1. State as many characterizations of discrete valuation rings as you can. Explain why there is a prime factorization for ideals in Dedekind domains.

- Le caratterizzazioni sono:

(1) Definizione DVR : un anello A che è PID + locale + non è un campo ;

(2) dom. + Noetheriano + locale + dim Krull $= 1$ + $\dim P/P^2 = 1$ (P ideale massimale, P/P^2 visto come sp. vettoriale su $K = A/P$);

(3) dom. + Noetheriano + locale + P generato da un solo elemento $t \neq 0$ + $\forall\, x \neq 0 \in K$ $\exists!\, n \in \mathbb{Z}$ e $\exists!\, a \in$ unità di A t.c. $x = a t^n$;

(4) A dominio è anello di valutazione di una valutazione $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$;

(5) Dominio di Dedekind (dominio + Noetheriano + integralmente chiuso + dim Krull $= 1$) + locale ;

(6) Anelli regolari locali con dim. Krull $= 1$;

(7) A Noeth. locale + gldim$(A) = 1$.

(8) A dom. local con P ideale massimale t.c. $P = (x)$, $x \neq 0$ e $\bigcap_n P^n = (0)$;

- In un dominio di Dedekind ogni ideale $I \neq 0$ può essere scritto in maniera unica come prodotto $I = P_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{r_n}$ con P_i ideali primi.

<u>dimostrazione</u>

Per Lemma (hp. Noetheriano) ci sono solo finiti $P_1, \ldots, P_r$ ideali primi che contengono I (sarebbero finiti i primi minimali che contengono I ma la dim di Krull è 1 dunque se ce ne fosse un altro $Q \Rightarrow \exists P_i$ t.c. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{primo perché dominio}}}{(0)} \subsetneq I \subsetneq P_i \subsetneq Q \Rightarrow$ dim. di Krull almeno 2, assurdo.). Ora A_{P_i} è un DVR (locale, Noetheriano perché A lo è, dimensione 1 per corrispondenza e integralmente chiuso perché lo è A). Dunque è PID e l'ideale massimale $P_i A_{P_i} = (t_i)$ per un certo t_i e dato che è locale $I A_{P_i} \subseteq P_i A_{P_i} = (t_i) \Rightarrow I A_{P_i} = (t_i^{r_i})$ cioè $I A_{P_i} = P_i^{r_i} A_{P_i}$. Facciamo vedere che $I = P_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot P_n^{r_n} =: J$ facendo vedere che $\forall$ primo P $I A_P = J A_P$. Se $P \neq P_i\ \forall i$ allora non contiene I (per hp. P_i). E nemmeno i P_i altrimenti dim Krull $\geq 2 \Rightarrow$ dato che P primo non contiene nemmeno J. Allora $I \cap P^c$ e $J \cap P^c \neq \emptyset \Rightarrow I A_P = J A_P = A_P$. Se $P = P_i$ per un certo P_i ricordiamo che per lui $I A_{P_i} = P_i^{r_i} A_{P_i}$. Ma $P_j \not\supset P_i^{r_i}$ (altrimenti $P_i \subset P_j$ e per minimalità $P_i = P_j$), dunque $P_j A_{P_i} = A_{P_i} \Rightarrow$ iterando con tutti gli altri P_j $j \neq i$ $I A_{P_i} = P_i^{r_i} A_{P_i} = J A_{P_i}$.

2. State the general form of Krull's Hauptidealsatz and its converse. Apply it to show that the quotient of a regular local ring by an ideal generated by a subset of a regular system of parameters is again regular.

- Generalizzazione dell' Hauptidealsatz di Krull : Sia A un anello Noetheriano e $x_1, \dots, x_r \in A$. Se P é un ideale primo minimale su $(x_1, \dots, x_r)$, allora $ht(P) \leq r$.

- Hauptidealsatz inverso : Sia A Noetheriano e $P \subset A$ un ideale primo t.c. $ht(P) = r > 0$, allora esistono $x_1, \dots, x_r \in P$ t.c. P é minimale su $(x_1, \dots, x_r)$.

- Se A é regolare locale e $x_1, \dots, x_r$ sono un sistema regolare di parametri di A, allora $A/(x_1, \dots, x_i)$ é regolare locale di dimensione $r-i$ $\forall 1 \leq i \leq r$.

dimostrazione

Locale : é quoziente di un locale;

Regolare + $\dim A/(x_1, \dots, x_i) = r-i$: usiamo il seguente lemma " A Noetheriano , P primo minimale su $x_1, \dots, x_r$ con $ht(P) = r$. Allora $ht\left(P/(x_1, \dots, x_i)\right) = r-i$ in $A/(x_1, \dots, x_i)$ $\forall i \leq r$ ". Per dimostrarlo : se $s := ht\left(P/(x_1, \dots, x_i)\right)$ per Hauptidealsatz dato che $P/(x_1, \dots, x_i)$ é minimale su $\pi(x_{i+1}), \dots, \pi(x_r)$ allora $s \leq r-i$. Per l'inverso di Hauptidealsatz $\exists\, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_s \in P/(x_1, \dots, x_i)$ t.c. $P/(x_1, \dots, x_i)$ é minimale su loro. Allora P é minimale su $x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_s$ e dunque per Hauptidealsatz $r \leq s+i \Rightarrow s \geq r-i$.

Possiamo usare il lemma poiché A é regolare ($\Rightarrow$ Noetheriano) e $ht(P) \overset{\text{locale}}{=} \dim(A) \overset{\text{regolare}}{=} \dim\left(P/P^2\right) \overset{x_1, \dots, x_r \text{ base}}{=} r$.

Dobbiamo vedere che $\dim\left(P/(x_1, \dots, x_i) \Big/ \left(P/(x_1, \dots, x_i)\right)^2 \right) = \dim A/(x_1, \dots, x_i)$ ma

$\dim\left(A/(x_1, \dots, x_i)\right) \overset{\text{locale}}{=} ht\left(P/(x_1, \dots, x_i)\right) \overset{\text{lemma}}{=} r-i$. Inoltre dato che $x_1, \dots, x_r$ sono un sistema regolare di parametri sono una base per P/P^2 e dunque $\pi(x_{i+1}), \dots, \pi(x_r)$ sono una base di $\pi(P)/\pi(P^2)$ e dunque la sua dimensione é $r-i$.

3. Explain the relation between the Krull dimension of a finitely generated integral domain over a field and its transcendence degree (proofs of intermediate lemmas not needed).

Def. (grado di trascendenza): Supponiamo A un dominio che contiene un campo K e che sia finitamente generato come K-algebra. Il grado di trascendenza di A, $\mathrm{tr.deg}(A)$, è il massimo numero di elementi algebricamente indipendenti. ($a_1, \dots, a_n$ sono indipendenti se $\nexists\, f \in K[x_1, \dots, x_n]$ t.c. $f(a_1, \dots, a_n) = 0$).

Teorema: Sia A un dominio che contiene un campo K; se inoltre A è una K-algebra finitamente generata allora $\mathrm{tr.deg}_K(A) = \dim(A)$

Nella dimostrazione saranno utili i seguenti lemmi:

Lemma di Normalizzazione di Noether: A come nel teorema, sia $r = \mathrm{tr.deg}_K(A)$. Allora $\exists\, x_1, \dots, x_r \in A$ algebricamente indipendenti t.c. A è finitamente generato come $K[x_1, \dots, x_r]$-modulo.

Going-up: $A \subset B$ estensione integrale di anelli. Sia $P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_r$ una catena di primi di A allora esiste $Q_1 \subsetneq \dots \subsetneq Q_r$ catena di primi in B t.c. $Q_i \cap A = P_i$ $\forall i \leq r$.

Proposizione: Sia $\varphi: A \to B$ un omomorfismo di anelli Noetheriani, $Q \subseteq B$ ideale primo e $P = \varphi^{-1}(Q)$. Allora $ht(Q) \leq ht(P) + \dim B_Q / PB_Q$.

dimostrazione teorema

Per il lemma di Noether $\exists\, R := K[x_1, \dots, x_r]$ contenuto in una K-sottoalgebra in A t.c. A è finitamente generato come R-modulo, in particolare è integrale su R. Sappiamo che $\dim(R) = r$. Dunque considero la catena massimale di ideali primi $(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq \dots \subsetneq (x_1, \dots, x_r)$ (sono primi perché $K[x_1, \dots, x_n] / (x_1, \dots, x_i) \cong K[x_{i+1}, \dots, x_n]$ che è un dominio) e la sollevo con il Going Up a una catena $(0) \subsetneq \dots \subsetneq Q_r \subsetneq A$ di ideali primi di A ($R \subseteq A$). Dunque $\dim(A) \geq r$.

Sia Q un ideale massimale di A t.c. $ht(Q) = \dim(A)$ (nel caso $\dim(A) = +\infty$ fissato $n \in \mathbb{N}$ arbitrario Q t.c. $ht(Q) \geq n$) e pongo $P := Q \cap R$. Allora l'algebra $A_{R \setminus P} / PA_{R \setminus P}$ è di dimensione finita su R_P / PR_P quindi è Artiniano.

è uno sp. vettoriale di dim finita $\Rightarrow$ Artiniano

L'anello locale A_Q / PA_Q è una localizzazione di $A_{R \setminus P} / PA_{R \setminus P}$ dunque ha dimensione 0.

→ localizzazione posso sul quoz. (localizzo con $A \setminus Q$)

Quindi se uso la proposizione con la mappa $R \xrightarrow{} A$ ci dà:

Noeth. ; fin. gen. su Noeth → Noeth.

$$\dim(A) = ht(Q) \leq ht(P) + \dim A_Q / PA_Q = ht(P) \leq \dim(R).$$

4. State as many equivalent characterizations of regular local rings as you can.

Def. (loc. regol.): un anello locale Noetheriano è detto regolare locale $\dim_{k(P)} P/P^2 = \dim A$ con P l'ideale massimale e $k(P) := A/P$ (es. $k[[x_1, \ldots, x_n]]$);

Def.: Se $x_1, \ldots, x_r \in P$ sono t.c. modulo P^2 formano una base di P/P^2 sono chiamati "sistema regolare di parametri".

Def.: A un anello. Allora $x_1, \ldots, x_r \in A$ formano una sequenza regolare se: (a) x_i non è un divisore di zero di $A/(x_1, \ldots, x_{i-1})$; (b) $(x_1, \ldots, x_r) \neq A$; nel caso in cui A Noetheriano + locale una qualsiasi permutazione di una sequenza regolare è ancora una sequenza regolare.

Dunque sono equivalenti: (A Noetheriano locale con ideale massimale P e $x_1, \ldots, x_r$ sist. minimale di generatori di P:

1. A anello locale regolare
2. $x_1, \ldots, x_r$ sequenza regolare
3. $\hat{A}$ rispetto all'ideale massimale P è regolare locale
4. $\hat{A}$ rispetto a un qualunque ideale $I \subset A$ è regolare locale
5. $\operatorname{gldim}(A) < +\infty$ (Serre) e in questo caso $\operatorname{gldim}(A) = \dim A$
6. $\operatorname{Tor}_i^A(k, k)$ è un k-spazio vettoriale di dim. $\binom{r}{i}$ $\forall i$.

dimostrazione

1 → 2: Usiamo la Proposizione "Se A locale regolare e $x_1, \ldots, x_r$ sistema reg. di A allora $A/(x_1, \ldots, x_i)$ è locale regolare di dim. $r-i$" + "locale regolare ⇒ dominio" dunque $A/(x_1, \ldots, x_i)$ è dominio e dunque ovvio.

2 → 1: usiamo "Se A è Noetheriano locale e $x_1, \ldots, x_r$ sono una sequenza regolare in A, allora $\dim A/(x_1, \ldots, x_r) = \dim A - r$". Dunque $P = (x_1, \ldots, x_r)$ ⇒ $\dim A/P = \dim A - r$ ma A/P campo ⇒ $\dim A = r = \dim P/P^2$ ($x_1, \ldots, x_r$ base per hp.)

1 ↔ 3: "A Noeth ⇒ $\hat{A}$ Noeth" e "A Noeth + locale ⇒ $\hat{A}$ locale" allora $\hat{A}$ è Noetheriano locale. Dunque dato che A è Noeth. locale per hp. vediamo l'uguaglianze:

$$\underbrace{\dim(\hat{A}) = \dim A}_{\substack{\text{Noeth + locale} \\ \Rightarrow \dim(\hat{A}) = \dim A}} = \underbrace{\dim_{A/P} P/P^2}_{A \text{ regolare}} = \underbrace{\dim_{\hat{A}/\hat{P}}(P/P^2)}_{\substack{A/I = \hat{A}/\hat{I} \\ \forall I \text{ ideale}}} = \dim_{\hat{A}/\hat{P}}(\hat{P}/\hat{P}^2).$$

5 ↔ 1: non necessaria

4 ↔ 1: usiamo Serre + "$\operatorname{gldim}(A) = \operatorname{pd} k = \max\{d : \operatorname{Tor}_d^A(k, k) \neq 0\}$" (vale su Noeth + locale). Dato che $\hat{A}$ è piatto su A abbiamo che $\operatorname{Tor}_i^{\hat{A}}(k, k) \simeq \operatorname{Tor}_i^A(k, k) \otimes_A \hat{A}$ ma $\hat{A}$ è fedelmente piatto dunque $\operatorname{Tor}_i^{\hat{A}}(k, k) \neq 0 \iff \operatorname{Tor}_i^A(k, k) \neq 0$ e si conclude usando i 2 fatti sopra citati.

1 → 6: quando A è regolare di dimensione di Krull d ⇒ concludiamo usando la domanda 11.

6 → 1: al contrario basta concludere con i 2 fatti preliminari di 4 ↔ 1.

5. State and prove the Artin–Rees lemma and the Krull intersection theorem.

- <u>Setting</u>: Assumiamo che dato un ideale $I \subset A$ e una filtrazione (M^n) ($M^0 \supset M^1 \supset \dots$) di un A-modulo M che soddisfa $I^m M^n \subset M^{m+n}$ $\forall m, n$. Diciamo che (M^n) è stabilmente I-adica se $M^{n+1} = IM^n$ per n abbastanza grande. (la filtrazione $(I^n M)$ è ovviamente stabilmente I-adica)
Definiamo l'anello graduato $I^{\oplus} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n$ e la somma diretta di A-moduli $M^{\oplus} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^n$. Allora $M^{\oplus}$ è un graduato $I^{\oplus}$-modulo cioè c'è una mappa $I^{\oplus} \times M^{\oplus} \longrightarrow M^{\oplus}$ che dà la struttura di $I^{\oplus}$-modulo a $M^{\oplus}$ e $\forall n, m$ fissati si restringe a $I^m \times M^n \longrightarrow M^{m+n}$ (graduato).
Per dimostrare il lemma Artin-Rees abbiamo bisogno del <u>lemma di Cartier</u>: "Assumiamo che A è Noetheriano e M è finitamente generato su A. La filtrazione (M^n) è stabilmente I-adica se e soltanto se $M^{\oplus}$ è un $I^{\oplus}$-modulo finitamente generato".

<u>Lemma Artin-Rees</u>: Assumiamo inoltre $M_1 \subset M$ un sottomodulo. La filtrazione $(I^n M \cap M_1)$ di M_1 è stabilmente I-adica.

<u>dimostrazione</u>

Per prima cosa verifichiamo che la filtrazione soddisfa lei: $I^m (I^n M \cap M_1) \subset I^{m+n} M \cap I^m M_1 \subset I^{m+n} M \cap M_1$. Ora, A è Noetheriano dunque ha un sistema finito di generatori che generano anche $I^{\oplus}$ come A-algebra. Per il teorema delle basi di Hibert per anelli ("Sia A un anello Noetheriano e B una A-algebra finitamente generata, allora B è un anello Noetheriano") $I^{\oplus}$ è Noetheriano. Inoltre $I^n M$ è stabilmente I-adica dunque per Cartier $I^{\oplus} M$ è un $I^{\oplus}$-modulo finitamente generato. Ma $I^{\oplus} M = \bigoplus_n I^n M$ e dato che $I^{\oplus}$ è Noetheriano, ogni sottomodulo di $\bigoplus_n I^n M$ è finitamente generato (Teorema delle basi di Hibert per moduli: "A anello Noeth. e M fin. gen. come A-modulo $\Rightarrow$ A Noeth come A-mod.) $\Rightarrow \bigoplus_n I^n M \cap M_1$ è finitamente generato come $I^{\oplus}$-modulo $\Rightarrow I^n M \cap M_1$ è stabilmente I-adica per Cartier.

- <u>Il teorema di intersezione di Krull</u>: Se A è un anello Noetheriano locale e $I \subseteq A$ è un ideale, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$.

<u>dimostrazione</u>

Sia P il massimale di A, dato che $I \subset P$ $\bigcap_n I^n \subseteq \bigcap_n P^n$. Dunque mi basta dimostrare l'enunciato con P.
Poniamo $N := \bigcap_n P^n$. Dunque N è un ideale $\Rightarrow PN \subset N$. D'altra parte per il lemma di Artin-Rees: $\underset{\text{def.}}{N =} P^{n_0+1} \cap N \underset{\text{Artin-Rees } P=I}{=} P(P^{n_0} \cap N) \subseteq PN$. Dunque $PN = N \Rightarrow$ per Nakayama $N = 0$.

6. Explain (as briefly as possible) why a complete local domain of equal characteristic 0 has a coefficient field.

Ricordiamo cosa é un campo dei coefficienti:

<u>Def.</u>: Sia A un anello locale, P il suo ideale massimale e K il suo campo dei residui. Un campo contenuto in A e' detto un campo di coefficienti se e' mappata isomorficamente in K dalla proiezione standard.

Inoltre A con le stesse hp. sopra + dominio é equicaratteristico se $\operatorname{char}(A) = \operatorname{char}(K)$.

Notiamo che A é equicaratteristico $\Leftrightarrow$ A contiene un campo: $\boxed{\Rightarrow}$ se $\operatorname{char}(A) = \operatorname{char}(K) = p > 0$ allora A contiene uno $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; se $\operatorname{char}(A) = \operatorname{char}(K) = 0 \Rightarrow A$ contiene $\mathbb{Z}$. Ma $\mathbb{Z} \cap P = (0)$ (altrimenti se $n \in \mathbb{Z} \cap P$ con $n \neq 0$ $\pi(n) = 0 \Rightarrow n\,\pi(1) = 0$ ma $\operatorname{char}(A/P) = 0$, assurdo) dunque in $\mathbb{Z}$ ci sono elementi invertibili in $A \Rightarrow \mathbb{Q} \subseteq A$; $\boxed{\Leftarrow}$ se A contiene un campo C $\Rightarrow \operatorname{char}(A) = \operatorname{char}(C)$ $(1_A = 1_C)$. Inoltre $\pi_{|C} : C \longrightarrow \pi(C) \subseteq A/P$ é un isomorfismo (é iniettiva poiché $C \cap P = (0)$ altrimenti $P = A$). Dunque $\operatorname{char}(A) = \operatorname{char}(C) = \operatorname{char}(\pi(C)) = \operatorname{char}(A/P)$.

A questo punto basta mostrare il Teorema di Cohen:

<u>Teorema di Cohen</u>: se A e' un anello completo locale che contiene un campo, allora contiene un campo dei coefficienti.

<u>dimostrazione</u>

<u>$\operatorname{char}(A) = 0$</u>: Sia $K' \subseteq K$ il massimo sotto campo per cui l'identità si solleva ad una mappa $K' \longrightarrow A$ $\left(\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \\ K' \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "id"] & K' \subseteq K \end{tikzcd}\right)$. Per l'esistenza basta usare Zorn e notare che non é vuoto poiché $\mathbb{Q} \subseteq A$ (come nella dim. equichar $\Leftrightarrow$ contiene campo). Supponiamo per assurdo che $K' \neq K$. Allora vediamo che $K|K'$ deve essere un'estensione algebrica: se $\exists\, \bar{x} \in K \setminus K'$ con $\bar{x}$ trascendente $\Rightarrow x \in A$ sollevamento di $\bar{x}$. Dunque $K'[x] \cap P = \emptyset$ altrimenti $\exists f(x) \neq 0$ con $f(x) \in K'[x] \cap P$ con $f \in K'[T]$ $\Rightarrow 0 \overset{f \in P}{=} \pi(f(x)) = f(\bar{x})$ cioé $\bar{x}$ algebrico. Allora $K'(x) \xrightarrow{id} K'(\bar{x})$ si solleva a mappa da $K(\bar{x}) \longrightarrow A$ (mando $\bar{x} \to x$). Assurdo per massimalità di K'. Allora $K|K'$ algebrica $\Rightarrow$ separabile perché $\operatorname{char} = 0$. Applichiamo dunque il seguente lemma:

"Sia $L|K$ un estensione di campi algebrica separabile. Assumiamo inoltre che ci sia il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\bar{\lambda}"] \arrow[dr, dashed, "\lambda"] & B/I \\ K \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

con B anello, $I \subset B$ ideale con $I^2 = 0$ o B completo rispetto a I

allora $\exists\, \lambda : L \longrightarrow B$ sollevamento di $\bar{\lambda}$."

Applico il lemma con $L := K$, $K := K'$, $B := A$, $I := P$, $\bar{\lambda} := id$. Dunque $K = K'$.

7. State and prove the Cohen structure theorem for complete regular local rings of mixed characteristic with perfect residue field (assuming the existence and universal property of Witt vectors).

Ricordiamo che caratteristica mista significa che $char(A)=0$ e $char(A/P)=p>0$. In particolare valgono i seguenti due fatti:

In formula " K $char(K)=p>0 \Rightarrow \exists A_0$ ove $char(A_0)=0$ $A_0/_{max A_0} = K$ e $max A_0 = (p)$ "

- Dato un campo K di caratteristica $p>0$, $\exists$ ovr completo A_0 di caratteristica 0 con campo dei residui K e ideale max $P=(p)$. Questo A_0 e' chiamato anello di Cohen. Nel caso in cui K e' perfetto allora A_0 e' unico a meno di isomorfismi, la costruzione é esplicita e é l'anello dei vettori di Witt.

In formula " dom + locale + completo con P max e $A/_P = K$ $char(K)=0 \Rightarrow \exists$ cohen ring $A_0 \subseteq A$ $A_0/_{max A_0} = K$ $P \cap A_0 = (p)$ "

- Sia A un dominio locale completo di caratteristica 0, con ideale massimale P e campo dei residui K di caratteristica $p>0$. Allora esiste un anello di Cohen A_0 contenuto in A con campo dei residui K e tale che $P \cap A_0 = (p)$.

- <u>Teorema</u>: Sia A un dominio Noetheriano completo locale di caratteristica mista, e sia $A_0 \subset A$ un anello di Cohen come nella prop. precedente. Allora

① $\exists$ omomorfismo suriettivo $A_0[[x_1, \dots, x_n]] \twoheadrightarrow A$ per un qualche $n>0$;

② Se A é anche regolare di $dim(A) = d+1$ e $p \in P \setminus P^2$, allora $\exists$ una mappa come in ① con $n=d$ che é isomorfismo

<u>dimostrazione</u>

① Dato che A é Noetheriano completiamo p ottenenendo $t_1, \dots, t_n \in P$ per cui $P = (p, t_1, \dots, t_n)$. $\forall i>0$ notiamo che: $A_0[[x_1, \dots, x_n]]/(p, x_1, \dots, x_n)^i \simeq A_0[x_1, \dots, x_n]/(p, x_1, \dots, x_n)^i$

Allora possiamo definire una mappa di A_0-algebre che manda $x_i \longmapsto t_i$ $\forall i$: $A_0[[x_1, \dots, x_n]]/(x_1, \dots, x_n)^i \longrightarrow A/_{P^i}$

Passando al limite inverso su i otteniamo una mappa $\lambda: A_0[[x_1, \dots, x_n]] \longrightarrow \hat{A} = A$ (é già completo). Per dire che é surgettiva usiamo il seguente fatto:

" Sia $\phi: A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli completi locali t.c. $\phi(P_A^n) \subset P_B^n$ $\forall n \geq 1$ (P_A e P_B ideali massimali). Se l'omomorfismo indotto $gr.(A) \rightarrow gr.(B)$ e' iniettivo (risp. suriettivo) $\Rightarrow$ lo é anche ϕ. Dove $gr.(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} P_A^n/_{P_A^{n+1}}$."

Dunque in grado 0: $A_0[[x_1, \dots, x_n]]/(p, x_1, \dots, x_n) \simeq A_0/_{(p)} \overset{hp}{\simeq} K$

NON NE SONO SICURO

In grado >0: $(p, x_1, \dots, x_n)^i/(p, x_1, \dots, x_n)^{i+1} \twoheadrightarrow (p, t_1, \dots, t_n)^i/(p, t_1, \dots, t_n)^{i+1} \simeq P^i/_{P^{i+1}}$

② Con le hp. aggiuntive so che $dim(P/_{P^2}) = d+1$ come spazio vett. e cioe' posso completare a base p

(dato che $p \in P \setminus P^2$) con $t_1, \dots, t_d$. Cioè $P = (p, t_1, \dots, t_d)$. La mappa dunque è la stessa costruita in (1). Deve essere iniettiva poiché una mappa di domini con stessa dimensione deve essere iniettiva ($\ker = \varphi^{-1}((0))$ deve essere un ideale primo).

8. State the homological characterizations of projective, injective, and flat modules. Describe finitely generated flat modules over Noetherian local rings.

• Proiettivi : (1) Def. : un R-modulo P è proiettivo se il funtore $\mathrm{Hom}_R(P,\_) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Sets}$ è esatto (è covariante)

Notiamo che è sempre esatto a sx dunque basta controllare l'esattezza a dx cioè: se $0 \to A \to B \xrightarrow{\phi} C \to 0 \Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(P,A) \to \mathrm{Hom}(P,B) \xrightarrow{\bar\phi} \mathrm{Hom}(P,C) \dashrightarrow 0$ cioè deve essere suriettiva $\bar\phi$ $\forall \phi : B \to C$ suriettiva;

(2) $\mathrm{Ext}^i_R(P,B) = 0$ $\forall i > 0$ e $\forall B$ R-modulo;

(3) $\mathrm{Ext}^1_R(P,B) = 0$ $\forall B$ R-modulo.

• Iniettivi : (1) Def. : un R-modulo Q è iniettivo se il funtore controvariante $\mathrm{Hom}_R(-,Q) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Sets}$ è esatto. Similmente a prima, data l'esattezza sx, basta vedere che : $0 \to A \xrightarrow{\lambda} B \to C \to 0$
$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(C,Q) \to \mathrm{Hom}(B,Q) \xrightarrow{\bar\lambda} \mathrm{Hom}(A,Q) \dashrightarrow 0$ $\bar\lambda$ è suriettiva $\forall \lambda : A \to B$ iniettiva.

(2) $\mathrm{Ext}^i_R(A,Q) = 0$ $\forall i > 0$ e $\forall A$ R-modulo;

(3) $\mathrm{Ext}^1_R(A,Q) = 0$ $\forall A$ R-modulo;

(4) $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, Q) = 0$ $\forall I \subset R$ ideale.

• Piatto : (1) Def. : un A R-modulo è piatto su R se il funtore $A \otimes_R -$ è esatto (covariante e esatto a dx).

(2) $\mathrm{Tor}^R_i(A,B) = 0$ $\forall B$ R-modulo e $\forall i > 0$;

(3) $\mathrm{Tor}^R_1(A,B) = 0$ $\forall B$ R-modulo;

(4) $\mathrm{Tor}^R_1(A, R/I) = 0$ $\forall I \subset R$ ideale.

• Sia R un anello Noetheriano locale con ideale massimale P e campo dei residui K. Sia A R-modulo finitamente generato. Allora A libero $\Leftrightarrow$ piatto. (basta $\mathrm{Tor}_1(A, \underset{\text{R-modulo}}{K}) = 0$ al posto di piatto)

dimostrazione

$\boxed{\Rightarrow}$ A finitamente generato dunque A/PA è un K-spazio vettoriale di dimensione finita e dunque $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ per cui la loro immagine tramite la proiezione sono una base di A/PA. Per il lemma di Nakayama generano anche A dunque la mappa $\phi : R^n \to A$ $(r_1, \dots, r_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n r_i a_i$ è suriettiva. ma non è la def. di fin generato!
Consideriamo quindi la successione esatta: $0 \to B \to R^n \to A \to 0$ con $B = \mathrm{Ker}\,\phi$. Tensorizzo con $K = R/P$ su R ottenendo: $\dots \to \mathrm{Tor}^1_R(A,K) \to B \otimes_R R/P \to R^n \otimes_R R/P \to A \otimes_R R/P \to 0$. Ma $B \otimes_R R/P = B/PB$ e similmente gli altri. Dato che $\mathrm{Tor}^1_R(A,K) = 0$ (A piatto) allora ho la sequenza esatta: $0 \to B/PB \to R^n/PR^n \to A/PA \to 0$. Ma R^n/PR^n e A/PA hanno la stessa dimensione (visti come spazi vettoriali) dunque una mappa surgettiva tra sp. vettoriali equidimensionali è un isomorfismo. Allora $B = PB$ e dunque, dato che R è Noetheriano B è finitamente generato e allora $B = 0$. Dunque $A \simeq R^n \Rightarrow A$ libero.

$\boxed{\Leftarrow}$ In generale libero $\Rightarrow$ piatto.

9. State the equivalent characterizations of projective dimension for a module. Explain the characterization of the global dimension of a Noetherian local ring via a single Tor-group.

- Cominciamo ricordando la def. di dim. proiettiva di un A-modulo M: la dimensione proiettiva di M, $pd(M)$, è il più piccolo i t.c. esiste una risoluzione proiettiva di lunghezza i ($0 \to P_i \to \_\_ \to P_0 \to M \to 0$, con $0 \to P_i \to \_\_ \to P_0 \to 0$ aciclico).

Vale che i seguenti fatti sono equivalenti:

① $pd(M) \leq d$ ② $Ext_A^i(M,N)=0$ $\forall i>d$ e $\forall N$ A-modulo ③ $Ext_A^{d+1}(M,N)=0$ $\forall N$ A-modulo

④ Se $0 \to M_d \to P_{d-1} \to \_\_ \to P_0 \to M \to 0$ è esatta e P_i proiettivi, allora M_d è proiettivo.

Da questo si ricavano le seguenti definizioni equivalenti:

① $pd(M)=d$ ② $Ext_A^i(M,N)=0$ $\forall i>d$ e $Ext_A^d(M,N)\neq 0$ $\forall N$ A-modulo

③ $Ext_A^{d+1}(M,N)=0$ e $Ext_A^d(M,N)\neq 0$ $\forall N$ A-modulo ④ Se $0 \to M_d \to P_{d-1} \to \_\_ \to P_0 \to M \to 0$ è esatta e P_i proiettivi, allora M_d è proiettivo e $\exists$ $0 \to M_{d-1} \to P_{d-2} \to \_\_ \to P_0 \to M \to 0$ esatta con P_i proiettivi e M_{d-1} non proiettivo.

- La dimensione globale di A è $gldim(A) = \sup\{pd(M) \mid M \text{ } A\text{-modulo}\}$. In realtà per un corollario visto basta considerare gli M finitamente generati.

<u>Teorema</u>: se A è un anello Noetheriano locale con campo residuo K, allora $gldim(A) = pd(K) = \max_d \{Tor_d^A(K,K) \neq 0\}$

Per dimostrarlo abbiamo bisogno della seguente <u>Proposizione</u>:

Sia A Noeth. locale con ideale massimale P e M A-modulo fin. generato. Allora $pd(M) \leq d \iff Tor_{d+1}(M,K)=0$ con $K = A/P$

<u>dimostrazione</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ Basta calcolare il Tor prendendo una risoluzione proiettiva $\leq d$;

$\boxed{\Leftarrow}$ Per induzione su d:

<u>$d=0$</u>: su un anello Noetheriano locale un modulo con $Tor_1(M,K)=0 \Rightarrow M$ è libero dunque proiettivo.

Quindi $0 \to M \to M \to 0$ è una risoluzione proiettiva con $M = P_0$.

<u>$d<d \to d$</u>: M è finitamente generato allora $\exists$ $0 \to N \to A^n \to M \to 0$ (dove $N = Ker(\varphi : A^n \to M)$).

N è finitamente generato perché A Noetheriano. Considero allora la sequenza esatta lunga dei Tor e avendo che $Tor_d^A(A^n, K)=0$ poiché A^n libero e dunque proiettivo ⇓ piatto, si ha $Tor_d^A(N,K) \simeq Tor_{d+1}^A(M,K)=0$.

Allora $pd(M) \leq pd(N) + 1 \leq d-1+1 = d$

se ho una ris. proiettiva di N posso estenderla con A^n a ris. proiettiva di M

per hp. induttiva dato che $Tor_d^A(N,K)=0$ $\Rightarrow pd(N) \leq d-1$

dim. Teorema

La seconda uguaglianza è vera usando la Proposizione con $M = K$.

Per la prima uguaglianza per il Corollario e la Proposizione $\mathrm{gldim}(A) \leq d \iff \mathrm{Tor}^A_{d+1}(M, K) = 0$ $\forall M$ A-modulo finitamente generato. Se $pd(K) \leq d \Rightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}(M, K) = 0$ (posso usare ris. proiettiva di lungh. $\leq d$ per calcolarlo) $\Rightarrow \mathrm{gldim}(A) \leq d$. Se $\mathrm{gldim}(A) \leq d \Rightarrow \mathrm{Tor}_{d+1}(M, K) = 0$ $\forall M$ A-mod. fin. generato, in particolare $\mathrm{Tor}_{d+1}(K, K) = 0$ $\Rightarrow pd(K) \leq d$. Dato che $\forall d$ $pd(K) \leq d \iff \mathrm{gldim}(A) \leq d \Rightarrow pd(K) = \mathrm{gldim}(A)$.

$pd(K) \leq \mathrm{gldim}(A)$ per def ?

10. State Serre's characterization of regular local rings (without proof). Show how it implies the Hilbert Syzygy Theorem and the fact that a localization of a regular local ring by a prime ideal is regular.

• <u>Teorema di Serre</u>: Sia A un anello Noetheriano locale. Allora A é regolare $\Leftrightarrow$ $\mathrm{gldim}(A) < +\infty$. In tal caso $\dim(A) = \mathrm{gldim}(A)$.

• <u>Corollario</u>: A anello locale regolare e $Q \subset A$ un ideale primo. Allora A_Q é regolare locale.

<u>dimostrazione</u>

Per Serre $\mathrm{gldim}(A) < +\infty$ quindi per definizione $\mathrm{gldim}(A/Q) = d < +\infty$ (A/Q e' un A-modulo) e dunque $\exists d \geq 0$ e una risoluzione proiettiva con A-moduli finitamente generati di A/Q: $0 \to P_d \to P_{d-1} \to \_\_\_ \to P_0 \to A/Q \to 0$.
Tensorizzando per il modulo piatto A_Q si ha: $0 \to P_d \otimes_A A_Q \to \_\_\_ \to P_0 \otimes_A A_Q \to A/Q \otimes_A A_Q \to 0$
ma $A/Q \otimes_A A_Q \simeq A_Q / Q A_Q$ = campo residuo di A/Q. Questa e' una risoluzione libera, dunque proiettiva di: K_{A_Q} $\Rightarrow \mathrm{gldim}(A_Q) = \mathrm{pd}(K(A_Q)) < +\infty$. Per Serre si conclude.

<u>N.B.</u> il corollario mi dice che per vedere se A e' regolare posso controllare gli A_Q massimali. Perche' se P e' un primo $\Rightarrow \exists Q$ massimale t.c. $P \subset Q \Rightarrow A_P = (A_Q)_P$

• <u>Teorema Hibert's Syzyzy</u>: Se K é un campo, allora $\mathrm{gldim}(K[x_1, \_, x_d]) = d$.

<u>dimostrazione</u>

É un corollario del seguente fatto " Se A e' un anello Noetheriano di dimensione d allora A e' regolare $\Leftrightarrow \mathrm{gldim}(A) = d$ ". Dimostriamo questo fatto. (In un anello Noetheriano A vale però che $\mathrm{gldim}(A) = \sup\{\mathrm{gldim}(A_Q) \mid Q \subset A$ é massimale di $A\}$) Dunque:
A é regolare $\Leftrightarrow$ A_Q é regolare con Q massimale $\forall Q$ massimale $\overset{\text{Serre}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{gldim}(A_Q) = \dim(A_Q) = ht(Q) < \infty$.
ma $d = \dim A \underset{\text{def.}}{=} \sup_{Q \max} ht(Q) = \sup_{Q \max} \mathrm{gldim}(A) = \mathrm{gldim}(A)$.

11. Define the Koszul complex of a finite sequence of elements in a ring. State how it characterizes regular sequences (without proof) and explain how it can be used to compute the groups $\mathrm{Tor}_i^A(k,k)$ for a regular local ring with residue field k.

- Sia A un anello e $x_1, \dots, x_r \in A$. Allora posso definire la mappa $f: A^r \longrightarrow A$ t.c. $f((a_1, \dots, a_r)) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i$. Definiamo $\underline{x} := (x_1, \dots, x_r)$ e $K(\underline{x})$, il complesso di Koszul di f:

$$\dots \longrightarrow \Lambda^n A^r \xrightarrow{d_f^{n-1}} \Lambda^{n-1} A^r \xrightarrow{d_f^{n-2}} \dots \longrightarrow \Lambda^2 A^r \xrightarrow{d_f^1} A^r \xrightarrow{d_f^0} A$$

dove $d_f^0 = f$ e $d_f^{n-1}(m_1 \wedge \dots \wedge m_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot f(m_i) \cdot (m_1 \wedge \dots \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \wedge \dots \wedge m_n)$
dove $\Lambda^n A^r := A^r \otimes \dots \otimes A^r / \langle m_1 \otimes \dots \otimes m_n \mid \exists 1 \le i \le j \le n : m_i = m_j \rangle$. Denotiamo $m_1 \otimes \dots \otimes m_n$ in $\Lambda^n A^r$ come $m_1 \wedge \dots \wedge m_n$. In particolare (dato che abbiamo A^r) $\Lambda^n A^r$ é libero e per $r=n$ é libero di rango 1.

- Valgono le seguenti 2 proposizioni:
  - $*1$: Se $x_1, \dots, x_r$ é una sequenza regolare in A, allora $K(\underline{x})$ é aciclico in grado > 0.
  - 2: Se $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$ contenuto nell'ideale massimale P di un anello locale Noetheriano A soddisfa che $H_1(K(\underline{x})) = 0$, allora é una sequenza regolare.

si dimostra usando $*1$ perchè $*1$ ci dice che $K(\underline{x})$ é una risoluzione libera dunque proiettiva di A, e poi uso def.

DOVE SI USA NELLA PROP

- Partiamo da questo Corollario: "Se $I = (x_1, \dots, x_r)$ e x_i formano una sequenza regolare allora $\mathrm{Tor}_i^A(A/I, M) \cong H_i(K(\underline{x}) \otimes_A M)$." Ora se ho un anello locale regolare con campo dei residui K, considero P il massimale e un suo sistema minimale di generatori che per caratterizzazione dei regolari locali é anche una sequenza regolare, $P := (x_1, \dots, x_r)$. Allora ponendo $I = P$ e $M = A/P$, abbiamo per il corollario che $\mathrm{Tor}_i^A(K, K) \simeq H_i(K(\underline{x}) \otimes_A K)$. Vediamo chi é il termine a dx:

$C^i(K(\underline{x}) \otimes_A K) = \bigoplus_{m+n=i} K(\underline{x})^m \otimes_A K^n = K(\underline{x})^i \otimes_A K$ e se $a \in K(\underline{x})^i$ cioé $a = a_1 \wedge \dots \wedge a_i$

penso K complesso in grado 0

con $a_j \in A^r$ allora $d_C^i(a \otimes b) = d_{(\underline{x})}^{i-1}(a) \otimes b + (-1)^n a \otimes \overbrace{d^0(b)}^{0} = \left(\sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} \underbrace{f(a_k)}_{\in A} \cdot a_1 \wedge \dots \wedge \hat{a}_k \wedge \dots \wedge a_i \right) \otimes_A b$

$\stackrel{\text{def } \otimes_A}{=} \left(\sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} a_1 \wedge \dots \wedge \hat{a}_k \wedge \dots \wedge a_i \right) \otimes (f(a_k) b) = 0$

per def $f(a_k) \in P$ (é una combinazione lineare di x_i) $\Rightarrow$ in K é 0

Dunque $H_i(K(\underline{x}) \otimes_A K) = C^i(K(\underline{x}) \otimes_A K) = K(\underline{x})^i \otimes_A K$. Ma $K(\underline{x})^i \otimes_A K$ ha dimensione $\dim(K(\underline{x})^i) \cdot \dim(K) = \binom{r}{i} \cdot 1 = \binom{r}{i}$ e é un K-spazio vettoriale (l'operazione con gli scalari é quella ovvia).

12. Construct the derived category of an abelian category as a localization of the homotopy category using the Gabriel–Zisman construction.

- Definiamo prima di tutto un sistema moltiplicativo S come una collezione di morfismi in una categoria $\mathcal{C}$ che soddisfa i seguenti assiomi:

① Tutti i morfismi identità degli oggetti di A sono in S e se $t \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ sono in S allora $s \circ t \in S$;

② Dato $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ e un morfismo $s: A \to A'$ in S, ci sono morfismi $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A',B')$ e $t: B \to B'$ in S che fanno commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, dashed, "t"] \\ A' \arrow[r, dashed, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

Allo stesso modo se sono dati f' e t, possiamo completare con s, f.

Dato un sistema moltiplicativo S di morfismi in una categoria $\mathcal{C}$, costruiamo una categoria $S^{-1}\mathcal{C}$ come segue. Gli oggetti sono gli stessi di $\mathcal{C}$. I morfismi sono le classi di equivalenza delle coppie: $A \xleftarrow{s} A_1 \xrightarrow{f} B$ con $s \in S$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, B)$; con questa relazione di equivalenza: due coppie $A \xleftarrow{s_1} A \xrightarrow{f_1} B$ e $A \xleftarrow{s_2} A_2 \xrightarrow{f_2} B$ sono equivalenti se esiste una terza coppia $A \xleftarrow{s_3} A_3 \xrightarrow{f_3} B$ che fitta nel seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A & A_1 \arrow[l, "s_1"'] \arrow[r, "f_1"] & B \\ A \arrow[u, "id"] \arrow[d, "id"'] & A_3 \arrow[l, "s_3"'] \arrow[r, "f_3"] \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[u, "id"'] \arrow[d, "id"] \\ A & A_2 \arrow[l, "s_2"'] \arrow[r, "f_2"] & B \end{tikzcd}$$

La composizione di morfismi è definita come segue: se $A \xleftarrow{s} A_1 \xrightarrow{f} B$ e $B \xleftarrow{t} B_1 \xrightarrow{g} C$ allora per la proprietà ② del sistema moltiplicativo:

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, dashed, "t'"'] & B_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & C \\ A & A_1 \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] & B & \end{tikzcd}$$

e la composizione è $A \xleftarrow{s \circ t'} A' \xrightarrow{g \circ f'} C$ (effettivamente $s \circ t' \in S$ per hp ① e ② del sistema moltiplicativo).

Definiamo infine un funtore $Q: \mathcal{C} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ che è l'identità sugli oggetti e manda ogni morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ nella classe $A \xleftarrow{id} A \xrightarrow{f} B$. In effetti è un funtore poiché $id_A \xrightarrow{Q} id_A$ e se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ allora $Q(f) = A \xleftarrow{id} A \xrightarrow{f} B$ e $B \xleftarrow{id} B \xrightarrow{g} C$ dunque

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "id"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id"] & C \\ A & A \arrow[l, "id"'] \arrow[r, "f"] & B & \end{tikzcd}$$

cioè la composizione è $A \xleftarrow{id} A \xrightarrow{f \circ g} C = Q(f \circ g)$.

Vediamo ora la seguente:

<u>Proposizione</u>: (Gabriel – Zisman): $S^{-1}\mathcal{C}$ costruita sopra con il funtore Q è la localizzazione di $\mathcal{C}$ rispetto a S.

dimostrazione

Ricordiamo che la localizzazione di $\mathcal{C}$ rispetto a S è definita come quell'unica coppia a meno di isomorfismi $(S^{-1}\mathcal{C}, Q)$ con $\mathcal{C}$ categoria e S collezione di morfismi in $\mathcal{C}$ con la proprietà (†) per la quale valgono le seguenti due proprietà:

1. $\forall s \in S$, $Q(s)$ è un isomorfismo;
2. $\forall F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtore che manda elementi di S in isomorfismi di $\mathcal{D}$ fattorizza unicamente tramite Q

$$\left(\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & S^{-1}\mathcal{C} \arrow[r, dashed] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{D} \\ & {} & \end{tikzcd}\right).$$

Dunque dobbiamo vedere che la coppia da noi costruita ha queste proprietà.

1. Sia $s \in S$ allora $Q(s) = A \xleftarrow{id} A \xrightarrow{s} B$ che ha inversa $B \xleftarrow{s} A \xrightarrow{id} A$ (ben definito perché $s \in S$).
2. Sia $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore che manda $s \in S$ in un isomorfismo. Dunque per avere speranza che fattorizzi tramite un $T: S^{-1}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ deve valere che $F(f) \underset{\text{commutatività}}{=} T \circ Q(f) = T\left(A \xleftarrow{id} A \xrightarrow{f} B\right)$

$\underset{\text{potrei definire}}{=} F(f) \circ F(id)^{-1} = F(f)$ ✓.

potrei definire $T\left(A \xleftarrow{s} A' \xrightarrow{f} B\right) = F(f) \circ F(s)^{-1}$, ben definito perché $F(s)$ isom.

Effettivamente definendolo così questo è un funtore:

- proprietà del funtore: l'identità viene rispettata e se considero la composizione $A \xleftarrow{s} A_1 \xrightarrow{f} B$ e $B \xleftarrow{t} B_1 \xrightarrow{g} C$ questa è mandata in $F(g \circ f') \circ F(s \circ t')^{-1} \overset{\text{def. funtore}}{=} F(g) \circ F(f') \circ F(t')^{-1} \circ F(s)^{-1} =$
  $= F(g) \circ F(t)^{-1} \circ F(f) \circ F(s)^{-1} = T\left(B \xleftarrow{t} B_1 \xrightarrow{g} C\right) \circ T\left(A \xleftarrow{s} A_1 \xrightarrow{f} B\right)$
  applico F al diagramma
  $$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t'"'] & B_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & C \\ A & A_1 \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "f"] & B & \end{tikzcd}$$

- ben definito: se ho un'altro rappresentante della classe di eq. basta applicare F al diagramma:

$$\begin{tikzcd} A & A_1 \arrow[l, "s_1"'] \arrow[r, "f_1"] & B \\ A \arrow[u, "id"] \arrow[d, "id"'] & A_2 \arrow[l, "s_2"'] \arrow[r, "f_2"] \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[u, "id"'] \arrow[d, "id"] \\ A & A_3 \arrow[l, "s_3"'] \arrow[r, "f_3"] & B \end{tikzcd} \longrightarrow \begin{tikzcd} F(A) & F(A_1) \arrow[l, "F(s_1)"'] \arrow[r, "F(f_1)"] & F(B) \\ F(A) \arrow[u, "id"] \arrow[d, "id"'] & F(A_2) \arrow[l, "F(s_2)"'] \arrow[r, "F(f_2)"] \arrow[u] \arrow[d] & F(B) \arrow[u, "id"'] \arrow[d, "id"] \\ F(A) & F(A_3) \arrow[l, "F(s_3)"'] \arrow[r, "F(f_3)"] & F(B) \end{tikzcd}$$

$$T\left(A \xleftarrow{s_1} A_1 \xrightarrow{f_1} B\right) = F(f_1) \circ F(s_1)^{-1} = F(f_3) \circ F(s_3)^{-1} = T\left(A \xleftarrow{s_3} A_3 \xrightarrow{f_3} B\right)$$

□

In particolare sappiamo che la categoria derivata $D(A)$ è la localizzazione della categoria $K(A)$ rispetto alla collezione dei morfismi rappresentati dai quasi-isomorfismi di complessi. In particolare vediamo che i quasi isomorfismi sono un sistema moltiplicativo, verificando le due proprietà

1. ovvio
2. Ho $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & B \\ A' & \end{tikzcd}$ con s q. iso. Allora ho $\triangle$ esatto

$$\begin{tikzcd} C(s)[-1] \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A' \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C(s) \arrow[d, equal] \\ C(s)[-1] \arrow[r, "f \circ g"] & B \arrow[r] & C(f \circ g) \arrow[r] & C(s) \end{tikzcd}$$

quasi iso. $\Leftrightarrow$ cono aciclico

13. Construct the equivalence between the derived category of bounded above complexes and the homotopy category of bounded above complexes with projective terms in an abelian category, assuming it has enough projectives. (Proofs of lemmas not needed.)

Partiamo da due fatti:

(1) Se $\mathcal{A}$ ha abbastanza proiettivi allora ogni complesso $C^\bullet$ in $C^-(\mathcal{A})$ e' quasi isomorfo a un complesso $P^\bullet$ con termini proiettivi

(2) Ogni quasi-isomorfismo in $K^-(P)$ e' un isomorfismo

$K^-(A)$ é l'immagine essenziale di $C^-(A)$ cioé $K^-(A) := \mathrm{Imm}\, i|_{C^-(A)} = \{ D^\bullet \in K(A) \mid i(D^\bullet) = C^\bullet \text{ con } C^\bullet \in C^-(A) \}$

Vale che:

inclusione

<u>Proposizione</u>: Se $\mathcal{A}$ ha abbastanza proiettivi il funtore composto: $K^-(P) \longrightarrow K^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{Q} D^-(\mathcal{A})$ induce un'equivalenza di categorie tra $K^-(P)$ e $D^-(\mathcal{A})$.

<u>dimostrazione</u>

Per prima cosa vediamo che $K^-(P) \simeq S^{-1}K^-(P)$: infatti $K^- \xrightarrow{id} K^-$ manda quasi iso. in iso per fatto (2) dunque fattorizza tramite $S^{-1}K^-(P)$: $K^-(P) \xrightarrow{Q} S^{-1}K^-(P) \xrightarrow{T} K^-(P)$ dunque $T \circ Q = id_{K^-}$.

$$\begin{tikzcd} K^-(P) \arrow[r, "Q"] \arrow[rr, bend right, "id_{K^-}"'] & S^{-1}K^-(P) \arrow[r, "T"] & K^-(P) \end{tikzcd}$$

Dunque devo trovare la quasi inversa a $S^{-1}K^-(P) \xrightarrow{T} D^-(\mathcal{A})$.

$D^-(A)$ é l'imm. ess. di $C^-(\mathcal{A})$ tramite l'inclusione

Prendiamo un oggetto $A^\bullet$ in $D^-(A)$, a meno di isomorfismo con un rappresentante della sua classe, possiamo supporre che $A^\bullet \in C^-(\mathcal{A})$ e dunque applicando il fatto (1) si ha che $\exists\, \phi_A : P_A^\bullet \xrightarrow{\sim} A^\bullet$ in $D^-(A)$ con $P_A^\bullet$ proiettivo. Mando $A^\bullet \longrightarrow P_A^\bullet$.

$$\begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[r, "p"] & B^\bullet \\ P_A^\bullet \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, dashed] & P_B^\bullet \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Prendiamo ora un morfismo $p: A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ in $D^-(\mathcal{A})$, con lo stesso ragionamento $\phi_B^{-1} \circ p \circ \phi_A$ e' un morfismo $P_A^\bullet \longrightarrow P_B^\bullet$ in $D^-(A)$. Questa mappa ammette un rappresentante in $S^{-1}K^-(A)$ $P_A^\bullet \xleftarrow{s} C^\bullet \xrightarrow{f} P_B^\bullet$ con s quasi iso. Sempre a meno di iso. $C^\bullet \in C^-(A)$ e dunque per fatto (1) $\exists\, q.$ iso. $P_C^\bullet \xrightarrow{t} C^\bullet$ con $P_C^\bullet$ oggetto in $K^-(P)$. Allora $P_A \xleftarrow{s \circ t} P_C^\bullet \xrightarrow{f \circ t} P_B^\bullet$ rappresenta sempre $\phi_B^{-1} \circ p \circ \phi_A$ in $D^-(\mathcal{A})$ ma ora $s \circ t$ e $f \circ t$ sono morfismi in $K^-(P)$ dunque un morfismo di $S^{-1}K^-(P)$ (che non dipende dalla scelta di t).

Dunque mando $p \longmapsto (s \circ t,\, f \circ t)$.