

I

S

T

G

E

O

LEZIONI

1. Mer 01/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Introduzione al corso. Varietà lisce. Atlanti compatibili e massimali. Esempi: sfera, spazio proiettivo. No prior topology. Grassmanniana. Funzioni lisce tra varietà lisce. (Bruno Martelli)
2. Ven 03/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Diffeomorfismi. Spazio tangente. Differenziale. Funtorialità. Teorema di invertibilità locale. Rivestimenti lisci. Azioni di gruppo lisce, libere e propriamente discontinue. Toro e bottiglia di Klein. (Bruno Martelli)
3. Mer 08/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Prodotti di varietà. Varietà orientate: due definizioni. Le orientazioni di una varietà connessa sono zero o due. Quoziente di varietà orientabili. Orientabilità di spazi proiettivi reali e complessi. Rivestimento orientante. Esempi: bottiglia di Klein, spazi lenticolari. (Bruno Martelli)
4. Gio 09/03/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Sottovarietà. Esempi: spazi di matrici. Immersioni, embedding, sommersioni, fibrazioni. L'immagine di un embedding e la controimmagine di un valore regolare sono sottovarietà. Esempi: fibrazione di Hopf, immersioni dense di \mathbb{R} nel toro. (Bruno Martelli)
5. Ven 10/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Insiemi di misura nulla in varietà. Lemma di Sard. Atlante adeguato. Partizioni dell'unità. Applicazioni per lo studio di funzioni da varietà arbitraria M a \mathbb{R}^m : ogni funzione liscia definita su un chiuso di M è estendibile a funzione liscia su M ; ogni funzione continua è approssimabile arbitrariamente con funzioni lisce. Teorema di embedding di Whitney per varietà compatte. (Bruno Martelli)
6. Mer 15/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Teorema di immersione e di embedding di Whitney per varietà arbitrarie. Algebra multilineare. Tensori. (Bruno Martelli)
7. Gio 16/03/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Tensori: coordinate, prodotto tensore, contrazioni. Algebra tensoriale. Tensori simmetrici e antisimmetrici. Algebra esterna. (Bruno Martelli)
8. Ven 17/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Fibrati vettoriali. Morfismi, sezioni. Manipolazioni: somma, prodotto tensore, sottofibroato, fibrato quoziante. Restrizioni e pull-back di fibrati. Fibrato tangente. I gruppi di Lie sono parallelizzabili. (Bruno Martelli)
9. Mer 22/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Fibrati tensoriali su varietà. Tensore metrico, varietà pseudo-Riemanniana. Campi vettoriali. Linee integrali, flussi, campi completi. Raddrizzamento locale di campi non nulli. (Bruno Martelli)
10. Gio 23/03/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Estensione di sezioni di fibrati definite su chiusi. Isotopia e isotopia ambiente. (Bruno Martelli)
11. Ven 24/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Metriche Riemanniane su fibrati. Una varietà ha una struttura Lorentziana tempo-orientata se e solo se ha un campo mai nullo. Lemma di strizzamento. Fibrato normale, intorno tubolare: esistenza. (Bruno Martelli)
12. Mer 29/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Conseguenze dell'esistenza dell'intorno tubolare: ogni funzione continua fra varietà è omotopa a funzione liscia; due funzioni lisce sono omotope se e solo lo sono in modo liscio; gruppi di omotopia delle sfere. Unicità dell'intorno tubolare (solo enunciato). Somma connessa di varietà orientate. Parentesi di Lie. (Bruno Martelli)
13. Gio 30/03/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Parentesi di Lie: in coordinate, invarianza per campi f-correlati, due campi commutano se e solo se i flussi commutano localmente. Raddrizzamento simultaneo di campi. Gruppi di Lie: morfismi, sottogruppi di Lie, algebra di Lie. (Bruno Martelli)
14. Ven 31/03/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Foliazioni. Distribuzioni. Teorema di Frobenius. Corrispondenza fra sottogruppi di Lie connessi di un gruppo di Lie e sottoalgebre di Lie (Bruno Martelli)
15. Mer 05/04/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Gruppi di Lie: mappa esponenziale. Derivata di Lie. Varietà con bordo. k-forme in coordinate, pull-back. (Bruno Martelli)
16. Gio 06/04/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Forme differenziali: prodotto wedge, integrazione, integrazione lungo sottovarietà, differenziale esterno. Teorema di Stokes (Bruno Martelli)
17. Mer 19/04/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Conseguenze del teorema di Stokes. Campi elettromagnetici e equazioni di Maxwell. Forma volume. Forme chiuse e esatte. Coomologia di De Rham (Bruno Martelli)

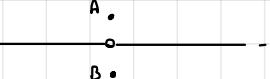
18. Gio 20/04/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Coomologia di De Rham. Invarianza per omotopia. (Bruno Martelli)
19. Ven 21/04/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Successione di Mayer - Vietoris. Coomologia di sfere e spazi proiettivi complessi. Coomologia a supporto compatto. (Bruno Martelli)
20. Mer 26/04/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Dualità di Poincaré e sue conseguenze. Formula di Kunneth (senza dimostrazione) (Bruno Martelli)
21. Gio 27/04/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Trasversalità. Teorema di trasversalità di Thom. Classe di Thom relativa ad una sottovarietà. (Bruno Martelli)
22. Ven 28/04/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Teoria dell'intersezione: corrispondenza fra prodotto wedge e intersezione trasversa di sottovarietà tramite le classi di Thom (solo enunciato ed esempi). (Bruno Martelli)
23. Mer 03/05/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Varietà pseudo-Riemanniane. Forma volume. Distanza fra punti (nel caso Riemanniano). Isometrie. Spazi $R^{\{p,q\}}$, $S^{\{p,q\}}$, $H^{\{p,q\}}$. (Bruno Martelli)
24. Gio 04/05/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Connessioni. Simboli di Christoffel. Le connessioni formano uno spazio affine sullo spazio dei campi tensoriali di tipo (1,2). Campi lungo curve e loro derivata covariante. Campi paralleli. Trasporto parallelo. (Bruno Martelli)
25. Ven 05/05/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Torsione di una connessione. Connessione compatibile con una metrica. Connessione di Levi-Civita. (Bruno Martelli)
26. Mer 10/05/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Connessione di Levi-Civita di sottovarietà. Modelli conformi dello spazio iperbolico. Geodetiche. Geodetiche di sfere e spazio iperbolico. (Bruno Martelli)
27. Gio 11/05/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Geodetiche del piano iperbolico con il modello del semipiano. Flusso geodetico. Mappa esponenziale. Palla geodetica. Lemma di Gauss. (Bruno Martelli)
28. Ven 12/05/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Le curve che minimizzano la distanza sono le geodetiche riparametrizzate. Varietà totalmente geodetiche. Teorema di Hopf - Rinow. (Bruno Martelli)
29. Mer 17/05/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Rigidità delle isometrie. Curvatura: Tensore di Riemann. Buona definizione, interpretazione geometrica, coordinate, espressione in coordinate normali, simmetrie. (Bruno Martelli)
30. Gio 18/05/2023 16:00-18:00 (2:0 h) lezione: Curvatura di Ricci, scalare, sezionale. Proprietà geometriche di queste curvature (senza dimostrazione). (Bruno Martelli)
31. Ven 19/05/2023 14:00-16:00 (2:0 h) lezione: Varietà Riemanniane iperboliche, Euclidee, sferiche. Una varietà Riemanniana è Euclidea se e solo se è piatta ($\text{Riemann} = 0$). Equazione di campo di Einstein. Metrica di Schwarzschild. (Bruno Martelli)

Def. (varietà topologica): una varietà topologica di dim. n è uno spazio topologico X t.c. :

- ① T_2 ② base numerabile ③ localmente omotomorfo a \mathbb{R}^n

Ese. • ogni aperto di \mathbb{R}^n è una varietà topologica di dim. n

• Non è una varietà topologica $Y = \{y = \pm 1\}_{\sqrt{n}} \subseteq \mathbb{R}^2$ dove $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow$

$(x = x' \wedge y = y') \vee (x = x' \wedge x \neq 0)$. Cioè:  È evidente

che non riusciamo a "separare" A e $B \Rightarrow$ non è di Hausdorff. Non è una varietà topologica l'unione non numerata di \mathbb{R}^n .

Sia X una n -varietà topologica.

Def. (atlante): una carta per X è un omotomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ con U aperto di X e V

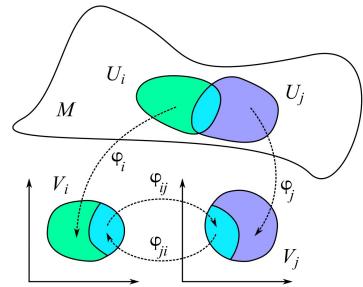
aperto di \mathbb{R}^n . Un atlante per X è un insieme di carte $A = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ t.c. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

L'inverso di una carta è una parametrizzazione.

Def. (mappa di transizione): date due carte φ_i, φ_j

t.c. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, chiamiamo mappa di transizione

$$\varphi_{ij}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_j(U_i \cap U_j), \quad \varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}.$$



Def. (atlante liscio): un atlante è liscio se tutte le mappe di transizioni sono liscie.

Def. (atlanti compatibili): due atlanti lisci t e t' su M sono compatibili se $t \cup t'$ è ancora un atlante liscio. In particolare questa è una relazione di equivalenza.

Def. (varietà liscia) [1^o def.]: una varietà liscia è una coppia $(M, [t])$ con M varietà topologica e $[t]$

classe di equivalenza di un atlante liscio, chiamato anche struttura.

Def. (atlante massimale): un atlante liscio t è massimale se è l'unione di tutti gli atlanti lisci compatibili con t .

Def. (varietà liscia) [2^o def.]: una varietà liscia è una coppia (M, t) dove t è un atlante liscio massimale.

Prop.: le due definizioni di varietà liscia sono equivalenti.

dim. Preso $[t]$ struttura questa è per definizione l'unione di tutti gli atlanti compatibili con t e dunque è massimale. Stessa cosa per il viceversa. \square

2

Esempio:

① $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\tau = \{\text{id}: U \rightarrow U\}$

② Più in generale: (M, τ) varietà liscia. $U \subseteq M$ aperto eredita una struttura naturale di varietà

liscia: $\tau_U := \{\varphi|_U \mid \varphi \in \tau\}$ è ben definito anche se prendo $[\tau]$ sopra: cioè i atlanti compatibili sopra, b sono anche sotto

lo ricopre con i emisferi e coordinate

③ Sfera: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\}$. 1° Atlante: Consideriamo gli emisferi $U_i^+ = \{x \in S^n \mid x_i > 0\}$ e

$U_i^- = \{x \in S^n \mid x_i < 0\}$ $\forall i = 1, \dots, n+1$. Consideriamo l'aperto di \mathbb{R}^n $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

Definisco $\varphi_i^\pm: U_i^\pm \rightarrow B^n$ t.c. $\varphi_i^\pm((x_1, \dots, x_{n+1})) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$. Questo è

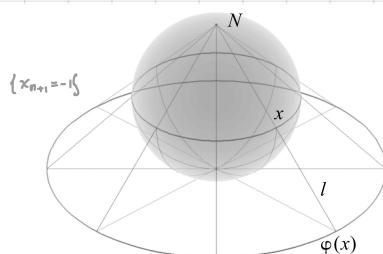
un atlante liscio infatti:

• l'inverso $(\varphi_i^\pm)^{-1}: B^n \rightarrow U_i^\pm$ t.c. $\varphi_i^\pm((y_1, \dots, y_n)) = (y_1, \dots, \pm \sqrt{1 - \|y\|^2}, \dots, y_n)$

• le mappe di transizione sono lisce perché lo sono in generale le composizioni $(\varphi_i^\pm)^{-1} \circ \varphi_j^\pm$.

2° Atlante: costruiamo un atlante con due sole carte (proiezione stereografica): $N := (0, \dots, 0, 1)$

$\varphi_N: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi_N((x_1, \dots, x_{n+1})) = \frac{2}{1-x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n)$



Costruzione di φ_N : la retta passante per N e x è:

$tN + (1-t)x$ con $t \in \mathbb{R}$. Vogli intersecarla con l'ipernormale

$\{x_{n+1} = -1\} \cong \mathbb{R}^n$ e dunque ottenga la condizione $t + (1-t)x_{n+1} = -1$

cioè $t = \frac{x_{n+1} + 1}{x_{n+1} - 1}$. Faccio la stessa cosa col polo Sud definendo

φ_S . È un atlante liscio (facile costruire inversa).

N.B.: $\{\varphi_i^\pm\}$ e $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ sono compatibili e definiscono quindi la stessa struttura di varietà.

④ Spazio proiettivo (reale): $\mathbb{R}\mathbb{P}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ dove $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ t.c. $v = \lambda w$. Considero

$U_i := \{[x_1 : \dots : x_{n+1}] \mid x_i \neq 0\}$ per $i = 1, \dots, n+1$. $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ $[x_1, \dots, x_{n+1}] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$

e $\varphi_i^{-1}([y_1, \dots, y_n]) = (y_1, \dots, \overset{i\text{-esima pos.}}{1}, y_2, \dots, y_n)$. Le funzioni di transizione sono chiaramente lisce.

Dunque $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è una n -varietà.

N.B.: la stessa costruzione funziona con $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ che è una $2n$ -varietà (si identifica al solito

$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$). Ricordiamo anche che $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ sono compatti e connessi.

⑤ Prodotto di varietà: Se (M, τ_M) e (N, τ_N) sono due varietà lisce di dim. m e

(2)

allora $M \times N$ è una $(m+n)$ -varietà liscia con atlante $\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N := \{ \varphi_i \times \varphi_j \mid \varphi_i \in \mathcal{A}_M \text{ e } \varphi_j \in \mathcal{A}_N \}$.

Ad esempio il toro $\cong S^1 \times S^1$ è una 2-varietà. In generale, una 2-varietà è detta superficie.

No prior topology: non è strettamente necessario avere una topologia per definire una struttura liscia: possiamo procedere direttamente con gli atlanti.

Def. (atlante liscio su un insieme): Sia X insieme. Un atlante liscio su X è un insieme $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$

$$+ .: \quad (1) \cup U_i = X;$$

$$(2) \varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{R}^n \text{ biizzazione e } V_i \text{ aperto;}$$

(3) (liscio) $\forall i, j \in I + .$ se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ è aperto $\forall i, j$ e le mappe di transizione $\varphi_{i,j} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sono liscie nel dominio.

Prop.: Un atlante liscio su un insieme X , $\mathcal{A} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, definisce una topologia su X definita da:

$$U \subseteq X \text{ aperto} \Leftrightarrow \varphi_i(U \cap U_i) \text{ aperto in } \mathbb{R}^n \quad \forall i \in I$$

$$\text{dim.}: \cdot \varphi_i(\phi \cap U_i) = \varphi_i(\phi) = \phi \text{ che è aperto di } \mathbb{R}^n \Rightarrow \phi \text{ è aperto di } X;$$

$$\varphi_i(X \cap U_i) = \varphi_i(U_i) = V_i \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \Rightarrow X \text{ è aperto di } X.$$

$$\cdot \text{Siano } \{A_j\}_{j \in J} \text{ aperti di } X \text{ allora } \varphi_i((\bigcup_j A_j) \cap U_i) = \varphi_i\left(\bigcup_j (A_j \cap U_i)\right) = \bigcup_j \varphi_i(A_j \cap U_i) \text{ aperto di } \mathbb{R}^n$$

• Stesso per \cap finito usando che φ è biizzazione. \square

Dunque se questa topologia viene T_2 e N_3 allora (X, \mathcal{A}) è una varietà liscia.

Grassmanniane: applichiamo la "no prior topology" alle grassmanniane definite come:

$$\text{Gr}_K(V) = \{ \text{sottospazio vettoriale di } V \text{ di dim } K \mid V \text{ sp. vett. di dim. } n \subset \omega < K < n \}.$$

Definiamo un atlante liscio sull'insieme $\text{Gr}_K(V)$:

• Sia B base di V , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. $W := \text{Span}\{v_1, \dots, v_K\}$ e $Z = \text{Span}\{v_{K+1}, \dots, v_n\}$.

$$U_B = \{w' \in \text{Gr}_K(V) \mid w' \oplus Z = V\}. \text{ Notiamo che } U_B \text{ non è vuoto (contiene } w).$$

Definisce le parametrizzazioni: $\varphi_B^{-1} : \mathbb{R}^{K(n-K)} \cong Z \times \dots \times Z \rightarrow U_B + .$

$$(z_1, \dots, z_K) \mapsto \text{Span}\{v_1 + z_1, \dots, v_K + z_K\}.$$

per l'iniettività basta scriversi tutto il conto; si ottiene ovvio

• Qua, $\bigcup_B U_B = \text{Gr}_K(V)$; φ_B^{-1} è ben definito per definizione di W e c'è una biizzazione c'

(4)

un'immmediata verifica di algebra lineare. De verificare che è liscia.

Def. (mappa liscia): Sia $f: M^m \rightarrow N^n$ funzione tra varietà lisce. Si dice che f è liscia se lo è "letta in carte" cioè: $\forall p \in M \exists$ carta $\varphi: U \rightarrow V$ e $\psi: W \rightarrow Z$ t.c. $p \in U, f(U) \subset W$ e la mappa $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è liscia:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & W \\ \varphi \downarrow & \cap & \downarrow \psi \\ V \subseteq \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F} & Z \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

N.B. Se f è liscia per certe carte, allora è liscia per ogni carta: supponiamo che p stia anche in

\bar{U} e $f(\bar{U}) \subseteq \bar{W}$ t.c. ho il diagramma: $\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{W} \\ \bar{\varphi} \downarrow & \cap & \downarrow \bar{\psi} \\ \bar{V} & \dashrightarrow & \bar{Z} \end{array}$. Dunque $U \cap \bar{U} \neq \emptyset$ ← la mappa di transizione è liscia!

Def. (diffeomorfismo): $f: M \rightarrow N$ liscia è un diffeomorfismo se $\exists f^{-1}: N \rightarrow M$ liscia.

N.B. - Diffeomorfismo \Rightarrow omomorfismo

• Due spazi si dicono diffeomorfi se esiste un diffeomorfismo tra loro. È una relazione di equiv.

Esempi:

① Ogni palla di \mathbb{R}^n è diffeomorfa a ogni altra palla $\hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

② $\vartheta: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ t.c. $\vartheta(x) = -x$ è un diffeomorfismo

③ $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^2$: infatti $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \cup \infty \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1$ con $f([x_1 : x_2]) = \frac{x_1}{x_2}$

e g è la proiezione stereografica. (Stessa def. per $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^2$). Per dire che è diffeo va esplicitato la composizione.

Def. (curva): M varietà liscia. Una curva in M è $\gamma: I \rightarrow M$ liscia con I aperto di \mathbb{R} .

Def. (sp. tangente): M varietà liscia, $p \in M$. Lo spazio tangente a M in p è:

$T_p M = \{ \gamma: I \rightarrow M, \alpha \in I, \gamma(\alpha) = p \} / \sim$ dove $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow$ lette in una carta (e quindi in tutte per il solito principio generale) hanno lo stesso tangente in p cioè $\exists \varphi: U \rightarrow V$ carta t.c.

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

infatti lette in carte
che come mappa tra varietà:
 $\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\gamma_1} & V \end{array}$ ← massimale è diffeo dunque
è liscia e ha senso derivare

N.B. Se $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto allora $T_p U \cong \mathbb{R}^n$ dove $[r] \mapsto r'(0)$

Def. (derivazione): Una derivazione in p è un'operazione che assegna un numero $v(f)$ a ogni funzione liscia $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ con U aperto intorno di p , che soddisfa:

① locale; se $f = g$ coincidono su un aperto contenente p allora $v(f) = v(g)$;

② lineare: $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

③ Leibniz: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

Def. (_{sp. tangente}^{z' def.}): $T_p \mathcal{N}$ è l'insieme delle derivazioni in p .

N.B. $T_p \mathcal{N}$ così definito è uno spazio vettoriale infatti ogni combinazione lineare $\lambda v + \mu v'$ con v e v' derivazioni è ancora una derivazione dunque posso definire $(v+w)(f) = v(f) + w(f)$ e $(\lambda v)(f) = \lambda v(f)$

N.B. Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in U$ allora $\partial_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (derivata direzionale) è una derivazione. Vale il viceversa in \mathbb{R}^n

Prop.: Se $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ ogni derivazione è una derivata direzionale ∂_v per qualche v vettore.

dim. Supponiamo $p=0$ per semplicità. Per la formula di Taylor.

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j} h_{ij}(x)x_i x_j \text{ con } h_{ij} \text{ funzioni lisce.}$$

$$\text{Dunque } v(f) = f(0)v(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)v(x_i) + \sum_{i,j} v(h_{ij}(x)x_j) \Rightarrow v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$$

$$\Rightarrow v(1) = 0 \text{ e } v(h_{ij}(x_i x_j)) = \underbrace{v}_{f} \underbrace{x_i x_j}_{g} \text{ sono le proiezioni i,j}$$

$$\text{Dunque } v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)v(x_i) \text{ cioè } v = \partial_w \text{ con } w := \begin{pmatrix} v(x_1) \\ \vdots \\ v(x_n) \end{pmatrix} \quad \square$$

Corollario: $\mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$ è un isomorfismo $\forall U$ aperto di \mathbb{R}^n .

$$v \mapsto \partial_v$$

dim. La mappa è chiaramente ben definita e iniettiva. È surgettiva per la prop. prec. \square

Prop.: $T_p \mathcal{N}$ (def. 1) \longrightarrow $T_p \mathcal{N}$ (def 2)

$$[\gamma] \longmapsto v: f \mapsto v(f) = (f \circ \gamma)'(0) \text{ è una biiezione.}$$

dim. Se prendo altro rappresentante di $[\gamma]$ allora per ip. di $[\gamma]$, v è ben definita.

Per vedere che è iniettiva e surgettiva leggo tutto in carte e dunque $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e dire

che $[\gamma_1]f[\gamma_2]$ significa proprio che $\gamma_1'(0) \neq \gamma_2'(0)$. Per surgettività: $T_p \mathcal{N} = \text{derivazioni} = \partial_w \text{ } w \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ prendo $\gamma(t) = pt$.

Oss.: la def. 2 è più astratta ma racchiude una struttura naturale di sp. vettoriale, solo quella però,

non c'è un prodotto scalare e dunque, per ora, non ha senso parlare di lunghezza dei vettori.

Def. (differenziale): $f: \mathcal{N} \rightarrow N$ liscia, $p \in \mathcal{N}$. Il differenziale di f in p è

$$df_p: T_p \mathcal{N} \longrightarrow T_{f(p)} N$$

$$[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma] \quad \text{oppure} \quad v \longmapsto w: g \longmapsto v(g \circ f)$$

(6)

N.B. • Le due definizioni coincidono perché c'è questo diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 [\gamma] & \xrightarrow{T_p^1 \rightarrow T_p^2} & (\nu : f \mapsto \nu(f) = (f \circ \gamma)'(0)) \\
 df_p \downarrow & & \downarrow df_p \\
 [f \circ \gamma] & & \stackrel{1^{\text{st}} \text{ def.}}{\downarrow} \\
 w : g \mapsto \nu(g \circ f) = (g \circ f \circ \gamma)'(0) = (g \circ (f \circ \gamma))'(0) \Rightarrow [f \circ \gamma] \in T_{f(p)} N
 \end{array}$$

Dunque la buona definizione della prima def. segue dalla seconda.

• df_p è lineare : $df_p(\mu v_1 + \lambda v_2)(g) = (\mu v_1 + \lambda v_2)(g \circ f) = \mu v_1(g \circ f) + \lambda v_2(g \circ f) = \mu df_p(v_1) + \lambda df_p(v_2)$

e di conseguenza anche la prima def. lo è.

Prop.: df_p è un funtore dalle varietà lisce agli sp. vettoriali.

$$\text{dim. } \cdot d(Id)_p ([\gamma]) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. 1}}}{[\text{id} \circ \gamma]} = [\gamma] \Rightarrow d(Id)_p = \text{Id}_{T_p M}$$

$$\cdot d(f \circ g)_p ([\gamma]) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. 1}}}{[f \circ g \circ \gamma]} = df_{g(p)} \circ dg_p \quad (\text{chain rule})$$

Corollario: $f: M \rightarrow N$ diffeomorfismo $\Rightarrow df_p$ invertibile $\forall p \in M$ (per funtorialità con $f \circ f^{-1} = \text{id}$)

Oss. Se $U \subseteq M$ aperto allora $T_p U = T_p M \quad \forall p \in U$ in modo canonico. Infatti dato che U è intervallo di p $T_p U \subseteq T_p M$. Se considero $f \in C^\infty(U'(p))$ allora $v_U(f) = v_M(f|_U)$.

Oss. Consideriamo le carte $\varphi: U \rightarrow V$ e $\psi: W \rightarrow Z$ risp. di M e N con $f(U) \subseteq W$.

Abbiamo quindi il diagramma commutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{f} & W & & T_p M \xrightarrow{df_p} T_p N \\
 \varphi \downarrow & \Downarrow & \downarrow \psi & & \downarrow df_p \quad \downarrow d\psi_{f(p)} \\
 V & \xrightarrow{F} & Z & & \mathbb{R}^m \xrightarrow{dF_{f(p)}} \mathbb{R}^n \\
 & & \xrightarrow{\text{per funtorialità}} T_p U \xrightarrow{d\varphi_p} T_{\varphi(p)} V & \xrightarrow{\text{per Oss. prec. ricordando}} & \\
 & & \downarrow d\varphi_p & & \downarrow d\psi_{f(p)} \\
 & & T_{\varphi(p)} V \xrightarrow{dF_{\psi(\varphi(p))}} T_{\psi(f(p))} Z & \text{che } T_p \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n & \\
 & & & & \text{c'è uno Jacobiano matrice nxm}
 \end{array}$$

Ma una carta nell'insieme massimale è un diffeomorfismo dunque le mappe verticali sono isomorfismi.

Dunque $\dim_{\mathbb{R}} T_p M = \dim_{\mathbb{R}} T_p N \Leftrightarrow m=n$. Non solo, il fatto che le mappe verticali siano diffeo. ci dice che $\dim M = m = \dim_{\mathbb{R}} T_p M$

Corollario: $M \cong N \Rightarrow \dim M = \dim N$

Def. (diffeomorfismo locale): $f: M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo locale in $p \in M$ se $\exists U(p)$ e

$V(f(p))$ t.c. $f(U) = V$ e $f|_U$ è diffeomorfismo con l'immagine.

Teo (Invertibilità locale): $f: \Pi \rightarrow N$ tra varietà. f è un diffeomorfismo locale in $p \Leftrightarrow df_p$ è invertibile.

dim. \Rightarrow ovvia \Leftarrow leggo in carte come nei diagrammi precedenti e applica teorema di analisi \Rightarrow a F (la nozione di differenziabile per aperti di \mathbb{R}^n coincide con quella nuova). \square

Def. (Rivestimento liscio): $f: \Pi \rightarrow N$ liscia è un rivestimento liscio se è un rivestimento topologico e è un diffeomorfismo locale. \rightarrow (e quindi Π, N hanno stessa dimensione perché df_p invertibile)

Def.: G gruppo, X sp. top. $G \wr X$ è libera se $g(p) + p \forall g \neq id$ e è propriamente discontinua se $\forall x, y \in X \exists U(x), V(y)$ t.c. $| \{g \in G \mid gU \cap V \neq \emptyset \} | < +\infty$.

Def. (azione liscia): un'azione liscia di G su Π è $G \rightarrow \text{diffeo}(\Pi)$ omomorfismo di gruppi.

Teo: X Hausdorff e $G \wr X$ libera e propriamente discontinua $\Rightarrow X/G$ è di Hausdorff e $X \xrightarrow{\pi} X/G$ è un rivestimento regolare. (fatto a GZ)

Teo: $G \wr \Pi$ in modo liscio, libera e prapr. discontinua $\Rightarrow \Pi/G$ ha una struttura naturale di varietà liscia e $\pi: \Pi \rightarrow \Pi/G$ è un rivestimento liscio.

dim.: $\cdot \Pi/G$ è una varietà topologica per il teorema precedente. Come atlante per Π/G considero un ricoprimento di Π/G fatto da aperti ben rivestiti. Sia U uno di questi aperti e U aperto di Π t.c. $\pi(U) \cong U$. Sia $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ carta per U allora $\varphi \circ \pi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta per U . Ora questo atlante è liscio poiché se prendo una mappa di transizione:

$$\varphi_j \circ \pi_j^{-1} \circ (\varphi_i \circ \pi_i^{-1})^{-1} = \underbrace{\varphi_j \circ \pi_j^{-1} \circ \pi_i \circ \varphi_i^{-1}}_{\text{l'atlante } \Pi \text{ è liscio}} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \text{diagramma: } \Pi \xrightarrow{\pi} \Pi/G \\ \text{con } \pi_j: \Pi \rightarrow \Pi/G \text{ e } \pi_i: \Pi \rightarrow \Pi/G \\ \text{e } \pi_j^{-1} \circ \pi_i = g|_{U_i} \text{ è diffeo} \\ \text{dunque liscio} \end{array}$$

• Il rivestimento è liscio, basta leggerlo in carte.

Oss. Se ho $\tilde{\Pi} \xrightarrow{\pi} \Pi$ rivestimento topologico e Π è varietà liscia allora $\tilde{\Pi}$ eredita una struttura di varietà liscia. (In generale non si può far scendere la struttura, servono ip. aggiuntive come nel teorema precedente). Infatti riporto $\tilde{\Pi}$ con aperti che hanno immagine un aperto ben rivestito in Π , risp. \tilde{U} e U . Considero $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ carta allora una carta per \tilde{U} è $\varphi \circ \pi|_{\tilde{U}}$. È liscio poiché:

$$\underbrace{\varphi_j \circ \pi|_{\tilde{U}_j} \circ \pi^{-1}|_{\tilde{U}_i} \circ \varphi_i^{-1}}_{\text{simile nell' } \Pi \text{ è } id} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \text{ liscio per hp.}$$

Esempi :

1) Sia $i: M \rightarrow M$ t.c. $i(x) \neq x \quad \forall x \in M$ e $i^2 = id$. Allora ponendo $\tilde{g} = \langle i \rangle$ si ha che M/\tilde{G} è varietà liscia e $M \rightarrow M/\langle i \rangle$ è un rivestimento di grado 2. Ad esempio $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \langle \text{antip.} \rangle$

2) Toro n-dimensionale: $\mathbb{Z}^n \otimes \mathbb{R}^n$ per traslazione, $g(v) = v + g$. L'azione è libera e propriamente discontinua dunque $T^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ è una varietà liscia chiamata toro n-dimensionale. In particolare:

$$T^n \stackrel{\text{diffeo.}}{\simeq} \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ volte}} \text{ tramite } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \quad f(x_1, \dots, x_n) = (e^{2\pi x_1 i}, \dots, e^{2\pi x_n i})$$

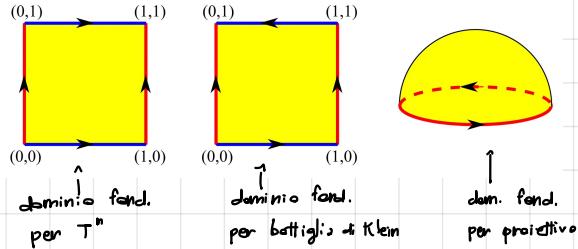
che passa al quoziente;

3) Bottiglia di Klein: Consideriamo $f(x, y) = (x+1, y)$ e $g(x, y) = (-x, y+1)$ e il gruppo generato da f e g . Si vede che G agisce in maniera libera e propriamente discontinua su \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^2 / G è chiamata bottiglia di Klein.

4) Dominio fondamentale: Sia G un gruppo che agisce in maniera liscia, libero e propriamente discontinua e definiamo dominio fondamentale per M un chiuso $D \subset M$ t.c.:

- ogni orbita interseca D in almeno un punto;
- ogni orbita interseca $\text{int}(D)$ al più in un punto.

Allora $M/G \simeq D/G$.



Def. (orientabilità 1): Una varietà orientata è una varietà liscia M dotata di un atlante orientato
cioè $\forall \varphi_{i,j}$ di transizione si ha $\det(d(\varphi_{i,j})_p) > 0 \quad \forall p \in \text{Dom}_{ij}$. Più precisamente è una classe di atlanti $[A]$ che sono ori-compatibili cioè la loro unione è ancora un atlante orientato.
se la varietà è connessa basta verificare su un punto perché φ_{ij} diffa. $\Rightarrow \det(d(\varphi_{ij})_p) > 0 \iff$ sempre > 0 o sempre < 0 continuo-

Def. (orientabilità 2): Una varietà orientata è una varietà liscia M t.c. $\forall p \in M$ $T_p M$ è dotato di un'orientazione e queste orientazioni sono loc. coerenti. Cioè $\forall p \in M \exists U(p) \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}^n$ carta t.c. l'orientazione di $T_q M \quad \forall q \in U$ è indotta da φ , cioè $\{v_1, \dots, v_n\} > 0 \Leftrightarrow \{d\varphi(v_1), \dots, d\varphi(v_n)\} > 0$

Remark: Se ho V sp. vettoriale allora posso mettere una rel. di eq. \sim sulle basi cioè

$B \sim B' \Leftrightarrow \det(M_{B'}^B(i|_V)) > 0$. Questa relazione ci dà 2 classi di equivalenza,

Prop.: Orientabilità 1 \Leftrightarrow Orientabilità 2

dim. \Rightarrow Per dare un'orientazione a $T_p M$ basta usare $\varphi \in A$ atlante orientato e dire che una

9 base in $T_p M$ è positiva $\Leftrightarrow \omega$ è la sua immagine tramite $d\varphi_p$. Dobbiamo vedere che però non dipende da φ : consideriamo dunque due carte φ_i e φ_j + c. $p \in U_i \cap U_j$. Allora

$$\varphi_j|_{U_i \cap U_j} = \varphi_{ij} \circ \varphi_i|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow d\varphi_j = d\varphi_{ij} \circ d\varphi_i \rightarrow \det(d\varphi_j) = \det(d\varphi_{ij}) \det(d\varphi_i)$$

\gg per φ .

$\Leftarrow \forall p \exists \varphi_p: U(p) \rightarrow V$ carta per cui l'orientazione di $T_p M$ è indotta da φ $\forall q \in U(p)$. Pongo

$$A = \{ \varphi_p \mid p \in M \}. \text{ È orientato poiché: } \det(d(\varphi_{ij})) = \det(d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) = \det(d\varphi_j) \cdot \det(d\varphi_i)^{-1} > 0$$

perché in p $d\varphi_j$ e $d\varphi_i$ sono entrambe negative o entrambe positive. \square

Prop.: Se M è connessa allora ha 0 oppure 2 orientazioni.

dim. • Se t è un atlante orientato, definisce l'atlante opposto $t' = \{r \circ \varphi \mid \varphi \in t\}$ dove r è una

riflessione di \mathbb{R}^n rispetto ad un iperpiano (es. $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{r} (x_1, \dots, -x_n)$). t' è ben orientato:

$$(r \circ \varphi)_{ij} = r \circ \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ r = r \circ \varphi_{ij} \circ r \Rightarrow \det(d(r \circ \varphi)_{ij}) = (-1) \cdot \det(d(\varphi_{ij})) \cdot (-1) = \det(\varphi_{ij})$$

Inoltre t e t' non sono orientati poiché se prendo una mappa di transizione tra i elementi di t e un elemento di t' ho che $\det(d((r \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})) = \det(r) = -1 < 0$. Dunque $[t] \neq [t']$.

• Supponiamo esista per assurdo t'' orientato. Siano $U := \{x \in M \mid \text{le orientazioni di } t \text{ e } t'' \text{ coincidono}$

su $T_x M$ e $U' := \{x \in M \mid \text{le orientazioni di } t' \text{ e } t'' \text{ coincidono su } T_x M\}$. Chiaramente $M = U \cup U'$

(perché $T_x M$ può avere solo 2 orientazioni); inoltre U e U' sono aperti (facciamolo per U : $\forall p \exists$

$\varphi: A(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi': A'(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ carte risp. di t e $t'' \Rightarrow$ considero $A(p) \cap A'(p)$ che è ancora un

aperto di M contenente p e per def. le orientazioni qui devono coincidere). Per connessione, allora, se U

e U' devono essere vuoti, se U è vuoto $\Rightarrow [t'] = [t'']$. \square

Def (varietà orientabile): M è orientabile se ha un'orientazione.

Esempi: ① \mathbb{R}^n orientabile infatti $T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ e come orientazione c'è quella canonica data da e_1, \dots, e_n .

② M orientato $\Rightarrow U \subseteq M$ è canonicamente orientato.

③ M, N orientate $\Rightarrow M \times N$ orientata. (oss. $T_{(p,q)} M \times N = T_p M \times T_q N$ dato che una curva in $M \times N$ è

unione disgiunta di curva in M e N cioè $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ con $\alpha(a) = p$ e $\beta(a) = q$)

④ S^n è orientabile perché considero $t = \{\varphi_N, \varphi_S\}$ con $U_N \cap U_S$ connesso dunque $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{conn.}} \mathbb{R}^n$

c quindi $\text{sgn}(\det(d(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1})_x))$ non dipende da x allora se $x > 0$ allora se $x < 0$ cambia φ_N con φ_N .

Def. (diffeo. che preserva l'orientazione): $\varphi: M \rightarrow N$ diffeomorfismo tra varietà orientate preserva l'orientazione

se $d\varphi_p$ preserva l'orientazione. Stessa cosa si inverte.

✓ CONFERMA (?)

Oss. Se M è connessa allora φ preserva o inverte (si fa sempre vedere considerando i due insiemi U e

U' fatti dai punti dove φ preserva e dai punti dove φ inverte e facendo vedere che sono aperti).

Oss.: M connessa e orientabile, $\varphi: M \rightarrow N$ diffeo. Per oss. precedente φ inverte o preserva ma questo non dipende dall'orientazione scelta. $\rightarrow d\varphi_p$ manda $\{v_1, -v_1\}$ in $\{d\varphi_p(v_1), -d\varphi_p(v_1)\}$ ma la matrice cambio base...
scrivere bene

Def. (specchiabile): una varietà M è specchiabile se \exists un diffeo. $\varphi: M \rightarrow N$ che inverte l'orientazione.

Ese. \mathbb{R}^n e S^n sono specchiabili tramite una riflessione.

Prop.: $G \curvearrowright M$ liscamente, liberamente, propri. disc. Allora M/G è orientabile $\Leftrightarrow M$ è orientabile e

$G \curvearrowright M$ preserva l'orientazione.

dim. Abbiamo $M \xrightarrow{\pi} M/G$ rivestimento liscio dunque:

- Sollevo l'orientazione tramite π ($\pi_{|U}$ diffeo, basta diffeo locale): cioè sollevo le orientazioni sui tangenti
- Inoltre $g \curvearrowright M$ preserva l'orientazione poiché se $g(p) = \tilde{p}$ allora $\pi \circ g(p) = \pi(\tilde{p}) = \pi(p) \Rightarrow d\pi_{\tilde{p}} \circ dg_p = d\pi_p$.

π per costruzione abbiamo richiesto che $d\pi_p$ conservasse l'orientazione $\forall p \Rightarrow dg_p$ preserva l'orientazione.

\Leftarrow mandiamo in avanti l'orientazione di M così: $\forall p \in M/G$ induciamo su $T_p M$ l'orientazione di

$T_{\tilde{p}} M$ tramite $d\pi_{\tilde{p}}$ per un qualche \tilde{p} sollevamento di p . È ben posta poiché se \tilde{p}' è un altro solle-

vamento di p allora $\exists g \in G$ t.c. $g(\tilde{p}') = \tilde{p}'$ e dunque $d\pi_{\tilde{p}'} \circ dg_{\tilde{p}} = d\pi_{\tilde{p}}$ ma $dg_{\tilde{p}}$ e

$d\pi_{\tilde{p}'}$ preservano l'orientazione per hip. □

Ese.: $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \{ \text{ant. id} \}$. L'azione di g è liscia, libero e ovviamente propri. discontinua. Ora

L'antipodale preserva l'orientazione $\Leftrightarrow n$ dispari (comp. di $n+1$ riflessioni). Dunque si ha:

Corollario: \mathbb{RP}^n orientabile $\Leftrightarrow n$ dispari.

Teorema: M connessa non orientabile. $\exists \widetilde{M} \rightarrow M$ rivestimento di grado 2 t.c. \widetilde{M} è orientabile. \widetilde{M} è chiamato rivestimento orientante.

dim. $\widetilde{M} := \{(p, Q) \mid p \in M \text{ e } Q \text{ orientazione di } T_p M\} \times \pi: \widetilde{M} \rightarrow M \quad (p, Q) \mapsto p \quad (|\pi^{-1}(p)| = 2)$. Diamo struttura di varietà orientata a \widetilde{M} con la no prior topology:

Definisco $\hat{\mathcal{A}} := \{\tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i\}$ così: $\tilde{U}_i := \{(p, \sigma) \mid p \in U_i, \sigma \text{ orientazione indotta da } d\varphi_i \text{ presa da } \mathbb{R}^n\}$ (1)

$\cup \tilde{U}_i = \tilde{M}$ perché se $\varphi_i \in \mathcal{A} \Rightarrow r \circ \varphi_i \in \mathcal{A}$ per massimalità e dunque avrà sia (p, σ^+) che (p, σ^-) . Poi, $\tilde{\varphi}_i := \varphi_i \circ \pi$ e dunque $\tilde{V}_i = V_i$. $\tilde{\varphi}_i$ bietazionale per def. e $\tilde{\varphi}_{ij} = \tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}$ liscie per def. Dava vedere che $\tilde{\varphi}_{ij}(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ è aperto: preso $(p, \sigma) \in \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ significa che $d\varphi_i$ e $d\varphi_j$ hanno det positivo $\Rightarrow \det(\varphi_{ij})_{\varphi_i(p)} > 0 \Rightarrow \exists$ aperto $W \subseteq \tilde{\varphi}_{ij}(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ dove il det rimane positivo (dunque ha anche mostrato che attole è orientabile). \square

Corollario: M connessa. Se $\pi_1(M)$ non ha sottogruppi di indice 2 $\Rightarrow M$ è orientabile

Corollario: M semplicemente connessa \Rightarrow è orientabile

Se non fosse orientabile per teorema
prec. \exists riv. di grado 2 e dunque sotto-
gruppo di indice 2

Esempio: ① \mathbb{CP}^n è orientabile per il Corollario (\mathbb{C} semplicemente connesso, si poteva dire anche usando l'attra-
tore standard dato che se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ è un biolomorfismo allora $\det(J_f) = 1 \dots 1^n$ e df è C -lineare
dunque $z \rightarrow az$ per Cauchy-Riemann \Rightarrow preserva orientazione).

② Toro è orientabile: $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ con $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{R}^2$ per transl. \Rightarrow è orientabile per prop. (possiamo vederlo anche
come $S^1 \times S^1$)

③ Bottiglia di Klein non è orientabile: le glissoriflessioni invertono l'orientazione.

④ Nastro di Möbius non è orientabile: $\mathbb{R}^2 / \langle \gamma \rangle$ con $\gamma(x, y) = (-x, y+1)$ che sono glissoriflessioni.

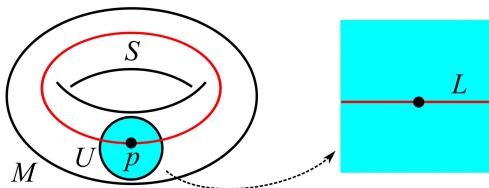
⑤ Spazi lenti colori è orientabile: \mathbb{S}^3 / G con $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ e $G = \langle \gamma \rangle$ dove fissati (p, q) coprimi

$\gamma(z, w) = \left(e^{\frac{2\pi i}{p}} z, e^{\frac{2\pi i}{q}} w \right)$. Allora $G = \{id, \gamma, \dots, \gamma^{p-1}\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con γ che non ha punti
fissi $\forall i \neq 0$ e l'az. è libera e prop. discontinua. $L(p, q) := \mathbb{S}^3 / G$ è connesso, compatta e orientabile.
 \hookrightarrow gruppo finito \hookrightarrow Imm di conn + compatto

In $[L(p, q)] \cong G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e al variare di q si ottengono varietà non omogenee.

Def. (sottovarietà): M^m varietà, $S \subseteq M$ è una sottovarietà di dimensione k se $\forall p \in S \quad \exists U(p) \subseteq M$

aperto e una carta $U(p) \xrightarrow{\varphi_p} \mathbb{R}^m$ t.c. $\varphi(U \cap S) = L \subseteq \mathbb{R}^m$ è un k -sottospazio affine.



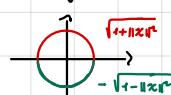
Oss.: A meno di postcomponere possiamo chiedere che $L = \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^m$ cioè $L = (e_1, \dots, e_k)$. (ruota e trasl.).

Oss.: Una sottovarietà $S \subseteq M$ è in modo naturale una varietà liscia. Un attante c'è $t = \{ \varphi_{|S} \}$ con φ come da def. e la dimensione di S è proprio k .

Esempio (grafico di funzione): $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia, $S = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\}$ è una sottovarietà
di dimensione m . (Al posto di \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n posso mettere anche \mathbb{M}^m e \mathbb{N}^n tanto c'è un problema locale).

dim. basta una carta: $\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ $(x, y) \xrightarrow{\varphi} (x, y - f(x))$, $\varphi(S) = \mathbb{R}^m \times \{0\}$. \square

Esempio \mathbb{S}^n è una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} infatti è localmente il grafico di una funzione e per esempio precedente è una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} .



Oss. Se $S \subseteq \mathbb{M}$ è una sottovarietà, allora $\forall p \in S \quad T_p S \hookrightarrow T_p \mathbb{M}$ naturale, lineare e iniettiva, infatti \curvearrowleft curve \curvearrowleft derivazioni.
basta prendere $T_p S \ni [\alpha] \mapsto [\alpha] \in T_p \mathbb{M} \circ \quad T_p S \ni v \mapsto v' : f \mapsto v(f|_S)$. Dunque $T_p S \subseteq T_p \mathbb{M}$.

Def. (immersione e sommersione): $f: M^m \rightarrow N^n$, $p \in M$. Allora:

- f è un'immersione in p se df_p iniettivo; ($\Rightarrow m \leq n$)
- f è una sommersione in p se df_p suriettiva. ($\Rightarrow m \geq n$)

Teo (forma normale): f è un'immersione in $p \Leftrightarrow \exists$ carte \curvearrowleft negli attanti di partenza: $U(p) \xrightarrow{f} V(f(p))$ dove $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \eta \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

f è una sommersione \Leftrightarrow " dove $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

dim. GTD \square

Def. (embedding): $f: M \rightarrow N$ è un embedding se è un'immersione che è un omot. sull'immagine.

Oss. f immersione \Rightarrow f localmente iniettiva. \rightarrow derivano da teo. inv. locale immediatamente

Oss. (diffeo locale \Leftrightarrow immersione e sommersione) $\not\Rightarrow$ iniettivo / surgettivo.

Oss. Esempio di immersione iniettiva che non è embedding:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \quad \text{è continua, biaunivoca ma non è aperta (non c'è un intorno del punto rosso).}$$

Def. (propria): $f: X \rightarrow Y$ è propria se $\forall K \subseteq Y$ compatto allora $f^{-1}(K)$ è compatto.

Esercizio: $f: M \rightarrow N$ immersione iniettiva. f propria \Rightarrow f embedding (nelle consegne).

Corollario Se M è compatto e $f: M \rightarrow N$ è immersione iniettiva allora f è embedding (basta

dire che f è propria ma $K \subseteq N$ compatto è chiuso perché Y T2 $\Rightarrow f^{-1}(K)$ è chiuso in un compatto e dunque compatto).

Esempio: $T = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, $\alpha \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$; $\overbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} T}^g$ c'è un'immersione iniettiva ma non embedding.

da iniettivo
? (da verificare) verifica (teoria)

uso es. di densità delle
consegne e vedere che
 g non è continua

Prop.: $f: M \rightarrow N$ embedding $\Rightarrow f(M)$ è una sottovarietà di N .

dim. Si: $f(p) = q$. Dato che f è omot. allora $f: M \rightarrow f(M)$ è aperta e dunque $\forall p \in M \quad \exists U(p) \subseteq M$ e

$\exists V(f(p)) \subseteq N$ t.c. $f(U) = V \cap f(M)$. Per il Teorema della forma normale $\exists U' \subseteq U$ e $V' \subseteq V$ t.c. :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0). \text{ Dunque } \psi \text{ è la carta cercata poiché: } \\ f(U') = V' \cap f(\pi). \\ \psi(V' \cap f(\pi)) \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^m. \quad \square \end{math>$$

Def. (valore regolare): $f: \mathbb{R} \rightarrow N$. $q \in N$ è un valore regolare se f è sommersione in p $\forall p \in f^{-1}(q)$.

Se f è una sommersione in p , p si dice punto regolare.

Totema: Se q è un valore regolare, allora $S = f^{-1}(q) \subseteq \mathbb{R}$ è una sottovarietà di dim. $\dim M - \dim N$.

Inoltre $\forall p \in S \quad T_p S = \text{Ker}(df_p)$. dim. \square

$F \equiv f$ in questo caso

Esempio: $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. 1 è valore regolare ($p = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $df_p = [2x_1, \dots, 2x_{n+1}]$)
 $x \mapsto \|x\|^2$

dunque in 0 abbiamo la matrice nulla mentre in ogni altro punto $\text{rk} = 1$ e dunque è surgettiva).

Quindi $S^n = f^{-1}(1)$ e dunque S^n è una sottovarietà e $T_p S^n = \text{Ker}(2x_1, \dots, 2x_{n+1}) = \langle p \rangle^\perp$.

Esempi: ① V sp. vett. reale di dimensione n è una n -varieta' lascia. Infatti $\mathcal{L} = \{f_B: V \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{B \text{ base}}$

② $M(m, n, \mathbb{R})$ è una m, n -varieta'

③ $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq M(n, \mathbb{R})$ è un aperto \Rightarrow sottovarietà (viene da un condizione aperta cioè $\det A \neq 0$).

④ $SU(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ è una sottovarietà di codimensione 1

dim. usiamo $GL(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$. Ora $d(\det)_A: T_A GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ma $GL(n, \mathbb{R})$ aperto di $M(n, n, \mathbb{R})$

dunque hanno lo stesso tangente, allora $d(\det)_A: M(n, n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, ora:

$$\det(A + tB) = \det(A) \det(I_A + tA^{-1}B) = \det(A) (1 + \text{tr}(A^{-1}B)t + o(t^2)) \Rightarrow d(\det)_A(B) = \text{tr}(A^{-1}B)$$

che è surgettivo (basta prendere $A = B$). $T_I SU(n, \mathbb{R}) = \text{Ker}(d(\det)_I) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ \square

⑤ $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \text{Id}\} \subseteq M(n, n)$ è sottovarietà di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

dim. $M(n, n) \xrightarrow{F} S(n) = \{A: A^T = A\}$. Abbiamo che $O(n) = F^{-1}(\text{Id})$ e Id è valore regolare

$$\text{infatti: } F(A + tB) = {}^t(A + tB)(A + tB) = {}^tAA + {}^t(BA + AB) + o(t) \Rightarrow dF_A(B) = {}^tBA + {}^tAB \text{ è surgettivo.}$$

$T_I O(n) = A(n)$ (antisimmetriche). \square

\rightarrow non è aperto né chiuso, detta stratificazione

⑥ $M_K(m, n) = \{A \in M(m, n) \mid \text{rk}(A) = K\}$ è una sottovarietà $\forall K \leq \min(m, n)$ di cod. $(m-K)(n-K)$.

GRASSIANE? COME SI FA VEDERE CHE SONO SOTTOVARIETÀ?

dim. A meno di scambiare le colonne, suppongo le prime K colonne e righe indipendenti (così da

avere un minore $K \times K$ invertibile in alto a sx). Cioè:

$$P_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \quad A_0 \in GL(K, \mathbb{R})$$

Poi prendo $P \in M_K(m, n)$ vicina a P_0 :

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad A \in GL(n, \mathbb{R}) \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}) \quad PQ = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \quad (14)$$

$rK(PQ) = rK(P)$ che è $= n \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$. A, B, C libere, D univ. determinato in $M(n-k, n-k)$

$\Rightarrow \text{codim} = (n-k)(m-n)$. \square

Def. (fibrazione): $f: M^m \rightarrow N^n$, $m \geq n$ è una fibrazione con fibra F (varietà di dim. $m-n$) se ogni punto di N ha un intorno banalizzante cioè $\forall q \in N \exists$ diffeo $\varphi: U(q) \times F \rightarrow f^{-1}(U(q))$ e

$$U \times F \xrightarrow{\varphi} f^{-1}(U)$$

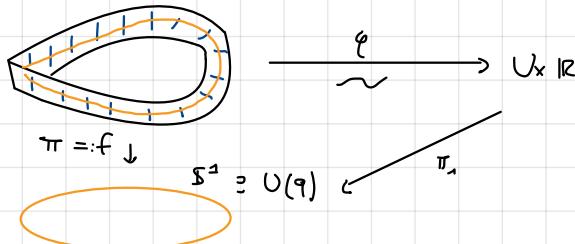
$$\begin{array}{ccc} & \pi & \\ \pi_1 & \searrow & \downarrow f \\ (\text{proiez. sul 1° fattore}) & & U \end{array}$$

Oss. stiamo chiedendo che ogni fibra $(f^{-1}(q))$ sia homeomorfa a F e localmente la fibrazione sia come il prodotto $U \times F$ proiettato sulla prima componente.

Oss. rivestimento liscio \Rightarrow fibrazione (\leftarrow quando $\dim F=0$). $\nearrow F$ è unione di punti

Esempi: ① Fibrato kanale: $\pi: N \times F \xrightarrow{f} N \quad (x, y) \mapsto x$

② Nastro di Möbius: $F = \mathbb{R}$, $N = S^1$ La spazio totale $\not\cong S^1 \times \mathbb{R}$



Oss. per il Teorema di Ehresmann una somersione propria è una fibrazione dunque se $f: M \rightarrow N$ con M compatto allora è somersione \Leftrightarrow fibrazione.

Fibrazione di Hopf: $S^3 = \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + |\omega|^2 = 1\}$. La fibrazione di Hopf è:

$$\begin{aligned} S^3 &\rightarrow \mathbb{CP}^1 \cong S^2 \\ (z, \omega) &\mapsto [z : \omega] \end{aligned}$$

Per il Teorema di Ehresmann c'è una fibrazione (è una somersione

perché ha range massimo il diff.). $F = \pi^{-1}([z : \omega]) = \{e^{i\theta} z, e^{i\theta} \omega \mid e^{i\theta} \in S^1\}$

$\cong S^1$,

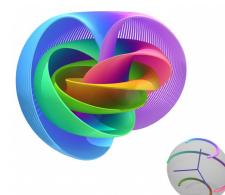


Figure 5.10. Some fibers of the Hopf fibration, projected stereographically on \mathbb{R}^2 . The counterimage of the circular arcs in S^3 shown on the bottom are portions of tori foliated into circles in 3-space.

Def. (attante adeguato): $\pi: M^m$ varietà liscia. Un attante adeguato è un attante $A = \{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ t.c.

1) $\{U_i\}_{i \in I}$ è localmente finito (cioè $\forall p \exists U(p)$ che interseca un numero finito di U_i) , in particolare

l'insieme I è numerabile.

2) è sovrabbondante cioè $\{V_i := \varphi_i^{-1}(B^m)\}_{i \in I}$ copreva anche l'insieme M .

Prop.: Dato un ricoprimento $\{W_i\}$ di M \exists un atlante adeguato $\mathcal{A} = \{\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ che lo raffina cioè $\forall j \exists i$ t.c. $U_j \subseteq W_i$.

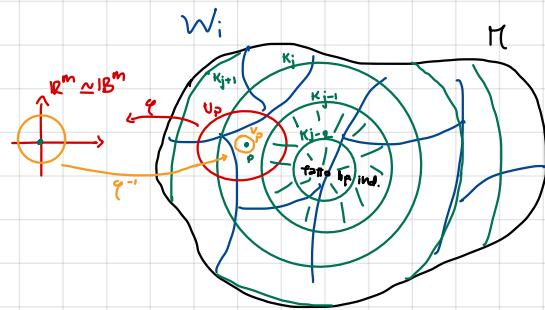
dim. Ogni spazio X localmente compatto, T_2 , a base numerabile ammette un'esaurizione in compatti

(cioè $\exists \{K_i\}_{i \in I}$ con $|I| \leq \omega$ t.c. $K_i \subseteq \text{int}(K_{i+1})$ K_i compatto $\forall i$ e $\bigcup K_i = X$). Dunque M ammette un'esaurizione compatti $\{K_i\}_{i \in I}$. Poniamo $K_0 = \emptyset$. Costruiamo l'atlante induttivamente $V_j \geq 1$.

Supponiamo quindi di aver fatto fino a K_{j-1} , ora

ricopro $K_j - K_{j-1}$. $\forall p \in K_j - K_{j-1}$ considera $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $(B^m \stackrel{\text{diffeo}}{\simeq} \mathbb{R}^m)$ richiedendo che $U_p \subseteq K_{j+1} \setminus K_{j-2}$. Ors,

$K_j \setminus K_{j-1}$ è compatto dunque se considero il ricoprimento



aperto $\{V_p = \varphi_p^{-1}(B^m)\}_{p \in K_j \setminus K_{j-1}}$ ne posso estrarre un sottoricoprimento finito t.c. $V_p \subset W_i$. \square

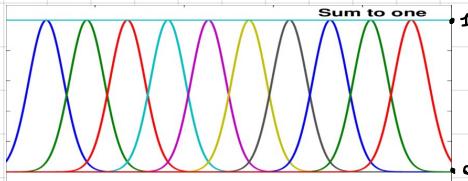
Def. (partizione dell'unità): Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di M . Una partizione dell'unità su M è

a) $\{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di funzioni $\{p_i\}_{i \in I}$ $p_i : M \rightarrow [0, \infty]$ liscie t.c. :

1) $\text{supp}(p_i) \subseteq U_i$ $\forall i \in I$; $(\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \text{Dom } f \mid f(x) \neq 0\}})$

2) $\forall p \in M \exists U(p)$ t.c. solo un numero finito di p_i non sono identicamente nulle su $U(p)$ e $\sum_{i \in I} p_i(p) = 1$

Ese.: su \mathbb{R} un esempio è:



Teo (Esistenza della partizione dell'unità): $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento (aperto) di M \exists una partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}$.

dim.: Sia $\mathcal{A} = \{\varphi_j : W_j \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ adeguato che raffina $\{U_i\}$. Notiamo che se è vero per $\{W_j\}$ allora verrà anche per $\{U_i\}_{i \in I}$. Infatti se ho $\text{supp}(w_j) \subseteq W_j \subseteq U_i$ allora p_j lo assegna a U_i cioè il nuovo $p_i^* = \sum_j p_j$ (ha senso perché è localmente finito).

Considero $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liscia, la funzione plateau:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1 \\ \in (0,1), & 1 \leq \|x\| \leq 2 \\ 0, & \|x\| > 2 \end{cases} \quad (15)$$

Pongo $V_j := \varphi_j^{-1}(B^n)$. $\{V_j\}_j$ ricopre perché l'attuale è adeguato. Definisco $\bar{p}_j(x) = \begin{cases} \lambda(\varphi_j(x)), & \text{se } x \in V_j \\ 0, & \text{se } x \notin V_j \end{cases}$
 e C^∞ e $\text{supp}(\bar{p}_j(x)) \subseteq V_j$. È localmente finito (la è già il ricoprimento). Ora, $\forall p \exists$ finito di \bar{p}_j che non si annullano mai, in particolare $\sum_j \bar{p}_j(p) \geq 1$ (in ciascuno V_j è = 1 + altri contributi)

Dunque pongo $p_j(p) = \frac{\bar{p}_j(p)}{\sum_j \bar{p}_j(p)}$. \square

Def. (funzione liscia tra S e M): Siano M, N varietà. Se M qualsiasi. $f: S \rightarrow N$ è liscia se $\forall p \in S$

$\exists U(p) \subseteq \mathbb{R}$ e $F: U \rightarrow N$ liscia t.c. $F|_{U \cap S} = f|_{U \cap S}$.

Prop. \forall varietà, $S \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia $\Rightarrow \exists F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia t.c. $F|_S = f$.

\leftarrow def. di liscio

dim. $\forall p \in S \exists f_p: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ che estende localmente f e è liscia. Si dunque $\{U(p)\}_{p \in S} \cup \{M \setminus S\}$ ricoprimento aperto di \mathbb{R} (S è chiuso) e dunque \exists partizione dell'unità subordinata, $\{p_p\}_{p \in S} \cup \{\rho\}$.

Pongo $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $F(x) = \sum_{p \in S} p_p(x) f_p(q)$. Ha senso perché in q $p_p(q)$ sono quasi tutte nulle ed è liscia per costruzione. Ora se $q \in S$ si ha $F(q) = \sum_{p \in S} p_p(q) f_p(q) = f(q) \sum_{p \in S} p_p(q) = f(q)$. \square

$\begin{matrix} p_p(q) = f(q) \\ p \text{ non dà contributo} \\ \text{in } S \end{matrix}$

Prop.: \forall varietà, $S \subseteq \mathbb{R}$ chiuso (anche \emptyset)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $f|_S$ liscia. Allora $\forall \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \exists F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia t.c.

$\|F(x) - f(x)\| \leq \varepsilon(x)$ e $F|_S = f|_S$.

dim. Localmente è vero: $\forall p \in \mathbb{R} \exists f_p: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa le ipotesi (dove $F_p|_S$ diventa $f_p|_{S \cap U}$).

infatti per $p \notin S$ prendo f_p costante a $f(p)$ e prendo U piccolo in modo che $U \cap S = \emptyset$. Se $p \in S$ \exists un'estensione $f_p: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a meno di restringere $U(p)$ ottengo la condizione $\| - \| \leq \varepsilon(x)$.

Caso globale: considero partizione dell'unità associata a $\{U(p)\}_{p \in \mathbb{R}}$, chiamiamola $\{p_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ e la uso

per incollare: $F(q) := \sum_{p \in \mathbb{R}} p_p(q) f_p(q)$. In effetti se $q \in S$, $F(q) = f(q)$. Se invece $q \notin S$: $f_p|_S = f|_S$, come prima.

$$\begin{aligned} \|F(q) - f(q)\| &= \left\| \sum_{p \in \mathbb{R}} p_p(q) f_p(q) - f(q) \right\| = \left\| \sum_{p \in \mathbb{R}} p_p(q) (f_p(q) - f(q)) \right\| = \\ &\quad \downarrow \sum_{p \in \mathbb{R}} p_p(q) = 1 \\ &\quad \uparrow \text{somma} \\ &\quad \text{loc. finita} \end{aligned}$$

$$= \sum_{p \in \mathbb{R}} p_p(q) \|f_p(q) - f(q)\| \leq \varepsilon(q). \quad \square$$

Teorema: (Embedding di Whitney - caso compatto): \mathbb{R}^m varietà compatta $\rightarrow \exists f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ embedding.

19

dim.: Prendo $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ atlante adeguato e dato che $\{U_i\}$ è finito in un compatto allora $\{U_i\}$ è finito, $\{U_1, \dots, U_K\}$. Definisco $\lambda_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ $\lambda_i(x) = \lambda \circ \varphi_i$ con λ come prima. Osserviamo

che $\lambda_i = 0$ fuori da U_i e $\lambda_i = 1$ su $V_i = \varphi_i^{-1}(B^n)$. Definisco dunque $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.c. $\psi_i(x) = \lambda_i(x)\varphi_i(x)$ così dentro V_i $\psi_i = \varphi_i$ mentre fuori da U_i è zero. Definiamo:

$F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ t.c. $x \mapsto (\lambda_1(x), \dots, \lambda_K(x), \psi_1(x), \dots, \psi_K(x))$. Vediamo che F è embedding:

• F è iniettiva: se $F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1, x_2 \in V_i$ ma $\psi_i(x_1) = \varphi_i(x_1) \neq \varphi_i(x_2) = \psi_i(x_2)$, ↗
 ↗V.i. ricoprono no x_1, x_2 stanno proprio
 nello stesso senso da uno punto to o + dell'altra
 ↗ differenza

• F è immersione: per $x \in V_i \Rightarrow \psi_i = \varphi_i$ in un intorno di $x \Rightarrow d_x \psi_i = d_x \varphi_i$ che ha rango m . Dunque

$\forall x \quad dF_x \geq m \Rightarrow$ range massimo. \Rightarrow Kernel banale \square

Def. (misura nulla): M varietà, $B \in \mathcal{B}(M)$ (\leftarrow -algebra generata dagli aperti). B ha misura nulla se

$\forall p \in B \quad \exists U(p) \xrightarrow{\Psi} V \subseteq \mathbb{R}^m$ t.c. $\Psi(U \cap B)$ ha misura nulla.

N.B. La misura nulla è l'unica cosa che ha senso chiedersi riguardo alla misura su varietà lisce.

N.B. anche qui: $\exists \Rightarrow \forall$ dato che i differenziabili preservano la misura nulla.

Teorema: $f : M \rightarrow N$. L'insieme dei valori critici ha misura nulla.

dim. In carte f diventa $F : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow Z \subseteq \mathbb{R}^n$ e condudiamo per Sard. \square

Corollario: $\dim M < \dim N \Rightarrow f(M)$ ha misura nulla $\Rightarrow f(M) = \emptyset$. \rightarrow non ci possono essere valori regolari perché $\dim M < \dim N \Rightarrow f(M)$ sono tutti valori critici.

Teorema (immersione): $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $n \geq m$ continua, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ immersione t.c. $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in M$.

dim. Fissiamo $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ atlante adeguato e $V_i := \varphi_i^{-1}(B^n)$

Sia $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leq 1 \\ \in (0, 1), & 1 \leq \|x\| < 2 \\ 0, & \|x\| \geq 2 \end{cases}$ $\lambda_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ $\lambda_i = \lambda \circ \varphi_i$

e $\psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\psi_i = \lambda_i \cdot \varphi_i$ ($\psi_i|_{V_i} = \varphi_i$).

\rightarrow per too prec.

Osserviamo che possiamo prendere f liscia (ogni continua la posso approssimare con liscia). Pongo $F_0 := f$

liscia. Costruisco $F_0, F_1, \dots, F_i, \dots$ t.c. $F_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e:

- ① $\|F_i(x) - f(x)\| < \varepsilon$
- ② $F_i(x) = F_{i-1}(x) \quad \forall x \notin U_i$
- ③ $d(F_i)_x$ iniettivo $\forall x \in \overline{U_i}$ ($M_i = \bigcup V_j$
 e dato che $\overline{V_i} \cong D^n \Rightarrow$ compatto $\Rightarrow \overline{U_i}$ comp.)

Devo stare attento che i miglioramenti che ottengo al passo i non

scambino quelli fatti al passo $i-1$. Definisco $F_i(x) = F_{i-1}(x) + A\psi_i(x)$ con A matrice costante $n \times m$.

Vediamo che sono soddisfatte:

① Prendendo $\|A\| \ll \varepsilon$ (qualsunque norma tanto sono tutte equivalenti), visto che q_i è a supporto compatto allora $A q_i$ è omif limitato (non dipende da x).

② $\text{Supp } q_i \subseteq U_i$; dunque per $x \notin U_i$ $q_i \equiv 0 \Rightarrow F_i(x) = F_{i-1}(x)$.

③ • Per i punti in $\overline{U_{i-1}}$ non ci sono problemi dato che $\overline{U_{i-1}}$ è compatto e dunque se $\|A\| \ll \varepsilon$

allora $d(F_i)_x$ è ancora iniettivo (perturbo di poco una cosa che ha rk massimo e dunque il rk
 $\nwarrow F_{i-1}$ ha rk max in $\overline{U_{i-1}}$ per ip. induktive
 rimane massimo);

• Resta da vedere sui punti $x \in \overline{U_i} \setminus \overline{U_{i-1}}$. Può andare male che $B := d(F_i)_x = d(F_{i-1})_x + A d q_i(x)$
 non è di rk massimo cioè $\text{rk } B(x) < m$. Effettivamente B non è di range max $\Leftrightarrow A = B' - d(F_{i-1} \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}$

per una qualche matrice $B' \in \mathcal{M}(n, m)$ di range $k < m$ (basta fare conta). Definisco dunque:

$$\Phi_K : B^m \times \mathcal{M}_K(n, m) \rightarrow \mathcal{M}(n, m)$$

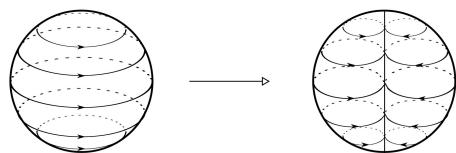
$$(x, B') \longmapsto B' - d(F_{i-1} \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)} \Leftrightarrow (m-K)(n-K) > m \Leftrightarrow n \geq m & K < m.$$

\nearrow quindi riesce a trovare A che funziona

Ora $\dim(\mathcal{M}_K(n, m) \times B^m) = mn - (m-K)(n-K) + m < mn$
 \oplus voglio la

• Così l'immagine di Φ_K ha misura nulla, $\forall K$. Dunque ci basta scegliere $\|A\|$ piccolo e fuori da questo insieme di misura nulla. \square

N.B.: $n \geq m$ è la migliore stima, ad esempio $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ fatto così:



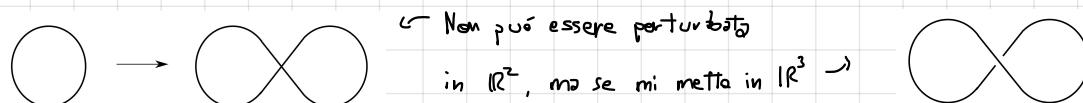
Possiamo perturbarla "nel mezzo" ma ai poli non possiamo togliere la singolarità

Teorema (immersione iniettiva di Whitney): Sia $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ immersione e $n \geq m+1$. $\forall \varepsilon > 0 \exists$

un'immersione iniettiva $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\|F(p) - f(p)\| < \varepsilon \quad \forall p \in M$.

dim. come prima. \square

N.B. serve salire di dimensione per avere "spazio" per perturbare, ad esempio:



Teorema (embedding di Whitney per varietà qualsiasi): Ogni M^n varietà ha un embedding proprio in \mathbb{R}^{2m+1} .

dim. • Ogni M ha una funzione propria e continua $M \rightarrow \mathbb{R}$. Infatti sia $A = \{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m\}_{i \in I}$

adeguato e $\{\rho_j\}_{j \in I}$ partizione dell'unità, definiamo $f(x) = \sum_i \rho_i(x)$ è propria.

compatto in $\mathbb{R} \Rightarrow$ chiuso e limitato
 \Rightarrow per def. di f la controimmagine
 è chiusa in un numero finito di V_i
 (compatto perché $\varphi_i(V_i)$ con i differenti) \Rightarrow
 chiuso in compatto \Rightarrow unione
 finita di compatti \Rightarrow chiuso

• $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ $F(x) = (f(x), 0, \dots, 0)$ è ancora propria. Allora $\exists \varepsilon$ -perturbazione che è imm. iniettiva

Inoltre c'è ancora propria \Rightarrow embedding proprio \square

N.B. M^m è sottovarietà chiusa di \mathbb{R}^{m+1} ($i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ embedding c'è proprio $\Leftrightarrow i(M)$ è chiuso).

Def. (mappa multilinear): V_1, \dots, V_K, W sp. vettoriali. Una mappa $F: V_1 \times \dots \times V_K \rightarrow W$ è multilinear se è lineare su ogni componente. In particolare, $\text{Mult}(V_1, \dots, V_K; W) = \{F: V_1 \times \dots \times V_K \rightarrow W \mid F \text{ mult.}\}$

è uno sp. vettoriale. Fissiamo $B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ base per $V_i \quad \forall i=1, \dots, K$ e $C = \{w_1, \dots, w_n\}$

base di W . Allora $F(v_1^{i_1}, v_2^{i_2}, \dots, v_K^{i_K}) = \sum_{j=1}^n F_{i_1 i_2 \dots i_K}^{j_1} w_j$ con $F_{i_1 i_2 \dots i_K}^{j_1}$ che sono scalari

e determinano univocamente F , dunque $\dim \text{Mult}(V_1, \dots, V_K; W) = \dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_K \cdot \dim W$.

Def. (prodotto tensore): V_1, \dots, V_K sp. vett. su \mathbb{R} con $\dim < +\infty$. Definiamo:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_K := \text{Mult}(V_1^*, \dots, V_K^*; \mathbb{R}) \quad (\dim V_1 \otimes \dots \otimes V_K = \dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_K \text{ per primo})$$

Reminder: $\text{Mult}(V, W; \mathbb{R}) = \text{Bil}(V, W; \mathbb{R}) \quad \text{Mult}(V, \mathbb{R}) = V^* \quad V = \text{Mult}(V^*, \mathbb{R}) = V^{**}$ (iso canonico)

N.B. $V_1 \times \dots \times V_K \xrightarrow{\pi} V_1 \otimes \dots \otimes V_K$ è multilinear.

$$(v_1, \dots, v_K) \longmapsto \left(\begin{array}{l} v_1 \otimes \dots \otimes v_K : V_1^* \times \dots \times V_K^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (w_1, \dots, w_K) \mapsto \frac{1}{K} \sum_i w_i(v_i) \end{array} \right)$$

Prop. universale: $V_1 \times \dots \times V_K \xrightarrow{f} \mathbb{R} \leftarrow \text{sp. vett.}$ Data f multilinear, $\exists! F$ lineare t.c. il diagramma commuta.

$$\begin{aligned} \text{N.B.} \quad & \bullet V = V^{**} & \bullet \text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W = W \otimes V^* & \bullet V \otimes W = W \otimes V \quad (\text{usare prop. uni.}) \\ & (v \mapsto v^*(v)\omega) \longleftarrow (v^* \otimes \omega) \end{aligned}$$

Def. (tensore): V sp. vettoriale su \mathbb{R} di $\dim < +\infty$. Dati $\mathbb{N} \ni h, k > 0$ un tensore T di tipo (h, k)

è un elemento di $T_h^k(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ volte}}$. Dunque T è una funzione multilinear:

$$T: \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_h \times \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

Esempi:

- Un tensore di tipo $(0, 0)$ è un numero reale;

- Un tensore di tipo $(1, 0)$ sarebbe un elemento di V^{**} cioè un vettore di V ;

- Un tensore di tipo $(0, 1)$ è un covettore in V^* ;

- Un tensore di tipo $(1, 1)$ è un elemento di $V \otimes V^* \stackrel{N.B.}{=} \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$

- Un tensore di tipo $(0, K)$ è un elemento di $V^* \otimes \dots \otimes V^*$ cioè per def. una forma multilinear $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

• Un tensore di tipo $(1, k)$ è una forma multilinearare $V \times \dots \times V \rightarrow V$

• Il prodotto tensore \times in \mathbb{R}^n è $(1, 2)$

• Il det in \mathbb{R}^n è $(0, n)$.

Oss.: se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V allora $B^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ è base del doppio V^* dove $v^i(v_j) = \delta_{ij}$.

Allora una base di $\tilde{\Gamma}_h^k(V)$ è data da $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}\}$. In particolare la

$\dim \tilde{\Gamma}_h^k(V) = n^{k+h}$. Dunque preso $T \in \tilde{\Gamma}_h^k(V)$:

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_h \\ j_1, \dots, j_k}}^n T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_k}$$

I coordinate di T rispetta a B

Prop.: Le coordinate di T , $T_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} = T(v^{i_1}, \dots, v^{i_h}, v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$.

dim. basta applicare $(v^{i_1}, \dots, v^{i_h}, v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$ alla def. sopra. \square

Notazione: usiamo la notazione di Einstein, cioè s'intendono il simbolo di sommatoria sugli indici ripetuti

almeno due volte. Ad esempio $T: V \rightarrow V$ endomorfismo cioè tensore $(1, 1)$, se prendo $v \in V$

$$v = v^i v_i \quad \text{e} \quad \text{se } T(v) = w \quad \text{allora } w^i = T_j^i v^j \quad (\text{sarebbe } w^i = \sum_{j=1}^n T_j^i v^j).$$

Se $g \in \tilde{\Gamma}_h^2(V)$ è una forma bilineare di coordinate g_{ij} : $g(v, w) = v^i g_{ij} w^j$: T è ottenuta

$$\Leftrightarrow g(T(v), w) = g(v, T(w)) \quad \forall v, w \Leftrightarrow T_k^i v^k g_{ij} w^j = v^i g_{ij} T_k^j w^k$$

Cambio base: $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ e $C^* = \{w^1, \dots, w^n\}$. Allora $w_i = A_i^j v_j$ e $w^i = B_j^i v^j$ con

A invertibile e B dipendente da A (nota che A e B non sono vere e proprie matrici, prendono $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$).

Prop.: B è l'inverso di A , cioè $A_k^i B_j^k = \delta_j^i = B_k^i A_j^k$.

$$\text{dim. } \delta_j^i = w^i(w_j) = (B_l^i v^l)(A_j^k v_k) = B_l^i A_j^k v^l(v_k) = B_l^i A_j^k \delta_k^l = B_l^i A_j^l \quad \square$$

Prop.: Sia T un tensore. Siano $\tilde{T}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h}$ le coordinate di T in una nuova base B .

$$\text{Allora: } \tilde{T}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} = B_{l_1}^{i_1} \dots B_{l_h}^{i_h} A_{j_1}^{m_1} \dots A_{j_k}^{m_k} T_{m_1, \dots, m_k}^{l_1, \dots, l_h}$$

$$\text{dim. } \tilde{T}_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h} = T(w^{i_1}, \dots, w^{i_h}, w_{j_1}, \dots, w_{j_k}) = T(B_{l_1}^{i_1} v^{l_1}, \dots, B_{l_h}^{i_h} v^{l_h}, A_{j_1}^{m_1} v_{m_1}, \dots, A_{j_k}^{m_k} v_{m_k})$$

$$= B_{l_1}^{i_1} \dots B_{l_h}^{i_h} A_{j_1}^{m_1} \dots A_{j_k}^{m_k} T(v^{l_1}, \dots, v^{l_h}, v_{m_1}, \dots, v_{m_k}). \quad \square$$

Prodotto di tensori: $T \in \tilde{\Gamma}_h^k(V)$, $T' \in \tilde{\Gamma}_h^{k'}(V)$, $T \otimes T' \in \tilde{\Gamma}_h^{k+k'}(V) \otimes \tilde{\Gamma}_h^{k+k'}(V) \underset{\text{canon.}}{=} \tilde{\Gamma}_{h+h'}^{k+k'}(V)$

$$\text{In particolare in coordinate: } (T \otimes T')_{j_1, \dots, j_{k+k'}}^{i_1, \dots, i_{h+h'}} = T_{j_1, \dots, j_h}^{i_1, \dots, i_h} T'_{j_{h+1}, \dots, j_{h+k'}}^{i_{h+1}, \dots, i_{h+k'}} \quad (2)$$

Esempio: v di tipo $(1,0)$ e T di tipo $(1,1)$, allora $v \otimes T$ è di tipo $(2,1)$ e

$$(v \otimes T)_c^b = v^a T_c^b$$

Algebra tensoriale: $\tilde{\Gamma}_h^k(V) := \bigoplus_{h,k \geq 0} \tilde{\Gamma}_h^k(V)$ è un'algebra con una struttura di prodotto data

\otimes (non è commutativa se $\dim V \geq 2$).

Contrazione di un tensore: \hookrightarrow contrazione è un'operazione che generalizza la traccia

$\text{tr}: \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\text{End}(V) = V^* \otimes V$ e $\text{tr}(v \otimes w) = v(w)$. (ben def. grazie allo prpr. universale). In generale prendo $T \in \tilde{\Gamma}_h^k(V)$, $h,k \geq 1$. Fissiamo $1 \leq i \leq h$ e $1 \leq j \leq k$. Allora:

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k \text{ volte}} = \underbrace{\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{h-1 \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k-1 \text{ volte}}}_{\in \tilde{\Gamma}_{h-1}^{k-1}(V)} \otimes \underbrace{V \otimes V^*}_{\text{End}(V)}$$

Dunque $\tilde{\Gamma}_h^k(V) = \tilde{\Gamma}_{h-1}^{k-1}(V) \otimes \text{End}(V)$. \hookrightarrow contrazione è una mappa bilineare:

$$C: \tilde{\Gamma}_{h-1}^{k-1}(V) \otimes V \otimes V^* \longrightarrow \tilde{\Gamma}_{h-1}^{k-1}(V) \quad (\text{ben definita perché multilinear e dunque} \\ \circ \otimes (b \otimes c) \longmapsto c(b) \cdot \circ \quad \text{basta usare prpr. universale})$$

Prop.: In coordinate se T ha coordinate $T_{j_1, \dots, j_h}^{i_1, \dots, i_h}$ allora $C(T)_{j_1, \dots, j_{h-1}}^{i_1, \dots, i_{h-1}} = T_{j_1, \dots, j_{h-1}}^{i_1, \dots, i_{h-1}, l, \dots, l, \dots, j_{h-1}}$

dove l è nelle posizioni da contrarre.

$$\text{dim. } C(T) = C \left(\sum_{\substack{i,j \\ i,j \text{ posizioni da contrarre}} \atop \text{di }} T_{j_1, \dots, j_h}^{i_1, \dots, i_h} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h} \otimes v_{i_{h-1}}^{j_1} \otimes \dots \otimes v_{i_h}^{j_{h-1}} \otimes \dots \otimes v_{i_h}^{j_{h-1}} \right) = \\ = T_{j_1, \dots, j_{h-1}}^{i_1, \dots, i_{h-1}, l} \underbrace{v_{i_h}^{j_h}(v_i)}_{\delta_i^j} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{h-1}}^{j_{h-1}} \otimes v_{i_h}^{j_{h-1}} = T_{j_1, \dots, j_{h-1}, l}^{i_1, \dots, i_{h-1}, l} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_{h-1}}^{j_{h-1}} \otimes v_{i_h}^{j_{h-1}}$$

Esempi:

- Effettivamente se prendiamo un $T \in \text{End}(V) = V \otimes V^*$ allora la coordinata di $C(T)$

è proprio la sua traccia T_a^a .

- Prendiamo un tensore $(1,2)$ che ha coordinate $T_{j_k}^i$, posso esserne contratto in 2 modi ottenendo

due covettori con coordinate $T_{i_l}^i \circ T_{j_l}^i$. Notiamo che le coordinate dipendono dalla base scelta

ma il covettore no (C come funzione non è definita scegliendo una base, ma in generale).

Def. (prodotto scalare): è una forma bilineare $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simmetrica e richiediamo essere

non degenero cioè $g(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \Leftrightarrow w = 0$. È classificato dalla sua signature (p, m) dove

$p = \max_{w \in V} \{k \in \mathbb{N} \mid g_{lw} \text{ def. positiva e } \dim W = k\}$ (stesso per m se def. negativo). Vale che $p + m = \dim(V)$. Un prodotto scalare è una tensore di tipo $(0, 2)$ e le sue coordinate rispetto a una base B si scrivono g_{ij} . In particolare Riesz ci dice che $\phi: V \rightarrow V^*$ t.c. $\phi(v)(w) = g(v, w)$ è un isomorfismo canonico (g è non degenero). Dunque, per iso, g passa anche come prodotto scalare su V^* ponendo $g(v^*, w^*) := g(v, w)$. È un tensore di tipo $(2, 0)$ e le sue coordinate sono indicate con g^{ij} . In particolare g^{ij} e g_{ij} sono una inversa dell'altra.

Possiamo usare g_{ij} e g^{ij} per risp. abbassare e alzare gli indici cioè inducono isomorfismi:

$$\tilde{\gamma}_h^k(v) \xrightarrow{\sim} \tilde{\gamma}_{h+k}^0(v)$$

$$\tilde{\gamma}_h^k \xrightarrow{\sim} \tilde{\gamma}_{h+k}^0(v)$$

$$T_{i_1, \dots, i_h} \mapsto \cup_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_h, j_1, \dots, j_k} = T_{l_1, \dots, l_k}^{i_1, \dots, i_h} g^{l_1, i_1} \dots g^{l_k, i_k}$$

$$\uparrow \text{con } g_{ij}$$

Def. (tensori simm. e antisimm.): $\tilde{\gamma}^k(v) := \tilde{\gamma}_0^k(v)$. $T \in \tilde{\gamma}^k(v)$ è detto simmetrico se

$$T(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad \forall \sigma \in S_k. \quad \text{E' detto } \underline{\text{antisimmetrico}} \text{ se}$$

$$T(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad \forall \sigma \in S_k.$$

Oss. T simm. $\Leftrightarrow T_{i_1, \dots, i_h} = T_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_h)} \quad \forall \sigma \in S_h$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{mi dice che basta controllare sui vettori della base} \\ \text{della somma} \end{array} \right.$

T antisimm. $\Leftrightarrow T_{i_1, \dots, i_h} = \operatorname{sgn}(\sigma) T_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_h)} \quad \forall \sigma \in S_h$

Def.: $S^k(v) = \{ \text{tensori } (0, k) \text{ simm.} \}$ sottospazio di $\tilde{\gamma}^k$

$\Delta^k(v) = \{ \text{tensori } (0, k) \text{ antisimm.} \}$

$$S^*(v) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(v) \quad \Delta^* = \bigoplus_{k \geq 0} \Delta^k(v) \quad \text{non chiuse rispetto a } \otimes$$

Def. (summazione e antisimm.): Sia $T \in \tilde{\gamma}^k(v)$ allora la simmetrizzazione di T

$$\text{è } S(T) \in S^k(v) \text{ t.c. } S(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}). \quad \text{Analogamente}$$

l'antisimmetrizzazione $A(T) \in \Delta^k(v)$ è t.c.

$$A(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

Def. (Λ): sia $T \in \Delta^k(v)$ e $U \in \Delta^{k'}(v)$ allora $T \Lambda U := \binom{k+k'}{k} A(T \otimes U) \in \Delta^{k+k'}(v)$

→ c'è nelle dispense

es. dopo

Si dimostra che Λ è associativa ma non commutativa

$$\text{E.S. } \pi = \kappa^1 = 4 \quad \text{so ora } v^* = \gamma^*(v) = s^*(v) = \Delta(v).$$

23

$$\underline{\text{Ex.}} \quad v, w \in \Delta^1(v) \quad v \wedge w = \tau A(v \otimes w) = v \otimes w - w \otimes v = -w \wedge v \quad (\text{non comm.})$$

Def.: $\Lambda^*(V)$ è un'algebra con Λ , detta algebra esterna di V .

Prop.: Se $\{B = \{v_1, \dots, v_n\}\}$ è una base di V , $\{B^*\} = \{v^1, \dots, v^n\}$ base indotta nel duale

allora $\{v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$. In particolare $\dim \Lambda^k = \binom{n}{k}$.

$$\underline{\text{Corollario}}: \dim \mathcal{L}^*(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Spazio totale sp. base
↓ ↓

Def. (fibroto vettoriale): Un fibroto vettoriale di range M è una mappa liscia $F: \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\pi} M^n$

Tale che: ① Ogni fibra $E_p := \pi^{-1}(p)$ $p \in \pi$ ha una struttura di sp. vett. i.

② Ogni $p \in \mathbb{N}$ ha un aperto bandizzante: cioè $\exists U(p) \quad \exists q : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n$

diffeo t.c. $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^K$ commuta c $\varphi_{|E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^K$ e' un'iso
 $\pi \downarrow$ $\begin{matrix} \text{e} \\ \diagup \\ \pi_1 \end{matrix}$
 $U \leftarrow$ vettoriale $\forall q \in U$.

N.B. è un particolare fibrato dove ogni fibra ha una struttura di \mathbb{R}^n sp. vettoriale.

E.s. (fibroto bundle) : $E = M \times \mathbb{R}^k$, $\pi = \pi_1$.

Def. (morfismo di fibrati): Un morfismo di fibrati vettoriali è un diagramma:

$$E \xrightarrow{F} E' \quad \textcircled{1} \text{ diigr. commutes} \quad \textcircled{2} F, f \text{ lsc} \quad \textcircled{3} F|_{E_p} : E_p \longrightarrow E'_{f(p)} \text{ lsc}$$

$\pi \downarrow$
 $\sqcap \xrightarrow{f} \sqcap'$

ver that f' is sc

F' è un isomorfismo se $F \circ f$ sono diffeomorfismi (\circ sofficiente F differ).

Def.: un fibrato è banale se è isomorfo al fibrato banale.

Def. (sezione): $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrauto. Una sezione è una mapp2 $s: \pi^{-1}(E) \rightarrow E$ liscia t.c. $\pi \circ s = \text{id}_M$.

Ese. Fibrazione di Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ non ha sezioni.

$$\text{dari . } \begin{array}{c} \text{se } \in \text{ fasse} \\ \text{H}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{se}} \text{H}_2(\mathbb{C}^3) \xrightarrow{\text{fasse}} \text{H}_2(-) \end{array}$$

N.B. con i fibrati vettoriali le sezioni esistono sempre. In particolare, ce ne è una privilegiata

dove la zero sezione definita in modo che $s_0(\sigma) = \sigma \in E_\sigma$. (Se s_0 è liscia c'è un embedding).

Tramite la zero sezione si può identificare M con $S_0(M) \subseteq E$.

Introdiciamo il più importante fibrato vettoriale, il fibrato tangente.

Def. (fibroto tangente): Se M una varietà liscia. Come insieme il fibroto tangente di M è l'unione

disgiunta $T\pi = \bigsqcup_{p \in \pi} T_p \pi$ di tutti i suoi spazi tangenti. C'è un'ovvia proiezione $\pi: T\pi \rightarrow \pi$ (25)

t.c. $\pi(T_p \pi) = p$. Come struttura di varietà liscia ha lo seguente: se $A = \{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}$ è atlante per π allora $\{\tilde{\varphi}_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow V_i \times \mathbb{R}^n \mid \tilde{\varphi}_i(v \in T_p \pi) := (\varphi(p), d\varphi_p(v))\}$ è un atlante liscio per $T\pi$. $\tilde{\varphi}_i$ forniscono proprio i diffeo banalizzanti.

N.B. se $\dim \pi = m \Rightarrow \dim T\pi = 2m$.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} & V_i \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & U_i \times \mathbb{R}^n \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \end{array}$$

Def. (campo vettoriale): un campo vettoriale in una varietà π è una sezione di $T\pi$.

Def. (frame): un frame per $E \xrightarrow{n+k} \pi$ è il dato di K sezioni s_1, \dots, s_K t.c. $\{s_1(p), \dots, s_K(p)\}$ è una base di $E_p \wedge_{p \in \pi}$.

Prop.: \exists un frame per $E \xrightarrow{\sim} E$ è banale.

dim. $\Leftrightarrow E = \pi \times \mathbb{R}^K$ dunque $E_p = \mathbb{R}^K$, $s_i(p) = e_i$;

\Rightarrow definiamo l'iso tra fibrati: $\pi \times \mathbb{R}^K \xrightarrow{F} E$ t.c. $F(p, x) = x_1 s_1(p) + \dots + x_K s_K(p)$. □

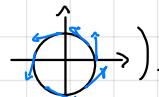
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \int \pi \\ \pi & \xrightarrow{id} & \pi \end{array}$$

$\tilde{\pi}$ è liscia perché
com. lineare di liscie

Oss.: localmente i fibrati sono tutti banali cioè \exists un frame locale.

Esempi: ① $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow T\pi = U \times \mathbb{R}^n$

② $T\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (\exists un frame, cioè in questo caso un campo mai nullo).



③ $T\mathbb{S}^2$ NON è banale perché \nexists sezione mai nulla. \rightarrow lo vediamo dopo

④ Solo $T\mathbb{S}^1, T\mathbb{S}^3$ e $T\mathbb{S}^7$ funzionano.

Def. (gruppo di Lie): un gruppo di Lie è una varietà liscia G che è anche un gruppo tale che il

prodotto $g \times g \rightarrow G$ $(g, h) \mapsto gh$ e l'inversione $g \rightarrow g^{-1}$ $g \mapsto g^{-1}$ sono liscie.

Prop.: G gruppo di Lie $\Rightarrow TG$ banale.

dim. Considera $L_g: g \rightarrow g \quad h \mapsto gh$ (è diffeo infatti $L_g \cdot L_{g^{-1}} = id_G$). Dunque ben definito

per funzionalità, l'isomorfismo $(dL_g)_e: T_e g \rightarrow T_g g$. Prendo base v_1, \dots, v_n di $T_e g$ e allora posso costruire

il frame (globale) $s_i(g) := (dL_g)_e(v_i)$. □

Def. (rettinabile): una varietà è rettinabile se ammette un campo vettoriale mai nullo.

Def. (parallelizzabile): una varietà è parallelizzabile se $T\pi$ è banale. \Rightarrow (gruppi di Lie)

Oss.: parallelizzabile \Rightarrow pertinibile (parallelizzabile $\Rightarrow \exists s_1, \dots, s_k$ base $\Rightarrow s_i$ non possono essere nulli). (2)

Oss.: S^3 e' parallelizzabile: $s_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3)$, $s_2(1) = (x_3, x_4, -x_1, -x_2)$

e $s_3(1) = (x_4, x_3, -x_2, -x_1)$ sono 3 campi vett. indipendenti ma nulli su S^3 . \rightarrow (oppure basta vedere S^3 come i quaternioni che sono un gruppo di Lie)

Manipolazione di fibrati vettoriali: presi due fibrati vettoriali sulla stessa varietà M , $E \xrightarrow{\pi} M$ e

$E' \xrightarrow{\pi'} M'$ sono ben definiti:

\hookrightarrow la somma diretta: $(E \oplus E')_p := E_p \oplus E'_p$ ($E \oplus E' = \bigcup_{p \in M} E_p \oplus E'_p$). L'atlante A (che mi

dovrà gli intorni banalizzanti: $\forall p \exists U_i(p), U_i(p)$ che banalizzano $E \rightarrow M$ e $E' \rightarrow M'$ risp.

Prendo $U := U_i \cap U_j$ t.c. $\varphi: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ $\varphi': U \times \mathbb{R}' \rightarrow \pi'^{-1}(U)$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ U & \xleftarrow{\quad} & U \end{array}$$

$$\Rightarrow \varphi \oplus \varphi': U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}' \rightarrow \pi^{-1}(U) \quad (p, x, y) \mapsto (\varphi(p, x), \varphi'(p, y))$$

\hookrightarrow prodotto tensoriale: $(E \otimes E')_p := E_p \otimes E'_p$

\hookrightarrow duale: $(E^*)_p := (E_p)^*$

\hookrightarrow tensoriale generale: $\tilde{\tau}_h^K := \overbrace{E \otimes \dots \otimes E}^h \otimes \overbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}^{K-h} \quad \tilde{\tau}_h^K(E)_p := \tilde{\tau}_h^K(E_p)$

\hookrightarrow Hom: $\text{Hom}(E, E') = E^* \otimes E'$ dunque $\text{Hom}(E, E')_p = (E^* \otimes E')_p = E_p^* \otimes E'_p$

Def. (sottofibrato): Un sottofibrato di range $h \leq K$ di $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrato vettoriale è una sottovarietà

$E' \subseteq E$ t.c. $(E')_p := E' \cap E_p$ è un h -s.p. vettoriale (con la stessa mappa π ristretta e con la stessa π ristretta).

Oss. un sottofibrato è un fibrato visto come $E' \rightarrow M$ (si deve usare formalmente h -s.p. di sottovarietà).

Def. (fibrato quoziante): Se E' è un sottofibrato, si definisce fibrato quoziante E/E' :

$(E/E')_p := E_p/E'_p$. La struttura liscia è ottenuta dai diffeomorfismi φ identificando $\mathbb{R}^K/\mathbb{R}^h \cong \mathbb{R}^{K-h}$.

Oss. $E' \rightarrow E \rightarrow E/E'$ E' sottofib. di E , sono mappe di fibrati.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\text{id}} & M \end{array}$$

Def. (restrizione): Se $E \rightarrow M$ è un fibrato tangente e $N \subseteq M$ una sottovarietà allora $E|_N :=$

$= \pi^{-1}(N) \subset E|_N \xrightarrow{\pi} N$ è un fibrato vettoriale. \leftarrow restituzione caso particolare di pull-back, si vede dopo

Def. (pull-back di un fibrato vettoriale): Sia $f: N \rightarrow M$ una mappa liscia e $E \rightarrow M$ un fibrato

vettoriale. Il pull-back di f è un nuovo fibrato vettoriale $f^*(E) \rightarrow N$ costruito come segue:

$$f^*(E) \xrightarrow{\pi'} E \quad f^*(E) = \{ (p, v) \in N \times E \mid f(p) = \pi(v) \} ; \quad \pi^*(p, v) = p \quad \widetilde{\pi}(p, v) = v \quad (26)$$

(*) $\begin{array}{ccc} \pi^* \\ \downarrow \\ N \end{array} \xrightarrow{f} \pi \quad e \quad (f^* E)_p = E_{f(p)}$

Prop.: $f^*(E)$ è una sottovarietà di $N \times E$ e π^* è un fibrato vettoriale.

↙ ? → provare a fare verifica con i diagrammi fatti

dim.: basta mostrare che $f^*(E)$ è una sottovarietà. Leggo f in cantiere:

$$\begin{array}{ccc} U(p) & \xrightarrow{f} & W(f(p)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{modo di restringere} \\ W(f(p)) \text{ intorno banalmente} \\ \text{cioè } \pi^{-1}W \xrightarrow{\sim} W \times \mathbb{R}^k \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(E) & \dashrightarrow & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{diagramma} \\ \text{localmente} \\ \oplus \end{array}$$

con $F^{-1}(E) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \mid f(z) = \pi_1(x, y) \}$ cioè grafico di una funzione \Rightarrow sottovarietà. □

Q.s.: la restrizione è un caso particolare di pull-back con $f := i$ inclusione.

Def. (fibrato tensoriale): il fibrato tensoriale (h, k) su \mathcal{M} è definito come $\tilde{\Gamma}_h^k(\mathcal{M}) := \tilde{\Gamma}_h^k(T\mathcal{M})$
cioè $\tilde{\Gamma}_h^k(\mathcal{M})_p = \tilde{\Gamma}_h^k(T_p\mathcal{M})$.

Def. (campo tensoriale): un campo tensoriale di tipo (h, k) su \mathcal{M} è una sezione di $\tilde{\Gamma}_h^k(\mathcal{M})$.

Una sezione ω è t.c. $\omega(p) \in \tilde{\Gamma}_h^k(T_p\mathcal{M})$. Notiamo che se $(h, k) = (1, 0)$ si torna alla def. di campo vettoriale.

Def. (fibrato cotangente): è $T^*\mathcal{M}$ cioè $\tilde{\Gamma}_0^1(\mathcal{M})$. Un campo tensoriale di tipo $(0, 1)$ è chiamato campo covettoriale o 1-forma. Se $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ allora $df_p: T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$
 $\Rightarrow df_p$ è una sezione di $T^*\mathcal{M}$.

Def (tensore metrico): un tensore metrico di segnatura (p, m) su \mathcal{M}^n è una sezione g di $\tilde{\Gamma}_0^2(\mathcal{M})$ t.c. $\forall x \in \mathcal{M}$ $g(x) \in \tilde{\Gamma}_0^2(T_x\mathcal{M})$ con $g: T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ prodotto scalare con segnatura (p, m) .

Def. (varietà pseudo-riemanniana): una varietà pseudo-riemanniana è una coppia (\mathcal{M}, g) con \mathcal{M} varietà e g tensore metrico di tipo (p, m) . Se $m=0$ allora è Riemanniana, se $m=1$ è lorentziana.

N.B.: l'universo è una 4-varietà lorentziana.

↙ serve dim.?

Prop.: ogni fibrato vettoriale ha una metrica Riemanniana.

Def. (K -forma): $\Delta^k(\mathcal{M}) := \Lambda^k(T\mathcal{M})$, $k \geq 0$; dato $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ fibrato vettoriale $\Delta^k(E)_{\mathbf{p}} := \Delta^k(E_{\mathbf{p}})$

$\subseteq \Gamma_0^k(E_{\mathbf{p}})$ è il sottofibrato dato dai tensori metrici (σ, η) antisimmetrici. Una K -forma è una sezione di $\Delta^k(T\mathcal{M})$. \rightsquigarrow (infatti per $k=1$ $\gamma = \Delta^1$)

Torniamo a analizzare i campi vettoriali, cioè le sezioni $X: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$. Denotiamolo con $\mathcal{X}(\mathcal{M})$

L'insieme di tutti i campi vettoriali su \mathcal{M} ($\mathcal{X}(\mathcal{M}) := \Gamma(T\mathcal{M}) := \{ \text{campi vettoriali su } \mathcal{M} \}$). $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ come abbiamo visto è uno spazio vettoriale e anche un $C^\infty(\mathcal{M})$ -modulo.

Def. (trasporto avanti e indietro tramite diffeo di campi vettoriali): sia $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ diffeomorfismo (non basta la lischezza). Allora ogni campo vettoriale X in \mathcal{M} induce un campo vettoriale Y su \mathcal{N} (e viceversa) usando il differenziale:

$$Y(f(p)) = df_p(X(p)) \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Questo ci dà un isomorfismo tra $\mathcal{X}(\mathcal{M})$ e $\mathcal{X}(\mathcal{N})$ indotto da f .

$$\begin{aligned} \text{Ex. : } \sigma: \mathcal{M} &\rightarrow \Lambda^k(T\mathcal{M}) \quad \sigma(p) \in T_p \mathcal{M} \otimes T_p \mathcal{M}^* \\ q_* \sigma(q(p)) &= \Xi(\sigma(p)) \in T_{q(p)}^N \otimes T_{q(p)}^{N*} \\ \text{con } \Xi(v_1, \dots, v_k, w^1, \dots, w^k) &= (d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_k), d\varphi_p^*(w^1), \dots, d\varphi_p^*(w^k)) \end{aligned}$$

Notazione (campo vettoriale in carte): X campo vettoriale su \mathcal{M} e $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta. Allora

restringiamo X a un campo vettoriale su U e trasportiamolo su V dato che φ è un diffeo. Qua,

$TV = V \times \mathbb{R}^n$ (come già notato) dunque il campo vettoriale trasportato è una mappa da $V \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$

dove nella prima coord c'è l'identità quindi è una mappa $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ che la possiamo scrivere come

vettore: $X(x) = (X^1(x), \dots, X^n(x))$. Usando la notazione di Einstein possiamo scrivere il campo

vettoriale trasportato come $X^i e_i := X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Perché preferiamo usare $\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$?

① È coerente con l'interpretazione di vettori tangenti come derivazioni;

② Non c'è il rischio di confonderli con nient'altro;

③ Ci aiuta a scrivere correttamente il cambio di coordinate tramite la chain rule: se scegliiamo un'altra

carta abbiamo le differenti coordinate $\bar{x}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ e sappiamo che le coordinate cambiano in maniera

contravariante cioè $\bar{x}^j = x^i \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}}$ ma c'è quello che otterremmo proprio usando la chain rule:

$$x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}.$$

Def. (linea integrale): \mathcal{M} varietà, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$. Una linea integrale è una curva $\gamma: I \rightarrow \mathcal{M}$ con

I intervallo aperto t.c. $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$.

(28)

Prop.: X campo su M . $\forall p \in M \exists!$ linea integrale massimale (cioè I_p non si può estendere)

$\gamma_p: I_p \rightarrow M$ t.c. $p \in I_p$, $\gamma_p(0) = p$.

dim. in carte $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Cerco $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $\begin{cases} \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = p \end{cases}$. Allora $\exists!$ unica sol. massimale per Cauchy-Lipschitz. La sol. è liscia e dipende in modo liscio dai param. iniz. □

Def. (complettezza di un campo vettoriale): $X \in \mathcal{F}(M)$ è completo se $I_p = \mathbb{R} \quad \forall p \in M$.

Esempio: ① $M = \mathbb{R}^n$, $X := \frac{\partial}{\partial x^1}$ (↗) è completo infatti $\gamma_p(t) = p + t e_1$ funziona.

② $M = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, per essere completo deve essere definita linea integrale $\gamma_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{p\}$

t.c. $\gamma'(0) = X(\gamma(0)) = X(p)$ ma non è def.

Def. (flusso): X campo su M . $U = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \in I_p\}$. Il flusso è $\Phi: U \rightarrow M$ $(p, t) \mapsto \gamma_p(t)$

Dalla dipendenza liscia dei dati iniziali (per Cauchy-Lipschitz) si ha che U è

aperto e che Φ è liscia.

↗ $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall p \in M \exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Phi(p, u) = \gamma_p(u)$

Lemma (criterio per completezza): se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_p \quad \forall p \in M$, allora X è completo.

dim. 1° passo: vogliamo dire che $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq I_p \quad \forall t \in I_p$. E dunque $I_p = \mathbb{R}$.

2° passo: per dirlo vediamo che $I_{\Phi(t, p)} + t = I_p$ così dato che $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I_{\Phi(t, p)}$, tasi.

3° passo: $I_{\Phi(t, p)} + t = I_p \Leftrightarrow \Phi(\Phi(t, p), u) = \Phi(p, t+u) \Leftrightarrow \gamma_{\Phi(t, p)}(u) = \gamma_p(t+u)$

che è vero perché al tempo $u=0$ fanno entrambe $\gamma_p(t)$ e poi uso unicità. □

Corollario: M compatto \Rightarrow ogni $X \in \mathcal{F}(M)$ è completo.

dim. Per completezza ogni intorno U di $M \times \{0\}$ in $M \times \mathbb{R}$ deve contenere $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. □

Raddrizzamento di campi: Sia X un campo vettoriale su una varietà M e $p \in M$ un punto.

Tra tutte le infinite possibili carte vicino a p , ce ne è una che trasporta X in un vettore

ragionevolmente "carico" di \mathbb{R}^n ? Sì se X non si annulla in p .

Prop. (raddrizzamento di campi vettoriali): $X \in \mathcal{F}(M)$, $p \in M$. $X(p) \neq 0 \Rightarrow \exists \varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c.

$$\varphi_*(x) = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

dim. Leggiamo X in una carta: $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ con wlog $p=0$, A meno di iso. lineare

(29)

$X(o) = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Usiamo ora il flusso Φ di X per costruire una carta che raddrizza il campo X .

Poniamo: $\psi(x^1, \dots, x^n) = \phi((o, x^2, \dots, x^n), x^1)$. Ors, il campo X potrebbe non essere completo
allora $\psi(x)$ è ben definito solo per $\|x\|$ abbastanza piccoli. Otteniamo una mappa $\psi: B(o, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$

per qualche $\varepsilon > 0$. Proviamo che il differenziale $d\psi_o$ è l'identità. Notiamo che $\psi(o, x^2, \dots, x^n) =$

$$= \Phi((o, x^2, \dots, x^n), o) = \gamma_{(o, x^2, \dots, x^n)}(o) = (o, x^2, \dots, x^n) \text{ allora } \psi \text{ è l'identità sull'iperpiano}$$

$x^1 = o$. Dunque $d\psi_o(e_i) = e_i \quad \forall i = 2, \dots, n$. Inoltre per def $\gamma_o(t)$ è la curva int. in o ma $\gamma_o(t) =$

$$= \Phi(o, t) = \psi(t, o, \dots, o) \Rightarrow d\psi_o(e_1) = \gamma_o'(t) \stackrel{t=o}{=} X(o) = \frac{\partial}{\partial x^1} = e_1 \Rightarrow d\psi_o \text{ è invertibile} \Rightarrow \psi \text{ è un}$$

diffeo locale in o . Allora $\psi: U \rightarrow V$ è diffeo per opportuni intorni U e V e allora è la carta

cerchata: $(\psi^{-1})_*(X) = \frac{\partial}{\partial x^1}$. \square

Def. (omotopia liscia): un'omotopia liscia tra f e $g: M \rightarrow N$ è una funzione $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$

liscia t.c. $f(p) = F(p, 0)$ e $g(p) = F(p, 1) \quad \forall p \in M$.

Oss. essere lisciamente omotopi è una rel. di eq. tra funzioni $M \rightarrow N$. L'unica non ovvia è la

proprietà transitiva: $f \sim g$ e $g \sim h$ allora siano F, G omotopie resp. tra f, g e g, h . Ri definisca

F, G come $F^t = F(p, \lambda(t))$ con $\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ \in (0, 1), & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 1, & x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$ (e lo stesso G^t) e adesso possono essere incollate in maniera liscia come al solito:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, zt) & , t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, zt - \frac{1}{2}) & , t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad . \square$$

Def. (Isotopia): $f, g: M \rightarrow N$ embedding. Una isotopia tra f, g è un'omotopia t.c. $F_t: M \hookrightarrow N$

è un embedding $\forall t \in \mathbb{R}$.

Oss. è sempre una relazione di equivalenza.

Oss. $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ embedding sono sempre lisciamente omotopi ma potrebbero non essere isotopi in molti

casi ad esempio:

Def. (isotopia ambiente): un'isotopia ambiente di N è un'isotopia fra un $f: N \rightarrow N$ diffeo. e

id_N t.c. $F_t: N \rightarrow N$ diffeo. $\forall t \in \mathbb{R}$.

Esempio: $X \in \mathcal{F}(M)$ completo, $\Phi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ flusso, $\Phi_t: M \rightarrow M$, $p \mapsto \Phi(p, t)$ è un'isotopia ambiente.

Oss. $\Phi_t \circ \Phi_u = \Phi_{t+u} \Rightarrow \Phi_{t+u}$ diffa con $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t} \in \{\Phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ è un gruppo $\cong \mathbb{R}$.

Def (ambiente isotopi): $f, g: N \rightarrow M$ embedding sono ambiente isotopi se \exists isotopia ambiente F

di N t.c. $F_0 = id_N$ e $g = F_1 \circ f$. Ambiente isotopi \Rightarrow isotopi: prendo come isotopia $F_t \circ f$.

Teorema (poche possibilità di manovra): M compatto \Rightarrow ogni isotopia tra embedding $f, g: M \rightarrow N$ è indotta da una isotopia ambiente di N . (I isotopi \Rightarrow ambiente isotopi)

dim. Sia $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ isotopia tra f e g . Definisco $g: M \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$ t.c. $(p, t) \mapsto (f(p, t), t)$

Ora g è embedding, infatti: ① $d g_{(p,t)} = \begin{pmatrix} d(f_p)_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è iniettiva \Rightarrow immersione

② È iniettiva ③ è propria poiché M compatto.

Per concludere la dim. dobbiamo fare una parentesi:

Estensione di sezioni: $E \rightarrow M$ fibrato vettoriale, $S \subseteq M$ qualsiasi, ha senso considerare sezioni definite solo su S ?

Prop./Es.: S chiuso \Rightarrow ogni sezione s su S si estende a una sezione su M (si usano le partizioni dell'unità, simile a $F: S \rightarrow (\mathbb{R}^n)$).

Cor.: Ogni campo vettoriale su un chiuso si estende a tutta la varietà.

Prop. (ancora più forte): S chiuso \Rightarrow ogni sezione s su S si estende a una sezione su M che è nulla fuori da un aperto a piacere che contiene S . (stessa dim. dell'altro)

Chiamiamo $\frac{\partial}{\partial t}$ il campo $(0, 1) \in T_p M \times \mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{c} \text{lo punto su } g(M \times [0, 1]) \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \right)$. Dato che g è un embedding posso spostare in avanti il campo vettoriale così: $X(G(p, t)) = dG_{(p,t)} \frac{\partial}{\partial t}$ (uso iniettività ed è liscio perché \rightarrow mi serve per localizzare il campo G embedding). Ora ho un campo su $B := g(M \times [0, 1])$ che è compatto, considero $U \subseteq B$ a chiusura compatta e estendo $X|_B$ a un campo su $N \times \mathbb{R}$ che sia nullo fuori da U . Lo definisco questo

campo cambiando la seconda coordinata e imponendo che sia sempre 1. Dunque questo nuovo campo è t.c.

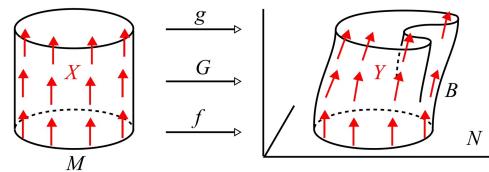
① su B è il campo originale (era già 1);

② è proprio $\frac{\partial}{\partial t}$ fuori da U .

Questo campo è completo infatti \bar{U} è compatto e $\forall (p,t) \in \bar{U} \quad \Phi((p,t), u) = \gamma_{(p,t)}(u) = (p, t+u)$. Dunque $\exists (-\varepsilon, \varepsilon)$ contenuto in ogni $I_{(p,t)}$ $\forall (p,t) \in N \times \mathbb{R} \Rightarrow$ completo.

Dunque se prendo il flusso $\bar{\Phi}: N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$ stesso discorso di X
di prima L'isotopia ambiente $((p,t), u) \mapsto (\psi(p,t,u), t+u)$

è proprio $H: N \times \mathbb{R} \rightarrow N$ (e' isotopia per costruzione) e $H_0 = id$ e $H_1 \circ f = g$.



$$\begin{aligned} H_0(p) &= \psi(p, 0) = p \\ \text{ma } \bar{\Phi}(p, t, u) &= \gamma_{(p,t)}(u) \\ \text{cioè } \bar{\Phi}(p, 0, u) &= \gamma_{(p,0)}(u) \\ &= (p, u) \Rightarrow \psi(p, 0, u) = p \end{aligned}$$

? $\bar{\Phi}(p, 0, 1) = \psi(p, 0, 1)$

□

Corollario: $f, g: \mathcal{N} \rightarrow N$ isotope, \mathcal{N} compatta $\Rightarrow N \setminus f(\mathcal{N}) \underset{\text{diffeo}}{\sim} N \setminus g(\mathcal{N})$.

dim. $F_t: N \rightarrow N$ isotopia ambiente t.c. $F_0 = id$ e $F_1 \circ g = f \Rightarrow F_1(g(\mathcal{N})) = f(\mathcal{N})$. F_1 è diffeo

Allora $g(\mathcal{N}) \cong f(\mathcal{N})$ e passo ai complementari. □

Controesempio: prendiamo $(0, 1)$ che non è compatto: $(0, 1) \xhookrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ si include, $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ diventa una retta di \mathbb{R}^2 ; nel caso $\mathbb{R}^2 \setminus f(0, 1)$ è connesso mentre $\mathbb{R}^2 \setminus g(0, 1)$ è sconnesso.

Prop.: Ogni fibrato vettoriale $E \rightarrow \mathcal{N}$ ha un tensore metrico di segnatura $(p, 0)$ ($\exists g \in \Gamma T_p^*(E)$)

t.c. $g(p)$ è p.s. >0 $\forall p \in \mathcal{N}$). In particolare ogni varietà \mathcal{M} ha una struttura di varietà Riemanniana

dim. $\forall p \in \mathcal{N} \quad \exists U(p)$ interno banalizzante cioè $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$. Dunque sul fibrato fascio sulla fibra

$\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ possa mettere il prodotto scalare euclideo $U \xleftarrow{\cong} \mathbb{R}^k$ che chiamiamo $(g_p)_q \quad \forall q \in U(p)$.

$((g_p)_q(v, w) = \langle q(v), q(w) \rangle)$. Adesso li incolliamo con una partizione dell'unità $\{p_p\}_{p \in \mathcal{N}}$ che si riferisce

al ricoperto $\{U_p\}_{p \in \mathcal{N}}$ degli intorni banalizzanti. Definisco dunque $g = \sum_{p \in \mathcal{N}} p_p g_p$ che funziona dato

che una combinazione lineare di prodotti scalari positivi con coeff. positivi: è un prodotto scalare def. positivo. □

Corollario: Siano $E \rightarrow \mathcal{N}$ e $E^* \rightarrow \mathcal{N}$ fibrati vettoriali. Allora sono sempre isomorfi.

dim. basta prendere un tensore metrico g e definisco $E \xrightarrow{\Psi} E^*$ $\Psi: E_p \rightarrow E_p^*$
 $v \mapsto g_p(v, w)$ □

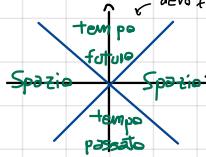
Def. (struttura lorentziana tempo-orientata): una struttura lorentziana è tempo-orientata se è fissata

una scelta localmente coerente del cono passato futuro. Cioè una struttura lorentziana è grande i)

prodotto scalare ha segnatura $(n-1, 1)$. In particolare $v \neq 0$ è di tipo $\begin{cases} \text{spazio} & \text{se } \langle v, v \rangle < 0 \\ \text{luce} & \text{se } \langle v, v \rangle = 0 \\ \text{tempo} & \text{se } \langle v, v \rangle > 0 \end{cases}$

Localmente coerente significa che $\forall p \in \Pi$ ✓ copre bene

$\exists X \in \mathcal{X}(U(p))$ t.c. $X(q)$ è di tipo tempo futuro.



32

Prop. Π ha una struttura Lorentziana tempo orientata $\Leftrightarrow \Pi$ ammette un campo vettoriale mai nullo.

dim. $\Rightarrow \forall p \in \Pi \exists U(p)$ con un campo orientato verso il futuro. Dunque sfruttando le partizioni dell'unità li incolla ottenendo un campo mai nullo (essere di tipo futuro è una condizione convessa dunque è preservata).

$$X(q) = \sum_{p \in \Pi} X_p(q) p_p(q)$$

$\stackrel{\text{è un cono}}{\square}$

$\Leftarrow X \in \mathcal{X}(\Pi)$ non nullo è un campo tensoriale di tipo $(1,0)$. Lo devo trasformare in $(0,2)$.

Usa la metrica riemanniana ausiliaria (g tipo $(0,2)$). Dato che X è mai nullo, è meno di normalizzarla possiamo pensare $\|X\|=1$. Sia $X^*_{(0,1)} := \overset{\text{contrazione}}{C}(X \otimes g)$, definisco $h := g - 2X^* \otimes X^*$. Mostriamo che

h è un prodotto scalare lorentziano. Sia $p \in \Pi$, $X(p) \in T_p \Pi$ lo completa a base ortonormale

$$\begin{aligned} & \{X(p), v_1, \dots, v_n\}. \text{ Ora } h_{ij} = g_{ij} - 2(X^* \otimes X^*)_{ij} \text{ con } g_{ij} = \delta_{ij}, (X^*)_{ij} = \delta_{ij}, (X^*)_{ij} = g_{ij} X^j = \\ & = \delta_{ij} X^j \text{ e } X^j = \delta_{1,j} \text{ poiché } X = 1 \cdot X + 0v_1 + \dots + 0v_n \text{ dunque } (X^* \otimes X^*)_{ij} = (X^*)_i (X^*)_j = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \\ & \text{allora } h_{ij} = \delta_{ij} - 2 \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma (di strizzamento): Sia $E \xrightarrow{\pi} \Pi$ fibrato vettoriale e $W \subseteq E$ aperto contenente $s_0(\Pi)$. Allora

\exists embedding $\psi: E \rightarrow W$ t.c.: ① $\psi(E_p) \subseteq E_p$ ② $\psi|_{\Pi} = \text{id}_{\Pi}$ \leftarrow sarebbe $s_0(\Pi)$

dim. \exists tensore metrico su E . $\forall p \in \Pi \exists U(p)$ aperto banalizzante abbastanza piccolo con \bar{U} compatto. $\exists E \supseteq$

t.c. $\{v \in E_q \mid q \in U, \|v\| \leq \epsilon\} \subseteq W$. Definisco $f_p: \pi^{-1}(U) \rightarrow \pi^{-1}(U) \cap W$ (strizzamento locale). Incolla con una partizione dell'unità $\{p_p\}_{p \in \Pi}$: $f: E \rightarrow W$ \hookrightarrow Imm è nella palla di raggio ϵ $\Rightarrow \|\frac{\epsilon}{1+\|v\|} v\| \leq \epsilon$ \Rightarrow sta in W

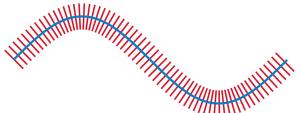
$$v \mapsto \sum_p p_p(\pi(v)) f_p(v). \quad \square$$

Esistenza intorno tubolare

Def. (intorno tubolare): un intorno tubolare di N in Π (con N sottovarietà di Π) è un fibrato vettoriale

$\pi: E \rightarrow N$ è un embedding $i: E \rightarrow \Pi$ t.c. ① $i|_N = \text{id}_N$ (N vista come sottovarietà di Π) ② $i(E)$ intorno aperto di N .

\leftarrow è un intorno tubolare (in rosso) di una curva (in blu) nel piano.



Def (fibroso normale): Il fibroso normale di N è $\cup N := T\mathbb{M}|_N / \mathbb{T}_N$ ($T\mathbb{M}|_N \subseteq T\mathbb{M}$ sempre). (33)

Oss. $\dim \cup N = \dim \mathbb{M}$

Oss. g metrizza ricemanniana su $T\mathbb{M}$, allora $\cup N$ si può identificare con l'ortogonale $(\cup N)_p = (\mathbb{T}_p N)^\perp$

Teo: N sottovarietà di \mathbb{M} . Esiste un intorno tubolare isomorfo a $\cup N$ (cioè \exists embedding $\cup N \rightarrow \mathbb{M}$ che è

l'identità sulla zero-sezione,

dim. Caso $\mathbb{M} = \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$, usando prodotto scalare euclideo $\mathbb{T}_p N \oplus \overline{\mathbb{T}_p N^\perp} = \mathbb{R}^m \quad \forall p \in N$. Dunque

$\cup N = \{(p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid p \in N, v \in \mathbb{T}_p N^\perp\}$. Def. $f: \cup N \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \cup N|_{(p,v)=0} \stackrel{q\text{-sez}}{\cong} N$, $f|_N$ è inclusione.

Ha anche $dF_{(p,0)}: \frac{\mathbb{T}_{(p,0)} \cup N}{\mathbb{T}_p N^\perp} \rightarrow \mathbb{R}^m$ è l'inclusione sulla \mathbb{R}^m \Rightarrow è invertibile $\Rightarrow f$ è

diffuso loc. in $(p,0)$ $\forall p \in N$. Chiamo $V_r(p) = \{(q, v) \in \cup N \mid |q-p| < r, \|v\| < r\}$ t.c. $f|_{V_r(p)}$ è diffuso.

$\rho(p) = \sup \{r \leq 1 \mid f|_{V_r(p)} \text{ è diffuso}\} \text{ è continua} \Rightarrow f|_{V_p(p)} \text{ è iniettivo} \quad (\text{e' diffuso e poi } \sup, \text{ minimo})$

iniettivo. $U = \{(p, v) \in \cup N \mid \|v\| < \frac{1}{2}\rho(p)\}$ è aperto $\cong f|_U$ è diffuso. Allora $f: U \rightarrow \mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ è diffuso

Per strutt. $\exists g: \cup N \xrightarrow{\text{emb.}} U$ c'è allora $\cup N \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f} \mathbb{M}$ embedding cercato.

Caso generale: $N^n \subseteq \mathbb{M}^m \subseteq \mathbb{R}^N$. \hookrightarrow inclusione dei tangenti con $p \in N$. Dunque $\mathbb{T}_p N \oplus \overline{\mathbb{T}_p N^\perp} = \mathbb{T}_p \mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}^N$

$\mathbb{T}_p N \subseteq \mathbb{R}^N$, $\cup N = \{(p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid p \in N, v \in \mathbb{T}_p N^\perp\}$. $F: \cup N \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (p, v) \mapsto p + v$. $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^N \Rightarrow$

\exists intorno tubolare W : $W \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ e considera $U = F^{-1}(W)$. Considera $f := \pi \circ F$.

$$\begin{matrix} S \\ \downarrow \pi \\ W \end{matrix}$$

Prop.: $f: \mathbb{M} \rightarrow N$ continua, $S \subseteq \mathbb{M}$ chiusa, $f|_S$ liscia. Allora f è omotopia $\Rightarrow F: \mathbb{M} \rightarrow N$ liscia con $F|_S = f|_S$.

dim. Per Whitney $\cup N \subseteq \mathbb{R}^N$ e considero $\cup N$ intorno tubolare di N . Per quanto visto dato $\varepsilon: \mathbb{M} \rightarrow (0, \infty)$

continua, $\exists g: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ liscia, $g|_S = f|_S$, $\|g(p) - f(p)\| \leq \varepsilon(p)$. Se definisco $\varepsilon' := \inf_{p \in S} \varepsilon(p)$

Allora per def. $\forall p \in N \quad B(p, \varepsilon'(p)) \subseteq \cup N$. Dunque trova la $g: \mathbb{M} \rightarrow \cup N$ usando come $\varepsilon := \varepsilon' \circ f$,

pongo $F = \pi \circ g$ con $\pi: \cup N \rightarrow N$ proiezione. L'omotopia tra F e f è $F_t(p) = \pi\left(t \overbrace{g(p)}^{\text{in senso continuo}} + (1-t)f(p)\right)$. □

Corollario: $f, g: \mathbb{M} \rightarrow N$ liscie omotopie in senso continuo \Rightarrow anche in senso liscio.

dim. $F: \mathbb{M} \times [0,1] \rightarrow N$, $F_0 = f$, $F_1 = g$ omotopia da $h_p \Rightarrow$ estendo a $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ (ridicendo semplicemente che

$F_t = f$ per $t \leq 0$ e $F_t = g$ per $t \geq 1$). Considero il chiuso $\mathbb{M} \times \{0,1\}$, allora $\exists G: \mathbb{M} \times \mathbb{R} \rightarrow N$ liscia

con $G|_S = F|_S$ e dunque $G_0 = f$ e $G_1 = g$. □

Gruppi di omotopia delle sfere

Def. (gruppi omotopia delle sfere): $K > 0$, X sp. topologico, $p \in X$. $\widetilde{\pi}_K(X, p) = \{f: S^K \rightarrow X \text{ continua} \mid f(N) = p\}$

classe $\xrightarrow{\sim} \pi_K(X, p)$ omotopia relativa

N.B. è un gruppo (abeliano per $K=2$).

Prop. Se $K < n$, $\pi_K(\mathbb{S}^n) = \{e\}$

dim. $f: \mathbb{S}^K \rightarrow \mathbb{S}^n$ continua c'è omotopia a g liscia $\Rightarrow g$ non è sovietiva $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{S}^n \setminus f(\mathbb{S}^K) \Rightarrow$ posso vedere costante in p
 $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow$ c'è omotopia a costante ($F_t = f_t \cdot t + (1-t) \frac{\cdot}{c_p}$).

Altri casi: $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \quad \forall n$, generato da id $\quad \pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ generato dalla fibrazione di Hopf $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Teorema: $S \subseteq M$ sottovarietà. L'intorno tubolare è unico a meno di isotopia. (no dim.)

Def. (isotopia tra intorni tubolari): sono dati due intorni tubolari $E \xrightarrow{\sim} M$, $E' \xrightarrow{i} M$, $i|_S = i'|_S = id$.
immagine aperta. Sono isotopi se $\exists E \xrightarrow{\psi} E'$ isomorfismo tale che $i \sim i' \circ \psi: E \rightarrow M$
 $\pi \downarrow \quad \downarrow \pi'$ tra fibrati vett.
 $S \xrightarrow{id} S$ isotopia relativa ad S

Corollario: $E \simeq_{\nu} N$

Esempio: $S = \{p \in M : \text{fibroto normale per } p \text{ e' un embedding } i: \mathbb{R}^n \rightarrow M \ni \mapsto p\}$.

Corollario: due embedding i_1, i_2 di questo tipo sono isotopi dopo aver composto con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ iso lineare.

Oss. $GL(n, \mathbb{R})$ ha 2 c.c. $\Rightarrow \varphi$ c'è omotopia a id (se $\det \varphi > 0$) oppure a una riflessione.

Corollario: se M è orientata, due embedding $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ con $f(0) = g(0) = p$ sono isotopi.

Teorema: M connessa orientata. Due embedding $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ sono sempre isotopi.

Ci servono:

Prop. dato $p, q \in M \quad \exists \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ liscia t.c. $\alpha(0) = p, \alpha(1) = q$

Prop. dato $p, q \in M \quad \exists \varphi: M \rightarrow M$ diffeo. isotopia a id t.c. $\varphi(p) = q$.

dim. $\exists \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M$ liscia t.c. $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$: è isotopia tra f: $\{x \mapsto p\} \rightarrow M$ e $g(x) = q \Rightarrow \exists$ isotopia ambiente. □

dim. teorema $\exists \varphi_t: M \rightarrow M$ diffeo con $\varphi_0 = id$, $\varphi_1(p) = q$. Chiammo $f_t = \varphi_t \circ f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow M$ embedding,

$f_0(0) = p, f_1(0) = q \Rightarrow$ lo ricondoce al caso $p = q$. □

Somma connessa

M, N connesse orientate con $\dim M = \dim N = n$. $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow M$, $g: \mathbb{R}^n \hookrightarrow N$ embedding con f che pre-

serve l'orientazione e g che la inverte. Sia $f(0) = p$ e $g(0) = q$.

Oss. f, g sono uniche a meno di isotopia.

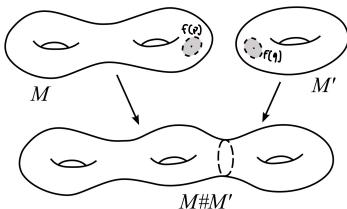
Definisco $X := (\mathbb{M} \setminus \{p\} \sqcup \mathbb{N} \setminus \{q\}) /_{\sim}$, dove $f(x) \sim g\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. X ha una naturale struttura di n -varietà orientata.

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2} \text{ inverte orientazione}$$

(35)

Scriviamo $X = \mathbb{M} \# \mathbb{N}$ a meno di diffeo, non dipende da nulla. Ora, $\mathbb{M}_n := \{\text{n-varietà orientate}\} / \text{diffeo}$

ha $\#$ come operazione binaria che è commutativa, associativa e ha \emptyset^n elemento neutro (però $\#$ quasi mai inverso).



Def.: $S_g := T \# \dots \# T$ somma connessa di g tori, detta "superficie di genere g " ($g \geq 0$).

Teorico (classificazione delle superfici): ogni superficie compatta,连通的 e orientabile è diffeo a S_g per un qualche g .

Parentesi di Lie

Per varietà, $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ vogliamo definire un $[X, Y] \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Notiamo che se $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ e $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ allora posso definire $fX \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ come $(fX)(p) := f(p)X(p)$ e $Xf \in C^\infty(\mathbb{M})$ come $(Xf)(p) := X(p)f$.

Def. (parentesi di Lie): le parentesi di Lie (o bracket) $[X, Y]$ di due campi $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$ è il campo

$$[X, Y] \in \mathcal{X}(\mathbb{M}) \quad t.c. \quad \forall p \in \mathbb{M} \quad \forall f \in C^\infty(U(p)) \quad [X, Y](p)(f) = X(p)(Yf) - Y(p)(Xf)$$

Prop.: $[X, Y](p)$ ^{si metterà} è effettivamente una derivazione (e dunque $[X, Y]: \mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{M}$ è effettivamente sezione).

dim- locale, lineare: ovviamente $Y, X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$;

$$[X, Y](p)(fg) = [X, Y](f)g(p) + [X, Y](g)f(p) = (X(Yf) - Y(Xg))g(p) + (X(Yg) - Y(Xg))f(p)$$

$$[X, Y](p)(fg) = X(p)\underbrace{(Y(f)g)}_{\downarrow} - Y(p)\underbrace{(X(fg))}_{\text{def. prima}} = X(p)((Yf)g + (Yg)f) - Y(p)((Xf)g + (Xg)f)$$

$$= (X(p)(Yf))g + (X(p)(Yg))f + (X(p)(Yg))f + (X(p)(Yf))g - (Y(p)(Xf))g - (Y(p)(Xg))f$$

$$= (Y(p)(Xg))f - (Y(p)(Xf))g \quad \begin{array}{l} \text{sono lo stesso} \\ \text{solo che non ha messo } p \text{ sempre} \end{array} = \text{tesi.}$$

□

Oss. $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ con l'operazione $[,]$ è un'algebra non associativa e non commutativa

Proprietà: $\cdot [X, Y] = -[Y, X]$

un'algebra per cui vale Jacobi è detta algebra di Lie

$$\cdot [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{Identità di Jacobi})$$

$\mathcal{X}(\mathbb{M})$ algebra di Lie

Prop.: Se $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, $\varphi_*: \mathcal{X}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ è un isomorfismo di algebre (36)

di Lie $([\varphi_* X, \varphi_* Y]) = \varphi_* [X, Y]$.

Prop.: In coordinate $[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ cioè $[X, Y] = X^j \frac{\partial Y}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X}{\partial x^j}$

$$\begin{aligned} \text{dim. } [X, Y]^i &= X(Yf) - Y(Xf) = X\left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - Y\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\ &= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \cancel{Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}} - \cancel{Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}} = \text{tesi.} \quad \square \end{aligned}$$

Corollario: Se $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ allora $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, Y\right] = \frac{\partial Y}{\partial x^i}$

Corollario: $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$ e $[X, X] = 0$

Def. (campi che commutano): X, Y campi vettoriali; commutano se $[X, Y] = 0$.

Oss.: $[,]$ è \mathbb{R} -lineare su $\mathcal{X}(\mathbb{N})$ ma non è $C^\infty(\mathbb{N})$ -bilineare, infatti vale:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

Ex.: $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \quad \mathbb{N} = \mathbb{R}^n \quad X(x) = Ax \quad Y(x) = Bx \quad [X, Y](x) = (BA - AB)x$

Def. (campi f-correlati): $f: \mathbb{N} \rightarrow N$ lascia, $X \in \mathcal{X}(\mathbb{N})$, $Y \in \mathcal{X}(N)$ sono f-correlati se:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad Y(f(p)) = df_p(X(p))$$

Ex.: Se x_1, y_1 sono f-correlati e allo stesso modo x_2, y_2 allora $[x_1, x_2] \in [y_1, y_2]$ sono f-correlati.

Corollario: $\mathbb{N} \subseteq N$ sottovarietà. Siano $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{N})$ e X^i, Y^i due estensioni risp. di X, Y che stanno in $\mathcal{X}(N)$. Allora $[X^i, Y^i] \in \mathcal{X}(N)$ è estensione di $[X, Y]$, nel senso che $[X^i, Y^i]|_{\mathbb{N}} = [X, Y]$.

Interpretazione "geometrica" bracket di Lie: prendiamo Φ, Ψ flussi derivanti risp. da $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{N})$, in generale

i flussi non commutano (nel senso che definiremo tra poco), il bracket "misura" questo grado di commutazione.

Def. (flussi che commutano): due flussi Φ e Ψ commutano (localmente) se $\Phi_s \circ \Psi_t(p) = \Psi_t \circ \Phi_s(p)$

svunque abbia senso.

→ al posto di loro possiamo prendere una qualsiasi t e guardare in cantiere, non ha senso la distanza se non

Lemma: Se $\mathbb{N} = U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Phi_s \circ \Psi_t(p) - \Psi_t \circ \Phi_s(p) = st[Y, X](p) + o(s^2 + t^2)$ (il bracket è la discrepanza tra i due flussi al II ordine). \leftarrow DA PARE GIRO?

Prop.: $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{N})$ commutano \Leftrightarrow i flussi commutano localmente. Ex.: se X, Y completi \Rightarrow si può togliere la

diagramma \Leftarrow segue dal lemma.

per def. \exists linea integrale che riceve c è $\gamma_p(t) = p \Rightarrow \gamma'_p(t) = \psi_p(t) = p$

\Rightarrow Se $X(p) = Y(p) = 0$ allora è ovvio. Se $X(p) \neq 0$ \exists cantiere in cui $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Per hp $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, Y\right] = 0$