



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

## Colorazioni di Nodi tramite Quandle

TESI DI LAUREA TRIENNALE  
IN MATEMATICA

CANDIDATO  
David Vencato

RELATORE  
Prof. Roberto Frigerio

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Equivalenze di nodi</b>	<b>4</b>
1.1 Prime definizioni . . . . .	4
1.2 Mosse di Reidemeister . . . . .	8
<b>2 Invarianti</b>	<b>13</b>
2.1 Presentazione di Wirtinger . . . . .	13
2.2 Colorazioni e Quandles . . . . .	15
2.3 Esistenza delle $p$ -colorazioni . . . . .	21
2.4 Linking number . . . . .	26
<b>3 Nodi satellite</b>	<b>29</b>
3.1 Superficie di Seifert . . . . .	29
3.2 Caratterizzazione del linking number . . . . .	30
3.3 Longitudini e meridiani . . . . .	31
3.4 Nodi satellite . . . . .	34
<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>

# Introduzione

Un *nodo* è l'immagine di un embedding lineare a tratti da  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{S}^3$ ; un *link* di  $m$  componenti è l'unione di  $m$  nodi disgiunti. Due link sono equivalenti se esiste un omeomorfismo dalla sfera tridimensionale in sé che mappa un link nell'altro. Per studiare se due link sono equivalenti introduciamo i seguenti tre invarianti: il *gruppo di un nodo*, il numero di *colorazioni* tramite *quandle* e il *linking number*. In particolare ci soffermiamo sul cosiddetto *quandle diedrale*  $R_n$ , le cui colorazioni coincidono con le  $n$ -colorazioni introdotte da Ralph Fox a metà degli anni '50 e troviamo una condizione necessaria e sufficiente per la  $p$ -colorabilità di un link con  $p$  primo dispari. Introduciamo infine una famiglia di nodi, detti *nodi satellite*, per mostrare i limiti delle colorazioni con  $R_p$ . In particolare analizziamo il nodo *doppio di Whitehead del nodo trifoglio* che scopriamo non essere  $p$ -colorabile per nessun primo  $p$ . Per tale nodo le  $p$ -colorazioni non sono pertanto utili allo scopo di distinguerlo dal nodo banale.

Nel primo capitolo confrontiamo varie nozioni di equivalenza tra nodi e introduciamo il concetto di *diagramma* associato a un nodo. Quest'ultimo è una proiezione regolare su un piano con il dato degli incroci. Diremo che due diagrammi sono equivalenti se possiamo ottenerne uno dall'altro tramite mosse semplici dette di Reidemeister. Mostriamo in particolare il teorema di Reidemeister il quale afferma che due link sono equivalenti se e soltanto se lo sono tutti i loro diagrammi.

Nel secondo capitolo definiamo il *gruppo di un nodo*  $K$  come  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ . Tale gruppo risulta essere un'invariante per la nozione di equivalenza tra nodi introdotta e ammette una presentazione canonica con generatori e relazioni chiamata *presentazione di Wirtinger*, calcolata a partire da un diagramma del nodo. Tale invariante ci permette di distinguere il nodo trifoglio dal nodo banale. Introduciamo il concetto di quandle. Un quandle  $Q = (C, *)$  è un insieme con un'operazione binaria  $*$  che verifica particolari proprietà. Una colorazione tramite quandle è una funzione dagli archi del nodo al quandle che codifica algebricamente gli incroci del nodo. Il numero di colorazioni non banali tramite quandle  $col_Q$  è un'invariante per link. Scegliendo come quandle  $R_n = (\mathbb{Z}_n, *)$  con  $a * b = 2a - b \pmod{n}$ , detto quandle diedrale, mostriamo che l'esistenza di una colorazione non banale tramite  $R_p$ , per  $p$  primo dispari, è equivalente alla risoluzione di un sistema lineare in  $\mathbb{Z}_p$ . Ciò ci permette di distinguere il nodo banale (non  $p$ -colorabile per nessun primo  $p$ ), il nodo trifoglio (3-colorabile ma non 5-colorabile) e il nodo figura a otto (5-colorabile). Con lo stesso metodo distinguiamo il link di Whitehead dall'unlink di due componenti. Introduciamo infine il *linking number*  $lk(J, K)$  tra due nodi  $J$  e

$K$  che è un'invariante per link con esattamente due componenti ( $J$  e  $K$ ) e ne vediamo alcune proprietà collegate alla *somma connessa* di nodi.

Nel terzo capitolo dimostriamo l'esistenza della superficie di Seifert dato un diagramma di un nodo  $K$  e diamo una caratterizzazione del  $lk(J, K)$  legata a  $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus J)$ . Tale risultato permette di dare una definizione coerente di *meridiano* e *longitudine standard* di un toro immerso in  $\mathbb{S}^3$  e di definire la famiglia dei nodi satellite che sono ottenuti partendo da un omeomorfismo tra tori pieni  $T$  e  $T'$  che manda la longitudine standard di  $\partial T$  in quella di  $\partial T'$ . Analizziamo una sottofamiglia dei nodi satellite che è quella dei *doppi di Whitehead* e in particolare il nodo doppio di Whitehead del trifoglio. Utilizzando il criterio di colorazione con quandle diedrali descritto nel capitolo 2 mostriamo che tale nodo non è colorabile per nessun primo  $p$  e quindi l'invariante  $col_{R_p}$  non ci permette di concludere la non equivalenza con il nodo banale.

# Capitolo 1

## Equivalenze di nodi

In questo primo capitolo daremo le nozioni di base della teoria dei nodi nel contesto "lineare a tratti". Vedremo una prima definizione di equivalenza tra nodi che si legherà con il concetto di isotopia ambiente e di  $\Delta$ -mossa. Introduciamo il concetto di diagramma di un nodo e ne proveremo l'esistenza. In particolare analizzeremo specifiche "azioni locali" sul diagramma, chiamate mosse di Reidemeister. Grazie all'omonimo teorema, la cui dimostrazione è alla fine del capitolo, capiremo l'importanza delle mosse di Reidemeister per lo sviluppo della teoria.

### 1.1 Prime definizioni

**Definizione 1.1.1.** Siano  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e  $X$  uno spazio topologico. Definiamo *curva* una funzione  $\gamma : I \rightarrow X$  continua. Diciamo inoltre che una curva  $\gamma$  è *chiusa* se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e *semplice* se  $\gamma(x) \neq \gamma(y)$  con almeno uno tra  $x$  e  $y$  appartenente a  $(a, b)$  e  $x \neq y$ .

**Definizione 1.1.2.** Un *nodo* è l'immagine in  $\mathbb{S}^3$ , o in  $\mathbb{R}^3$ , di una curva semplice, chiusa, lineare a tratti. Chiamiamo *link* di  $m$  componenti l'unione di  $m$  nodi disgiunti.

*Osservazione 1.1.3.* un nodo definisce in maniera naturale un *embedding* da  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{S}^3$  lineare a tratti. Infatti per definizione la mappa che lo definisce è bigettiva e continua e inoltre ha come dominio uno spazio compatto e ha valori in uno spazio  $T_2$  perciò è anche chiusa.

Tutte le richieste fatte nella definizione traducono un'idea informale che ognuno di noi ha quando sente parlare di nodi.

Pensiamo infatti a un lungo filo di rame nello spazio. La richiesta di *curva semplice* ci permette di piegare e attorcigliare il filo come vogliamo senza però poter saldare insieme due punti che non siano gli estremi; una volta ottenuta la forma voluta la condizione di *curva chiusa* ci dice proprio di fondere insieme le due estremità.

La proprietà di *linearità a tratti*, invece, ci dice che la curva è composta da un numero finito di segmenti posizionati uno dopo l'altro, dove il concetto di "dritto" nel caso di  $\mathbb{S}^3$

è legato alla struttura di uno dei 3-simplessi che costituiscono una triangolazione della sfera tridimensionale. Questa condizione di finitezza esclude la possibilità che un nodo abbia un numero infinito di attorcigliamenti che diventano sempre più piccoli per poi convergere a un punto (questo tipo di nodo è detto *wild* ma non verrà trattato).

**Definizione 1.1.4.** Fissiamo un'orientazione di  $\mathbb{S}^1$  data dalla sua struttura di varietà differenziabile. Sia  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  che definisce un nodo  $L$  e siano  $t_i \in \mathbb{S}^1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tale che  $\gamma(t_i) = v_i$  con  $v_i$  vertici di  $L$ . Definiamo l'*orientazione* di  $L$  l'orientazione indotta da  $\gamma|_{\mathbb{S}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_n\}} : \mathbb{S}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_n\} \rightarrow L \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$  vista come mappa tra varietà differenziabili. Diciamo che un link è orientato se ogni sua componente connessa è orientata.

**Definizione 1.1.5.** Due link  $L_1$  e  $L_2$  in  $\mathbb{S}^3$  si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo lineare a tratti e che preserva l'orientazione  $\alpha : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tale che  $\alpha(L_1) = L_2$ . Nel caso in cui i link siano orientati richiediamo che  $\alpha$  preservi l'orientazione dei link.

*Osservazione 1.1.6.* La restrizione di una tale  $\alpha$  definisce un omeomorfismo sui complementari di  $L_1$  e  $L_2$  in  $\mathbb{S}^3$ .

*Osservazione 1.1.7.* Essere *equivalenti* definisce una relazione di equivalenza nell'insieme dei link.

Cerchiamo adesso di trovare altre condizioni di equivalenza tra link che risulteranno essere più utili nei prossimi paragrafi. La prima idea è quella di introdurre il concetto di *isotopia*.

**Definizione 1.1.8.** Siano  $f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  due embedding lineari a tratti. Si dice che sono *isotopi* se esiste:

$$F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^3 \times I \text{ con } F(x, t) = (f_t(x), t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

tale che  $F$  sia un embedding lineare a tratti,  $f(x, 0) = f_0(x)$  e  $f(x, 1) = f_1(x)$ .

Un tentativo potrebbe essere quello di dire che due link sono equivalenti se le mappe che li definiscono sono isotope (richiedendo anche che l'isotopia conservi l'orientazione nel caso in cui i link siano orientati).

Questo approccio però contrasta con l'idea intuitiva che abbiamo di nodi equivalenti; infatti si dimostra che qualunque nodo è isotopo al nodo banale e che quindi l'isotopia riesce a "sciogliere" ogni tipo di intreccio.

Abbiamo bisogno quindi di una definizione più forte, che non permetta certi tipi di deformazione.

**Definizione 1.1.9.** Siano  $f_0, f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$  due embedding lineari a tratti. Si dice che sono *ambiente isotopi* se esiste:

$$H : \mathbb{S}^3 \times I \rightarrow \mathbb{S}^3 \times I \text{ con } H(x, t) = (h_t(x), t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

tale che  $H$  sia un embedding lineare a tratti,  $f_1 = h_1 \circ f_0$  e  $h_0 = id_{\mathbb{S}^3}$ .

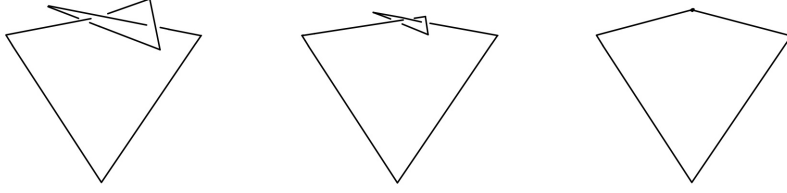


Figura 1.1 La figura mostra l'idea di come l'intreccio del nodo possa essere deformato in maniera continua tramite un'isotopia fino a ottenere un punto.

*Osservazione 1.1.10.* Le definizioni di *isotopia lineare a tratti* e *isotopia ambiente lineare a tratti* possono essere date per tutte le mappe che hanno come dominio e codominio spazi dove è ben definito il concetto di *linearità*. Ad esempio per tutti i poliedri compatti che hanno una struttura simpliciale finita.

Notiamo subito che essere ambiente isotopi implica essere isotopi, infatti se  $H$  è un'isotopia ambiente allora  $F(x, t) = H(h_t \circ f_0(x), t)$  è un'isotopia tra  $f_0$  e  $f_1$ .

La differenza fondamentale è la seguente: nell'isotopia si richiede che  $f_0(\mathbb{S}^1)$  si deformi in maniera continua su  $f_1(\mathbb{S}^1)$  ma non abbiamo nessun controllo sul complementare di  $f_t(\mathbb{S}^1)$ ; nell'isotopia ambiente, invece, "obblighiamo" tutto  $\mathbb{S}^3$  a deformarsi in modo continuo insieme al *link*.

**Definizione 1.1.11.**  $B$  è una  $n$ -palla combinatoria se è linearmente a tratti omeomorfa a un  $n$ -simpleso.

Enunciamo adesso un noto teorema di cui faremo uso nelle dimostrazioni successive, noto come Teorema di Alexander. Una sua dimostrazione si può trovare in [4].

**Teorema 1.1.12.** Sia  $i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$  un embedding lineare a tratti. Allora

$$\mathbb{S}^3 = B_1 \cup B_2, \quad i(\mathbb{S}^2) = B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$$

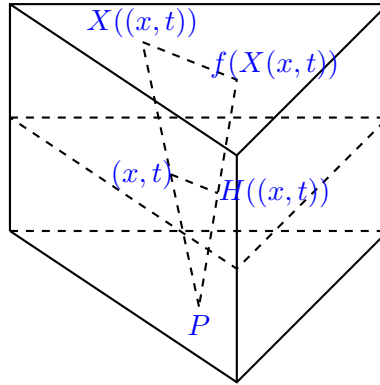
dove  $B_1$  e  $B_2$  sono 3-palle combinatorie.

**Lemma 1.1.13.** Sia  $f : B \rightarrow B$  un omeomorfismo lineare a tratti dove  $B$  è una  $n$ -palla combinatoria e  $f$  tiene fisso il bordo di  $B$ . Allora esiste un'isotopia ambiente lineare a tratti tra  $f$  e l'identità.

*Dimostrazione.* Definiamo la mappa  $H$  su  $\partial(B \times I)$ .

$$H : \partial(B \times I) \rightarrow B \times I, \quad H((x, t)) = \begin{cases} (x, t), & \text{se } t = 0 \\ (x, t), & \text{se } x \in \partial B \\ (f(x), t), & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Adesso sia  $(x, t) \in B \times I$  con  $t > 0$ . Fissiamo un punto  $P \in B \times 0$ ; allora considero il segmento che congiunge  $P$  con  $(x, t)$ , il suo prolungamento intersecherà  $\partial(B \times I)$  in un unico punto  $X((x, t))$ . Estendiamo dunque linearmente  $H$  su questi segmenti in modo tale che  $H$  mandi  $(x, t)$  in  $(x', t)$ , punto appartenente al segmento di estremi  $P$  e  $f(X(x, t))$ .



□

Grazie a questa proposizione conosciuta anche col nome di "Alexander trick", siamo ora in grado di enunciare il seguente risultato.

**Teorema 1.1.14.** *Siano  $L_0$  e  $L_1$  due nodi orientati definiti rispettivamente dalle mappe  $f_0$  e  $f_1$ . Allora  $L_0$  e  $L_1$  sono equivalenti se e soltanto se  $f_0$  e  $f_1$  sono ambiente isotopi.*

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ : Sia  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  l'omeomorfismo dato dall'ipotesi di equivalenza. Per prima cosa dimostriamo che esiste un'isotopia ambiente  $H(x, t) = (h_t(x), t)$  di  $\mathbb{S}^3$  tale che  $h_1 f$  lascia invariato un 3-simplello  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ . Se  $f$  ha un punto fisso, scegliamo lui come  $P_0$ , altrimenti sia  $P_0$  un punto interno di un 3-simplello  $[s^3]$  in  $\mathbb{S}^3$ . C'è un'isotopia ambiente di  $\mathbb{S}^3$  che lascia fisso  $\mathbb{S}^3 - [s^3]$  e che porta  $P_0$  su ogni altro punto interno di  $[s^3]$ . Se  $[s^3]$  e  $[s^3]'$  hanno una 2-faccia in comune allora esiste un'isotopia ambiente che porta un punto interno  $P_0$  di  $[s^3]$  su un punto interno  $P'_0$  di  $[s^3]'$  e che è l'identità sul complementare di  $[s^3] \cup [s^3]'$ . Dunque c'è un'isotopia ambiente  $H^0$  con  $h_1^0 f(P_0) = P_0$ , dato che dati due 3-simplello  $[s^3], [s^3]'$  esiste una catena di 3-simplello  $\{[s^3] = [s^3]_0, [s^3]_1, \dots, [s^3]_n, [s^3]' = [s^3]_{n+1}\}$  tale che  $[s^3]_i$  e  $[s^3]_{i+1}$  hanno una 2-faccia in comune  $\forall i = 0, \dots, n$ . Prendiamo quindi  $P_1 \neq P_0$  nel simplello stellato di  $P_0$  (per definizione costituito da tutti i segmenti in  $[s^3]$  contenenti  $P_0$ ). Ora  $h_1^0 f(P_1) = Q$  e, a meno di restrizioni sul dominio, per lo stesso argomento usato in precedenza esiste un'isotopia ambiente  $H^1$  tale che  $h_1^1 h_1^0 f$  lascia fisso i punti  $P_0$  e  $P_1$  e dunque l'1-simplello  $[P_0, P_1]$ . Nel medesimo modo troviamo  $H^2$  isotopia ambiente con  $h_1^2 h_1^1 h_1^0 f$  che fissa il 2-simplello  $[P_0, P_1, P_2]$ . A questo punto, dato che  $f$  preserva l'orientazione, se consideriamo  $P_3 \neq [P_0, P_1, P_2]$  ma nel simplello stellato di  $[P_0, P_1, P_2]$ , allora  $P_3$  sarà



mandato da  $h_1^2 h_1^1 h_1^0 f$  in un punto  $P'_3$  appartenente al semi-spazio contenente il piano con base  $P_0, P_1, P_2$ . Questo ci assicura l'esistenza dell'isotopia ambiente  $H^3$  tale che  $h_1^3 h_1^2 h_1^1 h_1^0 f$  fissa  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ . Dunque  $H = H^3 H^2 H^1 H^0$  è un'isotopia ambiente lineare a tratti che fissa un 3-simplex. Per il Teorema 1.1.12 il complementare di  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  è la parte interna di una 3-palla combinatoria e per il Lemma 1.1.13 esiste un'isotopia ambiente  $J$  che connette  $h_1 f$  con l'identità di  $\mathbb{S}^3$ . Dunque l'isotopia cercata è la composizione  $J \circ H$  infatti da  $j_1 h_1 f = id$  si ha proprio  $j_1 h_1 f_1 = j_1 h_1 f f_0 = f_0$ .

$\Leftarrow$ : Sia  $H(x, t) = (h_t(x), t)$  l'isotopia ambiente allora  $h_1$  è l'omeomorfismo cercato.  $\square$

## 1.2 Mosse di Reidemeister

In questa sezione daremo un altro modo per vedere l'equivalenza tra nodi, più intuitivo degli altri due, basato sulle cosiddette "*Mosse di Reidemeister*".

**Definizione 1.2.1.** Sia  $L$  un nodo in  $\mathbb{R}^3$  e  $u$  un suo segmento. Sia  $D$  un triangolo in  $\mathbb{R}^3$  tale che  $\partial D = u \cup v \cup w$  dove  $u, v, w$  sono le 1-facce di  $D$ . Se  $D \cap L = u$  allora  $L' = (L \setminus u) \cup v \cup w$  definisce un altro nodo. Diciamo che  $L'$  si ottiene da  $L$  tramite una  $\Delta$ -mossa. Se  $L$  è orientato allora  $L'$  deve mantenere l'orientazione indotta da  $L - u$ . Il processo inverso è denotato  $\Delta^{-1}$ .

**Definizione 1.2.2.** Due nodi si dicono *equivalenti per mosse* se c'è una sequenza finita di  $\Delta^{\pm 1}$ -mosse che trasformano un nodo nell'altro.

**Teorema 1.2.3.** Due nodi  $L_0$  e  $L_1$  orientati sono equivalenti se e soltanto se sono equivalenti per mosse.

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ : Sia  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  l'omeomorfismo dato dall'ipotesi di equivalenza. La costruzione fatta nel Teorema 1.1.14 ci fornisce un altro omeomorfismo lineare a tratti che preserva l'orientazione  $g : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  tale che  $g(L_0) = L_1$  e  $hg$  fissa un 3-simplex  $[s^3]$  scelto al di fuori di un intorno di  $L_0$  e  $L_1$ . Sia quindi  $P$  un punto interno di  $[s^3]$  e consideriamo  $\mathbb{S}^3 \setminus P$  come lo spazio  $\mathbb{R}^3$ . Come possiamo evincere dalla Figura 1.2 è possibile traslare e contrarre un nodo tramite una successione finita di  $\Delta$ -mosse. Supponiamo quindi sia  $\tau$  la composizione di una traslazione e di una contrazione tale che  $\tau(L_0)$  sia contenuto in  $[s^3] - P$ . Vogliamo ottenere la tesi dimostrando che  $\tau(L_0)$  è isotopo per mosse a  $L_1$ . Sia  $\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'omeomorfismo lineare a tratti indotto da  $hg$ . Vale che  $\beta(L_0) = L_1$ ,  $\beta(\tau(L_0)) = \tau(L_0)$ . Dunque se  $T_i$  è la successione di triangoli che serve per portare  $L_0$  in  $\tau(L_0)$  tramite  $\Delta$ -mosse allora  $\beta(T_i)$  è la successione di triangoli che definisce l'isotopia per mosse tra  $L_1$  e  $\tau(L_0)$ .

$\Leftarrow$ : Sia  $T$  il 2-simplex che definisce una certa  $\Delta$ -mossa. Consideriamo un intorno  $U$  di  $T$  tale per cui la sua chiusura sia una varietà topologica con bordo e il bordo stesso intersechi esattamente due punti del nodo. Allora è possibile costruire un omeomorfismo lineare a tratti tale che in  $U$  produca la  $\Delta$ -mossa e nel complementare sia l'identità.  $\square$

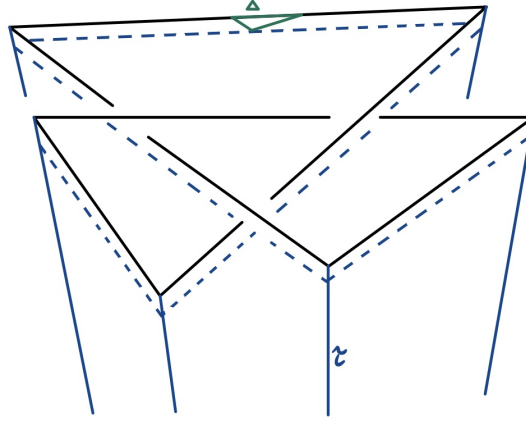


Figura 1.2

Rappresentare un nodo in  $\mathbb{R}^3$  è in generale complicato, per questo è utile proiettare il nodo su un piano  $E$  di  $\mathbb{R}^3$  in modo che la proiezione  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  racchiuda tutti i dati che servono per descrivere completamente il nodo. Per questo la mappa  $p$  deve avere certe caratteristiche.

**Definizione 1.2.4.** Sia  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  una proiezione del nodo  $L$  sul piano  $E$  e sia  $P \in p(L)$ . Diciamo che  $P$  è un *punto multiplo* se la sua preimmagine contiene più di un punto di  $L$ .

**Definizione 1.2.5.** Una proiezione  $p$  del nodo  $L$  si dice *regolare* se:

1. i punti multipli sono un insieme finito  $\{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  e ogni punto multiplo è un *punto doppio* cioè la preimmagine di  $P_i$  contiene due punti di  $L \forall i$ ;
2. nessun vertice di  $L$  può avere come immagine un punto doppio.

**Definizione 1.2.6.** Sia  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  una proiezione regolare del nodo  $L$  sul piano  $E$ . Allora  $p$  è detta *diagramma di  $L$*  se in ogni punto doppio è contrassegnato l'incrocio dei lati e nel caso in cui il nodo sia orientato la proiezione eredita l'orientazione (di solito contrassegnata con una freccia), vedi Figura 1.3.

La seguente proposizione ci assicura che dato un nodo è sempre possibile costruire un suo diagramma.

**Proposizione 1.2.7.** *L'insieme delle proiezioni regolari di un nodo è aperto e denso nello spazio di tutte le proiezioni.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un nodo  $L$  nello spazio  $\mathbb{R}^3$ . Data una sua proiezione su un piano  $\pi$  possiamo identificare questa con un vettore unitario perpendicolare a  $\pi$ . Dunque

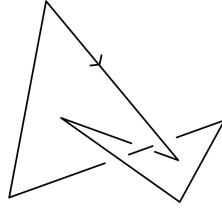
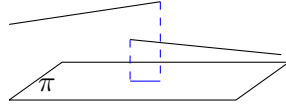


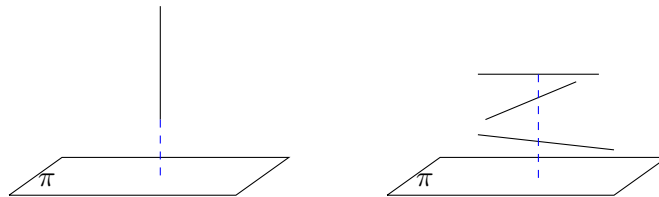
Figura 1.3 Esempio di un diagramma di un nodo

lo spazio delle proiezioni può essere visto come la sfera  $\mathbb{S}^2$  con la topologia indotta. Vediamo le proiezioni non regolari a quali punti della sfera corrispondono, analizzando caso per caso:

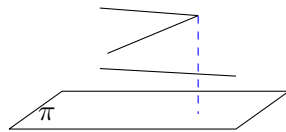
1. *i punti multipli sono un insieme infinito.* Allora si ha come condizione necessaria che due lati del nodo e il vettore perpendicolare al piano di proiezione siano complanari. In questo caso le proiezioni non regolari sono curve chiuse (incluse in cerchi massimi) di  $\mathbb{S}^2$ ;



2. *esiste un punto multiplo che non è doppio,* allora ci sono due casi possibili. Il primo è che esista un lato che ha come immagine un solo punto e questo accade quando il piano della proiezione è perpendicolare al lato. Quindi, dato un lato, le proiezioni non regolari di questo tipo sono rappresentate da due punti antipodali di  $\mathbb{S}^2$ . Il secondo è che la controimmagine del punto multiplo sia composta da  $n$  punti appartenenti a  $n$  lati distinti del nodo con  $n \geq 3$ . Allora le proiezioni non regolari sono individuate, come prima, da due punti antipodali.



3. *esiste un vertice che ha come immagine un punto doppio.* Allora deve essere che il vertice, un lato del nodo e un vettore perpendicolare al piano della proiezione sono complanari e dunque siamo nello stesso caso del primo punto.



Dunque le proiezioni regolari sono il complementare di un insieme finito (ricordiamo che i nodi che stiamo considerando hanno un numero finito di lati e vertici) di curve chiuse e punti, quindi sono un aperto e un denso di  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

Lo scopo da ora in avanti è quello di mettere in relazione particolari deformazioni sui diagrammi con il concetto di equivalenza tra i nodi.

**Definizione 1.2.8.** Sia  $L$  un nodo e consideriamo un suo diagramma. Si definiscono *mosse di Reidemeister*  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e le loro inverse  $\Omega_i^{-1}$  una delle "azioni locali" in Figura 1.4.

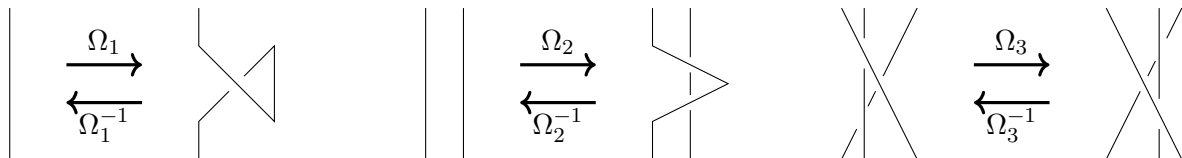


Figura 1.4 Mosse di Reidemeister

**Definizione 1.2.9.** Due diagrammi sono *equivalenti* se si possono ottenere uno dall'altro attraverso una sequenza finita di mosse di Reidemeister.

**Teorema 1.2.10.** Due nodi sono *equivalenti* se e soltanto se tutti i loro diagrammi sono *equivalenti*.

*Dimostrazione.* Per prima cosa mostriamo che due diagrammi riferiti allo stesso nodo sono equivalenti. Usando lo stesso argomento della Proposizione 1.2.7, siano  $p_1$  e  $p_2$  due punti di  $\mathbb{S}^2$  che rappresentano due proiezioni regolari del nodo e sia  $I$  l'insieme delle curve e punti rappresentanti le proiezioni non regolari; allora colleghiamo  $p_1$  e  $p_2$  con un cammino che interseca ogni curva di  $I$  al più in un solo punto e evita i punti isolati. Vediamo come costruire un tale cammino. Sia  $p$  un punto di  $\mathbb{S}^2$  diverso da  $p_1$  e  $p_2$  e che non stia in  $I$  e consideriamo  $\mathbb{S}^2 - p$  come  $\mathbb{R}^2$ . Allora i cerchi di raggio massimo contenenti le curve di  $I$  diventano nel piano un numero finito di rette  $r_i$  per  $i = 1, \dots, n$ . Collegiamo quindi  $p_1$  e  $p_2$  con due segmenti tali che i coefficienti angolari delle rette su cui giacciono sono diversi dai coefficienti angolari di  $r_i$  per ogni  $i$  (esistono data la finitezza delle curve di  $I$ ). Dunque questo cammino  $\gamma$  intersecherà ogni retta  $r_i$  al più in un solo punto. Inoltre se questo cammino interseca i punti isolati  $q_j \in I$  per  $j = 1, \dots, m$  basta considerare un  $\epsilon$  abbastanza piccolo tale che il bordo delle palle aperte

di centro  $q_j$  e raggio  $\epsilon$  non intersecano  $I$ . Quindi sostituiamo i tratti di intersezione tra  $\gamma$  e  $B_\epsilon(q_j)$  con un opportuno tratto del bordo della palla stessa. Questa curva ha le caratteristiche cercate. Ora muoversi lungo il cammino significa deformare la proiezione in maniera continua, quindi ad ogni istante possono succedere due cose: il cammino non interseca  $I$  e dunque il diagramma si sta deformando ma senza cambiare la sua struttura rispetto all'istante precedente; oppure interseca  $I$  e allora la proiezione cambierà secondo una mossa di Reidemeister. In particolare ogni singolarità può essere vista come preciso "istante" di una  $\Omega_i^{\pm 1}$ -mosse su  $p_1$ . Vediamo un esempio esplicativo in Figura 1.5: durante una mossa di Reidemeister del primo tipo si possono avere due punti di singolarità (in questo caso si hanno infiniti punti multipli e un vertice che è punto doppio) che corrispondono a un punto di  $I$  in  $\mathbb{S}^2$ .

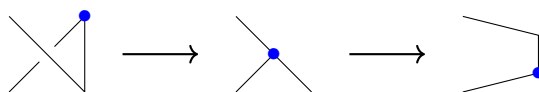


Figura 1.5

Resta da dimostrare che fissati una proiezione e due nodi equivalenti allora anche i loro diagrammi sono equivalenti. Grazie al Teorema 1.2.3 è sufficiente mostrare che ogni  $\Delta^{\pm 1}$ -mossa induce una  $\Omega_i^{\pm 1}$ -operazione sul diagramma  $D$ . Sia  $T$  il triangolo che definisce la  $\Delta$ -mossa allora possiamo supporre che esista una proiezione  $\pi$  tale che  $\pi(T) =: \tilde{T}$  sia un triangolo in  $\mathbb{R}^2$ . Allora può accadere che  $\tilde{T}$  non intersechi il diagramma e quindi è come se non si fosse applicata nessuna mossa di Reidemeister; oppure, a meno di decomporre la  $\Delta$ -mossa iniziale in un numero finito di  $\Delta$ -mosse lungo triangoli più piccoli, possiamo supporre che l'intersezione tra  $\tilde{T}$  e  $D$  contenga al più un solo incrocio o vertice del nodo proiettato. Ci sono quindi tre tipologie di casi da analizzare, riportati in Figura 1.6, che danno rispettivamente le mosse di Reidemeister del primo, secondo e terzo tipo.

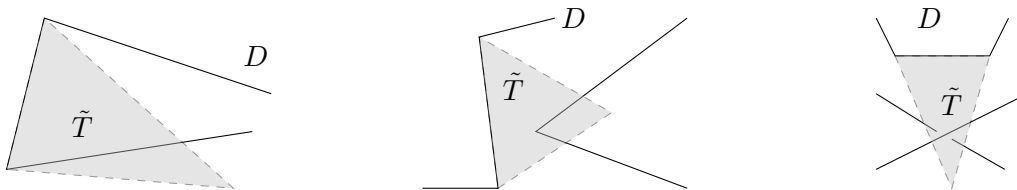


Figura 1.6

□

## Capitolo 2

# Invarianti

Nel capitolo precedente abbiamo visto varie definizioni di equivalenza tra nodi che si sono rivelate essere la stessa relazione. In questo secondo capitolo, invece, ci occuperemo di tre invarianti che daranno condizioni necessarie affinché due nodi siano equivalenti. Svilupperemo, in particolare, la teoria dei quandle. Quest'ultimi daranno una "traduzione" algebrica del problema di equivalenza tra link e ne vedremo alcune applicazioni.

### 2.1 Presentazione di Wirtinger

**Definizione 2.1.1.** Sia  $L$  un nodo (o un link) in  $\mathbb{R}^3$ . Si definisce *gruppo del nodo* il gruppo fondamentale del suo complementare cioè  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ . Per l'Osservazione 1.1.6 il gruppo di un nodo è un suo invariante.

*Osservazione 2.1.2.* Considerare il nodo in  $\mathbb{R}^3$  o in  $\mathbb{S}^3$  non cambia nulla per il calcolo del gruppo infatti l'inclusione tra i complementari dei due spazi induce un isomorfismo nei gruppi fondamentali.

Per quanto detto all'inizio è utile avere un metodo standard per poter calcolare il gruppo di un nodo. Il seguente teorema ci dà un risultato proprio in questo senso.

**Teorema 2.1.3.** Sia  $L$  un nodo (o un link) in  $\mathbb{R}^3$  e fissiamo un suo diagramma. Chiamiamo  $\sigma_i$  con  $i = 1, \dots, n$  gli archi continui che definiscono il diagramma. Allora il gruppo del nodo ammette la seguente presentazione, chiamata *presentazione di Wirtinger*:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle.$$

L'arco  $\sigma_i$  corrisponde al generatore  $s_i$  mentre un incrocio di caratteristica  $\eta_j$  come in Figura 2.1 definisce la relazione:

$$r_j = s_j s_i^{-\eta_j} s_k^{-1} s_i^{\eta_j}.$$

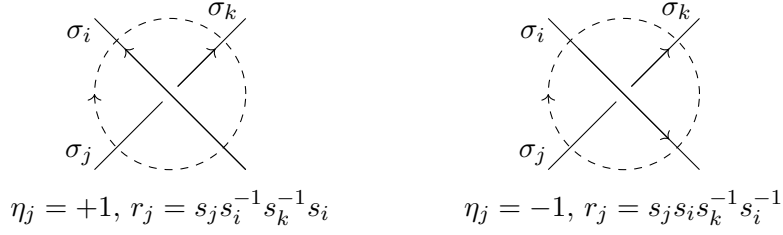


Figura 2.1 I due possibili incroci in base all'orientazione

*Dimostrazione.* Per prima cosa diamo un'orientazione al link. Siano quindi gli  $\alpha_i$  i tratti di curva in  $\mathbb{R}^3$  che definiscono i  $\sigma_i$  nel diagramma del link. Allora possiamo supporre senza perdita di generalità che ogni  $\alpha_i$  sia composto da una spezzata che giace tutta nel piano  $\{z = 1\}$  e agli estremi di questa due segmenti paralleli all'asse  $z$  che scendono fino a  $\{z = 0\}$ . Inoltre  $\alpha_i$  è collegato a  $\alpha_{i+1}$  da un segmento  $\beta_j$  che giace nel piano  $\{z = 0\}$  e che ha come estremi il punto finale di  $\alpha_i$  e quello iniziale di  $\alpha_{i+1}$ . Sia  $T$  un intorno del nodo costruito facendo muovere un quadrato di lato  $\epsilon$  in modo che il suo centro sia "ancorato" al nodo e a ogni istante il quadrato sia perpendicolare al lato del nodo percorso. Scegliamo  $\epsilon$  in maniera tale che  $\mathbb{R}^3 \setminus T$  sia un retratto per deformazione di  $\mathbb{R}^3 \setminus L$  (questa scelta è sempre possibile farla data la finitezza dei lati del nodo). Vogliamo ora applicare il teorema di Van Kampen a questo spazio. Definiamo l'aperto  $A = \{z > 0\} \setminus T$ ; questo si retrae per deformazione su un bouquet di  $n$  circonferenze  $a_1, \dots, a_n$  dove  $a_i$  è un laccio che passa intorno a  $\alpha_i$ . Dunque  $\pi_1(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Sia poi  $B = \{z < \frac{\epsilon}{2}\} \setminus T$ ; è evidente che questo spazio sia semplicemente connesso e quindi  $\pi_1(B) = \{1\}$ . Lo spazio  $A \cap B$  invece si retrae per deformazione su un piano infinito con  $n$  buchi e dunque il suo gruppo fondamentale è il gruppo libero di rango  $n$ . Un generatore di questo gruppo è un loop intorno a uno dei buchi che letto nel  $\pi_1(A)$  si può scrivere come  $r_j = s_j s_i^{-1} s_{j+1}^{-1} s_i$ , vedi Figura 2.2, (oppure  $r_j = s_j s_i s_{j+1}^{-1} s_i^{-1}$  se l'orientazione è diversa) mentre nel  $\pi_1(B)$  è l'identità. Dunque si conclude per il teorema di Van Kampen notando che  $A \cup B = \mathbb{R}^3 \setminus T$ .

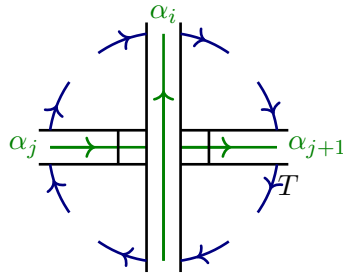
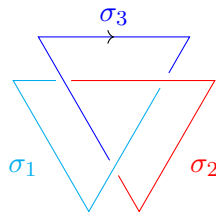


Figura 2.2

□

*Osservazione 2.1.4.* Una conseguenza immediata del teorema è che il gruppo del nodo banale è isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Dunque calcolare il gruppo di un nodo può risultare molto utile per dire che lo stesso non è scioglibile.

*Esempio 2.1.5.* Calcoliamo una presentazione del gruppo del nodo trifoglio e deduciamo che non è equivalente al nodo banale.



Usando la stessa notazione del teorema 2.1.3 si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} s_1 s_3^{-1} s_2^{-1} s_3 &= 1 \\ s_3 s_2^{-1} s_1^{-1} s_2 &= 1 \\ s_2 s_1^{-1} s_3^{-1} s_1 &= 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Esplicitando  $s_1$  dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due otteniamo che:

$$s_3 s_2 s_3 = s_2 s_3 s_2 \tag{2.2}$$

cioè

$$(s_2 s_3 s_2)^2 = (s_2 s_3 s_2)(s_3 s_2 s_3) = (s_3 s_2)^3 \tag{2.3}$$

Dunque poniamo  $a = s_2 s_3 s_2$  e  $b = s_3 s_2$ . Dato che  $s_2 = ab^{-1}$  e  $s_3 = b^2 a^{-1}$  allora  $a, b$  sono generatori e l'Equazione 2.2 è una conseguenza di  $a^2 = b^3$ . Allora possiamo scrivere il gruppo  $G$  del trifoglio con la seguente presentazione:

$$G = \langle a, b; a^2 = b^3 \rangle \tag{2.4}$$

Se consideriamo la funzione  $\phi : G \rightarrow S_3$  tale che  $\phi(a) = (1 \ 2)$  e  $\phi(b) = (1 \ 2 \ 3)$  allora questa definisce un omomorfismo dal momento che l'unica relazione in  $G$  continua a valere in  $S_3$ . Se fosse che  $ab = ba$  allora  $\phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$  che però è falso. Dunque  $G$  non è commutativo e quindi il trifoglio non è scioglibile.

## 2.2 Colorazioni e Quandles

**Definizione 2.2.1.** Un *quandle*  $Q$  è il dato di una coppia  $(C, *)$  dove  $C$  è un insieme con un'operazione binaria  $*$  tale che per ogni  $a, b, c \in C$  vale:



1.  $a * a = a$  (idempotenza);
2. esiste un unico  $x \in C$  tale che  $a * x = b$  (divisione sinistra unica);
3.  $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$  (autodistribuzione a sinistra).

**Definizione 2.2.2.** Sia  $C$  un insieme,  $*$  un'operazione binaria su  $C$  e  $D$  un diagramma di un nodo. Una *colorazione* di  $D$  è una funzione  $f$  che ad ogni arco del diagramma associa un elemento di  $C$  (chiamato anche *colore*) tale che a ogni incrocio con archi  $\alpha, \beta, \gamma$  come in Figura 2.3 vale che:

$$f(\alpha) * f(\beta) = f(\gamma) \quad (2.5)$$

Diciamo che una colorazione è *banale* se usa un solo colore.

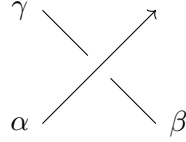


Figura 2.3 nodo etichettato

**Definizione 2.2.3.** Definiamo  $col_Q(D)$  il numero di colorazioni non banali del diagramma  $D$  di un nodo data la struttura algebrica  $Q = (C, *)$ .

La domanda che viene naturale ora è se ci sono delle strutture algebriche che rendano il numero di  $Q$ -colorazioni un invariante per nodi. Vale il seguente risultato:

**Teorema 2.2.4.** Sia  $Q$  un quandle. Allora  $col_Q$  è un invariante per nodi (o link).

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che se due diagrammi  $D, E$  differiscono di una sola mossa di Reidemeister allora il numero di  $Q$ -colorazioni non banali rimane lo stesso. Proviamo in particolare che per ogni colorazione di  $D$  corrisponde un'unica colorazione di  $E$  che usa gli stessi identici colori negli archi non coinvolti nella mossa. Fissiamo  $f$  orientazione di  $D$  e vediamo i vari casi:

1. Per la mossa del primo tipo ci sono due possibilità di orientazione come possiamo vedere nella Figura 2.4. Nel caso dell'orientazione verso il basso se poniamo  $f(\alpha) = a$  e usando l'Equazione 2.5 deve essere che  $f(\beta) = a * a = a$ . Quindi in realtà  $f$  associa un solo colore a tutto l'incrocio e allora è determinata in maniera univoca la colorazione di  $E$ . Nel caso di un'orientazione verso l'alto, invece, si ha che  $a * x = a$  dove  $a$  è il colore associato ad  $\alpha$  e  $x$  è il colore incognita da associare a  $\beta$ . Usando le proprietà (1) e (2) nella definizione di quandle si ha che  $x = a$ , si conclude come nel caso precedente.

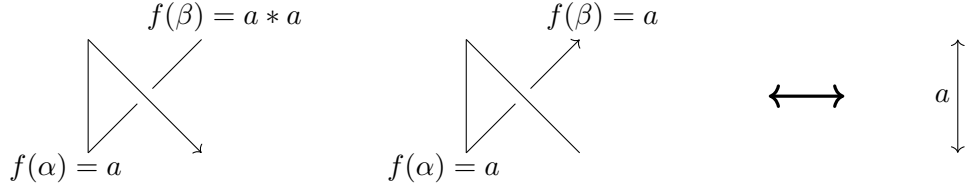


Figura 2.4

2. Per una mossa del secondo tipo ci sono anche in questo caso due tipi di orientazione (Figura 2.5). Consideriamo l'orientazione verso l'alto. Sia  $f(\beta_1) = b_1$ ,  $f(\beta_2) = b_2$  e  $f(\alpha) = a$ . Allora deve essere che  $a * b_1 = a * b_2$  cioè per la proprietà (2)  $b_1 = b_2 =: b$ . Dunque esiste un'unica colorazione corrispondente del diagramma di  $E$  (Figura 2.5 (A)). Il procedimento è invertibile, cioè data la configurazione a destra passiamo in maniera univoca a quella di sinistra, dato che le colorazioni di  $\gamma$  e  $\beta_2$  sono determinate da quelle di  $\alpha$  e  $\beta_1$ . Nel caso dell'orientazione verso il basso otteniamo le equazioni  $a * x = b_1$  e  $a * x = b_2$  e dunque come prima  $b_1 = b_2$ . Si conclude con lo stesso ragionamento.

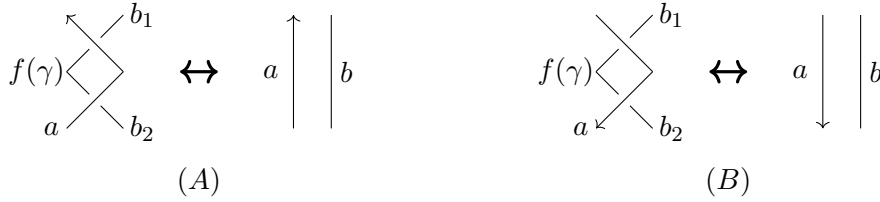


Figura 2.5

3. Infine analizziamo una mossa del terzo tipo. In Figura 2.6 possiamo vedere un'orientazione tra le quattro possibili. Notiamo che fissati tre colori  $a, b, c$  allora in entrambi i diagrammi sono determinati i colori di tutti gli archi. Inoltre per la proprietà (3) dei quandle vale  $(a * b) * (a * c) = a * (b * c)$  e dunque è ben definita la bigezione che manda la colorazione di  $D$  in quella di  $E$  come riportato nell'immagine. Gli altri tre casi si risolvono alla stessa maniera usando all'occorrenza la proprietà (2).

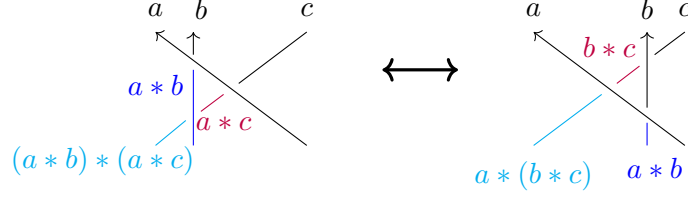


Figura 2.6

□

Cerchiamo ora di approfondire la teoria algebrica dei quandle per ottenere risultati interessanti a livello di colorazioni di nodi.

**Definizione 2.2.5.** Siano  $Q_1$  e  $Q_2$  due quandle. Allora una funzione  $f : Q_1 \rightarrow Q_2$  è un *omomorfismo di quandle* se  $\forall a, b \in Q_1$  vale che:

$$f(a * b) = f(a) * f(b) \quad (2.6)$$

Inoltre se  $f$  è bigettiva allora si parla di *isomorfismo*.

**Definizione 2.2.6.** Sia  $Q$  un quandle e  $\alpha$  una relazione di equivalenza su  $Q$ . Diciamo che  $\alpha$  è una *congruenza* se  $\forall a, b, c, d \in Q$  tali che  $a \sim b$  e  $c \sim d$  allora:

1.  $a * c \sim b * d$ ;
2. se  $a * x = c$  e  $b * y = d$  allora  $x \sim y$ .

**Proposizione 2.2.7.** Sia  $Q$  un quandle e  $\alpha$  una congruenza su  $Q$ . Definiamo un'operazione nel quoziente  $Q/\alpha$  tale che  $\forall a, b \in Q$ :

$$[a] * [b] = [a * b] \quad (2.7)$$

Allora l'operazione è ben definita e induce una struttura di quandle nel quoziente.

*Dimostrazione.* La buona definizione è una conseguenza immediata della proprietà (1) nella definizione di congruenza. Vediamo ora che le tre proprietà richieste nella definizione di quandle sono soddisfatte:

1.  $[a] * [a] = [a * a] = [a]$ ;
2. Dati  $[a]$  e  $[b]$  sia  $x$  l'unico elemento di  $Q$  tale che  $a * x = b$ , allora  $[a] * [x] = [a * x] = [b]$ . Inoltre se  $[a] * [y] = [a * y] = [b]$  segue per la proprietà 2 nella definizione di congruenza che  $[x] = [y]$ ;
3.  $[a] * ([b] * [c]) = [a] * [b * c] = [a * (b * c)] = [(a * b) * (a * c)] = [a * b] * [a * c] = ([a] * [b]) * ([a] * [c])$ .

□

**Definizione 2.2.8.** Consideriamo  $I = \{\alpha \subseteq Q \times Q \mid \alpha \text{ congruenza}\}$  e dotiamo  $I$  di un ordinamento parziale indotto dall'inclusione tra insiemi. Allora diciamo che  $\alpha$  è una *congruenza massimale* se è massimale come elemento per l'insieme  $I$  e  $\alpha \in I$ .

*Osservazione 2.2.9.* Dato un insieme finito, non vuoto e parzialmente ordinato  $(X, \leq)$  è sempre possibile trovare un elemento massimale con il seguente algoritmo. Fissiamo un elemento di  $X$  al passo zero; al passo  $n$ -esimo confrontiamo l'elemento  $x$  ottenuto al passo precedente con un elemento  $y$  non ancora considerato. Se  $y \leq x$  o non sono confrontabili allora l'algoritmo al passo  $n$  ci restituisce  $x$ , altrimenti  $y$ . Data la finitezza di  $X$  l'algoritmo consiste di un numero limitato di passi. In particolare un quandle finito  $Q$  ammette sempre una congruenza massimale.

**Definizione 2.2.10.** Sia  $Q$  un quandle. Allora diciamo che  $Q' \subset Q$  è un *subquandle* di  $Q$  se  $\forall a, b \in Q'$  vale:

1.  $a * b \in Q'$ ;
2. se  $a * x = b$  allora  $x \in Q'$ .

**Proposizione 2.2.11.** Sia  $Q$  un quandle e  $\alpha$  una congruenza su  $Q$  allora ogni classe di congruenza è un subquandle di  $Q$ .

*Dimostrazione.* Siano  $a, b$  con  $a \sim b$ . Dato che anche  $a \sim a$ , allora  $a * b \sim a * a = a$ . Inoltre se  $a * x = b$ , usando sempre l'equazione  $a * a = a$ , deve valere  $a \sim x$ . □

**Proposizione 2.2.12.** Sia  $f : Q_1 \longrightarrow Q_2$  un omomorfismo tra quandle. Diciamo che  $a \sim b \iff f(a) = f(b)$ . Allora la funzione  $g : Q_1 / \sim \longrightarrow \text{Imm}(f)$  tale che  $g([a]) = f(a)$  è un isomorfismo tra quandle.

*Dimostrazione.* Vediamo innanzitutto che  $\sim$  è una congruenza per  $Q_1$ . Il fatto che sia una relazione di equivalenza segue immediatamente da come è definita. Supponiamo che  $a \sim b$  e  $c \sim d$ , allora  $f(a * c) = f(a) * f(c) = f(b) * f(d) = f(b * d)$  cioè  $a * c \sim b * d$ . Inoltre se vale anche che  $a * x = c$  e  $b * y = d$  otteniamo  $f(b) * f(x) = f(d)$  e  $f(b) * f(y) = f(d)$ , quindi per unicità  $f(x) = f(y)$ . A questo punto il fatto che sia ben definita e che sia un isomorfismo segue immediatamente dalle definizioni. □

**Definizione 2.2.13.** Un quandle  $Q$  è detto *semplice* se ogni omomorfismo che parte da lui è iniettivo o è la funzione costante.

*Osservazione 2.2.14.* Un quandle  $Q$  è semplice se e soltanto se non ammette quozienti tranne se stesso e il quandle di un elemento. Infatti se  $Q$  fosse semplice e ammettesse un quoziente non banale  $Q/\alpha$  diverso da  $Q$  allora la proiezione  $\pi : Q \longrightarrow Q/\alpha$  sarebbe un omomorfismo non iniettivo e nemmeno costante. Viceversa se esistesse una funzione  $f : Q \longrightarrow Q'$  non iniettiva e non costante allora per la Proposizione 2.2.12 si otterrebbe un assurdo.

**Proposizione 2.2.15.** *Se  $\alpha$  è una congruenza massimale sul quandle  $Q$  allora  $Q/\alpha$  è semplice.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $Q/\alpha$  non sia semplice. Allora esisterebbe una congruenza  $\alpha' \subsetneq (Q/\alpha \times Q/\alpha)$ . Dunque  $\alpha'' = \bigcup_{x \in \alpha'} x$  sarebbe una congruenza propria di  $Q$  strettamente maggiore di  $\alpha$  contraddicendo l'ipotesi di massimalità.  $\square$

**Definizione 2.2.16.** Sia  $D$  il diagramma di un link  $L$ . Allora  $L$  è detto  $Q$ -colorabile se  $\text{col}_Q(L) > 0$ .

*Osservazione 2.2.17.* Se un unlink  $L$  ha almeno due componenti e  $Q$  ha cardinalità maggiore di 1 allora  $L$  è sempre  $Q$ -colorabile. Al contrario il nodo banale non è mai  $Q$ -colorabile.

È a questo punto della trattazione che capiamo l'importanza dei quandle semplici nella teoria dei nodi. Il seguente teorema infatti ci assicura che per capire se un nodo è colorabile o meno possiamo restringerci proprio all'insieme dei quandle semplici.

**Teorema 2.2.18.** *Sia  $K$  un nodo colorabile da un quandle finito  $Q$ . Allora  $K$  è colorabile da un quandle semplice  $Q'$  con  $|Q'| \leq |Q|$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo una  $Q$ -colorazione non banale  $f$  del nodo  $K$ . Sia  $Q''$  il subquandle generato da tutti i colori usati da  $f$ , per definizione  $f$  è anche una  $Q''$ -colorazione. Allora consideriamo  $\alpha$  una congruenza massimale per  $Q''$ , dunque  $Q' := Q''/\alpha$  è un quandle semplice. Definiamo  $f' = \pi \circ f$  dove  $\pi : Q'' \rightarrow Q'$  è la proiezione al quoziente. Dunque  $f'$  è una colorazione, infatti ricordando che  $\pi$  è un omomorfismo si ha:

$$f'(\beta) * f'(\gamma) = \pi(f(\beta)) * \pi(f(\gamma)) = \pi(f(\beta) * f(\gamma)) = \pi(f(\zeta)) = f'(\zeta) \quad (2.8)$$

Se per assurdo  $f'$  fosse banale allora i colori che generano  $Q''$  dovrebbero stare in un'unica classe di congruenza  $H \subset Q''$ . Dato però che una classe di congruenza è in particolare un subquandle e  $H$  contiene i generatori di  $Q''$  allora varrebbe proprio  $H = Q''$ , cioè  $\alpha = Q'' \times Q''$ , in contraddizione con la definizione di congruenza massimale.  $\square$

Vediamo ora alcuni esempi di quandle:

1. sia  $X$  un insieme non vuoto dotato dell'operazione  $a * b = b \ \forall a, b \in X$ . Allora  $(X, *)$  è chiamato *quandle banale*;
2. siano  $(G, \circ)$  un gruppo e  $X$  una classe di coniugio di  $G$ . Definiamo l'operazione  $a * b = a \circ b \circ a^{-1} \ \forall a, b \in X$ . Allora  $(X, *)$  è detto *conjugation quandle*;
3. siano  $(X, *_X)$  e  $(Y, *_Y)$  due quandle. Allora  $X \times Y$  è un quandle con l'operazione  $(x, y) * (x', y') = (x *_X x', y *_Y y')$  per ogni  $x, x' \in X$  e per ogni  $y, y' \in Y$ ;
4. consideriamo l'insieme  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $n > 2$ , con l'operazione  $a * b = 2a - b \pmod{n}$ .

Allora  $R_n = (\mathbb{Z}_n, *)$  è il cosiddetto *quandle diedrale*. Quando si colora un link con  $R_n$  si parla di  $n$ -colorazione.

La Proposizione 2.2.20 chiarisce il perché del nome *quandle diedrale*.

**Definizione 2.2.19.** Definiamo il *gruppo diedrale*  $D_n$  come il gruppo formato dalle isometrie del piano che lasciano invariato il poligono regolare con  $n$ -lati. Una presentazione del gruppo è la seguente:

$$D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^n = 1, \quad xyx = y^{-1} \rangle, \quad (2.9)$$

dove  $x$  è una riflessione e  $y$  è una rotazione di ordine  $n$ . Notiamo che possiamo scrivere ogni riflessione  $x_k$  come  $x_k = xy^k$  con  $k \in \mathbb{Z}_n$ .

**Proposizione 2.2.20.** Sia  $D$  un diagramma di un nodo,  $\Pi = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$  la presentazione di Wirtinger del suo gruppo e  $C$  l'insieme delle sue  $n$ -colorazioni. Definiamo inoltre l'insieme  $\Omega$  come l'insieme degli omomorfismi  $\phi : \Pi \rightarrow D_n$  che mappano i generatori  $s_i$  in riflessioni. Allora definiamo la funzione  $\Psi : C \rightarrow \Omega$  tale che  $\Psi(c) = \phi_c$  con  $\phi_c(s_i) = x_k$  dove  $k$  è il colore associato da  $c$  all'arco corrispondente al generatore  $s_i$ . Vale che  $\Psi$  è una bigezione.

*Dimostrazione.* Per prima cosa vediamo effettivamente che le funzioni  $\phi_c$  definiscono degli omomorfismi. Per semplicità chiameremo ogni arco con il generatore associatogli dalla presentazione di Wirtinger. Supponiamo che  $c(s_i) = k_i$ . Consideriamo un certo incrocio del diagramma e siano  $s_j$  l'arco superiore e  $s_i, s_z$  gli archi inferiori. Allora le relazioni in  $\Pi$  sono  $s_z = s_j s_i s_j^{-1}$  o  $s_z = s_j^{-1} s_i s_j$ . Per ipotesi di colorazione vale che  $k_z = 2k_j - k_i \pmod{n}$ , dunque:

$$\begin{aligned} \phi_c(s_j)\phi_c(s_i)\phi_c(s_j^{-1}) &= (xy^{k_j})(xy^{k_i})(y^{-k_j}x) = (xy^{k_j})(xy^{k_i-k_j}x) = \\ &= (xy^{k_j})(y^{k_j-k_i}) = xy^{2k_j-k_i} = xy^{k_z} = \phi_c(s_z). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Allo stesso modo si verifica che anche l'altro tipo di relazione è rispettata da  $\phi_c$ . Mostriamo ora l'injectività di  $\Psi$ . Siano  $c_1$  e  $c_2$  due  $n$ -colorazioni differenti. Allora esiste un arco  $s_i$  tale che  $c_1(s_i) \neq c_2(s_i)$ . In particolare  $\phi_{c_1}(s_i) \neq \phi_{c_2}(s_i)$ . Infine vediamo che  $\Psi$  è surgettiva. Sia  $\phi \in \Omega$  tale che  $\phi(s_i) = x_{k_i}$ . Coloriamo quindi ogni arco  $s_i$  con  $k_i$ . Questa appena definita è una  $n$ -colorazione, infatti se vale che  $\phi_c(s_j)\phi_c(s_i)\phi_c(s_j^{-1}) = \phi_c(s_z)$ , guardando i calcoli nell'Equazione 2.10 deve essere che  $2k_j - k_i = k_z \pmod{n}$ .  $\square$

## 2.3 Esistenza delle $p$ -colorazioni

In questa sezione approfondiamo le colorazioni di un link tramite i quandle diedrali. In particolare daremo un algoritmo che permetterà di stabilire se un link è  $p$ -colorabile con  $p$  numero primo dispari. Prima però vediamo un risultato di algebra lineare che si rivelerà utile nel prosieguo della discussione.

**Lemma 2.3.1.** Sia  $A$  una matrice quadrata di taglia  $n$  tale che la somma di ogni riga e di ogni colonna è nulla. Allora il determinante di ogni minore della matrice di taglia  $n-1$  è sempre lo stesso.

*Dimostrazione.* Sia  $B$  la matrice di taglia  $n$  tale che  $[B]_{i,j} = 1$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ . Siano  $A_{\bar{i}}$  e  $B^{\bar{j}}$  rispettivamente la riga e la colonna eliminate per ottenere il minore  $M$ . Calcoliamo il determinante di  $A + B$  nel seguente modo:

1. sommiamo alla  $\bar{i}$ -esima riga di  $A + B$  tutte le altre righe della matrice stessa. Così otteniamo la matrice  $(A + B)'$  con le seguenti entrate:

$$[(A + B)']_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j} + 1 + \sum_{k \neq i} ([A]_{k,j} + 1) = \sum_k ([A]_{k,j}) + 1 + n - 1 = n, & \text{se } i = \bar{i} \\ [A]_{i,j} + 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Sommiamo alla  $\bar{j}$ -esima colonna di  $(A + B)'$  tutte le altre colonne di  $(A + B)'$ . Chiamiamo  $(A + B)''$  la nuova matrice che ha come entrate:

$$[(A + B)']_{i,j} = \begin{cases} [A]_{i,j} + 1 + \sum_{k \neq j} ([A]_{i,k} + 1) = \sum_k ([A]_{j,k}) + 1 + n - 1 = n, & \text{se } j = \bar{j} \text{ e } i \neq \bar{i} \\ n, & \text{se } i = \bar{i} \text{ e } j \neq \bar{j} \\ n + \sum_{k \neq j} [(A + B)']_{i,k} = n + (n - 1)n = n^2, & \text{se } i = \bar{i} \text{ e } j = \bar{j} \\ [A]_{i,j} + 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Notiamo che, per la natura delle mosse fatte, vale che  $\det((A + B)'') = \det(A + B)$ .

3. A questo punto raccogliamo un fattore  $n$  dalla  $\bar{i}$ -esima riga di  $(A + B)''$  e sottraiamo la nuova riga da tutte le altre ottenendo così la matrice  $C$  siffatta:

$$[C]_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } j = \bar{j} \text{ e } i \neq \bar{i} \\ 1, & \text{se } i = \bar{i} \text{ e } j \neq \bar{j} \\ n, & \text{se } i = \bar{i} \text{ e } j = \bar{j} \\ [A]_{i,j}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vale quindi che  $n \cdot \det(C) = \det(A + B)$ .

Allora, facendo lo sviluppo di Laplace lungo la  $\bar{j}$ -esima colonna per calcolare il determinante di  $C$ , si ha che  $\det(A + B) = n \cdot \det(C) = n^2 \cdot \det(M)$ , da cui la tesi.  $\square$

Consideriamo quindi il diagramma di un link  $L$ , ci chiediamo se questo sia colorabile dal quandle  $R_p$  con  $p$  primo dispari. Ad ogni arco del diagramma associamo un'incognita così che a ogni incrocio sia associata un'equazione del tipo  $2a - b - c = 0 \pmod{p}$ . Dunque si ha un sistema lineare con  $n$  equazioni in  $n$  incognite a cui associamo la matrice  $E$ . Trovare le soluzioni del sistema significa calcolare il kernel di  $E$  in  $\mathbb{Z}_p$ . Notiamo subito che  $\det(E) = 0$ , infatti dato che in ogni riga ci sono esattamente un 2 e due  $-1$  se sommiamo tutte le colonne otteniamo la colonna nulla. Questo, però, non ci sorprende poiché è evidente che il sistema lineare ammetta sempre le soluzioni ottenute colorando il diagramma con un solo elemento. Allora affinché  $L$  sia  $p$ -colorabile deve essere che il  $\text{rk}(E)$  sia al più  $n - 2$ . Questo accade se e soltanto se ogni minore di taglia

$n - 1$  ha determinante nullo in  $\mathbb{Z}_p$ . I Lemmi 2.3.1 e 2.3.2 ci assicurano che possiamo scegliere un qualsiasi minore  $(n - 1) \times (n - 1)$  per calcolare il modulo del determinante.

**Lemma 2.3.2.** *Sia  $D$  il diagramma di un link ed  $E$  la matrice associata al sistema lineare definito come sopra. Vale che esiste un insieme di indici  $\{i_1, \dots, i_k\}$  tali che se moltiplichiamo per  $-1$  le righe  $E_{i_1}, \dots, E_{i_k}$  allora la nuova matrice rispetta le ipotesi del Lemma 2.3.1.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il diagramma orientato  $D$  come una divisione del piano  $\mathbb{R}^2$  in aperti connessi per archi  $A_1, \dots, A_k$  dove ogni aperto ha come bordo alcuni archi di  $D$  (stiamo pensando al diagramma come una spezzata continua). Supponiamo che  $A_k$  sia l'aperto illimitato che è complementare della porzione chiusa di piano delimitata dal diagramma  $D$ . Per ogni incrocio  $I_j$  consideriamo un punto  $P_j$  che stia alla destra dell'arco superiore appena prima dell'incrocio, in modo tale che  $P_j$  stia in un certo  $A_i$ . Sia  $n(P_j)$  la parità del numero di archi che un qualsiasi cammino iniettivo deve intersecare per collegare  $P_j$  con  $A_k$  (senza poter intersecare un incrocio). Mostriamo che  $n(P_j)$  è ben definito. Notiamo subito che un qualunque cammino continuo e chiuso  $\gamma$  deve intersecare il diagramma un numero pari di volte. Infatti fissato  $\gamma$  è possibile scomporlo in lacci semplici i quali definiscono aperti limitati  $B_1, \dots, B_m$  che si intersecano a due a due al più in alcuni punti, un esempio in Figura 2.7.

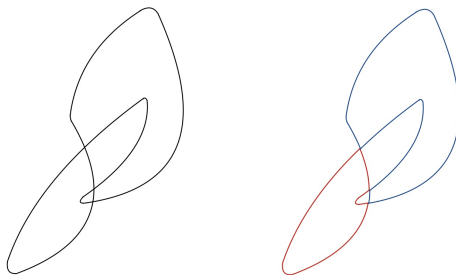


Figura 2.7

Senza perdita di generalità cominciamo a disegnare il diagramma da un punto  $Q$  in  $B_1$  e supponiamo che ogni punto di intersezione dei  $B_i$  apparterrà a un qualche  $A_j$ . Allora disegnando  $D$  non è possibile passare da  $B_i$  a  $B_j$  per  $i \neq j$  senza passare dal complementare dell'unione dei  $B_k$ . Questo implica che ogni volta che entriamo in un  $B_i$  e ne usciamo non cambiamo la parità del numero totale di intersezioni con  $\gamma$ . Siano quindi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due cammini iniettivi che collegano  $P_j$  rispettivamente con  $Q_1$  e  $Q_2$ , entrambi in  $A_k$ . Allora possiamo supporre di collegare  $Q_1$  e  $Q_2$  con una curva iniettiva  $\gamma_3$  tutta contenuta in  $A_k$ . Abbiamo quindi che  $\bar{\gamma} := \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$  è un laccio. Ma allora per come è stato definito vale:

$$0 = |\bar{\gamma} \cap D| = |\gamma_1 \cap D| + |\gamma_2 \cap D| + |\gamma_3 \cap D| = |\gamma_1 \cap D| + |\gamma_2 \cap D| \pmod{2}. \quad (2.11)$$



A questo punto, vista la buona definizione, se  $n(P_j)$  è dispari si moltiplica la riga della matrice  $E$  corrispondente all'equazione ottenuta dall'incrocio  $I_j$  per  $-1$ , altrimenti si lascia invariata. Analizziamo cosa sta facendo quest'algoritmo sulle colonne della matrice  $E$ . In particolare una colonna è il dato degli incroci di un intero arco  $\alpha$ . Per semplicità rappresentiamolo come in Figura 2.8:

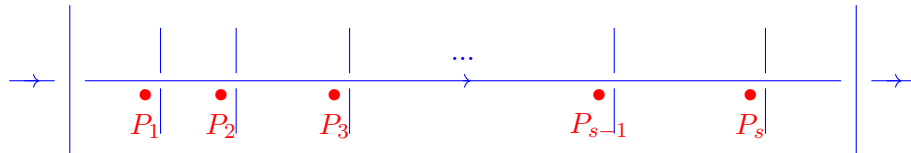


Figura 2.8

I punti rossi rappresentano i vari  $P_j$ ,  $j \in \{1, \dots, s-1, s\}$ , degli incroci in cui  $\alpha$  passa sopra. Fissiamo due punti rossi riferiti a due incroci consecutivi, senza perdita di generalità  $P_1$  e  $P_2$ . Notiamo che fissato un percorso per collegare  $P_1$  con  $A_k$  allora possiamo usare lo stesso percorso anche per  $P_2$  aggiungendo una sola intersezione per collegare  $P_2$  a  $P_1$ . Quindi, per l'algoritmo, avremo contributi di  $+2$  e  $-2$  alternati lungo l'arco. A questo punto dobbiamo capire come si comportano i punti  $P_0$  e  $P_{s+1}$  (come in Figura 2.9) negli incroci in cui  $\alpha$  passa sotto. Notiamo che per ciascuno di questi incroci ci sono due possibilità in base all'orientazione degli altri archi.

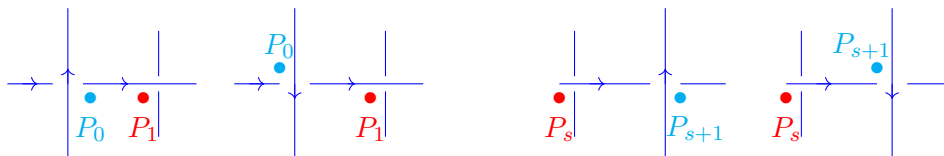


Figura 2.9

Come si evince dalla Figura 2.9, usando lo stesso ragionamento precedente, si ha che in tutti i casi  $n(P_0) = n(P_1)$  e  $n(P_s) = n(P_{s+1})$ . Dunque nel caso in cui  $s$  sia pari la somma della colonna (a meno del segno) è:

$$+(-1) + (+2) - (+2) + \dots + (+2) - (+2) - (-1) = 0. \quad (2.12)$$

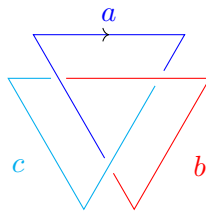
Allo stesso modo se  $s$  è dispari otteniamo (a meno del segno):

$$+(-1) + (+2) - (+2) + \dots + (+2) - (+2) + (+2) + (-1) = 0. \quad (2.13)$$

□

Vediamo ora alcune applicazioni su particolari nodi e link.

*Esempio 2.3.3.* Consideriamo nuovamente il nodo trifoglio.



La matrice ottenuta tramite il procedimento precedente è:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Considerando per esempio il minore ottenuto cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna osserviamo che il suo determinante è 3, dunque il trifoglio è 3-colorabile. In effetti una 3-colorazione si ha con  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $c = 2$ . Notiamo che abbiamo ottenuto un risultato già noto cioè che il trifoglio non è equivalente al nodo banale.

*Esempio 2.3.4.* Consideriamo il nodo figura a otto di cui un diagramma è riportato in Figura 2.10.

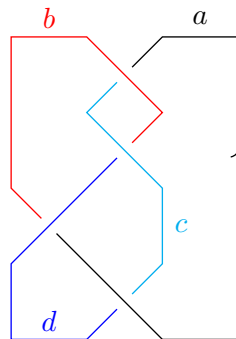


Figura 2.10

La matrice associata al diagramma è:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

In particolare il determinante del minore ottenuto togliendo la prima riga e l'ultima colonna è 5, allora il nodo figura a otto ammette una colorazione con  $R_5$ . Dunque non solo non è scioglibile, ma non è nemmeno equivalente al nodo trifoglio. Un esempio di 5-colorazione si ha ponendo  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$  e  $d = 3$ .

*Esempio 2.3.5.* Analizziamo ora il caso di un link con due componenti, il link di Whitehead (Figura 2.11).

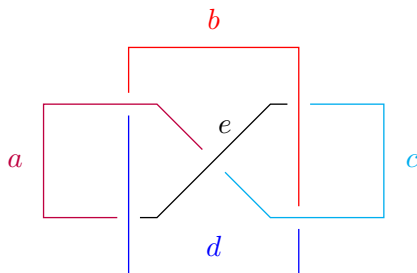


Figura 2.11

La matrice associata al sistema lineare è:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando il minore ottenuto cancellando l'ultima colonna e l'ultima riga si ha che il suo determinante è 8. Dunque il link di Whitehead non è  $p$ -colorabile per nessun primo dispari e quindi non è equivalente all'unlink di 2 componenti (che è sempre colorabile).

## 2.4 Linking number

In questa sezione definiremo un invariante per link con due componenti che ci risulterà essere molto utile nel prossimo capitolo, quando studieremo una particolare tipologia di nodi.

**Definizione 2.4.1.** Siano  $L$  e  $J$  due nodi disgiunti e orientati, rappresentati dal diagramma  $D$ . Assegniamo a ogni incrocio  $I_i$  tra  $J$  e  $K$  un numero  $n_i \in \{-1, 1\}$  (come in Figura 2.12), chiamato *segno dell'incrocio*. Supponiamo che gli incroci di questo tipo siano  $k$ . Il *linking number* di  $J$  e  $K$ , denotato con  $lk(J, K)$ , è definito come:

$$lk(J, K) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i. \quad (2.14)$$

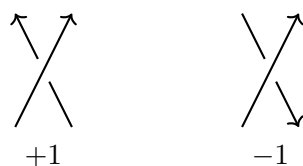


Figura 2.12 Il segno degli incroci può essere determinato con la regola della mano destra.

*Osservazione 2.4.2.* Il linking number è un intero. Infatti fissata la componente di  $D$  che rappresenta  $L$  e volendo disegnare la componente di  $J$ , notiamo che gli incroci tra  $L$  e  $J$  devono essere in numero pari. Da questo segue immediatamente la tesi.

**Teorema 2.4.3.** *Il linking number è un invariante di link.*

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che il linking number non cambia effettuando le mosse di Reidemeister (Figura 1.4). Se consideriamo  $\Omega_1^{\pm 1}$ , queste aggiungono o sottraggono un auto-incrocio e dunque non contribuiscono alla somma dei segni. Consideriamo ora le mosse di Reidemeister del secondo tipo. La mossa  $\Omega_2$  passa da una configurazione senza incroci a una con due incroci. Se quest'ultima rappresenta due auto-intersezioni allora non ci saranno contributi nella somma. In caso contrario notiamo che qualunque siano le orientazioni dei due link avremo due incroci con segno opposto. Infine osserviamo che l'insieme dei segni degli incroci non cambia se effettuiamo mosse di Reidemeister del terzo tipo.  $\square$

**Definizione 2.4.4.** Siano  $K_1$  e  $K_2$  in  $\mathbb{S}^3$  due nodi orientati e definiamo la *somma connessa*  $K_1 \# K_2$  come segue:

1. supponiamo che esista  $S$  diffeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  tale che se  $S = \partial B_1 = \partial B_2$  allora  $K_1 \subset B_1$  e  $K_2 \subset B_2$ ;
2. troviamo un quadrilatero che abbia come coppia di lati opposti,  $l_1$  e  $l_2$ , due porzioni di archi, con  $l_1 \subset K_1$  e  $l_2 \subset K_2$ . I lati  $l_1$  e  $l_2$  devono indurre un'orientazione sugli altri due lati del quadrilatero,  $l_3$  e  $l_4$ , che sia coerente con  $K_1$  e  $K_2$ . Il quadrilatero non deve intersecare  $K_1$  e  $K_2$  in altri punti. Inoltre, nel caso ci fossero altri nodi non coinvolti nella somma connessa, richiediamo che il quadrilatero non li intersechi;
3. definiamo il nodo  $K_1 \# K_2 = ((K_1 \cup K_2) \setminus (l_1 \cup l_2)) \cup (l_3 \cup l_4)$ .

Si può dimostrare che la somma connessa descritta è ben definita. Infatti le scelte fatte sono tre: il sottospazio  $S$ , le porzioni di arco  $l_1$  e  $l_2$ , il tipo di quadrilatero. Ognuna di queste scelte però non fa cambiare la classe di isotopia ambiente del nodo ottenuto. Possiamo vedere un esempio di somma connessa in Figura 2.13.

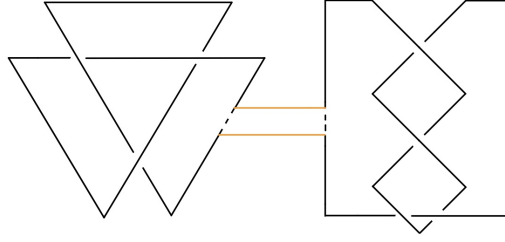


Figura 2.13 Le porzioni di archi rimosse sono tratteggiate, mentre in giallo sono rappresentati i segmenti che uniscono  $K_1$  e  $K_2$ .

Da ora in poi denotiamo con  $-K$  il nodo  $K$  con orientazione opposta. Si ha il seguente risultato:

**Proposizione 2.4.5.** *Siano  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  tre nodi orientati e disgiunti in  $\mathbb{S}^3$ . Allora:*

1.  $lk(K_1 \# K_2, K_3) = lk(K_1, K_3) + lk(K_2, K_3);$
2.  $lk(K_1, -K_2) = lk(-K_1, K_2) = -lk(K_1, K_2).$

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda il punto (1) basta notare che, scegliendo il rettangolo  $R$  in modo che risulti molto stretto e lungo, nel caso in cui si crei un nuovo incrocio, in realtà se ne è creato anche un altro. Questa nuova coppia di incroci deve avere segno opposto. Mentre per il punto (2) osserviamo che se cambiamo l'orientazione di un solo nodo allora i segni degli incroci tra  $K_1$  e  $K_2$  cambiano tutti segno.  $\square$

## Capitolo 3

# Nodi satellite

Dopo aver dato la definizione di superficie di Seifert e provata la sua esistenza, in questo capitolo riprenderemo il concetto di linking number. Ne daremo una caratterizzazione algebrica che ci permetterà di definire coerentemente meridiani e longitudini standard di un intorno tubolare di un nodo in  $\mathbb{S}^3$ . Quindi descriveremo la famiglia dei nodi satellite alla quale appartiene il nodo doppio di Whitehead del nodo trifoglio, analizzato nell'ultima sezione.

Nel terzo capitolo non specificheremo più che siamo nel contesto "lineare a tratti". Nonostante questo, tutti i seguenti risultati continuano a valere se al posto della richiesta di "continuità" richiediamo quella più restrittiva di "linearità a tratti".

### 3.1 Superficie di Seifert

**Teorema 3.1.1.** *Una curva semplice e chiusa  $l \subset \mathbb{R}^3$  è il bordo di una superficie orientabile  $S$ , chiamata superficie di Seifert.*

*Dimostrazione.* Sia  $p(l)$  una proiezione regolare di  $l$  in  $\mathbb{R}^2$  dotata di un'orientazione. Allora in ogni intorno di un incrocio sciogliamo quest'ultimo come in Figura 3.1. Otteniamo così un numero finito di curve semplici orientate in  $\mathbb{R}^2$ , chiamate *cicli di Seifert*. Per ogni ciclo di Seifert consideriamo la 2-cella racchiusa dotata dell'orientazione indotta. Immergiamo dunque ogni cella in  $\mathbb{R}^3$  in maniera tale che il loro bordo proiettato corrisponda proprio a un ciclo di Seifert. In particolare possiamo disporre le celle in piani paralleli al piano di proiezione (senza perdita di generalità  $\{z = 0\}$ ) con la seguente regola: se  $c_1$  e  $c_2$  sono due celle tale che  $c_1 \subset c_2$  allora queste sono proiettate rispettivamente sui piani  $\{z = a_1\}$  e  $\{z = a_2\}$  con  $a_1 < a_2$ . A questo punto, attacchiamo le due celle in corrispondenza dei punti doppi come in Figura 3.2 così da ottenere una superficie orientata  $S$  con  $\partial S = l$ .

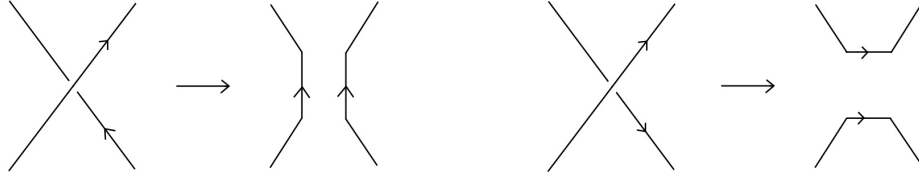


Figura 3.1

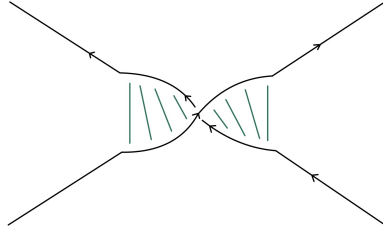


Figura 3.2

□

### 3.2 Caratterizzazione del linking number

In questa sezione daremo una caratterizzazione del linking number legata alla topologia algebrica. Sottintenderemo che tutti i gruppi di omologia nel prosieguo hanno coefficienti in  $\mathbb{Z}$ . Per prima cosa consideriamo un nodo  $K \subset \mathbb{S}^3$  e sia  $V$  un suo intorno tubolare omeomorfo a un toro pieno  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$ . Allora  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  e  $V$  ricoprono  $\mathbb{S}^3$ , in particolare la loro intersezione si retrae per deformazione su un toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Allora possiamo scrivere la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\dots \longrightarrow H_2(\mathbb{S}^3) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^3) \longrightarrow \dots \quad (3.1)$$

Come è noto  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  dunque data l'abelianità di  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  vale che  $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Inoltre  $H_2(\mathbb{S}^3) \cong H_1(\mathbb{S}^3) \cong 0$  e  $H_1(V) \cong H(K) \cong \mathbb{Z}$ . La successione diventa quindi:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \quad (3.2)$$

Per l'esattezza della successione si ha che  $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ .

**Lemma 3.2.1.** *Siano  $J$  e  $K$  due nodi disgiunti in  $\mathbb{S}^3$ . Supponiamo che  $[\eta]$  generi  $H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ , dove  $\eta$  è la curva orientata per cui  $lk(K, \eta) = +1$ . Se  $[J] = s[\eta]$  per qualche  $s \in \mathbb{Z}$  allora vale che  $lk(J, K) = s$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo ogni incrocio dove  $J$  passa sotto  $K$ . Allora se il segno dell'incrocio è positivo possiamo sostituire  $J$  con la somma connessa  $J\#(-\eta)$  (Figura 3.3). In questo modo nel nuovo incrocio è  $K$  a passare sotto l'altro nodo. Viceversa, se il segno dell'incrocio è negativo, sostituiamo  $J$  con  $J\#\eta$ . In questo modo otteniamo due nodi che sono  $K$  e  $J\#(-s\eta)$ , i quali evidentemente possono essere separati tramite un'isotopia ambiente in due componenti che non si intersecano nel diagramma. Vale quindi  $lk(K, J\#(-s\eta)) = 0$ , ottenendo:

$$0 = lk(K, J\#(-s\eta)) = lk(K, J) - s \cdot lk(K, \eta) = lk(K, J) - s. \quad (3.3)$$

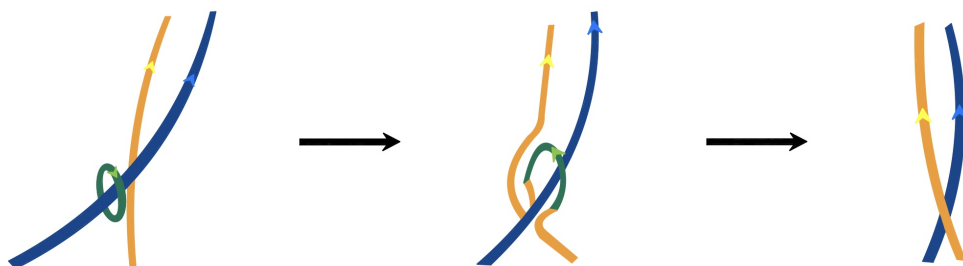


Figura 3.3

□

### 3.3 Longitudini e meridiani

Consideriamo il toro standard  $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Ogni punto in  $T^2$  può essere individuato tramite le coordinate  $(e^{i\theta}, e^{i\phi})$  con  $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$ . In particolare, ricordando che il gruppo fondamentale del toro è isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , possiamo definire esplicitamente due generatori di questo gruppo. Consideriamo infatti  $m, l : \mathbb{S}^1 \rightarrow T^2$  tali che  $m(e^{i\phi}) = (1, e^{i\phi})$  e  $l(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 1)$ . Allora, un isomorfismo esplicito tra  $\pi_1(T^2)$  e  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  si ottiene mandando  $m$  in  $(0, 1)$  e  $l$  in  $(1, 0)$ . In questo contesto sorge spontanea una domanda: quando è che un elemento  $(a, b) \in \pi_1(T^2)$  è rappresentato da una curva semplice chiusa in  $T^2$ ? Per rispondere a questa domanda abbiamo prima bisogno del seguente teorema:

**Lemma 3.3.1.** *Sia  $\gamma$  un cammino in  $\mathbb{C}$  e sia  $S$  un segmento di lunghezza  $|S|$  con estremi in  $\gamma$ . Allora  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ , esiste un segmento parallelo a  $S$  di lunghezza  $\frac{|S|}{n}$  con estremi in  $\gamma$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si divide in due passi. Nel primo dimostreremo che dato  $0 < \alpha < 1$  esiste un segmento parallelo a  $S$  con estremi in  $\gamma$  e di lunghezza  $\alpha|S|$  o  $(1 - \alpha)|S|$ . Da questo, con un'ultima osservazione, seguirà la tesi. Senza perdita di generalità possiamo assumere che  $S$  sia il segmento di estremi  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Per ogni



$\epsilon \in \mathbb{R}$  consideriamo il traslato di  $\gamma$ ,  $\gamma_\epsilon = \{(x+\epsilon, y) | (x, y) \in \gamma\}$ . La tesi è dimostrare che  $\gamma$  non può essere disgiunta sia da  $\gamma_\alpha$  che da  $\gamma_{(1-\alpha)}$ . Per assurdo supponiamo  $\gamma \cap \gamma_\alpha = \gamma_1 \cap \gamma_\alpha = \emptyset$ . Siano  $p, q \in \gamma_\alpha$  rispettivamente il massimo e il minimo rispetto alla coordinata immaginaria. Sia  $R^+$  la semiretta con estremo  $p$ , parallela all'asse immaginario e che si estende al di sopra di  $p$ ; sia  $R^-$  la semiretta con estremo  $q$ , parallela a  $R^+$  e che si estende al di sotto di  $q$ . Infine consideriamo un cammino  $\sigma$  in  $\gamma_\alpha$  che collega  $p$  con  $q$ . Allora l'insieme  $I := \sigma \cup R^+ \cup R^-$  è omeomorfo ad  $\mathbb{R}$  e dunque sconnette  $\mathbb{C}$  [6]. In particolare per ipotesi e per le definizioni di  $p$  e  $q$ , i cammini  $\gamma$  e  $\gamma_1$  non intersecano  $I$ . Per argomenti di connessione, dato che  $(0, 0) \in \gamma$  e  $(1, 0) \in \gamma_1$  sono in componenti connesse diverse, allora anche  $\gamma$  e  $\gamma_1$  devono appartenere a componenti connesse distinte. Questo è assurdo poiché  $(1, 0) \in \gamma \cap \gamma_1$ . Ora sia  $n \in \mathbb{N}^+$ . Per quanto detto, esiste un segmento  $S'$  come da enunciato con lunghezza  $\frac{|S|}{n}$  oppure  $\frac{(n-1)|S|}{n}$ . Nel primo caso avremmo concluso. Altrimenti iteriamo il processo. Deve esistere, infatti, ponendo  $\alpha = \frac{1}{n-1}$ , un segmento parallelo a  $S'$ , con estremi in  $\gamma$  e di lunghezza  $\frac{|S'|}{n-1} = \frac{|S|}{n}$  o  $\frac{(n-2)|S'|}{n-1} = \frac{(n-2)|S|}{n}$ . Dunque in un numero finito di passi otteniamo la tesi.  $\square$

**Proposizione 3.3.2.** *Sia  $c$  una curva in  $T^2$  con classe di omotopia  $(a, b) \in \pi_1(T^2)$ . La curva  $c$  può essere rappresentata da un embedding  $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow T^2$  se e soltanto se  $\gcd(a, b) = 1$  oppure  $a = b = 0$ .*

*Dimostrazione.*  $\Leftarrow$ : Notiamo subito che la classe  $(0, 0)$  è rappresentata da ogni curva semplice e chiusa in  $T^2$  omotopicamente banale. Consideriamo ora la funzione  $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow T^2$  tale che  $k(z) = (z^a, z^b)$  con  $z = e^{i\theta}$ . Un conto esplicito mostra che questa mappa è iniettiva se e soltanto se  $\gcd(a, b) = 1$ .

$\Rightarrow$ : Per prima cosa definiamo il ricoprimento  $p : \mathbb{C} \rightarrow T^2$  con  $p(x+iy) = (e^{ix}, e^{iy})$ . Supponiamo  $\gcd(a, b) = n > 1$  e supponiamo per assurdo che esista un embedding  $k$  come da enunciato. Sia  $\tilde{k} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  un sollevamento di  $k$  che descrive un cammino  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  di estremi  $(0, 0)$  e  $(2\pi a, 2\pi b)$ . Consideriamo il segmento  $S$  di estremi  $(0, 0)$  e  $(2\pi a, 2\pi b)$ . Allora per il Lemma 3.3.1 esiste un segmento  $S'$  parallelo a  $S$  di lunghezza  $\frac{|S|}{n}$  con estremi in  $\gamma$ . Cioè esistono  $s, t \in (0, 2\pi)$  tali per cui  $\tilde{k}(s) - \tilde{k}(t) = 2\pi(\frac{a}{n} + i\frac{b}{n})$ . Dato che  $\frac{a}{n}$  e  $\frac{b}{n}$  sono interi allora per come è definito il sollevamento vale:

$$k(s) = p \circ \tilde{k}(s) = p \circ \tilde{k}(t) = k(t). \quad (3.4)$$

$\square$

Consideriamo un nodo orientato  $K \subset \mathbb{S}^3$  e un suo intorno tubolare  $V$  omeomorfo a  $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Poniamo  $X := \mathbb{S}^3 \setminus \bar{V}$ , allora con lo stesso argomento usato nella sezione precedente, per la successione di Mayer-Vietoris se  $i_* : H_1(X \cap V) \rightarrow H_1(X)$  e  $j_* : H_1(X \cap V) \rightarrow H_1(V)$  sono le mappe in omologia indotte dalle inclusioni, la seguente funzione è un isomorfismo:

$$i_* \oplus j_* : H_1(X \cap V) \rightarrow H_1(X) \oplus H_1(V), \quad (i_* \oplus j_*)([c]) = (i_*([c]), j_*([c])). \quad (3.5)$$

Il gruppo  $H_1(X \cap V) \cong \pi_1(X \cap V)$  è generato da due curve semplici e chiuse. Possiamo scegliere una di queste due curve,  $\eta$ , in modo tale che giri intorno a  $K$ , bordi un disco di

$V$  e la sua orientazione sia tale che  $lk(K, \eta) = 1$ . Poiché  $\eta$  borda un disco di  $V$ , la sua classe di omologia in  $H_1(V)$  è nulla. Dunque  $(i_* \oplus j_*)([\eta]) = (i_*([\eta]), 0)$ , ma  $i_* \oplus j_*$  deve mappare generatori in generatori, allora  $i_*([\eta])$  deve generare  $H_1(X)$ . Possiamo definire un isomorfismo esplicito  $\phi : H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  mandando  $i_*([\eta])$  in 1. Non solo, l'intorno  $V$  è omotopicamente equivalente a  $K$  di conseguenza  $[K]_V$  genera  $H_1(V)$ . Allora la funzione  $\psi : H_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}$  che manda  $[K]_V$  in 1 è un isomorfismo. Abbiamo dunque la seguente successione di isomorfismi:

$$H_1(X \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_1(X) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\phi \oplus \psi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

La preimmagine di  $(0, 1)$  contenuta in  $H_1(X \cap V)$  consta di una sola classe di equivalenza, chiamiamola  $[\gamma]$ . Questa deve essere un generatore (dato che lo è  $(0, 1)$ ) e per la Proposizione 3.3.2 è rappresentata in  $X \cap N$  da una curva semplice e chiusa. In particolare  $\gamma$  è una curva per cui  $[\gamma]_X \in H_1(X)$  è la classe nulla e  $[\gamma]_V = [K]_V$  in  $H_1(V)$ .

**Definizione 3.3.3.** Siano  $K$  un nodo orientato in  $\mathbb{S}^3$  e  $V$  un suo intorno tubolare omeomorfo a un toro pieno. Un *meridiano*  $\eta$  di  $K$  è una curva semplice chiusa appartenente a  $\partial V$ , non omotopicamente banale in  $\partial V$  e che borda un disco (*disco meridiano*) in  $V$ . Una *longitudine standard*  $\gamma$  di  $K$  è una curva semplice chiusa in  $\partial V$  che è omologa a  $K$  in  $H_1(V)$  e omologa alla classe banale in  $H_1(\overline{\mathbb{S}^3 \setminus V})$ .

**Teorema 3.3.4.** Siano  $K$  un nodo in  $\mathbb{S}^3$  e  $\gamma$  una curva semplice, chiusa e omologa a  $K$  in  $V$  (come nella Definizione 3.3.3). Allora  $\gamma$  è una *longitudine standard* di  $K$  se e soltanto se  $lk(\gamma, K) = 0$ .

*Dimostrazione.* Vedendo  $\gamma$  come un elemento in  $\overline{\mathbb{S}^3 \setminus V} =: X$  allora  $[\gamma]_X = n[\eta]$  dove  $[\eta]$  è il generatore di  $H_1(X)$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Usando il Lemma 3.2.1 si ha  $[\gamma]_X = lk(\gamma, K)[\eta]$ . Dunque  $[\gamma]_X = 0$  se e soltanto se  $lk(\gamma, K) = 0$ .  $\square$

Nella Figura 3.4 possiamo vedere due longitudini standard, una del nodo banale e una del nodo trifoglio.

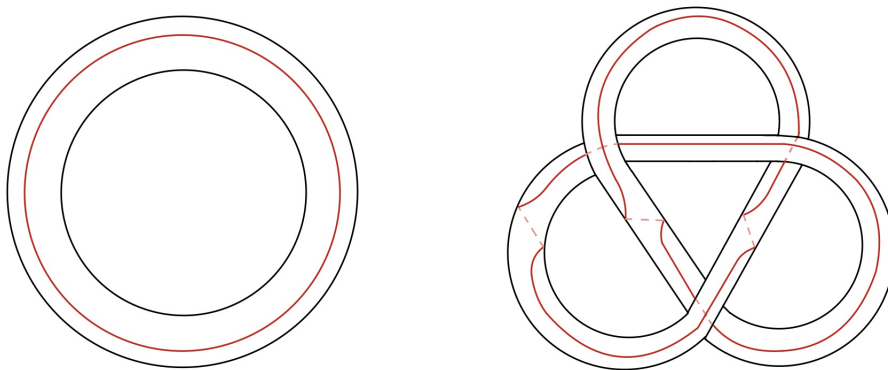


Figura 3.4

### 3.4 Nodi satellite

**Definizione 3.4.1.** Siano  $U$  un nodo banale in  $\mathbb{S}^3$  e  $T$  un suo intorno tubolare. Sia  $K \subset \overset{\circ}{T}$  un nodo tale che:

1. non sia isotopo a  $U$ ;
2. non sia contenuto in una 3-palla  $B \subset T$ , cioè  $K$  deve intersecare ogni disco meridiano di  $T$ .

Consideriamo, ora, un nodo  $C$  in  $\mathbb{S}^3$  con un bordo regolare  $T'$  e sia  $\phi : T \longrightarrow T'$  un omeomorfismo che manda una longitudine standard di  $U$  in una longitudine standard di  $C$ . Poniamo  $K' := \phi(K)$ . Allora  $K'$  è detto *nodo satellite* con *companion*  $C$  e *pattern*  $K$ .

**Definizione 3.4.2.** Sia  $T$  come nella Definizione 3.4.1. Allora  $\mathbb{S}^3 \setminus T$  è un intorno tubolare di un nodo banale  $J$ . Il nodo *doppio di Whitehead di  $C$*  è un nodo satellite con companion  $C$  e con pattern  $K$  tale per cui  $J \cup K$  è il link di Whitehead. In Figura 3.5 possiamo vedere come deve essere fatto  $K$ .

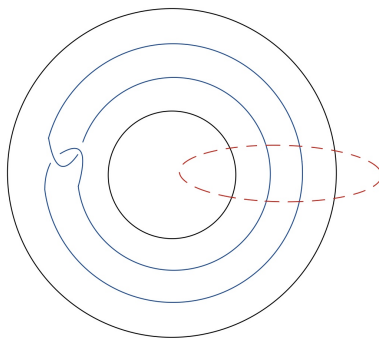


Figura 3.5 In blu è rappresentato il pattern  $K$  mentre  $J$  è la curva rossa e tratteggiata.

*Esempio 3.4.3.* Consideriamo il nodo *doppio di Whitehead del nodo trifoglio*, ottenuto con un omeomorfismo che manda le due longitudini standard in Figura 3.4 una nell'altra. Possiamo vederne un suo diagramma  $D$  in Figura 3.6

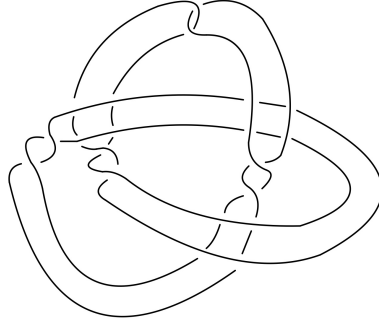


Figura 3.6

Cerchiamo le  $p$ -colorazioni di  $D$ . La matrice sottostante rappresenta il sistema lineare da studiare in  $\mathbb{Z}_p$  con  $p$  primo dispari:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante del minore ottenuto cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna vale 1. Dunque, dato che non si annulla in nessun  $\mathbb{Z}_p$ , non siamo in grado di dire, tramite quest'invariante, se il nodo doppio di Whitehead del nodo trifoglio sia banale o meno.

# Bibliografia

- [1] Gerhard Burde, Heiner Zieschang e Michael Heusener. *Knots*. extended. Vol. 5. De Gruyter Studies in Mathematics. De Gruyter, Berlin, 2014, pp. xiv+417. ISBN: 978-3-11-027074-7; 978-3-11-027078-5.
- [2] Mohamed Elhamdadi, Mustafa Hajij e Kyle Istvan. «Framed knots». In: *Math. Intelligencer* 42.4 (2020), pp. 7–22. ISSN: 0343-6993. DOI: 10.1007/s00283-020-09990-0. URL: <https://doi.org/10.1007/s00283-020-09990-0>.
- [3] Andrew Fish, Alexei Lisitsa e David Stanovský. *A combinatorial approach to knot recognition*. 2015. DOI: 10.48550/ARXIV.1505.06595. URL: <https://arxiv.org/abs/1505.06595>.
- [4] Allen Hatcher. «Notes on Basic 3-Manifold Topology». In: 2001.
- [5] W. B. Raymond Lickorish. *An introduction to knot theory*. Vol. 175. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997, pp. x+201. ISBN: 0-387-98254-X. DOI: 10.1007/978-1-4612-0691-0. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0691-0>.
- [6] Dale Rolfsen. *Knots and links*. Mathematics Lecture Series, No. 7. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976, pp. ix+439.
- [7] Emma Schlatte. *Knot Theory and Applications to 3-Manifolds*. 2010.