'esercizio con vettori $\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|} \in T_p M \Rightarrow \frac{1}{\|v\|} df_p(v) = df_p\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{w}{\|w\|} \Rightarrow df_p(v) = w$.

Dobbiamo costruire isometria $\varphi: M \rightarrow M$ t.c. $\varphi(p) = q \quad \forall p, q \in M$.

Sia $\gamma_v: [0, 1] \rightarrow M$ la geodetica minimizzante t.c. $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Siamo poi $\gamma_{\gamma_v'(1)}: [0, 1] \rightarrow M$ la geodetica minimizzante t.c. $\gamma_{\gamma_v'(1)}(0) = \gamma_v(1)$, $\gamma_{\gamma_v'(1)}(1) = q$ e $\dot{\gamma}_{\gamma_v'(1)}(0) = -\gamma_v'(1)$.

Dunque φ è l'isometria che fissa $\gamma_v(1)$ e manda $-\gamma_v'(1)$ in $\gamma_{\gamma_v'(1)}(1)$ data dalla definizione di isotropia,

otteniamo:

$$\varphi(p) = \varphi \circ \gamma_{-\gamma_v'(1)}(1) = \gamma_{d\varphi_{\gamma_v(1)}(-\gamma_v'(1))}(1) = \gamma_{\gamma_v'(1)}(1) = q.$$

La connessione di Levi-Civita

è naturale cioè commuta con le isometrie

Esercizio 11.5. Dimostra che il piano iperbolico nel modello del semipiano ha curvatura sezonale costante -1 . Puoi dare per buono il calcolo dei Γ_{ij}^k . Deduisci che lo spazio iperbolico di dimensione n ha curvatura sezonale costante -1 .

Per prima cosa osserviamo che come corollario della Proposizione 11.2.4, di Manifolds si ha che la curvatura sezonale

di H^2 è costante ovvero non dipende da $p \in H^2$ o da $\sigma \in T_p H^2$. Ora:

$$K(\sigma) := R(0,1)(e_1, e_2, e_2, e_1) . \frac{1}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2},$$

non dipende da σ e p

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{y} \\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{y} \\ \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m \quad \text{dunque}$$

$$R_{122}^l = \frac{\partial \Gamma_{22}^l}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^l}{\partial x^2} + \Gamma_{1m}^l \Gamma_{22}^m - \Gamma_{2m}^l \Gamma_{12}^m$$

$$R_{122}^1 = \cancel{\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1}} - \cancel{\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x^2}} + \cancel{\Gamma_{1m}^1 \Gamma_{22}^m} - \Gamma_{2m}^1 \Gamma_{12}^m = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{y^2}$$

$$R_{122}^2 = \cancel{\frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x^1}} - \cancel{\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^2}} + \Gamma_{1m}^2 \Gamma_{22}^m - \Gamma_{2m}^2 \Gamma_{12}^m = -\frac{1}{y^2}$$

$$R_{1221} = R_{122}^m g_{lm} = R_{122}^2 g_{22} = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{y^2} = -\frac{1}{y^4}$$

$$R_{1221}(0,1) = -1 \quad . \quad \text{Inoltre in } (0,1) \quad g_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{dunque} \quad \frac{1}{\langle e_1, e_1 \rangle \langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_1, e_2 \rangle^2} = 1.$$

$$\text{Allora, } K(\sigma) = -1.$$

Se ho lo spazio iperbolico di dimensione n allora per lo stesso motivo precedente la curvatura sezonale è costante, quindi prenda un punto p dell' spazio iperbolico e dato che per calcolare la curvatura si deve prendere un piano di $T_p H^2$, prenda proprio un piano isometrico al piano iperbolico e dunque con gli stessi conti si deduce che la curvatura sezonale è -1 .

Esercizio 11.7. Sia $R > 0$. Considera la varietà $M = \mathbb{R} \times (R, +\infty) \times S^2$, con variabili t, r, θ, ϕ , dotata del tensore metrico lorentziano di Schwarzschild

$$g = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Mostra che il tensore di Ricci è nullo in ogni punto di M , ma il tensore di Riemann no.

Notazione: $(t, r, \theta, \phi) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Il tensore di Riemann si ottiene come: $\Gamma_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$.

Calcoliamo dunque i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right]$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left[\cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}} - \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}} \right] = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1-\frac{R}{r}} \right) \cdot \left(-\left(+\frac{R}{r-R} \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{R}{r(r-R)}$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_1} \right] = 0$$

$$\Gamma_{14}^1 = \Gamma_{41}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{41}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} \right] = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{44}^1 = 0$$

Le ultime 3 coordinate non dipendono da $t + g$ diagonale

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{se } |i, j, k| = 3 \quad \text{perché } g \text{ diagonale} \quad (4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ casi})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}} - \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \left(\frac{r}{r-R} \right)' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \left(\frac{r-R-r}{(r-R)^2} \right) = -\frac{1}{2r} \frac{R}{r-R}$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\Gamma_{24}^2 = \Gamma_{42}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{42}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_2} \right] = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \cdot \left(\frac{R}{r^2} \right) = \frac{1}{2r^2} R(r-R)$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) (-2r) = R-r$$

$$\Gamma_{44}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left[\frac{\partial g_{24}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) (-2r \cdot \sin^2 \theta) = (R-r) \sin^2 \theta$$

$$M_{33}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x_3} \right] = 0$$

$$M_{13}^3 = M_{31}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} \right] = 0$$

$$M_{23}^3 = M_{32}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x_3} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (2r) = \frac{1}{r}$$

$$M_{34}^3 = M_{43}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{34}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_3} \right] = 0$$

$$M_{11}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} \right] = 0$$

$$M_{22}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_3} \right] = 0$$

$$M_{44}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left[\frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (-r^2 2\sin\theta \cos\theta) = -\sin\theta \cos\theta$$

$$M_{44}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x_4} \right] = 0$$

$$M_{14}^4 = M_{41}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{14}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{14}}{\partial x_4} \right] = 0$$

$$M_{24}^4 = M_{42}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{24}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{24}}{\partial x_4} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot 2r \sin^2 \theta = \frac{1}{r}$$

$$M_{34}^4 = M_{43}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} + \frac{\partial g_{44}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{34}}{\partial x_4} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot r^2 2 \sin\theta \cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$M_{11}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_4} \right] = 0$$

$$M_{22}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{24}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_4} \right] = 0$$

$$M_{33}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left[\frac{\partial g_{34}}{\partial x_3} + \frac{\partial g_{34}}{\partial x_3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x_4} \right] = 0$$

$$\text{Ora, } R_{323}^2 = \frac{\partial M_{23}^2}{\partial x^3} - \frac{\partial M_{33}^2}{\partial x^2} + M_{3m}^2 M_{20}^m - M_{2m}^2 M_{33}^m =$$

$$= \frac{\partial M_{23}^2}{\partial x^3} - \frac{\partial M_{33}^2}{\partial x^2} + M_{33}^2 M_{20}^3 - M_{22}^2 M_{33}^2 = +1 + \left(-\frac{R}{2r} \right) \neq 0 \quad \forall r \in (R_1, +\infty).$$

Calcoliamo il tensore di Ricci:

$$R_{ij} := R^K{}_{Kij} , \text{ dunque :}$$

$$\cdot R_{1jK}^1 = \frac{\partial M_{jK}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial M_{1K}^1}{\partial x^j} + M_{1m}^1 M_{jk}^m - M_{jm}^1 M_{1K}^m . \text{ Per } j=1 \text{ l'unico caso che non e' subito}$$

$$\text{evidente sia } \alpha \text{ e' } j=1, \text{ ma } R_{122}^1 = \alpha - \alpha + M_{12}^{-1} M_{22}^2 - M_{22}^{-2} M_{12}^2 = \alpha.$$

Per $j \neq k$ dato che $R_{ijk}^1 = \alpha$ tranne per $M_{12}^1 = M_{21}^1 \Rightarrow R_{1m}^1 M_{jk}^m \neq \alpha$ implica $(m=1; j=2) \vee (m=2; j=1)$ e in entrambi i casi si avrebbe $j=k$. Dunque $R_{1jk}^1 = \alpha$.

- I casi R_{2jk}^2 , R_{3jk}^3 e R_{4jk}^4 sono analoghi al primo usando i soliti ragionamenti per assurdo nei casi non ovvi.