Seconda Prova di Matematica 2025

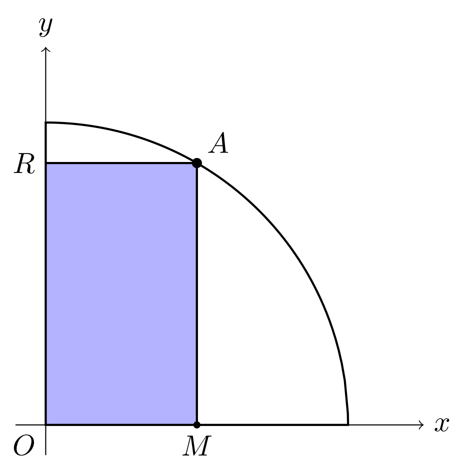
David Vencato

Ultima versione: 26 Giugno 2025

1 Punto (c) Problema 1

Si consideri la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ e sia A un punto nel grafico di g situato nel I quadrante. Siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi di riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ sia di area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.

Dai punti precedenti del problema sappiamo già che $g(x)$ rappresenta la semicirconferenza superiore con centro $(0, 0)$ e raggio 2. Dunque, graficamente abbiamo:



È evidente che la funzione area da massimizzare sia

$$S(x) = x\sqrt{4 - x^2}, \quad 0 < x < 2.$$

Invece di usare le tecniche di derivazione per studiare i massimi e minimi delle funzioni, a volte è più diretto usare disuguaglianze note, come la seguente:

Lemma 1.1: *Dati i numeri reali $x, y \geq 0$, vale che*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \tag{1}$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e soltanto se $x = y$.

Proof. Consideriamo l'identità:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Sviluppando i termini otteniamo la disuguaglianza richiesta.
Inoltre, dato che un quadrato è nullo se e soltanto se lo è il suo argomento, l'uguaglianza vale se e soltanto $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ cioè $x = y$. □

Remark 1.2: Il lemma appena dimostrato è un caso particolare di quelle che sono le cosiddette "disguaglianze tra medie". In effetti, il membro di sinistra e il membro di destra sono rispettivamente la media geometrica e la media aritmetica dei numeri x e y.

Dunque, otteniamo:

$$\begin{aligned} S(x) &= x\sqrt{4-x^2} && (x > 0) \\ &= \sqrt{x^2(4-x^2)} && \text{Disequazione (1)} \\ &\leq \frac{x^2 + (4-x^2)}{2} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Quindi, l'area non può essere maggiore di 2 e, per la seconda parte del Lemma 1.1, il punto di massimo si ha quando $x^2 = 4 - x^2$, cioè il quadrilatero è un quadrato e $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (che è una soluzione accettabile).
Per il perimetro, possiamo usare la disuguaglianza tra media aritmetica e media quadratica:

Lemma 1.3: *Dati i numeri reali $x, y \geq 0$, vale che*

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}. \tag{2}$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e soltanto se $x = y$.

Proof. Esattamente come prima, sviluppando i termini si vede che la (2) è equivalente a $(x-y)^2 \geq 0$. □

Dunque, chiamando con $P(x)$ la funzione perimetro (definita per $0 < x < 2$), abbiamo

$$\begin{aligned} P(x) &= 2\left(x + \sqrt{4 - x^2}\right) \\ &= 4\left(\frac{x + \sqrt{4 - x^2}}{2}\right) \qquad \text{Equazione (2)} \\ &\leq 4\left(\sqrt{\frac{x^2 + 4 - x^2}{2}}\right) \\ &\leq 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

E in effetti $P\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$ ($x = \sqrt{2}$ è l'unico punto di massimo anche in questo caso).