Processi di Markov

Def. (processo di Markov): $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ filtrato, $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ a valori in $(E,\mathcal{E})$ adattato, $\mathcal{G}_t$ filtrazione $\subseteq \mathcal{F}$, ν misura su $(E,\mathcal{E})$; se $\forall f \in L^0_+(E,\mathcal{E})$ $\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{G}_s] = P_{s,t} f(X_s)$ $\forall s<t$ con $P_{s,t}$ prob. di trans. su $(E,\mathcal{E})$ e $(X_0)_\# \mathbb{P} = \nu$, si dice che X è di Markov rispetto a $\mathcal{G}_t$ con prob. di trans. $P_{s,t}$ e distribuzione iniziale ν.

Esempio: il BM standard $(B_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è di Markov rispetto a $\mathcal{F}^B_t$. Infatti:

$$\mathbb{E}[f(B_t)\,|\,\mathcal{F}^B_s] = \mathbb{E}[f(B_t - B_s + B_s)\,|\,\mathcal{F}^B_s] \overset{\text{freezing lemma}}{=} \mathbb{E}_{z\sim N(0,t-s)}[f(z+a)]\big|_{a=B_s} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(z+B_s)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{z^2}{2(t-s)}}\,dz \quad \Rightarrow \quad P_{s,t}(x,A) = P_{t-s}(x,A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2(t-s)}}\,dz.$$

vado a definire io $P_{s,t}$

Prop. (caratterizzazione): $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è di Markov rispetto a $\mathcal{F}^X_t$ con prob. di transizione $P_{s,t}$ e distribuzione iniziale ν $\iff$ $\forall\, 0=t_0<t_1<\dots<t_k$; $f_0, f_1, \dots, f_k \in L^0_+$ $\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})\right] =$ (*)

$$= \int_E \nu(dx_0) f_0(x_0) \int_E P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1) f_1(x_1) \dots \int_E P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1},dx_k) f_k(x_k).$$

dim. $\boxed{\Rightarrow}$ (*) $= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i})\; \mathbb{E}[f_k(X_{t_k})\,|\,\mathcal{F}^X_{t_{k-1}}]\right] \overset{hp.}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1} f_i(X_{t_i})\, P_{t_{k-1},t_k} f_k(X_{t_{k-1}})\right]$, ← va fino k-1

e poi induzione.

qui uso def spe. cond. cioè se $\int_E Y f(X_t) = \int_E Y P_{s,t} f(X_s)$ ⇒ prendo $Y = \mathbb{1}_A$ con A evento e ho la def. di sper. cond.

$\boxed{\Leftarrow}$ Vogliamo che $\forall Y$ $\mathcal{F}^X_s$-mis. valga $\mathbb{E}[Y\,\mathbb{E}[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}^X_s]] = \mathbb{E}[Y P_{s,t} f(X_s)]$. Con un argomento di densità, basta controllare $Y = \prod_{i=0}^{k} f_i(X_{t_i})$, $t_i \le s$, $f_i \in L^0_+$. □ ← so loro è la freccia sopra al contrario

Teorema (esistenza): date prob. di trans. $P_{s,t}$ su $(E,\mathcal{E})$, ν prob. su $(E,\mathcal{E})$ $\exists!$ probabilità $\mathbb{P}_\nu$ su $(E^{[0,+\infty)}, \mathcal{E}^{\otimes[0,+\infty)})$ t.c. il processo $X_t : E^{[0,+\infty)} \to E$, $X_t((e_s)_{s\in[0,+\infty)}) = e_t$ sia di Markov rispetto a $\mathcal{F}^X_t$ con prob. di trans. $P_{s,t}$ e distribuzione iniziale ν.

dim.: $\forall\, 0=t_0<t_1,\dots,t_k$, $A_0,\dots,A_k \in \mathcal{E}$ definiamo $\mathbb{P}_{t_0,\dots,t_k}(A_0\times\dots\times A_k) := \int_{A_0}\nu(dx_0)\cdot \int_{A_1} P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1)\dots\int_{A_k} P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1},dx_k)$. Queste distribuzioni in dim. finita soddisfano le hp. del teo. di estensione di Kolmogorov. Uso teorema di caratterizzazione. □

sto facendo sulle indic. il teorema di caratt.

Ex.: $(B_t)_t$ BM standard, $X_t = \int_0^t B_s\,ds$. X_t non è di Markov rispetto a $\mathcal{F}^B_t$. Hint: $X_t = X_s + \int_s^t (B_r - B_s)\,dr + (t-s)B_s$. Condizionare su $\mathcal{F}^B_s$: X_s, $(t-s)B_s$ sono misurabili, $\int_s^t (B_r-B_s)\,dr$ è indipendente ... conti. Ma (X_t, B_t) è di Markov rispetto a $\mathcal{F}^B_t$. Si calcola il nucleo.

Notazione: $x\in E$, $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_{\delta_x}$, $\mathbb{E}_\nu[Y] = \int_{E^{[0,+\infty)}} Y\,d\mathbb{P}_\nu$, $Y \in L^0_+(E^{[0,+\infty)}, \mathcal{E}^{\otimes[0,+\infty)})$.

Prop. (disintegrazione): $\mathbb{E}_\nu[Y] = \int_E \mathbb{E}_x[Y]\,\nu(dx)$.

dim. no. $\square$

Proprietà di Markov

Supponiamo d'ora in poi di trattare prob. di trans. omogenee nel tempo.

Notazione: $\forall t \in [0,+\infty)$, $\theta_t : E^{[0,+\infty)} \longrightarrow E^{[0,+\infty)}$ $\quad (e_s)_{s\in[0,+\infty)} \longmapsto (e_{t+s})_{s\in[0,+\infty)}$.

Teorema: $\forall Y \in L^0_+(E^{[0,+\infty)}, \mathcal{E}^{\otimes[0,+\infty)})$ (o limitata) $\forall t \in [0,+\infty)$ $\forall \nu$ prob. su $(E,\mathcal{E})$.

(assegnate prob. di trans. P_t) si ha $\mathbb{E}_\nu[Y\circ\theta_t \mid \mathcal{F}^X_t] = \mathbb{E}_{X_t}[Y] = \int_{E^{[0,+\infty)}} Y\, d\mathbb{P}_{X_t}$ $\quad \mathbb{P}_\nu$ - q.c..

Oss.: se $Y = \mathbb{1}_A(X_s)$, $A \in \mathcal{E}$, ho LHS $= \mathbb{P}_\nu(X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}^X_t) \overset{\text{def. Markov con omogeneità}}{=} P_s(X_t, A)$.

dim.: vogliamo che $\forall Z$ $\mathcal{F}^X_t$-mis. si abbia $\mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}_\nu[Y\circ\theta_t \mid \mathcal{F}^X_t]] \overset{\text{come nella dim. prec.}}{=} \mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}_{X_t}[Y]]$.

Per approssimazione con classi monotone è sufficiente verificarlo per Z, Y della forma $Z = \prod_{i=1}^{k} f_i(X_{t_i})$, Y allo stesso modo con le g_j; $f_i, g_j \in L^0_+(E,\mathcal{E})$; $t_i, t_j \le t$. Dunque la tesi è ricondotta alla formula per $\mathbb{E}\left[\prod_{l=0}^{k} h_l(X_{t_l})\right]$ vista come caratterizzazione di processi di Markov. $\square$

Processi di Feller

Def. (semigruppo di Feller): un semigruppo di Feller è un semigruppo di operatori lineari positivi su $C_0(E)$ (E sp. top. loc. comp. a base numerabile), $(T_t)_{t\in[0,+\infty)} : C_0(E) \xrightarrow{\text{lineare}} C_0(E)$ t.c. $T_t \circ T_s = T_{t+s}$ $\forall t,s \ge 0$, $T_t f \ge 0$ se $f \ge 0$ e t.c.:

1. $T_0 = id$
2. $\|T_t f\|_{C_0(E)} \le \|f\|_{C_0(E)}$ $\forall f$ $\forall t$
3. $t \longrightarrow T_t$ è continua nella norma degli operatori (i.e. $\lim_{t\to 0} \|T_t f - f\| = 0$)

Lemma: c'è una corrispondenza 1-1 fra:

{Semigruppi di Feller T_t} $\longleftrightarrow$ {sub-probabilità ($P_t(x,E) \le 1$) di transizione omogenee P_t che soddisfano ① e ② del lemma dopo} =: nuclei di transizione di Feller

$$T_t f(x) = P_t f(x) = \int_E P_t(x,dy)\, f(y)$$

Ricordiamo (rappresentazione di Riesz-Markov): i funzionali lineari, continui e positivi su $C_0(E)$ sono tutti e soli $Lf = \int f(x)\,\mu(dx)$, μ misura finita, $\mu(E) = \|T\| := \sup \frac{\|Tf\|}{\|f\|}$.

dim. $\forall x$, $f \longmapsto T_t f(x)$ è lineare, cont. e positiva, quindi $\forall x$ $\exists \mu^t_x$ misura su E t.c. $T_t f(x) = \int f(y)\, d\mu^t_x(y)$. Ma $x \longmapsto T_t f(x)$ è cont. $\forall f$, dunque Borel; allora poniamo $P_t(x,A) = \mu^t_x(A)$.

$x \longmapsto \mu_x^t(A)$ è mis. perché $x \longmapsto T_t f(x)$ è di Borel e scelgo $f = 1_A$ $\quad$ $\|T\| \le 1$ per proprietà + def.

Questi sono nuclei su E. Dalle proprietà di T_t deriva che P_t sono sub-prob. di trans. $\square$

<u>Def.</u>: X_t di Markov (in E, sotto $\mathbb{P}_\nu$, con prob. di trans. P_t) è Feller se P_t sono prob. di trans. di Feller nel senso sopra.

<u>Lemma</u>: X_t è Feller $\iff \Big($ ① $\forall t \;\; P_t\, C_0(E) \subseteq C_0(E)$ ② $\forall f \in C_0(E) \;\; \lim_{t\to 0} P_t f(x) = f(x)\Big)$.

<u>dim.</u> no. $\square$

<u>Oss.</u> il BM è Feller.

<u>Teorema</u>: Se X è di Feller:

① X ha una modificazione cadlag; $\left(\mathbb{P}\left(\lim_{t\to s^+} X_t = X_s\right) = 1\right)$

② $\mathcal{F}_t^\nu = \mathcal{F}_t^{X} \cup \{\mathbb{P}_\nu - \text{trasc.}\}$ (la modificazione), $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\nu\text{-mis}} \mathcal{F}_t^\nu$ sono continue a dx;

③ la modificazione X è ancora di Markov e soddisfa la proprietà di Markov rispetto a $\mathcal{F}_t$.

<u>Oss.</u>:
- segue (anche) dalla convergenza della supermart. $e^{-\alpha t}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} P_s f(X_t)\,ds$
- un altro esempio di processo di Feller è il processo di poisson N_t. (non ha traiettorie continue).

<u>Ex.</u>: $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ a valori in $\mathbb{R}$ gaussiano e centrato è Markov rispetto a $\mathcal{F}_t^X \iff$ posto

$C(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s] \;\; \forall r<s<t \;\; (C(t,t)\neq 0 \;\forall t)$ vale $C(r,t)\,C(s,s) = C(r,s)\,C(s,t)$

<u>Sol.</u> sappiamo che $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_r^X] \overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}[X_t \mid X_r]$. $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_r^X] \overset{r<s}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s^X] \mid \mathcal{F}_r^X]$.

$\mathbb{E}[X_t \mid X_r] = \mathbb{E}[X_t - \rho X_r + \rho X_r \mid X_r] = \rho X_r$ se $\rho = \dfrac{C(r,t)}{C(r,r)}$. Allora $\dfrac{C(r,t)}{C(r,r)} = \dfrac{C(s,t)}{C(s,s)} \cdot \dfrac{C(r,s)}{C(r,r)}$

cerchiamo ρ per cui $X_t - \rho X_r$ ind. da X_r

<u>Esempio</u>: $E = \mathbb{R}^d$, se $(\mu_t)_{t\ge 0}$ è una famiglia di prob. su $\mathbb{R}^d$ t.c. $\mu_0 = \delta_x$, $\forall t,s \;\; \mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$,

$\forall f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ (infinitesime) $\lim_{t\to 0}\int f\,d\mu_t = \int f\,d\mu_0$. In questo caso $P_t(x,A) = \mu_t(A+x)$ è Feller. Esempi:

- $\gamma_t(dx) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-x^2/2t}\,dx$
- $p_t = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}\,\delta_k$

$\mathbb{E}[f(X_t - X_0)] = \int f(y-x)\,d\mu_t(y)$, $\mathbb{E}[f(X_t - X_s) \mid \mathcal{F}_s^X] = \mathbb{E}_{X_s}[f(X_{t-s} - X_0)] = \int f(y - X_s)\,d\mu_{t-s}(y)$

scrittura del valore atteso nello sp. di arrivo

Proprietà forte di Markov

<u>Setting</u>: $(E,\mathcal{E})$ (boreliani) loc. cpt. e a base numerabile, $X_t : E^{[0,+\infty)} \longrightarrow E$, ν prob. su $(E,\mathcal{E})$, $(P_t)_{t\ge 0}$ prob. di trans. omogenee di Feller. Consideriamo una modificazione cadlag di X (la indichiamo con X).

$\mathcal{F}_\infty^\nu = \overline{\mathcal{E}^{\otimes[0,+\infty)}}^{P_\nu}$, $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{\nu \text{ prob.}} \mathcal{F}_\infty^\nu$. $\mathcal{F}_t^\nu = \mathcal{F}_t^X \cup \{\mathbb{P}_\nu - \text{trasc.}\}$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\nu\text{-prob.}} \mathcal{F}_t^\nu$ è continua a dx.

$\forall Y \in L^0_+ \left(E^{[0,+\infty)}, \mathcal{F}_\infty\right)$ $\mathbb{E}\left[Y \circ \theta_t \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{X_t}[Y]$ $\mathbb{P}_\nu$-q.c.. τ è un $\mathcal{F}_t$-t.d.a. se $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$.

<u>Teorema</u>: se τ è un $\mathcal{F}_t$-t.d.a. finito, $\forall \nu$, $Y \in L^0_+(\mathcal{F}_\infty)$ si ha $\mathbb{E}_\nu\left[Y \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}_\tau\right] = \mathbb{E}_{X_\tau}[Y]$.

<u>dim.</u> se τ assume numerabili valori $d \in D \subseteq [0,+\infty)$, $LHS = \sum_{d \in D} \mathbb{1}_{\{\tau = d\}} \mathbb{E}_\nu\left[Y \circ \theta_d \mid \mathcal{F}_d\right] =$

$= \sum_{d \in D} \mathbb{1}_{\{\tau = d\}} \mathbb{E}_{X_d}[Y] = \mathbb{E}_{X_\tau}[Y]$. Mostriamo la tesi per $Y = \prod_{i=1}^{k} f_i(X_{t_i})$, $f_1, \dots, f_k \in C_0(E)$,

$t_1, \dots, t_k \in [0,+\infty)$. Approssimiamo τ con $\tau_n = \frac{\lceil 2^n \tau \rceil}{2^n} \downarrow \tau$. Dunque:

$$\mathbb{E}_\nu\left[\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{t_i}) \circ \theta_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n\right] \overset{\tau_n \text{ ha valori numerabili}}{=} \mathbb{E}_{X_{\tau_n}}\left[\prod(-)\right] = \int_E P_{t_1}(X_{\tau_n}, dx_1) f(x_1) \cdot \int_E P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) f(x_2) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \int_E P_{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, dx_k) f(x_k) = F_{\substack{f_1, \dots, f_k \\ t_1, \dots, t_n}}(X_{\tau_n})$$ con $F_{\substack{f_1, \dots, f_k \\ t_1, \dots, t_n}} : E \longrightarrow E$ è continua perché P_t è Feller. L'RHS converge all'RHS che vogliamo. Per l'LHS si usa la con. dom. per speranze condizionali (e la continuità a dx di $\mathcal{F}_t$). Poi si usa il seguente lemma: se $X_n \xrightarrow{q.c.} X$, $\mathcal{F}_n$ decrescente, $\mathcal{F} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$,

$|X_n| \leq Y$, $Y \in L^1(P) \Rightarrow \mathbb{E}\left[f(X_n) \mid \mathcal{F}_n\right] \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E}\left[f(X) \mid \mathcal{F}\right]$ (ex.). $\square$

<u>Lemma</u>: τ, $\tilde{\tau}$, X come sopra. Allora: 1. $P_\tau P_{\tilde{\tau}} f = P_{\tilde{\tau} + \tau \circ \theta_{\tilde{\tau}}} f \quad \forall f \in C_0$

2. $Y_t = X_{t+\tau}$ è Markov rispetto a $\mathcal{G}_{t+\tau}$ con le stesse prob. di trans.

<u>dim.</u> 1. $$P_\tau P_{\tilde{\tau}} f(x) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{E}_{X_{\tilde{\tau}}}\left[f(X_\tau)\right]\right] \overset{\text{Markov forte}}{=} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}\left[f(X_\tau) \circ \theta_{\tilde{\tau}} \mid \mathcal{F}_{\tilde{\tau}}\right]\right] = \mathbb{E}_x\left(f(X_\tau) \circ \theta_{\tilde{\tau}}\right] =$$

$= P_{\tilde{\tau} + \tau \circ \theta_{\tilde{\tau}}} f(x)$.

2. $\mathbb{E}\left(f(X_{t+\tau+s}) \mid \mathcal{F}_{t+\tau}\right] = P_s f(X_{t+\tau})$. $\square$

Diciamo che B_t processo reale è un BM (rispetto a $\mathcal{F}_t$ a cui è adattato) che inizia da ν prob. su $\mathbb{R}$ se è un processo di Markov rispetto a $\mathcal{F}_t$ con prob. di trans. omogenee $P_t(x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dx$

e $\mathcal{L}(X_0) = \nu$.

<u>Fatto</u>: $\forall \tau$ $\mathcal{F}_t$-t.d.a., $X_t := B_{\tau + t} - B_\tau$ è un BM con distribuzione iniziale δ_0 rispetto a $\mathcal{F}_{t+\tau}$.

X_t è indip. da B_τ $\left(\mathbb{E}\left[f(B_{t+\tau} - B_\tau) \mid B_\tau\right] = \mathbb{E}\left(f(N(0,t))\right] = \text{costante}\right)$.

Diciamo che B_t è il BM standard d'ora in poi, $\tau_a = \inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\}$, $S_t = \sup_{s \in [0,t]} B_t$.

<u>Teorema</u> (principio di riflessione): $\forall t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 2\,\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$.

<u>dim.</u> $\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t \geq a) + \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t < a)$. $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t < a) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t < a) =$

$$= \mathbb{P}\left(\tau_a \leq t, \overbrace{(B_t - B_{\tau_a})}^{X_{t-\tau_a}} + \underbrace{B_{\tau_a}}_{=a} < a\right) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t)\, \mathbb{P}\left(X_{t-\tau_a} < 0 \mid \tau_a \leq t\right).$$

$\mathbb{P}(X_{t-\tau_a} < 0 \mid \tau_a \le t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{(-\infty,0]\}}(X_{t-\tau_a}) \mid \tau_a \le t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{-\}}(-) \mid \mathcal{F}_{\tau_a}\right] \mid \tau_a \le t\right].$

$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{(-\infty,0)\}}(B_t - B_{\tau_a}) \mid \mathcal{F}_{\tau_a}\right] = \mathbb{E}_{X_{\tau_a}}\left[\mathbb{1}_{\{(-\infty,0)\}}(B_{t-\tau_a} - B_0)\right] = \mathbb{P}_{X_{\tau_a}}\left[B_{t-\tau_a} - B_0 < 0\right] = \frac{1}{2}.$ $\square$

Esercitazione 1

Es. 1.8. Cap.3 : Provare che le seguenti famiglie di kernels sono omogenee t.f.'s :

(1) $E = \mathbb{R}$ $v \in \mathbb{R}$ $P_t(x,\cdot) = \delta_{x+tv}(\cdot)$ $P_t(x,A) = \begin{cases} 1, & x+tv \in A \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$:

- $P_t(x,\mathbb{R}) = 1 \Rightarrow P_t(x,\cdot)$ é una probabilità $\forall t\ \forall x$.
- $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $x \longmapsto P_t(x,A)$ é boreliana infatti $P_t(x,A) = \mathbb{1}_A(x+tv) = \mathbb{1}_{A-tv}(x)$. Dunque mi basta dire che $A-tv$ é un insieme boreliano ma $A - tv = \Phi^{-1}(A)$ con $\Phi(y) = y - tv$ e dunque $A-tv$ é controimm. di un boreliano tramite una funzione continua $\Rightarrow$ é boreliano.

(2) $E = \mathbb{R}$ $P_t(x;) = N(x,t)$ con densità rispetto a Lebesgue $g_t(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}$

$\cdot \forall t \in$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_t(x,\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} g_t(y-x)\, d(y-x) = \int_{\mathbb{R}} g_t(y-x)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy \underset{\downarrow}{=} 1$

densità gaussiana $N(x,t)$

- $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $x \longmapsto P_t(x,A) = \mathbb{P}(\sqrt{t}\,Z + x \in A) = \mathbb{P}(\sqrt{t}\,Z \in A - x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{t}} dy$

  se $Z \sim N(0,1) \Rightarrow \sqrt{t}\,Z + x \sim N(x,t)$

(3) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_t(x,dy) = \sum_0^\infty \left(e^{-t}\frac{t^n}{n!}\right)\varepsilon_{x+n}(dy)$

Es. 1.11 Cap. 3 : Sia X un processo di Markov con t.f. $(P_t)_{t\ge 0}$ e f una funzione di Borel limitata. Proviamo che $(P_{t-s}(f))(X_s(\omega))$ $0 \le s \le t$ é una martingala rispetto alla filtrazione di X $\mathcal{F}_s = \sigma(X_s : s \le t)$:

Integrabilità : $|f| \le C$ per hp., allora $\mathbb{E}[f(Y_{t-s})] = P_{t-s} f(x) = \int_E f(y) P_{t-s}(x,dy)$ ma

$|P_{t-s} f(x)| \le P_{t-s}|f| \le C \Rightarrow |P_{t-s}(f)(X_s)| \le C \in L^\infty(P)$.

Adattato: $P_{t-s}(f)(X_s)$ é $\mathcal{F}_s$-misurabile

Martingala: $0 \le s_1 \le s_2 \le t$, $\mathbb{E}\left[P_{t-s_2}(f)(X_{s_2}) \mid \mathcal{F}_{s_1}\right] \overset{\text{tesi}}{=} P_{t-s_1}(f)(X_{s_1})$ ma

LHS $\overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}\left[P_{t-s_2}(f)(X_{s_2}) \mid X_{s_1}\right] \overset{\text{omogenea}}{=} \left[P_{s_2-s_1}(P_{t-s_1}(f))\right](X_{s_1}) = $ tesi.

Es. 1.12. Cap. 3.: Sia X il moto browniano e poniamo $X_t = \int_0^t B_s\,ds$. Provare che X non è un processo di Markov ma la coppia (B, X) è di Markov nello spazio $\mathbb{R}^2$:

Osserviamo che il processo $(B_s, X_s)_{s\geq 0}$ è Gaussiano: $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_d$ dobbiamo dire che $(B_{s_i}, X_{s_i})_{i=1}^d$ è Gaussiano: $X_{s_1} = \int_0^{s_1} B_s\,ds = \lim_n \sum_{i=1}^n B_{t_i}(t_{i+1} - t_i)$ $\{t_i\}_{i=1}^{n+1} = \pi_n$ partizione di $[0, s_1]$ con $|\pi_n| \to 0$. Ora le B_{t_i} sono v. a. gaussiane $\Rightarrow$ $B_{t_i}(t_{i+1} - t_i)$ gaussiane $\Rightarrow$ al limite X_{s_1} q.c. è Gaussiana (da fare). Sempre per esercizio se α_i, β_i $i = 1, \dots, d$ numeri $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^d \alpha_i B_{s_i} + \beta_i X_{s_i}$ è Gaussiana $\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i B_{s_i} + \int_0^{s_i} \left[\sum_{i=1}^d \mathbb{1}_{[0,s_i]}(s) B_{s_i}\right] B_s\,ds\right)$.

Ora, usiamo un altro esercizio:

Es. 1.13 Cap. 3: $(X_t)_t$ Gaussiana è di Markov $\Leftrightarrow$ $\Gamma(s,u)\Gamma(s,t) = \Gamma(s,t)\Gamma(t,u)$ $\forall s<t<u$ con Γ che è la covarianza (no dim.)

Calcoliamo $Cov(X_s, X_t) = Cov\left(\int_0^s B_r\,dr, \int_0^t B_v\,dv\right) \overset{\text{FUBINI + LIMITATEZZA IN } L^2}{=} \int_0^s \int_0^t Cov(B_r, B_v)\,dv\,dr$.

$\mathbb{E}\left[\int_0^s B_r\,dr\right] \overset{\text{FUBINI}}{=} \int_0^s \mathbb{E}[B_r]\,dr = 0$

$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^s B_r\,dr\right)\left(\int_0^t B_u\,du\right)\right] \overset{?}{=} \int_0^s \int_0^t \min\{r,u\}\,du\,dr$

$\tilde{\forall}$ boreliana B_r, B_u sono limitate: $\int_0^s B_r\,dr \int_0^t B_u\,du = \int_{[0,s]\times[0,t]} B_r B_u\,dr\,du$

passo al valore atteso: $\mathbb{E}[|B_u B_r|] \leq |u|\,|r|$.

$\Gamma(s,u) = \dfrac{\Gamma(s,t)\Gamma(t,u)}{\Gamma(t,t)}$ $s<t<u$ se fosse di Markov verificare che non è così

Risposta più semplice: se fosse di Markov $\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^u B_s\,ds\right) \mid (B_s)_{s\leq t}\right] = F(B_t)$ $u \geq t$

$\varphi\left(\int_0^t B_s\,ds\right)] = F(B_t)$.

(B_t, X_t) è di Markov a valori in $\mathbb{R}^2$ $u \leq t$:

$\mathbb{E}\left[\varphi(B_u, X_u) \mid \sigma(B_s : s \leq t)\right] \overset{?}{=} F(B_t, X_t)$

$$\mathbb{E}\Big[\varphi\Big(\underbrace{B_u - B_t}_{\text{ind.}} + \underbrace{B_t}_{\text{mis.}}, \underbrace{\int_t^u (B_r - B_t)\,dr}_{\text{è un altro moto browniano ind.}} + \underbrace{\int_0^t B_r\,dr}_{\text{mis.}} + \underbrace{(u-t)B_t}_{\text{mis.}}\Big) \mid B_s : s \leq t\Big] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\varphi\left(B_u - B_t + b_t, \int_t^u (B_r - B_t)\,dr + x_t + (u-t)b_t\right]\Big|_{\substack{x_t = X_t \\ b_t = B_t}} = F(B_t, X_t)$$

Es. 1.14. Cap. 3: $(X_s)_{s\geq 0}$ di Markov su E, $\varphi: E \to E'$, quando $\varphi(X_s) = X'_s$ è di Markov:

da fare.

Es. 2.23. Cap. 3: Dato $(P_t)_{t\geq 0}$ di Feller, il risultante U_p con $p\geq 0$ è una famiglia di operatori $\left((U_p f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} P_t f(x)\,dt\right)$. Mostrare che P_t semigruppo del MB unidimensionale allora $U_p(X, dy) = u_p(x,y)\,dy$ con $u_p(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left(-\sqrt{2p}\,|x-y|\right)$:

$P_t(X, \cdot) = N(x, t^2)$, allora:

$$U_p(X,A) = \int_0^{+\infty} P_t(X,A)\, e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|x-y|^2}{t}\right)dy\right] e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_A \left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|x-y|^2}{\sigma} - pt\right)\frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right]dy \overset{u=\sqrt{t} \quad du = \frac{1}{2u}dt}{=}$$

$$= \int_A \left[\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{|x-y|^2}{u^2} + 2pu^2\right]\right)\frac{2du}{\sqrt{2\pi}}\right]dy = \int_A \left(\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{|x-y|^2}{u} + \sqrt{2p}\,u\right]^2 + \sqrt{2p}\,|x-y|\right)\frac{2du}{\sqrt{2\pi}}\right]dy$$

Es. 2.24 Cap. 3: $(X_s)_{s\geq 0}$ di Markov, e_p e e_q due esponenti indipendenti, $f: E \longrightarrow [0,+\infty]$ boreliana, allora $p\,U_p f(x) = \mathbb{E}[f(X_p)]$ e $((pU_p)(qU_q))f(x) = pq\,U_p U_q f(x) = \mathbb{E}[f(X_{e_p+e_q})]$:

$$p\,U_p f(x) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{e_p})|e_p]] \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[f(X_s)]_{s=e_p}\right] = \mathbb{E}[(P_s f)(x) \mid s=e_p] = \int_0^{+\infty} P_s f(x)\, p e^{-ps}\,ds$$

e_p approssimata da v.a semplici

Es. 2.28. Cap. 3: sia $(B_s)_{s\geq 0}$ MB, $A_t = \sigma(B_s : s\geq t)$ $\mathcal{A} = \bigcap_{t\geq 0} A_t \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ $P(A)\in\{0,1\}$

similmente $\forall A \in \mathcal{F}_{0^+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(B_s : s\leq\varepsilon)$ $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$: $\quad \underset{\uparrow}{\mathcal{F}^B_{0^+} = \mathcal{A}^{\tilde{B}}}$

Usando il fatto che $\tilde{B} = (s B_{\frac{1}{s}})_{s\geq 0}$ è MB $\Leftrightarrow B_s$ è un MB: $\sigma(B_s : s\leq\varepsilon) = \sigma(s B_{\frac{1}{s}} : s\geq\frac{1}{\varepsilon})$

dato $A \in \mathcal{F}^B_0$, f boreliana e limitata $\mathcal{F}_{0^+}$-misurabile allora $\forall\varepsilon>0$ è $\mathcal{F}_\varepsilon$-misurabile, per argomento di approssimazione $\mathbb{E}[f\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[f]\,P(A)$. Basta supporre che $f = \tilde{f}(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})$ $t_i \leq \varepsilon$.

Inoltre possiamo supporre che $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sia continua e limitata:

$$\mathbb{E}[\tilde{f}(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})\mathbb{1}_A] \overset{?}{=} \mathbb{E}[\tilde{f}(B_{t_i})]\,\mathbb{P}(A)$$

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}[\tilde{f}(B_{t_1} - B_\delta, \dots, B_{t_d} - B_\delta)\mathbb{1}_A] \overset{?}{=} \lim_{\delta\to 0} \mathbb{E}[\tilde{f}(B_{t_i} - B_\delta)]\,\mathbb{P}(A) \quad (B_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \text{ e } \tilde{f} \text{ continua})$$

Tutti gli incrementi sono ind. da $\mathcal{F}_\delta$, ma $\mathbb{1}_A$ è mis. per $\mathcal{F}_\delta$.

Decomposizione di Doob

<u>Prop.</u>: Sia $(X_n)_{n=0}^T$ una submart. Allora $\exists!$ processo $(A_n)_{n=0}^T$ t.c.

- $A_0 = 0$ • $A_n \geq A_{n-1}$ $\forall n = 1, \dots, T$ (crescente) • A_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ mis. $\forall n = 1, \dots, T$ (prevedibile)
- $N_n := X_n - A_n$ è una martingala

<u>Oss.</u>: N_n mart., X_n submart. $\Rightarrow$ integrabili $\Rightarrow$ A_n integrabili

<u>dim.</u>: Unicità: Per assurdo $X_n = N_n + A_n = N_n' + A_n'$ $\Rightarrow$ $N_n - N_n' = A_n' - A_n$ $\forall n \geq 0$. Per induzione:

- $n = 0$: $A_0 = A_0' = 0 \Rightarrow N_0 = N_0' = X_0$

$N_n - N_n' = A_n' - A_n \ \forall n$

- $n \Rightarrow n+1$: $\mathbb{E}[N_{n+1} - N_{n+1}' \mid \mathcal{F}_n] \overset{\text{mart.}}{=} N_n - N_n' \overset{\text{hp. ind.}}{=} 0$ ma $\mathbb{E}[N_{n+1} - N_{n+1}' \mid \mathcal{F}_n] =$

$= \mathbb{E}[A_{n+1}' - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \overset{A_{n+1}',\, A_{n+1}\ \mathcal{F}_n\text{-mis.}}{=} A_{n+1}' - A_{n+1} \Rightarrow A_{n+1}' = A_{n+1} \Rightarrow N_{n+1}' = N_{n+1}$.

Esistenza: Per ricorsione. $A_0 = 0$. Supponiamo di aver già definito A_n, vogliamo $A_{n+1} = X_{n+1} - N_{n+1}$.

$A_{n+1} \overset{\text{deve essere n-mis}}{=} \mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \overset{N_n \text{ deve essere mart.}}{=} \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - N_n$, cioè poniamo $A_{n+1} := \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - X_n + A_n$.

X submart $\Rightarrow$ A è crescente. È prevedibile per def. (induzione), vediamo che $X_{n+1} - A_{n+1}$ è mart.:

$\mathbb{E}[X_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \overset{?}{=} X_n - A_n$, $X_n - A_n$ è $\mathcal{F}_n$-mis., inoltre $\mathbb{E}[X_{n+1} - A_{n+1}] =$

$= \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + X_n - A_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}] - \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]]}_{\mathbb{E}[X_{n+1}]} + \mathbb{E}[X_n - A_n] =$

$= \mathbb{E}[X_n - A_n]$. Dunque tesi. $\square$

<u>Caso particolare</u> $(M_n)_{n=0}^T$ mart. di quadrato integrabile. $X_n = M_n^2 = N_n + A_n$; il processo A_n

è spesso indicato con $[M]_n$. $N_n = M_n^2 - [M]_n$. La ricorsione diventa:

$$[M]_n = [M]_{n-1} + \mathbb{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = [M]_{n-1} + \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$

$$= \_\_ = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}]. \quad S \text{ t.d.a. lim.} \Rightarrow \mathbb{E}[M_S^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[[M]_S].$$

<u>Oss.</u> $(H_n)_{n=0}^T$ prevedibile e limitato, $(H \cdot M)_{n=0}^T$.

<u>Es.</u> $H_n = \mathbb{1}_{\{S \geq n-1\}}$, $(H \cdot M)_n = M_{S \wedge n}$. $[H \cdot M]_n = [H \cdot M]_{n-1} + \mathbb{E}[((H \cdot M)_n - (H \cdot M)_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$

$= [H \cdot M]_{n-1} + \mathbb{E}[H_n^2 (M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = [H \cdot M]_{n-1} + H_n^2 ([M]_n - [M]_{n-1}) =$

$= \sum_{k=1}^n H_k^2 ([M]_k - [M]_{k-1})$. In particolare, $\mathbb{E}[(H \cdot M)_T^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^T H_k^2 ([M]_k - [M]_{k-1})\right]$ (*).

(Nel caso continuo sarà detta isometria di Itô).

Dato $(H_n)_{n=0}^T$ prevedibile e lim. definiamo una norma $\|H\|^2_{\mathcal{L}^2(M)} = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^T H_k^2 ([M]_k - [M]_{k-1})\right]$

$\mathcal{L}^2(M) \ni H \longmapsto (H\cdot M)_T \in L^2(\mathbb{P})$, per cui $(*)$ è un'isometria.

Usando Doob in L^2:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le n\le T}(H\cdot M)_n^2\right]^{\frac{1}{2}} \le 2\,\mathbb{E}\left[(H\cdot M)_T^2\right]^{\frac{1}{2}} = 2\,\|H\|_{\mathcal{L}^2(M)}.$$

E se invece di 2 prendo altri esponenti $p>1$?

<u>Teorema</u> (Disuguaglianze di Burkholder - Davis - Gundy): $(M_n)_{n=0}^T$ mart. a quadrato integrabile.

Allora $\forall p\ge 1$ $\exists c_p>0$ t.c. $c_p^{-1}\,\mathbb{E}\left[[M]_T^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le n\le T}|M_n|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le c_p\,\mathbb{E}\left[[M]_T^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{1}{p}}$.

<u>Es.</u>: se $M_n=\sum_{i=1}^n Z_i$ ind., centrate, di quadrato integrabile $\Rightarrow [M]_n = [M]_{n-1} + \mathbb{E}[Z_n^2] =$

$= [M]_{n-1} + Var(Z_n) = \sum_{i=1}^n Var(Z_i)$.

<u>dim.</u> (nel caso $p=4$): Vogliamo $c\,\mathbb{E}[M_T^4] \ge \mathbb{E}\left[[M]_T^2\right]$. $[M]_T^2 = \left([M]_T - M_T^2 + M_T^2\right)^2 =$

$= (N_T + M_T^2)^2 \le 2N_T^2 + 2M_T^4$. Ci basta: $\mathbb{E}[N_T^2] \le c\,\mathbb{E}[M_T^4]$.

$\mathbb{E}[N_T^2] = \mathbb{E}\left[[N]_T\right] + \mathbb{E}[M_0^4]$. $[N]_n = [N]_{n-1} + \mathbb{E}\left[(N_n-N_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]$.

$N_n - N_{n-1} = M_n^2 - [M]_n - M_{n-1}^2 + [M]_{n-1} = (M_n^2 - M_{n-1}^2) - ([M]_n - [M]_{n-1}) \Rightarrow$

$(N_n - N_{n-1})^2 = (M_n - M_{n-1}^2)^2 + ([M]_n - [M]_{n-1})^2 - 2(M_n^2 - M_{n-1}^2)([M]_n - [M]_{n-1}) \Rightarrow$

$\mathbb{E}\left[(N_n - N_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[(M_n^2 - M_{n-1}^2)\mid\mathcal{F}_{n-1}\right] + ([M]_n - [M]_{n-1})^2 -$

$(N_n + [M]_n) - (N_{n-1} + [M]_{n-1})$

$- 2\,\mathbb{E}\left[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]([M]_n - [M]_{n-1}) = \mathbb{E}\left[(M_n^2 - M_{n-1}^2)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] - ([M]_n - [M]_{n-1})^2$.

$\mathbb{E}\left[(M_n^2 - M_{n-1}^2)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] + M_{n-1}^4 - 2\,\mathbb{E}\left[M_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]M_{n-1}^2 =$

$= \mathbb{E}\left[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] - M_{n-1}^4 - 2([M]_n - [M]_{n-1})M_{n-1}^2 \le \mathbb{E}\left[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] - M_{n-1}^4$.

$[N]_n - [N]_{n-1} \le \mathbb{E}\left[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] - M_{n-1}^4 \Rightarrow \mathbb{E}\left[[N]_T\right] = \sum_{n=0}^T \mathbb{E}\left[[N]_n - [N]_{n-1}\right] \le$

$\le \sum_{n=0}^T \left(\mathbb{E}[M_n^4] - \mathbb{E}[M_{n-1}]\right) = \mathbb{E}[M_T^4]$. $\square$

<u>Processi a variazione finita</u>

<u>Obiettivo</u>: vogliamo definire $\int_0^t H_s\,dM_s$ con $(M_s)_s$ martingala. L'ostacolo è che non è a variazione finita $\Rightarrow$ non possiamo applicare la teoria di Riemann / Stieltjes.

<u>Ipotesi</u>: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0})$, $\mathcal{F}_0$ contiene gli A trascurabili e $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{t\ge 0}\mathcal{F}_t \Rightarrow$

sup e inf di cose misurabili è misurabile

se $(H_s^n)_{s\ge 0}$ adattati, $H_s^n \xrightarrow{q.c.} H_s^\infty$, anche H^∞ è adattato (stessa cosa con progr. misurabili).

<u>Def.</u> (processo crescente / variazione finita): un processo $(A_s)_{s\ge 0}$ è crescente se $\mathbb{P}$-q.c. le traiettorie

sono crescenti e cont. a dx. É a variazione finita se $\mathbb{P}$-q.c. le traiettorie sono a variazione finita.

Oss. Continuo + adattato $\Rightarrow$ progr. mis.; allora se A è anche a var. finita, $A_t = A_t^+ - A_t^-$ (con A_t^+ e A_t^- crescenti) $\Rightarrow$ l'integrale di Riemann-Stieltjes è definito traiettoria per traiettoria per $(H_s)_{s\geq 0}$, $|H_s| \leq c$ $\forall s \in [0,t]$: $\int_0^t H_s\, dA_s = \int_0^t H_s\, dA_s^+ - \int_0^t H_s\, dA_s^-$ $\left(dA^{\pm}((s,t]) = A_t^{\pm} - A_s^{\pm} \right)$.

Gli integrali sono processi progr. misurabili (sempre col sup) se $(H_s)_{s\geq 0}$, $(A_s)_{s\geq 0}$ lo sono.

Notazione: $\int_0^t H_s\, dA_s = (H \cdot A)_t$.

Young (1936): se $f \in C^{\alpha}([0,t])$, $g \in C^{\beta}([0,t])$ allora è ben definito $\int_0^t f_s\, dg_s =$
$= \lim_{|\Delta^n| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_{t_i} (g_{t_i} - g_{t_{i-1}})$ purché $\alpha + \beta > 1$. Problema: $f = g = BM \in C^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha + \beta < 1$.

Idea: per costruire $\int_0^t H_s dM_s$ quando $(M_s)_{s\geq 0}$ è mart. ci appoggiamo a una proprietà di isometria che permetta di passare al limite le stime di Riemann. Ricordiamo: X a var. quadratica finita se ... def. già vista

✓. Nella def. T_t^{Δ}, occhio al caso $t_k < t < t_{k+1}$ (faccio la somma fino a t_k, poi ci aggiungo il pezzo da t_k a t).

Teorema Sia M una mart. continua e limitata $(|M_t(\omega)| \leq C)$. Allora:

1. M ha una var. quadratica finita $(\langle M_t \rangle)_{t\geq 0}$;
2. il processo $\langle M \rangle$ è l'unico processo crescente, cont., adattato, nullo in 0 e t.c. $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ è mart.

Lemma: Se M è mart. cont. e a var. finita allora è costante $\mathbb{P}$-q.c. $(M_t = M_0)$

dim (lemma): WLOG $M_0 = 0$. $\mathrm{Var}(M)_t$ è pr. mis. (continuo + adattato) (sup di cose continue e adattate). Dato n poniamo $T_n =$
$= \inf \{ t \mid \mathrm{Var}(M)_t \geq n \}$ e $T_n \uparrow +\infty$ per $n \to +\infty$ (var finita + $\inf \emptyset = +\infty$). Il processo $(M^T)_t = M_{T \wedge t}$ è mart. nulla in 0 (pongo $T := T_n$) ($M_0 = 0$)
e $|M_t^T| \leq n$ $\forall t$ ($n \geq \mathrm{Var}(M)_t \geq |M_t^T - M_0^T| = |M_t^T|$). Sia $\Delta = \{ 0 = t_0 < \ldots < t_k = t \}$. Allora $(M_{t_i}^T)_{i=0}^{k}$ è mart. limitata t.c.

$\mathbb{E}[M_{t_i} \cdot M_{t_{i+1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{t_i} \cdot M_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[M_{t_i} \mathbb{E}[M_{t_{i+1}} | \mathcal{F}_{t_i}]] = \mathbb{E}[M_{t_i}^2]$ ma vale $\forall j < i$ e dunque facendo conto esplicito sui doppi prodotti quelli fanno 0

$$\mathbb{E}[(M_t^T)^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} (M_{t_i}^T - M_{t_{i-1}}^T)^2 \right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_i |M_{t_i}^T - M_{t_{i-1}}^T| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |M_{t_i}^T - M_{t_{i-1}}^T|}_{\mathrm{Var}\, |M_t^T| \,\leq\, n} \right] \leq$$

$\leq \mathbb{E}\left[\sup_i |M_{t_i}^T - M_{t_{i-1}}^T| \cdot n \right]$. Se $|\Delta| \to 0$ $\sup_i |M_{t_i}^T - M_{t_{i-1}}^T| \to 0$ (continuità), allora per conv. dom.

$\mathbb{E}[(M_t^T)^2] = 0 \Rightarrow M_t^T = 0$ $\mathbb{P}$-q.c., $T = T_n \to +\infty \Rightarrow M_t = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

dim. (del teorema) : 2 : $M_t^2 - A_t = N_t$, $M_t^2 - A_t' = N_t'$ mart. cont. $\Rightarrow \overbrace{A_t' - A_t}^{\text{var. finita}} = \overbrace{N_t - N_t'}^{\text{mart. cont.}}$

crescente e nulla in 0 allora $\mathrm{Var}(A_t) = A_t$

lemma prec.
$\Rightarrow N_t - N_t' = 0$, $A_t - A_t' = 0$;

1 : Vediamo l'esistenza, poniamo $T_t^{\Delta}(M) =: T_t^{\Delta}$. • Per prima cosa notiamo che $M_t^2 - T_t^{\Delta}$ è

martingala: $s<t$, $t_l < s < t_{l+1}$, $t_k < t < t_{k+1}$. $(*_1)$ $\mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s + M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] =$

$\mathbb{E}[(M_t - M_s) M_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$

$t_l \; s \; t_{l+1} \; t_k \; t$ e elimino doppi prodotti

$$= \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + M_s^2 = M_s^2 + \mathbb{E}\Big[(M_{t_{l+1}} - M_s)^2 + \sum_{i=l+2}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \Big| \mathcal{F}_s\Big].$$

guardare lui — Somma e

Ora, $(*_2)$ $$\mathbb{E}[T_t^\Delta \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\Big[(M_t - M_{t_k})^2 + \sum_{i=l+2}^{k} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_{t_{l+1}} - M_{t_l})^2 \Big| \mathcal{F}_s\Big] + \underbrace{\sum_{i=1}^{l} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_s - M_{t_l})^2}_{T_s^\Delta}$$

$- (M_s - M_{t_l})^2$. Si fa la differenza tra $(*_1)$ e $(*_2)$ torna.

sottraggo

2 • Siano $\Delta, \Delta' \subseteq [0,+\infty)$ partizioni finite. Obiettivo: stimare $\mathbb{E}[|T_a^\Delta - T_a^{\Delta'}|^2]$, a fissato,

WLOG $a \in \Delta \cap \Delta'$. Poniamo $\Delta\Delta' = \Delta \cup \Delta' =: \{s_i\}_{i=1}^{k}$. $X_a = T_a^\Delta - T_a^{\Delta'}$. $X_t = T_t^\Delta - M_t^2 + M_t^2 - T_t^{\Delta'}$ è mart.

$a = s_k$, $\{s_i\}_{i=0}^{k} = \Delta\Delta'$ — conto dim. prec.

$$\mathbb{E}[X_a^2] = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k} (X_{s_i} - X_{s_{i-1}})\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{k} (X_{s_i} - X_{s_{i-1}})^2\Big] = \mathbb{E}[T_a^{\Delta\Delta'}(X)].$$

Oss.: $T_t^\Delta(A+B) \le 2T_t^\Delta(A) + 2T_t^\Delta(B)$. $\mathbb{E}[T_a^{\Delta\Delta'}(X)] \le 2\mathbb{E}[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta(M))] + 2\mathbb{E}[T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'}(M))]$.

$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$

3 • $\mathbb{E}[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta(M))] \to 0$ se $\max\{|\Delta|, |\Delta'|\} \to 0$. $t_l, t_{l+1} \in \Delta$, s_k il più piccolo in $\Delta\Delta' \ge t_l$

$$\Rightarrow t_l \le s_k \le s_{k+1} \le t_{k+1}. \quad T^\Delta(M)_{s_{k+1}} - T^\Delta(M)_{s_k} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{l} (\cancel{M_{t_i} - M_{t_{i-1}}})^2 + (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 +$$

$$- \sum_{i=1}^{l} (\cancel{M_{t_i} - M_{t_{i-1}}})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 = (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 = (M_{s_{k+1}} - M_{t_l} + M_{s_k} - M_{t_l}) \cdot$$

$\cdot (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})$. Allora:

$$T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta(M)) \overset{s_m = a}{=} \sum_{j=0}^{m-1} (M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}})^2 (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2.$$

Cauchy-Schwartz

$$\mathbb{E}[T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta(M))] \le \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_j |M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|\Big)^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2}_{T_a^{\Delta\Delta'}(M)}\Big] \le$$

$$\le \mathbb{E}\Big[\Big(\sup_j |M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|^4\Big]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}[(T_a^{\Delta\Delta'}(M))^2]^{\frac{1}{2}}.$$ Il fattore di sx $\to 0$

per conv. dom. per $|\Delta|, |\Delta'| \to 0$.

4 • $\mathbb{E}[(T_a^{\Delta\Delta'}(M))^2] \le C^4$ (indip. da Δ e Δ'), $\Delta\Delta' \rightsquigarrow \Delta = \{0 = t_0 < \dots < t_n = a\}$ per semplicità.

aggiungo e sottraggo M_a^2 e uso $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ — limitata

$$\mathbb{E}[(T_a^\Delta(M))^2] \le 2\mathbb{E}[(T_a^\Delta - M_a^2)^2] + 2\mathbb{E}[M_a^4], \quad M_a^4 \le C^4.$$

$T_a^\Delta(M)$ toglie i quadrati quando $i=j$

$$M_a^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}), \quad M_a^2 - T_a^\Delta(M) = 2\sum_{i<j} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\Big(\sum_{i=1}^{j-1} M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\Big) = 2\sum_{j=1}^{n} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})(M_{t_{j-1}} - M_0).$$ Pongo $H_{t_{j-1}} := M_{t_{j-1}} - M_0$:

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{n} H_{t_{j-1}}^2 (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2\Big] \le 4C^2 \mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{n} (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2\Big] =$$

riporto dentro il quadrato

$= 4C^2 \mathbb{E}[(M_a - M_0)^2] \le 16C^4$.

doppi prodotti vanno via come al solito usando solito trucco + scrivere esplicitamente $H_{t_{j-1}}$

5 • $\forall a$ $T_a^{\Delta_n}(M)$ è di Cauchy (*) pag. dopo in L^2 se $|\Delta_n| \to 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} T_a^{\Delta_n}(M) = \langle M \rangle_a$. Per Doob,

limite uniforme di cose continue è continuo

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0 \le t \le a} |T_t^{\Delta_n} - T_t^{\Delta_m}|^2\Big] \le 4\mathbb{E}[|T_a^{\Delta_n} - T_a^{\Delta_m}|^2] \Rightarrow \langle M \rangle_t \text{ ammette vers. continua.}$$

passo al limite e ho la crescenza

$M_t^2 - T_t^{\Delta_n}(M)$ mart. $\overset{n \to +\infty}{\Rightarrow}$ $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ martingala. Se $s<t$ razionali diadici, $T_t^{\Delta_n} \ge T_s^{\Delta_n} \Rightarrow \langle M \rangle_t \ge \langle M \rangle_s$. □

4° step — limite uniforme q.c. di martingale è martingala?

Oss. • $T_t^\Delta(M)$ non sono crescenti né a var. finita; ma se $s,t \in \Delta$, $s \le t$ allora $T_s^\Delta \le T_t^\Delta$.

• Nello step 3 della dimostrazione prima si fissa s_k e poi si sceglie t_ℓ;

(*) Per i punti ② e ③ il membro di dx di Doob va a 0 allora anche $\sup_{0\le t\le a} |T_t^{\Delta_n} - T_t^{\Delta_m}|^2 \to 0$ e scelgo Δ_n in modo che vada velocemente a 0 così che $\sum \text{''} < +\infty$ e dunque sia di Cauchy e converga unif.

• Nello step 5 bisogna prestare attenzione per la convergenza uniforme.

Prop.: Sia M mart. cont. e limitata e T t.d.a. Allora $\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$.

Corollario 3.6. pag. 71 Libro

dim. $N_t := M_t^2 - \langle M \rangle_t$ è mart.. $N_t^T = N_{T\wedge t} = M_{T\wedge t}^2 - \langle M \rangle_{T \wedge t} = (M^T)_t^2 - \langle M \rangle_t^T$ è mart.

"$\langle M^T \rangle$ è l'unico processo che se lo tolgo a $(M^T)_t^2$ è una martingala"

↳ cresc., adattato, cont., nullo in 0

$\Rightarrow$ per unicità del teorema, $\langle M \rangle^T = \langle M^T \rangle$. □

Def. (martingala locale): un processo adattato $(X_t)_{t\ge 0}$ e cont. a dx è una martingala locale (rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, $\mathbb{P}$) se $\exists$ t.d.a. $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ lim. t.c.

① $T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}$ q.c. ② $X^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}}$ è mart. unif. integrabile.

Oss.: • X mart. unif. integrabile $\Rightarrow$ mart. locale ($T_n = n$)

→ per hp. $\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{i\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}] = 0$

ma $\sup_{i\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_{i\wedge n}| \mathbb{1}_{\{|X_{i\wedge n}|>\lambda\}}] \le$ " perché sto facendo il sup su meno cose

• Se X continua, possiamo imporre che $X^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$ sia mart. limitata introducendo

$$S_n = \min\{T_n, \inf\{t \mid |X_t| \ge n\}\} \quad (\text{se } n \to +\infty,\ S_n \uparrow +\infty)$$

• BM è martingala locale con $T_n = n$. ← sfruttiamo Oss. prec. e vediamo che $(B_s^n)_{s\ge0}$ è limitata: $\sup_s \mathbb{E}[|B_s^n|] = \max_{0\le s\le n} \mathbb{E}[|B_s|] \le +\infty$

↑ la gaussiana ha tutti i momenti finiti

Teorema: Se M è mart. locale continua, $\exists!$ processo $\langle M \rangle$ cont., crescente, adattato, nullo in 0 t.c. $M^2 - \langle M \rangle$ sia mart. locale cont.. Inoltre, $\forall t$ e $(\Delta_n)_n$ partizioni di $[0,t]$ si ha

$$\sup_{0\le s\le t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M \rangle_s| \longrightarrow 0 \text{ in prob. se } |\Delta_n| \to 0.$$

supponiamo ci siano 2 $\underbrace{M^2 - \langle M \rangle_1}_{N_1}$ e $\underbrace{M^2 - \langle M \rangle_2}_{N}$ mart. loc. continue cioè $\exists T_n^1$ $(\underbrace{M_s^2 - \langle M \rangle_s^1}_{N_1})^{T_n^1} \mathbb{1}_{\{T_n^1>0\}}$ mart. limitata e $\exists T_n^2$ $(\underbrace{M_s^2 - \langle M \rangle_s^2}_{N_2})^{T_n^2} \mathbb{1}_{\{T_n^2>0\}}$ mart. limitata: $(N_s^1)^{T_n^1}\mathbb{1}_{\{T_n^1>0\}} - (N_s^2)^{T_n^2}\mathbb{1}_{\{T_n^2>0\}} \overset{\text{Lemma}}{=} (M_0^2)^{T_n^1}\mathbb{1}_{\{T_n^1>0\}} - (M_0^2)^{T_n^2}\mathbb{1}_{\{T_n^2>0\}}$ Prendiamo $\min\{T_n^1, T_n^2\}$ e lo abbiamo mostrato fino a $[0, \min\{T_n^1, T_n^2\}]$

dim. l'unicità segue da lemma precedente applicato a $M^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}}$.

Esistenza: consideriamo la mart. locale $M - M_0$ ⇝ WLOG $M_0 = 0$. Abbiamo t.d.a. T_n t.c.

$\forall \omega$ $\sup_{t\in[0,T_n]} |M_t^{T_n}| < +\infty$ per Weierstrass

M^{T_n} è unif. lim. $\Rightarrow \exists \langle M^{T_n} \rangle$. Per $T_{n+1} \ge T_n \Rightarrow \langle M^{T_{n+1}} \rangle^{T_n} = \langle M^{T_{n+1}\wedge T_n} \rangle = \langle M^{T_n} \rangle$

↑ per teorema

posso non metterci l'indicatrice perché $M_0 = 0$ (ovvero def. per vedere che $M^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}} = M^{T_n}$)

$\Rightarrow \forall t$ definiamo $\langle M \rangle_t := \lim_{n\to+\infty} \langle M^{T_n} \rangle_t$. Verifichiamo che $M^2 - \langle M \rangle$ è mart. locale (con gli stessi T_n): $(M^2 - \langle M \rangle)^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle$ è mart. lim.. Convergenza in prob: no dim. □

arrestato a T_n

Teorema (Covarazione quadratica): date M, N mart. loc. $\exists!$ proc. cont., adattato, nullo in 0, a var. finita, $\langle M, N \rangle$, t.c. $MN - \langle M, N \rangle$ è mart. locale continua. Si ha:

$$\sum_{t_i \in \Delta([0,t])} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}) \longrightarrow \langle M, N \rangle_t \text{ in prob.}$$

dim.: $\langle M, N \rangle := \dfrac{\langle M+N, M+N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle}{2}$ $\left(MN = \frac{1}{2}\left((M+N)^2 - M^2 - N^2\right)\right)$ □

Ex.: X, Y mart. loc. $\Rightarrow X+Y$ mart. loc.

Prop.: date M, N mart. loc. continue ; $(H_s)_{s\geq 0}$, $(K_s)_{s\geq 0}$ proc. mis., allora

$$\int_0^t |H_s|\,|K_s|\, d\,Var_1(\langle M,N\rangle)_s \leq \left(\int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t K_s^2\, d\langle N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Teorema (Kunita - Watanabe):

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s|\,|K_s|\, d\,Var_1(\langle M,N\rangle)_s\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s^2\, d\langle M\rangle_s\right)\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t K_s^2\, d\langle N\rangle_s\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Hölder } p=2)$$

$(M+\lambda N)^2 = M^2 + \lambda^2 N^2 + 2\lambda MN$ + unicità

dim. (Prop.): $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle M+\lambda N\rangle = \langle M\rangle + \lambda^2\langle N\rangle + 2\lambda\langle M,N\rangle$ crescente $\Rightarrow \forall s<t$

crescenza

$$\langle M+\lambda N\rangle_t - \langle M+\lambda N\rangle_s = (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s) + \lambda^2(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s) + 2\lambda(\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s) \geq 0$$

è un'equazione di II grado in λ e voglio che $\frac{\Delta}{2}$ sia ≤ 0 perché per hp. so già che è sempre ≥ 0 e il coeff. di λ^2 è ≥ 0

$$\Rightarrow |\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s| \leq \sqrt{(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s)(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s)}.$$ Dunque:

Young al passaggio prec. $\sqrt{ab} = \sqrt{\alpha^2 a}\,\sqrt{\alpha^{-2} b} \leq \frac{1}{2}\alpha^2 a + \frac{1}{2}\alpha^{-2} b$

$$|\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s| \leq \frac{\alpha^2}{2}(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s) + \frac{\alpha^{-2}}{2}(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s) \Rightarrow$$ non serve

$\langle M,N\rangle_t$ è crescente dunque la sua Var_1 coincide con $\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_0 = \langle M,N\rangle_t - 0$

$$Var_1(\langle M,N\rangle)_t - Var_1(\langle M,N\rangle)_s \leq \sqrt{(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s)(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s)}$$

Per densità ci limitiamo a H, K processi elementari: $H = \sum_{i=1}^n H_{t_i} \mathbb{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$, $t_{n+1} = t$, K analogo.

$$\int_0^t |H_s K_s|\, d\,Var_1(\langle M,N\rangle_s) = \sum_i |H_{t_i} K_{t_i}|\,\left(Var_1(\langle M,N\rangle)_{t_{i+1}} - Var_1(\langle M,N\rangle)_{t_i}\right) \leq$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \left(\sum_i |H_{t_i}|^2(\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_i |K_{t_i}|^2(\langle K\rangle_{t_{i+1}} - \langle K\rangle_{t_i})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Def. (Semimartingala): Un processo X è detto semimartingala cont. (rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ e $\mathbb{P}$) se

$X = M + A$ dove M è mart. loc. continua e A è cont., adattato e a var. finita.

martingala loc. cont. var. finita $\Rightarrow (M_t - M_t')^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$ mart. cont. a var. finita $\Rightarrow$ per Lemma

Oss.: $X = M + A = M' + A' \Rightarrow M - M' = A' - A \Rightarrow M_t - M_t' = M_0 - M_0'$ $\mathcal{F}_0$-mis.

$(M_t - M_t')^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}} = (M_0 - M_0')^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}} = \begin{cases} M_0 - M_0', & T_n > 0 \\ 0, & T_n = 0 \end{cases}$ ← ma tanto per $T_n = 0$ $(M_t - M_t')^0 = M_0 - M_0'$

Prop.: Una semimartingala continua ammette var. quadratica pari a quella di M, cioè $\langle X\rangle = \langle M\rangle$.

dim. Δ partizione di $[0,t]$. $t_n = t$

$$T_t^\Delta(X) = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + \sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}).$$ Per $|\Delta| \to 0$ $\sum_{i=1}^n |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \to Var_1(A)_t$ e $\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \to \langle M\rangle_t$.

← per variazione finita

Allora $$\sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \leq \left(\sup_{i=1,\dots,n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|\right) Var_1(A)_t \xrightarrow{} 0.$$

$$\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \cdot \sqrt{\langle M\rangle_t} = 0.$$

$\square$

N.B.: Se $X = M + A$ e $Y = N + B \Rightarrow \langle X, Y\rangle = \langle M, N\rangle$ (usando formula $\langle X,Y\rangle = \frac{1}{2}(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle)$)

Def.: Si definiscono gli sp. $\mathbb{H}^2 := \{(M_t)_{t\geq 0} \text{ mart.} \mid \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < +\infty\}$, $H^2 := \{M \in \mathbb{H}^2 \text{ cont.}\}$

$H_0^2 := \{M \in H^2 \mid M_0 = 0\}$.

$\sup_t |M_t| \in L^2$ per Doob $\Rightarrow \sup_t |M_t| \in L^1$ ma è costante $\Rightarrow$ è unif. integrabile ma $M_t \leq \sup_t |M_t|$

$\Rightarrow M_t$ unif. int. $\Rightarrow$ ha limite in L^1 e sta in L^2 per (*)

Oss. $\mathbb{H}^2 \overset{\text{big.}}{\longleftrightarrow} L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ dove $(M_t)_{t\geq 0} \longmapsto X = \lim_{t\to+\infty} M_t$ e $X \longmapsto M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$.

$\to \sup_t \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]^2] \underset{\text{Jensen}}{\leq} \sup_t \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[X^2] < +\infty$

glielo mettiamo noi

(*) $\|X\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[M_t^2]^{\frac{1}{2}}$ e $\mathbb{H}^2$ munito della norma $\|M\|_{H^2} := \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[M_t^2]^{\frac{1}{2}}$ è sp. di Hilbert.

Per Doob, H^2 è un sottospazio chiuso di $\mathbb{H}^2$. ← Doob: $\mathbb{E}\left[\left(\sup_t |M_t^n - M_t|\right)^2\right] \le 4\, \|M^n - M\|^2_{\mathbb{H}}$

Prop.: Una mart. loc. cont. M è in H^2 se e solo se:

① $M_0 \in L^2$ ② $\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] = \sup_t \mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < +\infty$. Inoltre vale: $\|M\|^2_{H^2} = \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] + \mathbb{E}[M_0^2]$.

$\Rightarrow (M^{T_n} 1_{\{T_n>0\}})^2 - \langle M^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}\rangle = (M^{T_n})^2 1_{\{T_n>0\}} - 1_{\{T_n>0\}}\langle M^{T_n}\rangle =$

dim. $\boxed{\Leftarrow}$ $T_n \uparrow +\infty$ t.d.a. t.c. $M^{T_n}\cdot 1_{\{T_n>0\}}$ sia lim. e mart., $\mathbb{E}\left[\left(M_t^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}\right)^2\right] =$ $\underbrace{((M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle) 1_{\{T_n>0\}}}_{\text{mart.}}$

$= \mathbb{E}\left[\left((M_t^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle_t\right)\cdot 1_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n} \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}\right]$.

ci servono per con. dom. — faccio limite puntuale da ambo le parti (quasi certamente)

Se valgono ① e ② per $n \to +\infty$, RHS $\to \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M\rangle_t] \le \mathbb{E}[M_0^2] + \sup_t \mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$,

Fatou: $\lim_{n\to+\infty} M^2_{T_n\wedge t} \cdot 1_{\{T_n>0\}} = M_t^2$ (basta fare limite puntuale)

liminf LHS $\ge \mathbb{E}[M_t^2]$. Abbiamo che M è martingala locale limitata in L^2. Verifichiamo che è martingala:

visto sopra

$\forall T_n$ t.d.a. $\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n})^2 1_{\{T_n>0\}}\right] = \mathbb{E}\left[M_0 1_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}\right]$. Per Doob $\Rightarrow$

$\mathbb{E}\left[\sup_{t\ge0} |M_t^{T_n}|^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right] \le_{(*)} 4\sup_t \mathbb{E}\left[|M_t^{T_n}|^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right]$. Se valgono ① e ② della prop., per Fatou

visto sopra — B.L.

e BL: $\mathbb{E}[M_t^2] \le_{(*)} \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$. Ora, $\sup_{t\ge0} |M_t^{T_n}|^2 \uparrow \sup_{t\ge0} |M_t|^2 \Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{t\ge0} |M_t|^2\right] =$

Doob (*)

$= \sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\ge0} |M_t^{T_n}|^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right] \le 4 \sup_n \sup_t \mathbb{E}\left[|M_t^{T_n}|^2 1_{\{T_n>0\}}\right] \le_{(*)} 4\left(\mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]\right)$

ma $M_t^{T_n}\cdot 1_{\{T_n>0\}} \to M_t$ per $n \to +\infty$, $|M_t^{T_n}|\cdot 1_{\{T_n>0\}} \le_{(*)} \sup_t |M_t| \in L^2 \Rightarrow \forall s<t$

$\mathbb{E}\left[M_t^{T_n} \cdot 1_{\{T_n>0\}} \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s^{T_n} 1_{\{T_n>0\}} \Rightarrow M_t$ è mart. lim. in $L^2 \to M \in H^2$.

$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]$ ⤳ Lebesgue che posso usare per (*) — M_s

$\boxed{\Rightarrow}$ se $M \in H^2$ $\mathbb{E}\left[(M_t^{T_n})^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right] = \mathbb{E}\left[(M_0)^2 1_{\{T_n>0\}}\right] + \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{T_n} \cdot 1_{\{T_n>0\}}\right]$.

(*) grazie a lui ho con. dom. per $n \to +\infty$

$M \in H^2 \xRightarrow{\text{Doob}} \sup_{t\ge0} |M_t|^2 \in L^1$, $(M_t^{T_n})^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}} \le_{(*)} \sup_{t\ge0} |M_t|^2$. Per $n\to\infty$ $(M_t^{T_n})^2 \cdot 1_{\{T_n>0\}} \to M_t^2$.

(*) B.L. (sono ↑ in n) (*) — vediamo anche che è unif. int. $M_t^2 - \langle M\rangle_t$

Uso Fatou + BL $\Rightarrow \mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$; se $M \in H^2 \Rightarrow |M_t^2 - \langle M\rangle_t| \le \sup_{s\ge0} |M_s|^2 + \langle M\rangle_\infty \in L^1$

costante + integrabile + maggiorazione — B.L.

$\Rightarrow$ è unif. int. $\|M\|^2_{H^2} = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]$ ⇐ questo dimostra ① e ② — $\langle M\rangle_t$ crescente

□

Corollario. Se $M \in H_0^2 \Rightarrow \sup_t \mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]^{\frac{1}{2}}$.

Integrale stocastico

Siano $(K_s)_{s\ge0}$ un processo e $(M_s)_{s\ge0}$ mart. cont. e lim. Costruiamo l'integrale stocastico tramite somme di Riemann-Stieltjes. Sia $\Delta \subseteq [0,t]$, $0 = t_0 < \dots < t_n = t$, $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} K_{t_{i-1}}\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)}_{Y_{t_n}}$. Se K è lim. e adattato otteniamo una mart. a tempi discreti.

verifica su Y_{t_n}

Def. (processi elementari): $K_s = K_{-1}\, 1_0(s) + \sum_{i=0}^{n} K_i \cdot 1_{(t_i, t_{i+1}]}(s)$, $s \ge 0$, K_i $\mathcal{F}_{t_i}$-mis. e lim. $(K_{-1}, \mathcal{F}_0\text{-mis.})$. $K \in \mathcal{E}$.

insieme dei processi elementari

Dato $K \in \mathcal{E}$, "definiamo" l'integrale stocastico (di Itô):

$$(K \cdot M)_t := \int_0^t K_s \, dM_s := \sum_{i=0}^{m-1} \left(K_i \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right) \right) + K_m \left(M_t - M_{t_m} \right) \quad \text{per } t_m \le t \le t_{m+1}.$$

$K \cdot M$ è mart. continua. $M \in H^2 \Rightarrow K \cdot M \in H^2$:

$$\mathbb{E}\left[(K \cdot M)_t^2 \right] = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{\mathbb{E}\left[K_i^2 \left(M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right)^2 \right]}_{\mathbb{E}\left[K_i^2 \, \mathbb{E}\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \right]} + \underbrace{\mathbb{E}\left[K_m^2 \left(M_t - M_{t_m} \right)^2 \right]}_{\text{simile}} \quad \text{per } t_m \le t \le t_{m+1}.$$

$$\mathbb{E}\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = \mathbb{E}\left[M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2 \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] = \mathbb{E}\left[M_{t_{i+1}}^2 - \langle M \rangle_{t_{i+1}} + \left(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i} \right) \mid \mathcal{F}_{t_i} \right.$$

$$\left. - M_{t_i}^2 + \langle M \rangle_{t_i} \right] = \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i} \right] \Rightarrow \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_t^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[K_i^2 \left(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i} \right) \right] +$$

$$+ \mathbb{E}\left[K_m^2 \left(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_{t_m} \right) \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right]$$ (<u>Isometria di Itô per processi elementari</u>)

$K \cdot M$ è mart. lim. (se $K \in \mathcal{E}$ e M mart. cont. lim.). $\left(\langle K \cdot M \rangle_t = \int_0^t K_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right)$

Data una mart. N cont. e lim., $\langle K \cdot M, N \rangle_t = \int_0^t K_s \, d\langle M, N \rangle_s$.

<u>Ex.</u>: $\langle M, N \rangle^T = \langle M^T, N^T \rangle = \langle M, N^T \rangle$.

<u>Def.</u> $(\mathcal{L}^2(M))$: sia $M \in H^2$. Poniamo $\mathcal{L}^2(M)$ l'insieme dei processi $(K_s)_{s \ge 0}$ che sono prog. mis. e t.c.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right] < +\infty.$$

<u>Es.</u>: $(B_s^t)_{s \ge 0} = (B_{s \wedge t})_{s \ge 0}$, $\mathcal{L}^2(B^t) = \left\{ (H_s)_{s \ge 0} \text{ prog. mis. t.c. } \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, ds \right] < +\infty \right\}$.

<u>Def.</u> $(L^2(M))$: $L^2(M) := \mathcal{L}^2(M) / \sim$ dove $K \sim K' \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (K_s - K'_s)^2 \, d\langle M \rangle_s \right] = 0$.

$L^2(M)$ è sp. di Hilbert con il prodotto scalare $(K, H)_{L^2(M)} = \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} H_s K_s \, d\langle M \rangle_s \right] \right)^{\frac{1}{2}}$.

<u>Teorema</u>: Sia $M \in H^2$. Dato $K \in L^2(M)$ $\exists!$ $K \cdot M \in H_0^2$ t.c. $\langle K \cdot M, N \rangle_t =: \int_0^t K_s \, d\langle M, N \rangle_s$ $\mathbb{P}$-q.c.

$\forall N \in H^2$. Notazione: $(K \cdot M)_t =: \int_0^t K_s \, dM_s$.

<u>dim.</u> Unicità: $K \cdot M$, $\widetilde{K \cdot M} \in H_0^2$. $\langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M}, N \rangle = \langle K \cdot M, N \rangle - \langle \widetilde{K \cdot M}, N \rangle \overset{\text{Notazione}}{=}$

$= K \cdot \langle M, N \rangle - K \langle M, N \rangle = 0$, $N \overset{\text{lo scelgo}}{=} K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} \Rightarrow 0 = \langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} \rangle_t \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}\left[\langle K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} \rangle_{+\infty} \right]}_{= \| K \cdot M - \widetilde{K \cdot M} \|_{H^2}} = 0$

<u>Esistenza</u>: Sia $L: H_0^2 \to \mathbb{R}$ (fissati $K \in \mathcal{L}^2(M)$ e $M \in H_0^2$) (WLOG basta prendere $M - M_0$) dato da $L(N) := \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s \, d\langle M, N \rangle_s \right] \overset{\text{Notazione}}{=}$ (operatore lineare)

$= \mathbb{E}\left[(K \cdot \langle M, N \rangle)_{+\infty} \right]$. È ben definito: $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} |K_s| \, d\,\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle_s) \right] < +\infty$? Per Kunita-

($d\langle M, N \rangle = d\,\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)$ per crescenza)

-Watanabe, $H_s = 1 \Rightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} |K_s| \, d\,\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_s \right] \le \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2 \langle M \rangle_s \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} d\langle N \rangle_s \right] \right)^{\frac{1}{2}}$

$\le \|K\|_{L^2} \, \|N\|_{H^2} \Rightarrow |L(N)| \le \underbrace{\|K\|_{L^2(M)}}_{< +\infty} \cdot \underbrace{\|N\|_{H^2}}_{< +\infty} \Rightarrow L$ è cont. Per Riesz $\exists K \cdot M \in H_0^2$ t.c.

L è limitato come operatore (faccio sup su $\|N\|_{H^2} = 1$) $\Rightarrow$ continuo.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s \, d\langle M, N \rangle_s \right] \overset{\text{def}}{=} L(N) = (N, K \cdot M)_{H^2} = \mathbb{E}\left[\underbrace{N_0 \, (K \cdot M)_0}_{= 0} \right] + \mathbb{E}\left[\langle N, K \cdot M \rangle_\infty \right] =$$

$\overset{\text{notazione}}{=} \mathbb{E}\left[(K \cdot \langle M, N \rangle)_\infty \right]$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[N_t \, (K \cdot M)_t \right] = \mathbb{E}\left[N_\infty (K \cdot M)_\infty \right]$

(*1) $= \mathbb{E}\left[N_\infty (K \cdot M)_\infty \right]$. Verifichiamo che $\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle$, ossia $(K \cdot M)_t N_t - (K \cdot \langle M, N \rangle)_t$ è

(*2)

$\leftarrow$ Prop. pag. 90 3.5 libro

mart.: T t.d.a. lim., $\mathbb{E}\left[(K\cdot M)_T N_T - (K\cdot\langle M,N\rangle)_T\right] = 0$:

K.M martingala ($\in H_0^2$)

$$\mathbb{E}\left[(K\cdot M)_T N_T\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(K\cdot M)_T N_T \mid \mathcal{F}_T\right]\right] = \mathbb{E}\left[N_T\, \mathbb{E}\left[(K\cdot M)_T \mid \mathcal{F}_T\right]\right] = \mathbb{E}\left[N_T\, \mathbb{E}\left[(K\cdot M)_\infty \mid \mathcal{F}_T\right]\right] =$$

riporta N_T dentro

$$= \mathbb{E}\left[N_T (K\cdot M)_\infty\right] = \mathbb{E}\left[N^T_\infty (K\cdot M)_\infty\right] = (N^T, K\cdot M)_{H^2} = L(N^T) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s\, d\langle M, N^T\rangle_s\right] =$$

passaggio prec. Ex. prec.

$$= \mathbb{E}\left[(K\cdot\langle M,N\rangle_T\right]. \square$$

<u>Oss.</u>: se $K\in\mathcal{E}$ é la def. di prima.

<u>N.B.</u> il teorema é, in particolare, un'isometria $L^2(M)\ni K \longrightarrow K\cdot M\in H_0^2$. $(*_1) + (*_2)$ con $N = K\cdot M$ mi dá isometria $\|K\cdot M\|^2_{H^2} = \|K\|^2_M$

<u>Oss.</u>: $K\cdot M = K\cdot(M - M_0)$.

Vale l'isometria poiché $\langle K\cdot M\rangle = \langle K\cdot M, K\cdot M\rangle = K\cdot\langle M, K\cdot M\rangle = K\cdot(\langle K\cdot M, M\rangle) = K\cdot(K\cdot\langle M,M\rangle)$.

Proprietá dell'integrale iterato di R.-S.: $(K\cdot(h\cdot f))_t = \int_0^t K_s\, d\left(\int_0^s h_r\, df_r\right) = \int_0^t K_s h_s\, df_s \implies$

$K\cdot(K\cdot\langle M,M\rangle) = K^2\langle M\rangle \implies \|K\cdot M\|^2_{H^2} = \mathbb{E}\left[\langle K\cdot M\rangle_\infty\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} K_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] = \|K\|^2_{\mathcal{L}^2(M)}$.

<u>Corollario</u>: $K_n \longrightarrow K$ in $L^2(M) \implies K_n\cdot M \longrightarrow K\cdot M$ in H^2.

<u>Proprietá</u>

<u>Prop.</u>: se $M\in H^2$, $K\in\mathcal{L}^2(M)$, $H\in\mathcal{L}^2(K\cdot M)$, allora $H\cdot(K\cdot M) = (HK)\cdot M$ (in particolare $HK\in\mathcal{L}^2(M)$).

<u>dim.</u> $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}(H_s K_s)^2\, d\langle M\rangle_s\right] \overset{\text{Iso, Itô}}{=} \mathbb{E}\left[((H^2K^2)\cdot\langle M\rangle)_\infty\right] = \mathbb{E}\left[(H^2\cdot(K^2\cdot\langle M\rangle))_\infty\right] =$

$= \mathbb{E}\left[(H^2\cdot\langle K\cdot M\rangle)_\infty\right] = \|H\|^2_{\mathcal{L}^2(K\cdot M)} < +\infty \implies HK\in\mathcal{L}^2(M)$. Ora, $N\in H^2$:

$\langle H\cdot(K\cdot M), N\rangle \overset{?}{=} (HK)\langle M,N\rangle$: LHS $= H\cdot\langle K\cdot M, N\rangle = H\cdot(K\cdot\langle M,N\rangle) = (HK)\cdot\langle M,N\rangle$. $\square$

<u>Prop.</u>: siano $M\in H_0^2$, T t.d.a. Allora $M^T = \mathbb{1}_{[0,T]}\cdot M$ (in particolare $K_s(\omega) = \mathbb{1}_{[0,T(\omega)]}(s) \in\mathcal{L}^2(M)$).

<u>dim.</u> $\|\mathbb{1}_{[0,T]}\|^2_{\mathcal{L}^2(M)} = \left(\mathbb{E}\left[(\mathbb{1}^2_{[0,T]}\cdot\langle M\rangle)_\infty\right]\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{[0,T]}(s)\, d\langle M\rangle_s\right] \overset{\text{Oss. foto francesco}}{\leq} \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty\right] < +\infty$,

$N\in H^2$. $\langle M^T, N\rangle \overset{!}{=} \mathbb{1}_{[0,T]}\cdot\langle M,N\rangle$: $(\text{LHS})_s = \langle M,N\rangle^T_s = \int_0^{T\wedge s} d\langle M,N\rangle_r = \int_0^s \mathbb{1}_{[0,T]}(r)\, d\langle M,N\rangle_r = (\text{RHS})_s$. $\square$

<u>Cor.</u>: $M\in H^2$, T t.d.a., $K\in\mathcal{L}^2(M)$, allora $(K\cdot M)^T = (K\mathbb{1}_{[0,T]})\cdot M = K\cdot M^T$.

<u>dim.</u> ex. $\square$

<u>Def.</u> $(\mathcal{L}^2_{loc}(M))$: Se M é mart. loc. cont., un processo $(K_s)_{s\geq 0}$ é detto in $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$ se:

(1) é pr. mis. (2) $\exists (T_n)_n$ t.d.a., $T_n\uparrow +\infty$ t.c. $K\mathbb{1}_{[0,T_n]}\in\mathcal{L}^2(M)$, ossia $\mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} K_s^2\, d\langle M\rangle_s\right] < +\infty$.

(equiv. a (2) basta chiedere $\forall t$ $\int_0^t K_s^2\, d\langle M\rangle_s < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. o che $\int_0^{T_n} K_s^2\, d\langle M\rangle_s \leq n$ $\mathbb{P}$-q.c.)

<u>Prop.</u>: Sia M mart. loc. continua, $K\in\mathcal{L}^2_{loc}(M)$, allora $\exists!$ mart. loc. continua nulla in 0, $(K\cdot M)_t := \int_0^t K_s\, dM_s$

t.c. $\forall N$ mart. locale cont. $\langle K\cdot M, N\rangle = K\cdot\langle M,N\rangle$.

$\in L^2(M) \Rightarrow L^2(M^{T_n})$

dim. $\exists T_n$ t.d.a. t.c. $M^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$ è mart. lim. e $K\mathbb{1}_{[0,T_n]} \in L^2(M^{T_n})$. WLOG $M_0=0$ e

tanto $T_n \to +\infty$ — ben def. per Teo. prec. — Corollario

$M^{T_n}\mathbb{1}_{\{T_n>0\}} = M^{T_n} \Rightarrow (K\mathbb{1}_{[0,T_n]})\cdot M^{T_n}$ è mart. in H_0^2. Se $m\geq n \Rightarrow T_m \geq T_n$, $\left((K\mathbb{1}_{[0,T_m]})\cdot M^{T_m}\right)^{T_n} =$

LIBRO LO DICE BENE

$= (K\mathbb{1}_{[0,T_n]})\cdot M^{T_n}$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow$ è ben def. $(K\cdot M)_s = \lim_{m\to+\infty} \left((K\mathbb{1}_{[0,T_m]})\cdot M^{T_m}\right)_s$. Data N mart.

in H^2, $\forall m$ $\langle (K\mathbb{1}_{[0,T_m]})\cdot M^{T_m}, N\rangle \overset{\text{Teorema prec.}}{=} (K\mathbb{1}_{[0,T_m]})\cdot\langle M^{T_m}, N\rangle = (K\mathbb{1}_{[0,T_m]})\cdot\langle M,N\rangle^{T_m} =$

$(K\mathbb{1})M^{T_m} \overset{\text{Cor.}}{=} (K\mathbb{1}\mathbb{1})\cdot M = (K\mathbb{1})\cdot M$

$= K\langle M,N\rangle^{T_m} \overset{\text{Cor.}}{=} (K\cdot\langle M,N\rangle)^{T_m}$. LHS $= \langle (K\cdot M)^{T_m}, N\rangle = \langle K\cdot M, N\rangle^{T_m}$ e si conclude perché $T_m \to +\infty$. □

Conseguenza: abbiamo $\int_0^t H_s\,dB_s$ se $(B_s)_{s\geq 0}$ è BM e $(H_s)_{s\geq0} \in \mathcal{L}^2_{loc}(B)$, ossia $\forall t$ $\int_0^t H_s^2\,ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e H è prog. mis..

Es.: $H_s = B_s$, $\mathbb{E}\left[\int_0^t B_s^2\,ds\right] = \int_0^t s\,ds = \frac{t^2}{2}$

Ex. $\int_0^t B_s\,dB_s$ è mart.

Def. (loc. limitato): $(K_s)_{s\geq0}$ è loc. limitato se $\exists (T_n)_n$ t.d.a. t.c. $T_n \uparrow +\infty$ e $c_n<+\infty$ t.c. $|K^{T_n}| \leq c_n$ $\mathbb{P}$-q.c.

Def.: Sia $X = M+A$ semimart. cont., K progr. mis. e loc. lim.. $\underbrace{K\cdot M \text{ e } K\cdot A \text{ sono ben def.}}_{\text{per teorema subito prima}}$ e si pone $K\cdot X = K\cdot M + K\cdot A$.

Prop.: K, H loc. lim. e progr. mis.; X, Y semimart.. Allora:

$K\cdot(X+Y) = K\cdot X + K\cdot Y$; $(K+H)\cdot X = (K\cdot X)+(H\cdot X)$; $(KH)\cdot X = K\cdot(H\cdot X)$; $(K\cdot X)^T = (K\mathbb{1}_{[0,T]})\cdot X =$

$= KX^T$ con T t.d.a.; $K\cdot X$ è semimart. cont. e vale $\langle K\cdot X, H\cdot Y\rangle = \langle K\cdot M^X, H\cdot M^Y\rangle = (KH)\cdot\langle M^X, M^Y\rangle =$

$= (KH)\cdot\langle X, Y\rangle$.

M relativo alla decomposizione di X

dim. ex. □

Teorema: Sia X semimart. continua; $(K^n)_n$, K^∞ progr. mis. e t.c. $\exists c_n$ costante e T_n t.d.a. t.c. $|(K^n)^{T_m}| \leq c_m$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$ $\forall m$ e $\lim_{n\to\infty} K_s^n(\omega) = K_s^\infty(\omega)$. Allora $K^n\cdot X \to K^\infty\cdot X$ unif. sul ogni intervallo lim. e in prob. (i.e. $\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |(K^n\cdot X)_s - (K^\infty\cdot X)_s| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $\forall\varepsilon>0$ $\forall t$).

dim.: $X = M+A$. $K^n\cdot A \to K^\infty\cdot A$ per con. dom. "deterministico" applicato a ogni $\omega\in\Omega$. → guardare fatto Francesco

Supponiamo $K^\infty = 0$, vogliamo $K^n\cdot M \to 0$. A meno di introdurre t.d.a. possiamo supporre M mart. lim. e K^n unif. lim., $|K^n| \leq c$. $K^n \in \mathcal{L}^2(M)$ perché $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (K_s^n)^2\,d\langle M\rangle_s\right] \leq c^2\,\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] \leq c^2\|M\|^2_{H^2}$

$\Rightarrow$ per iso. di Itô $\|K^n\cdot M\|_{H^2} = \|K^n\|_{\mathcal{L}^2(M)}$. $\int_0^{+\infty} (K_s^n)^2\,d\langle M\rangle_s \to 0$ per con. dom. deter. ($\mu = d\langle M\rangle$ è finita $\forall\omega$)

le costanti sono integr.

$\int_0^{+\infty} (K_s^n)^2 \, d\langle M\rangle_s \le C^2 \langle M\rangle_\infty \to 0 \Rightarrow \| K^n \cdot M\|_{H^2} \to 0$. Per Doob $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[\sup_{s\ge0} |(K^n\cdot M)_s|^2\right]^{\frac12} \le$ (conv. q.c.) (lo usiamo per vedere conv. della tesi)

$\le 2 \sup_{s\ge0} \mathbb{E}\left[|(K^n\cdot M)_s|^2\right]^{\frac12} = 2\|K^n \cdot M\|_{H^2}$. Non vediamo i dettagli per liberarci dei t.d.a. $\square$

Cor.: Se $(K_s)_{s\ge0}$ cont. e loc. lim. e $\Delta^n \subseteq [0,t]$, $\Delta^n = \{0 = t_0^n < \dots < t^n_{h(n)} = t\}$ (succ. di partizioni), t.c. $|\Delta^n| \to 0$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{h(n)-1} K_{t_i^n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) \longrightarrow \int_0^t K_s \, dX_s \quad \text{in prob.}$$

dim. $\sum_{i=0}^{h(n)-1} K_{t_i^n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right) = (K^{\Delta^n}\cdot X)_t$ (proc. elementare opportuno). K cont $\Rightarrow K^{\Delta^n} \to K \Rightarrow K^{\Delta^n}\cdot X \to K\cdot X$ in prob. $\square$

Regola di Leibniz: Se $(a_s)_{s\ge0}$ è a var. finita e cont. e $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è C^1_b (derivata lim.) allora

$s \longmapsto f(a_s)$ è a var. finita. $f(a_t) - f(a_0) = \int_0^t 1 \, d(f\circ a)_s = \int_0^t f'(a_s)\, da_s$.

$f(a_t) - f(a_s) - f'(a_s)(a_t - a_s) + o(|a_t - a_s|) = 0$.

LHS $\to$ sommando su partizioni $\leftarrow$ RHS

Formula di Itô

$\to X = X_0 + M + A$

X semimart. cont., $F: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^2, "$dX_t = X_{t+dt} - X_t$" Vogliamo: $F(X_t)$ semimart. cont. e

$dF(X_t) = F'(X_t)\,dX_t + \frac12 F''(X_t)\,d\langle X\rangle_t$. Rigorosamente: $F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\,dX_s + \frac12\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X\rangle_s$

Prop.: Se X e Y sono semimart. continue, allora vale $X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_t$.

Oss.: $X = M$, $Y = N$ sono mart. loc. sappiamo che $N_tM_t - \langle M,N\rangle_t$ è mart. loc. cont.

$= M_0N_0 + \int_0^t M_s\,dN_s + \int_0^t N_s\,dN_s$

Es.: se $M = N = B$ BM, $B_t^2 - t = 2\int_0^{t_0} B_s\,dB_s$.

dim.: basta il caso $X=Y$ $\left(XY = \frac{(X+Y)^2 - X^2 - Y^2}{2}\right)$. Considero $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\} \subseteq [0,t]$.

Dunque se $|\Delta| \to 0$ allora $\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \longrightarrow \langle X\rangle_t$ in prob. Ma il LHS $=$

$$= \sum_{i=1}^n \left((X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2) - 2X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\right) = X_t^2 - X_0^2 - 2\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}).$$

Consideriamo il processo "elementare" $H_s = \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}(s)$. $H \in \mathcal{E}$ se X è lim.??? ,

e WLOG lo possiamo assumere (usando t.d.a.). X cont. $\Rightarrow H_s^n \to X_s$ $\forall s$ P-q.c. per $|\Delta| \to 0$.

Usando Cor. dim. (Corollario) per semimart. $\Rightarrow \int_0^t H_s\,dX_s \xrightarrow{prob} \int_0^t X_s\,dX_s$. $\square$

Oss. l'insieme trascurabile per cui non vale Itô non dipende da t.

Def.: un processo $(X_s^i)_{s\ge0,\, i=1,\dots,d}$ è detto semimart. (risp. mart. loc.) vettoriale cont. se tutte

le componenti lo sono.

Teorema: Sia $(X^i)_{i=1,\dots,d}$ semimart. vett. cont., $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Allora $F((X^i)_{i=1,\dots,d})$ è semimart. vett. continua e: (Formula di Itô)

$$F((X^i)_{i=1,\dots,d}) = F((X_0^i)_{i=1,\dots,d}) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(X_s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s$$

$(d(F\circ X) = DF(X)\,dx + \frac{1}{2}D^2F(X) : dX \otimes dX)$.

dim. Oss.: se $d=2$, $F(x,y) = x\cdot y$ è la prop. prec.. Se $F, G \in C^2$ e vale la formula per $F\circ X$, $G\circ X$ $\Rightarrow$ vale per $(F\circ X)(G\circ X)$ (perché sono semimart.) Se $F_n \in C^2(\mathbb{R}^d)$ soddisfano la formula e $F_n \to F$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ allora (a meno di arrestare con t.d.a.) per con. dom. anche $F\circ X$ la soddisfa. Ogni funzione C^2 si può scrivere come limite in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ di polinomi. $\square$

guardare foto Francesco

Oss. se qualche componente di X è solo a var. finita, allora si può richiedere che F sia solo C^1 lungo quella direzione.

Esempi:

Prop.: sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ esistono cont., $\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste cont., M mart. loc. continua. Allora $t \longmapsto f(M_t, \langle M\rangle_t)$ è mart. loc. cont. qualora $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. In particolare, il processo $\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)$ è mart. loc. continua.

dim. Si applica la formula di Itô usando l'oss. $\square$ ← Foto Francesco

Oss.: $\mathcal{E}(M)_t = \exp(M_0) + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s\, dM_s \iff dZ_t = Z_t\, dM_t$.

Es.: sia $f \in L^2([0,+\infty), \mathcal{L}^1)$, B BM, $M_t := \int_0^t f(s)\, dB_s$. Allora:

Vogliamo dire che $\mathcal{E}(M)_t$ è martingala in H^2

per prop. prec.

$\mathcal{E}(M)_t = \exp\left(\int_0^t f(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\, ds\right)$ è mart. loc.; $d\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_t\, f(t)\, dB_t$

$\rightarrow \langle K\cdot M\rangle = \int K^2\, d\langle M\rangle$ con $K = \mathcal{E}f$, $M = B_t$ + $(d\langle B_t\rangle = dt)$

F.T. + $f^2(s)$ non dipende da ω

$$\Rightarrow \langle \mathcal{E}(M)\rangle_t = \int_0^t \mathcal{E}^2(M)_s\, f^2(s)\, ds \Rightarrow \mathbb{E}\left[\langle \mathcal{E}(M)\rangle_t\right] = \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathcal{E}^2(M)_s\right] f^2(s)\, ds =$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^s f(r)\, dB_r - \int_0^s f^2(r)\, dr\right)\right] f^2(s)\, ds =$$

$\exp\left(\int_0^s f^2(r)\,dr\right) \le \exp\left(\int_0^{+\infty} f^2(r)\,dr\right)$ e porto fuori

$$= \int_0^t \mathbb{E}\left[\exp\left(2\underbrace{\int_0^s f(r)\, dB_r}\right)\right] \exp\left(-\int_0^s f^2(r)\, dr\right) f^2(s)\, ds = \int_0^t \exp\left(\int_0^s f^2(r)\, dr\right) f^2(s)\, ds \le$$

$$\le \exp\left(\|f\|_2^2\right) \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Gaussiana media 0 e varianza $\int_0^s f^2(r)\, dr$ + funzione generatrice in $t=2$

Oss. una mart. loc. cont. t.c. $M_t \geq 0$ $\forall t \geq 0$ (e integr.) è una super mart. $\Rightarrow \mathcal{E}(M)_t$ super mart.

$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathcal{E}(M)_t] \le \mathbb{E}[\mathcal{E}(M_0)] = 1$.

Foto Francesco Telegram

Ex: $\mathbb{E}[\mathcal{E}(M)_t] = 1$ $\forall t \Rightarrow$ mart.

Prop.: $(B^i)_{i=1,\dots,d}$ BM d-dim., $f \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0,+\infty)) \Rightarrow f(B_t, t) = f(0,0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i}(B_s, s)\, dB_s^i +$

← perché $\langle B^i, B^j \rangle = \delta_{ij}\, dt$ per ind.

$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}(B_s, s)\, ds.$$ Inoltre $f(B_t, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\Delta f\right)(B_s, s)\, ds$ è mart. loc. cont. e se f è armonica e indipendente da t $\Rightarrow f \circ B$ è mart. loc. continua.

<u>Teorema</u> (P. Lévy): Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ processo continuo e $(\mathcal{F}_t)_t$-adattato, $X_0 = 0$. TFAE:

① X è un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-BM ② X è mart. loc. cont. e $\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij}\, t \quad \forall t \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, d$;

③ $\forall f_1, \dots, f_d \in L^2([0, +\infty), \mathcal{L}^1)$: processi $\mathcal{E}_t^{if} := \exp\left(i \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j(s)\, dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \int_0^t f_j^2(s)\, ds\right)$

sono mart. complesse, e X è martingala vettoriale continua.

(*) $\langle K \cdot M \rangle = \int K^2 d\langle M \rangle$

$d\langle K \cdot M, H \cdot N \rangle = \int KH\, d\langle M, N \rangle$

$\cdot\ d\langle \int_0^t f_i(s)\, dX_s^i, \int_0^t f_j(s)\, dX_s^j \rangle = d\langle f_i \cdot X^i, f_j \cdot X^j \rangle = f_i f_j\, d\langle X^i, X^j \rangle$

$\cdot\ d\langle \int_0^t f_i(s)\, dX_s^i, \int_0^t f_j^2(s)\, d\langle X^j, X^j \rangle_s \rangle = f_i f_j^2\, d\langle X^i, \langle X^j, X^j \rangle \rangle = 0$

<u>dim.</u> ① ⟶ ②: già visto, per es.;

② ⟶ ③: per Itô, $\mathcal{E}_t^{if} = F\left(\left(\int_0^t f_j(s)\, dX_s^j, \int_0^t f_j^2(s)\, ds\right)_{j=1}^d\right)$, con $F: \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{C}$

t.c. $(x_j, y_j)_{j=1}^d \longmapsto \exp\left(i \sum_j x_j + \sum_j y_j/2\right)$. Dunque:

$$d\mathcal{E}_t^{if} = \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} f_j\, dX_t^j + \frac{\partial F}{\partial y^j} f_j^2\, dt\right) + (*)\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial (x^j)^2} f_j^2\, dt.$$ Ma $\frac{\partial F}{\partial x^j} = iF$, $\frac{\partial^2 F}{\partial (x^j)^2} = -F$

$\frac{\partial F}{\partial y^j} = \frac{1}{2}F \Rightarrow d\mathcal{E}_t^{if} = i\sum_{j=1}^d F f_j\, dX_t^j$. Allora $|\mathcal{E}_t^{if}| = \left|\exp\left(i\sum_j \int_0^t f_j\, dX^j + \frac{1}{2}\sum_j \int_0^t f_j^2\, ds\right)\right| \leq$ ($e^{ix} \leq 1$)

$\leq \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sum_j f_j^2\, ds\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\sum \|f_j\|_2^2\right) < +\infty.$

$\mathcal{E}_t^{if}$ è mart. loc. continua perché integrale mart. loc. cont. + Oss: mart. loc. continua e limitata $\Rightarrow$ mart. pag. 149 libro punto 2

③ ⟶ ①: $\mathcal{E}_t^{if}$ è mart. (lim.) (visto sopra), $s < t$. Tesi: $X_t - X_s \sim N^d(0, t-s)$ indipenti da $\mathcal{F}_s$. $A \in \mathcal{F}_s$

($\mathcal{E}_t^{if}$ mart.) se metto nella def. di $\mathcal{E}_s^{if}$ ho $\int_0^s \mathbb{1}_{[s,t]} = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathcal{E}_t^{if}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathcal{E}_s^{if}\mathbb{1}_A]$. Sia $v \in \mathbb{R}^d$, $f_j(r) := v_j \mathbb{1}_{[s,t]}(r) \Rightarrow RHS = \mathbb{P}(A)$ mentre

$LHS = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^d v_j (X_t^j - X_s^j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d v_j^2 (t-s)\right)\mathbb{1}_A\right] \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(i\langle v, X_t - X_s \rangle)] \cdot$

$\cdot \exp\left(\frac{1}{2}\|v\|^2 (t-s)\right)$. Per $A = \Omega \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[\exp(i\langle v, X_t - X_s \rangle)]}_{= \varphi_{X_t - X_s}(v)} = \varphi_{N^d(0, t-s)}(v)$ ← è Gaussiana. Inoltre, vale il ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{1}_\Omega = 1$)

seguente lemma: se Y v.a. reale, $\mathcal{E}$ σ-algebra e $\forall A \in \mathcal{E}$ $\mathbb{E}[\exp(iY\lambda)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[e^{iY\lambda}]\,\mathbb{P}(A)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow Y$ indip. da $\mathcal{E}$. (ex.). Dunque $X_t - X_s$ ind. da $\mathcal{F}_s$. □

<u>Corollario</u>: se $(X_t)_{t\geq 0}$ è mart. loc. cont., $X_0 = 0$ e $\langle X \rangle_t = t$, allora X è BM.

<u>Def.</u> (polinomio di Hermite): il polinomio di Hermite di grado n è $h_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^n}{dx^n}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)$.

Notiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} h_n(x) = \exp\left(ux - \frac{u^2}{2}\right)$ $\forall u \in \mathbb{R}$; $\frac{d}{dx} h_n(x) = n\, h_{n-1}(x)$. Ora, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall a > 0$,

definiamo $H_n(x, a) := h_n\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) a^{\frac{n}{2}}$, $H_n(x, 0) := x^n$.

<u>Prop.</u>: M mart. loc. cont., $M_0 = 0 \Rightarrow \forall n$ $H_n(M_t, \langle M \rangle_t)$ è mart. loc. cont. e vale che

$$H_n(M_t, \langle M \rangle_t) = n! \int_0^t \left(\int_0^{s_{n-1}}\left(\int_0^{s_{n-2}} \text{—} \left(\int_0^{s_1} dM_{s_0}\right) dM_{s_1}\right) \text{—}\, dM_{s_2}\right) dM_{s_{n-1}}.$$

<u>dim.</u> $f(M_t, \langle M \rangle_t)$ è mart. loc. se $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. H_n soddisfa. Segue anche che

$H_n(M_0,0) = M_0^n = 0 \;\wedge\; \frac{\partial H_n}{\partial x} = n H_{n-1}$

$H_n(M_t, \langle M\rangle_t) \overset{\text{Itô}}{=} H_n(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial H_n}{\partial x}(M_s, \langle M\rangle_s)\, dM_s = n\int_0^t H_{n-1}(M_s, \langle M\rangle_s)\, dM_s$. Induzione. $\square$

__Ex.__: X semimart. continua, $X_0 = 0$, $\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - \langle X\rangle_t/2)$. Allora $\mathcal{E}(X)$ e' l'unica semimart. cont. Z t.c. $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ dZ_t = Z_t\, dX_t \end{cases}$.

__Sol.__ $\mathcal{E}(X)_t > 0\ \forall t$. A meno di arrestare al t.d.a. $T^\varepsilon = \inf\{t \mid \mathcal{E}(X_t) \le \varepsilon\}$, possiamo applicare Itô a $f(Z_t, \mathcal{E}(X)_t)$, $f(x,y) = \frac{x}{y}$. Oss: $\frac{1}{\mathcal{E}(X)_t} = \exp(-X_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t) =$ al tempo o la costante e' 1 e quindi th.

$\langle -X\rangle_t = \langle X\rangle_t$

$= \mathcal{E}(-X)_t \exp(\langle X\rangle_t)$. $\frac{Z_t}{\mathcal{E}(X)_t} = Z_t\, \mathcal{E}(-X)_t \exp(\langle X\rangle_t)$. Itô + conti (Mario) $\Rightarrow d(Z_t\mathcal{E}(-X)_t \exp(\langle X\rangle_t)) = 0$. $\square$

__Teorema__ (disuguaglianze di Burkholder-Davis-Gundy): sia $(M_t)_{t\ge 0}$ mart. loc. cont. nulla in 0. Allora $\forall p > 0\ \exists c_p \in (0,+\infty)$ t.c. $c_p^{-1}\, \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{p/2}] \le \mathbb{E}(\sup_{t\ge 0} |M_t|^p] \le c_p\, \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{p/2}]$.

__Ex.__: sia $(B_s)_{s\ge 0}$ MB e $(H_s)_{s\ge 0} \in \mathcal{L}^2_{loc}(B)$, $M_t = \int_0^t H_s\, dB_s$, $\langle M\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$. T t.d.a., allora $c_p^{-1}\, \mathbb{E}[(\int_0^T H_s^2\, ds)^{p/2}] \le \mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t H_s\, dB_s|^p] \le c_p\, \mathbb{E}[(\int_0^T H_s^2\, ds)^{p/2}]$.

__Oss.__: se $p \ge 2$, $|\int_0^T H_s^2\, ds|^{\frac{p}{2}} \le T^{\frac{p}{2}-1}\int_0^T H_s^p\, ds$. Se $T = t$ deterministico, $\mathbb{E}[|\int_0^t H_t^2\, ds|^{\frac{p}{2}}] \le t^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}[H_s^p]\, ds$.

__Prop.__: $p \ge 2 \Rightarrow \exists c_p < +\infty$ t.c. $\mathbb{E}[\sup_{t\ge 0} |M_t|^p] \le c_p\, \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}]$, M come sopra.

__dim.__ Partiamo dal caso in cui M e' mart. cont. e unif. lim.. Se $p \ge 2$, $f(x) = |x|^p \in C^2(\mathbb{R})$.

$f'(x) = p|x|^{p-1}\operatorname{sgn}(x)$, $f''(x) = p(p-1)|x|^{p-2}$. Itô $\Rightarrow d(f\circ M)_t = f'(M)\, dM_t + \frac{1}{2} f''(M)\, d\langle M\rangle_t$

$\Rightarrow |M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1}\operatorname{sgn}(M_s)\, dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t p(p-1)|M_s|^{p-2}\, d\langle M\rangle_s$. Ora:

NON SERVE

$\sup_{t\ge 0} |M_t|^p \le p \sup_{t\ge 0} |\int_0^t |M_s|^{p-1}\operatorname{sgn}(M_s)\, dM_s| + \frac{p(p-1)}{2}\int_0^{+\infty} |M_s|^{p-2}\, d\langle M\rangle_s \Rightarrow$

$\mathbb{E}[\sup_{t\ge 0}|M_t|^p] \le p\, \mathbb{E}[\;\_\_\;] + \frac{p(p-1)}{2}\, \mathbb{E}[\;\_\_\;]$ (si può portare avanti ma e' lunga). Osserviamo che se $p \ge 2 \Rightarrow$ per Doob $\mathbb{E}[\sup_{t\ge 0}|M_t|^p] \le \frac{p}{p-1}\sup_{t\ge 0}\mathbb{E}[|M_t|^p]$. Dunque:

$\mathbb{E}[|M_t|^p] = p\, \mathbb{E}[\int_0^t |M_s|^{p-1}\operatorname{sgn}(M_s)\, dM_s] + \frac{p(p-1)}{2}\, \mathbb{E}[\int_0^t |M_s|^{p-2}\, d\langle M\rangle_s]$.

$\mathbb{E}(\int_0^t |M_s|^{p-1}\operatorname{sgn}(M_s)\, dM_s)] = 0$ perché $t \mapsto \int_0^t |M_s|^{p-1}\operatorname{sgn}(M_s)\, dM_s \in H_0^2$ perché l'integranda e' unif. lim. $\Rightarrow \in \mathcal{L}^2(M)$ e M é in H^2.

$\mathbb{E}[\int_0^{+\infty} \text{Integranda}\; d\langle M\rangle_s] = \|\text{Integranda}\|_\infty^2\, \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty] < +\infty$ (unif lim.)

__Prop__: $H^2 \ni M$ mart. $K \in \mathcal{L}^2(M) \Rightarrow K\cdot M \in H_0^2$ cioe' e' davvero mart.

Nel nostro caso M unif lim. $\Rightarrow$ lim. $\Rightarrow M \in \mathcal{L}^2$.

$\mathbb{E}[\int_0^t |M_s|^{p-2}\, d\langle M\rangle_s] \le \mathbb{E}[\int_0^t (\sup_{0\le r\le t}|M_r|^{p-2})\, d\langle M\rangle_s] = \mathbb{E}[(\sup_{0\le r\le t}|M_r|^{p-2})\langle M_t\rangle] \le$ Hölder con $\frac{p}{2}, \frac{p}{p-2}$

$\le \mathbb{E}[\langle M\rangle_t^{p/2}]^{\frac{2}{p}}\, \mathbb{E}[(\;\_\;)^{\frac{p}{p-2}}]^{1-\frac{2}{p}} = \mathbb{E}[\langle M\rangle_t^{p/2}]^{\frac{2}{p}}\, \mathbb{E}[\sup_{0\le r\le t}|M_r|^p]^{1-\frac{2}{p}}$, si semplifica e sostituisco nella dis. di Doob e uso Beppo Levi col sup di $\sup_{0\le r\le t}|M_r|^p$ che e' cresc.

si manda $t \to +\infty$ applicando BL. Caso generale: T_n t.d.a. $\uparrow +\infty$ t.e. $M^{T_n}\cdot \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}} = M^{T_n}$

se $T_n = 0$ avrei M_0 che però e' 0

sono mart. cont. e limitate $\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |M_{T_n\wedge t}|^p\right] \overset{\text{Prop. per mart.}}{\leq} C_p\, \mathbb{E}\left[\langle M^{T_n}\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \overset{\text{Proprietà } T_n}{=} C_p\, \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_{T_n}^{\frac{p}{2}}\right]$ e si usa BL. $\square$

Prop.: $p\geq 4 \Rightarrow \exists\, c_p \in (0,+\infty)$ t.c. $\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq c_p\, \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|M_t|^p\right]$.

<u>dim.</u> $f(x)=x^2 \Rightarrow$ per Itô $M_t^2 - \langle M\rangle_t = 2\int_0^t M_s\, dM_s$. Caso M mart. unif. lim.:

$\langle M\rangle_t = M_t^2 - 2\int_0^t M_s\, dM_s \Rightarrow$ (*) $\langle M\rangle_t^{\frac{p}{2}} = \left|M_t^2 - 2\int_0^t M_s\, dM_s\right|^{\frac{p}{2}} \leq c(p)|M_t|^p + c(p)\, 2^{\frac{p}{2}}\left|\int_0^t M_s\, dM_s\right|^{\frac{p}{2}}$.

$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t M_s\, dM_s\right|^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq t}\left|\overbrace{\int_0^r M_s\, dM_s}^{N_r}\right|^{\frac{p}{2}}\right] \overset{\frac{p}{2}\geq 2 \text{ e prop. prec.}}{\leq} \underbrace{\sup_{0\leq s\leq t} C(p)\, \mathbb{E}\left[\langle N\rangle_s^{\frac{p}{4}}\right]}_{c(p)\,\mathbb{E}\left[\langle N\rangle_t^{\frac{p}{4}}\right]}$. Oss: $\langle N\rangle_t =$

$= \int_0^t M_s^2\, d\langle M\rangle_s$. Ora:

$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t M_s^2\, d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{p}{4}}\right] \leq \mathbb{E}\left(\left(\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|^{\frac{p}{2}}\right)\langle M\rangle_t^{\frac{p}{4}}\right) \overset{\text{Cauchy-Sch.}}{\leq} \mathbb{E}\left[\overbrace{\langle M\rangle_t^{\frac{p}{2}}}^{1}\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\overbrace{\sup_{0\leq s\leq t}|M_s|^p}^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Allora $\mathbb{E}\left[\langle M\rangle_t^{\frac{p}{2}}\right] \leq \tilde{c}(p)\,\mathbb{E}[2] + \tilde{c}(p)\,\mathbb{E}[1]^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{E}[2]^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{c}(p)\,\mathbb{E}[2] + \underbrace{\tilde{c}(p)\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{scelgo } \varepsilon \text{ perché sia } \frac{1}{2}}\mathbb{E}[1] + \frac{\tilde{c}(p)}{2\varepsilon}\mathbb{E}[2]$.

(*) applico $\mathbb{E}[\,]$

Si conclude come prima usando $\sup_{t\geq 0}$ + Beppo Levi. $\square$ $\quad ab = a\sqrt{\varepsilon}\cdot\frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$

Equazioni differenziali stocastiche

Eq. diff. ordinaria: $(X_t)_{t\geq 0}$ $\quad dX_t = f(X_t)\,dt\ (+\,dB_t)$. B BM d-dim, X semimart. vett. d-dim.,

$\sigma\in\mathbb{R}^{d\times d}$, $\quad dX_t = f(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dB_t \rightsquigarrow X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)\,dB_s$.

<u>Processi di diffusione</u>: mettiamoci in $\mathbb{W} := \left(C\left([0,+\infty), \mathbb{R}^d\right), d\in\mathbb{N}, d>0\right)$. $\omega_s: (X_t)_{t\geq 0} \longrightarrow X_s$,
non è "omega"!

$\mathcal{B}_t = \sigma(\omega_s \mid s\leq t)$. $f: [0,+\infty)\times\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è pr. misurabile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$.

<u>Es.</u>: $f(t,x) := \bar{f}(t, x_t)$, $\quad \bar{f}: [0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$. $\quad x\in\mathbb{W}$ è del tipo $x := (x_t)_{t\in[0,+\infty)}$ $\quad x_t\in\mathbb{R}^d$

$f(t,X): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d \quad f(t,X)(\omega) := f(t, X_\cdot(\omega)) \in\mathbb{R}^d$ (traiettoria di ω) cioè $(f(t,X))_{t\geq 0}$ è un processo stocastico

Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un proc. cont. e adattato, $f(t,X)$ pure lo è.

<u>Def.</u>: date $f: [0,+\infty)\times\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times r}$, $g: [0,+\infty)\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{R}^d$ adattate e continue. Una soluzione

dell'eq. diff. stocastica $dX = g(X)\,dt + f(X)\,dB$ è una coppia (X, B) definita su uno spazio

$(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ t.c.:

1. B è BM r-dim. rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;

2. X è semimart. vett. d-dim. e vale:

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t g^i(s,X)\,ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t f^{ij}(s,X)\,dB_s^j \quad \forall t\geq 0 \quad i=1,\dots,d.$$

(chiediamo che $\int_0^t |g^i(s,X)|\,ds < +\infty$ e $\int_0^t |f^{ij}(s,X)|^2\,ds < +\infty$ $\forall i,j$ $\forall t$ $\mathbb{P}$-q.c.).

per definire $f(s,X)\cdot B$ $\quad f(s,X)\in L^2(B)$
cioè $\mathbb{E}\left[\int f^2(s,X)\, \underset{ds}{d\langle B,B\rangle}\right] < +\infty$
e valore attesa di cosa positiva...

<u>Oss.</u>: la sol. (X,B) è definita su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

<u>Def.</u>: Date f, g come sopra, si dice che l'EDS $e(f,g)$ ammette:

① Unicità per traiettorie: $\forall (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$, $\forall B$ $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$- BM a valori in $\mathbb{R}^r$, se vale che

$(X, B), (\tilde{X}, B)$ sono sol. con $X_0 = \tilde{X}_0$ $\mathbb{P}$-q.c. allora $X = \tilde{X}$ $\mathbb{P}$-q.c.;

② Unicità in legge se $\forall (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, B, X)$, $(\tilde{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \hat{B}, \tilde{X})$ sol.

di $e(f,g)$ t.c. $X_0 = \tilde{X}_0$ in legge, allora $X = \tilde{X}$ in legge.

Def.: date f, g, una sol. (X, B) di $e(f,g)$ (definita su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$) é detta forte se

X é adattata a $(\mathcal{F}^B_t)_{t\geq 0} := \overbrace{\text{filtrazione generata da } B}^{\sigma(B_s : s\leq t) \subseteq \mathcal{F}_t \text{ per def. di sol. eq. diff. stoc.}}$ e completata con i trascurabili di

$\sigma(B_s \mid s\geq 0)$. Una sol. non forte é detta debole.

Es.: eq. di Peano $\begin{cases} dX_t = \sqrt{|X_t|}\,dt = g(X_t)\,dt, \quad d=1 \\ X_0 = 0 \end{cases}$. $X_t \equiv 0$ é sol., $X^s_t = \begin{cases} 0, & t<s \\ \overbrace{\frac{1}{4}(t-s)^2}^{\alpha(t-s)^2 + \text{conto}}, & t\geq s \end{cases}$

$\downarrow$
forte (vero a vuoto)

Es. di sol. strett. debole: dato B, nell'evento $B_1 > 0$ poniamo $X_t = x^1_t$, nell'evento $B_1 \leq 0$ poniamo

$X_t = 0$. $(X_t)_{t\geq 0}$ é continuo e adattato rispetto a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^B_t \vee \sigma(B_1)$, ma non rispetto a $\mathcal{F}^B_t$.

Teo (Yamada-Watanabe) (solo enunciato): se vale l'unicità per traiettorie per $e(f,g)$, allora:

① : vale l'unicità in legge per $e(f,g)$; ② Ogni sol. é forte (partendo da $X_0 = x$ deterministico).

Teniamo lo stesso setting per $e(f,g)$.

Ipotesi: ① $\overbrace{|f(t, (x_s)_{s\geq 0}) - f(t, (y_s)_{s\geq 0})| + |g(t, (x_s)_{s\geq 0}) - g(t, (y_s)_{s\geq 0})| \leq}^{\text{Condizione di Lips.}}$

$\leq K \sup_{0\leq s\leq t} |x_s - y_s|$ $\forall x, y \in W$ $\forall t$; ② $\forall \bar{y} = (\bar{y}_s)_{s\geq 0}$ cost., $\overbrace{(f(\cdot, \bar{y}))_{s\geq 0}}^{\text{visto come processo stoc.}}$ é loc. lim. progr. mis.

Teorema: in queste hp., $\forall (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ($\mathcal{F}_t$ continua a dx e completa), dato un

$\mathcal{F}_t$- BM $(B_t)_{t\geq 0}$, $\overset{\text{a meno di indistinguibilità}}{\exists!}$ sol. $(X_t)_{t\geq 0}$ di $e(f,g)$, $X_0 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$; inoltre, é forte.

dim. per semplicità, $d = r = 1$.

$X_t = x + \int_0^t g(s, X)\,ds + \int_0^t f(s, X)\,dB_s$. Costruiamo $(X^n)_{n\geq 0}$ processi approssimanti:

$X^0_t = x$ $\forall t\geq 0$; $X^{n+1}_t = S(X^n)_t$ dove $S(U) = x + \int_0^t g(s, U)\,ds + \int_0^t f(s, U)\,dB_s$.

Se U é continuo e adattato, per le hp. su f e g anche $S(U)$ lo é.

Dato $t\geq 0$, $\Phi_t(U, V) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |U_s - V_s|^2\right]$. $\Phi_t(S(U), S(V)) \leq ?$

$S(U)_s - S(V)_s = \int_0^s (g(r, U) - g(r, V))\,dr + \int_0^s (f(r, U) - f(r, V))\,dB_r$. Dunque:

$|S(U)_s - S(V)_s|^2 \underset{(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2}{\leq} 2\left|\int_0^s 1\cdot(g(r, U) - g(r, V))\,dr\right|^2 + 2\left|\int_0^s (f(r, U) - f(r, V))\,dB_r\right|^2 \leq$

$\underset{\text{CS}}{\leq} 2s \int_0^s |g(r, U) - g(r, V)|^2\,dr + 2 \sup_{0\leq q\leq t} \left|\int_0^q (f(r, U) - f(r, V))\,dB_r\right|^2 \leq$ (cambio s con q)

Condizione Lip. dimenticandosi di $|f(u)-f(v)|$

$\leq 2tK^2 \int_0^t \left(\sup_{0\leq r\leq s} |U_s - V_s|^2 \right) ds + 2 \sup_{0\leq q\leq t} \left| \int_0^q (f(r,U) - f(r,V)) dB_r \right|^2 \Rightarrow$

$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |S(U)_s - S(V)_s|^2 \right] \leq 2tK^2 \int_0^t \Phi_r(U,V)\, dr + 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq q\leq t} \left| \int_0^q \underset{\in \mathcal{L}^2(B)}{(f(r,U)-f(r,V))} dB_r \right|^2 \right]$

Doob
$\leq 2tK^2 \int_0^t \Phi_r(U,V)\, dr + 4\,\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t (f(r,U)-f(r,V)) dB_r \right|^2 \right]$. è una martingala vera $\in H_0^2$ dunque $\mathbb{E}[|M|^2] = \cancel{\mathbb{E}[M_0]} + \mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$ ma

Ricordiamo: $M \in H_0^2 \Rightarrow \mathbb{E}[|M_t|^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$. Allora $\mathbb{E}\left[\left| \int_0^t (f(r,U) - f(r,V)) dB_r \right|^2 \right] \leq$ $\langle M\rangle_t = \int_0^t \ldots^2 dr$ e poi applico cond. Lip.

$\leq 4K^2 \int_0^t \Phi_r(U,V)\, dr \Rightarrow \Phi_t(S(U), S(V)) \leq C \int_0^t \Phi_r(U,V)\, dr$, $0 \leq t \leq T$.

Per induzione, $\Phi_t(X^{n+1}, X^n) \leq C^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{n-1}} \Phi_{t_n}(X^1, x)\, dt_n$.

conto pag. 376/377 scritto a mano

$\Phi_t(X^1, x) \leq C(T) \leq \infty$. Allora $\Phi_T(X^{n+1}, X^n)^{\frac{1}{2}} < +\infty \Rightarrow \forall T \; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

$\leq \sum C(T) \frac{(CT)^n}{n!} = C(T) e^{CT}$ $\quad \Phi_t(X^{n+1}, X^n) \leq C^n \, C(T) \cdot \frac{t^n}{n!} \leq C^n C(T) \cdot \frac{T^n}{n!} < +\infty$

$< +\infty \Rightarrow \underbrace{(X^n)_{n\geq 0}}_{\text{lui è una succ. di processi, dire che} \in L^2 \text{ vuol dire che fisso } n \text{ e } \ldots}$ è convergente in $L^2 \Rightarrow$ in prob.. Dunque $\exists X_t = \lim_{n\to+\infty} X_t^n$ cont. e adattato. + ho trovato che è di Cauchy $\Rightarrow$ ok

$X_t \leftarrow X_t^{n+1} = x + \int_0^t g(s, X^n)\, ds + \int_0^t f(s, X^n)\, dB_s$. (*) Ma $g(s, X^n) \to g(s, X)$ in prob. perché

(*) il limite dentro gli integrali lo passo con Leb. + Leb versione stocastica

e usare hp. Lip.

$\sup_{0\leq s\leq t} |X_s - X_s^n| \to 0$ in prob., $f(s, X^n) \to f(s, X)$ pure. Passo al limite allora X è pt. fisso.

Unicità: $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ sol.. $\Phi_t(X,Y) = \Phi_t(S(X), S(Y)) \leq C \int_0^t \Phi_r(X,Y)\, dr$. Supponiamo f, g unif. lim.

conto esplicito con def.

$t \mapsto \Phi_t(X,Y)$ è loc. lim. (finito). (Se f e g non sono uniformemente lim., basta arrestare al

primo istante in cui $|f(s,X)| \geq n$ (o $|f(s,Y)| \geq n$, o $|g(s,X)| \geq n$, o $|g(s,Y)| \geq n$). Anche per l'esist.)

Lemma di Gronwall: se $(a_t)_{t\geq 0}$, $a_t \geq 0$ loc. lim. e $\forall t$ $\overset{\Phi(X,Y)}{a_t} \leq c \int_0^t a_s\, ds + \overset{0}{b} \Rightarrow a_t \leq b e^{ct}$ $\forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ unicità per traiettorie. (Ex.: trovare una stima di $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s^x - Y_s^y|^2 \right]$ se $x \neq y$.) Oss.: X è $\mathcal{F}_t^B$-mis.

non serve $\qquad$ dati iniziali

$\Rightarrow$ la sol. è forte. $\square$

<u>Oss.</u>: Yamada – Watanab $\Rightarrow$ unicità in legge.

<u>Def.</u>: e (f,g) lineare se $f(s,X) = A_s X_s + b_s$, $g(s,X) = \tilde{A}_s X_s + \tilde{b}_s$; $(A_s)_{s\geq 0}$, $(\tilde{A}_s)_{s\geq 0}$ deterministiche.

<u>Es.</u>: $(\mathcal{E}(M)_t)_{t\geq 0}$ sol. di $dX_t = X_t dM_t$. Se $M_t = \int_0^t \overset{\text{deterministica}}{h_s} dB_s$, $dX_t = \overbrace{X_t h_t}^{f(t,X)} dB_t$.

<u>Def.</u>: se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Feller associato al semigruppo $(P_t)_{t\geq 0}$, una funzione f si

$(P_t f)(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$

dice appartenente al generatore di X se $\lim_{t\to 0^+} \frac{P_t f - f}{t}$ esiste (unif.). Si pone Af tale limite.

Supponiamo che $(X_t)_{t\geq 0}$ sia una sol. di e (σ, g) con $X_0^x = x$ e $\sigma(s,x) = \tilde{\sigma}(s, x_s)$,

$g(s,x) = \tilde{g}(s, x_s)$. Se $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, Itô $\Rightarrow$

$df(X_t^x) = \nabla f(X_t^x) dX_t^x + \frac{1}{2} \nabla^2 f(X_t^x) : dX_t^x \otimes dX_t^x =$

$= \nabla f(X_t^x)\left(g(t,X_t^x)\,dt + \sigma(t,X_t^x)\,dB_t\right) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_t^x)\, d\langle (X^x)^i, (X^x)^j \rangle .$

$dX^i dX^j = \left(\sum_k \sigma_k^i \, dB_k\right)\left(\sum_l \sigma_l^j \, dB_l\right) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^i \sigma_k^j \, dt = (\sigma\sigma^T)^i_j \, dt \Rightarrow$

$df(X_t^x) = \nabla f(X_t^x)\left(g(t,X_t^x)\,dt + \sigma(t,X_t^x)\,dB_t\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\sigma\sigma^T)^i_j\right)(X_t^x)}_{Tr(D^2 f(X_t^x)(\sigma\sigma^T)(t,X_t^x))}\,dt$

$Tr(A\cdot B)(t,X_t^x)$

Oss.: il termine $\int_0^t \nabla f(X_s^x)\,\sigma(s,X_s^x)\,dB_s$ è soltanto mart. locale (in generale). Se σ è loc. lim. e f è a supp. comp. allora è mart. $\Rightarrow \mathbb{E}[\text{—}]=0$.

Quindi: $\mathbb{E}[f(X_t^x)] = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}\left[\nabla f(X_s^x)\, g(X_s^x) + \frac{1}{2}Tr\left(D^2 f(X_s^x)(\sigma\sigma^T)(s,X_s^x)\right)\right] ds.$

$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_t^x)] - f(x)}{t} = \mathbb{E}\left[\nabla f(X_0^x)\, g(X_0^x) + \frac{1}{2}Tr\left(D^2 f(X_0^x)(\sigma\sigma^T)(0,X_0^x)\right)\right] =$

se g, σ cont., uso con. dom.

$X_0^x = x$ deterministico

$= \nabla f(x)\, g(x) + \frac{1}{2}Tr\left(D^2 f(x)(\sigma\sigma^T)(0,x)\right) =: (Af)(x).$

Quindi, se X soddisfa $e(\sigma,g)$ con σ, g loc. lim., abbiamo ottenuto il limite di cui sopra $\forall f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$. Dunque: EDS $\overset{\text{produce}}{\rightsquigarrow}$ processo che ammette $\nabla f \cdot g + \frac{1}{2}(\nabla^2 f\, \sigma\sigma^T)$ come "generatore"

$\forall f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $f(X_t) = f(x) + \int_0^t (Af)(X_s)\,ds$ con $\underbrace{f(X_t) - f(x) - \int_0^t (Af)(X_s)\,ds}_{\text{mart. loc.}}$

Def.: Un processo $(X_t)_{t\geq 0}$ a traiettorie cont. è sol. del problema della mart. $\mathcal{M}_x(\sigma\sigma^T, g)$ se $X_0 = x$ $\mathbb{P}$-q.c. e $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ $f(X_t) - \int_0^t \left(\nabla f(X_s)\, g(X_s) + \frac{1}{2}Tr\left(D^2 f(X_s)\,\sigma\sigma^T(X_s)\right)\right) ds$ è mart. (rispetto alla filtrazione di X_s).

Teorema: se f e g sono unif. lim. e lipschitz, allora $\exists$ proc. $(X_t^x)_{x\in\mathbb{R}^d}$, $\mathbb{P}$-q.c. cont. in (t,x) e t.c. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $(X_t^x)_{t\geq 0}$ risolve $e_x(f,g)$.

dim. siano $X = X^x$, $Y = Y^y$ sol. di $e_x(f,g)$, $e_y(f,g)$ (forti rispetto allo stesso BM).

ci serve p grande

$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X_t - Y_t|^p\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|x - y + \int_0^t (g(s,X) - g(s,Y))\,ds + \int_0^t (f(s,X) - f(s,Y))\,dB_s\right|^p\right]$

$(|a|+|b|+|c|)^p \leq C(p)(|a|^p + |b|^p + |c|^p)$ $C(p) = 3^{p-1}$

$\leq c(p)\left(|x-y|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t (g(s,X) - g(s,Y))\,ds\right|^p + \left|\int_0^t f(s,X) - f(s,Y)\,dB_s\right|^p\right]\right).$

$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t (g(s,X) - g(s,Y))\,ds\right|^p\right] \leq T^{p-1}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T |g(s,X) - g(s,Y)|^p\,ds\right] \leq$

Hölder con esponenti coniugati $\frac{p}{p-1}$ e p

$\leq T^{p-1}K^p \int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}|X_r - Y_r|^p\right] ds.$ Ora:

BDG, arrestando a tempo T — come sopra

$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t f(s,X) - f(s,Y)\,dB_s\right|^p\right] \leq c(p)\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |f(s,X) - f(s,Y)|^2\,ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] \leq$

$\leq c(p)\,T^{\frac{p}{2}-1}K^p \int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq s}|X_r - X_r|^p\right] ds.$ Allora: $\Phi_t := \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}|X_s - Y_s|^p\right] \leq$

$\forall\, s\leq t\leq T$

$\leq c(p)|x-y|^p + c(p)\,T^{p-1}K^p \int_0^t \Phi_s\,ds + \tilde{c}(p)\,T^{\frac{p}{2}-1}K^p \int_0^t \Phi_s\,ds$, T fissato; inoltre

X, Y risolvono $e_x(f,g)$ e $e_y(f,g)$ allora scritto $|X-Y|$ da loro e maggioro — sono lim. — c, c' costanti giuste

f, g limitate $\Rightarrow \Phi_t < +\infty$. Gronwall $\Rightarrow \Phi_t \leq c|x-y|^p e^{c't} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^x - X_t^y|^p\right] \leq$

$\leq c(p,K,T)\,|x-y|^p$. Per continuità di Kolmogorov (non sui tempi ma sui dati iniziali), $\exists$ modificazione cont. (di $X^x : \Omega \to C([0,1];\mathbb{R}^d)$) (in x e t) perché $p > d$. (Kolmogorov d-dimensionale ha esponente $d+\beta$ con $\beta>0$ dunque $p>d$)

Ex.: se $x_n \to x$ e $X^{x_n} \longrightarrow X$ unif. in t ($\mathbb{E}[\sup|X-X^n|^p] \longrightarrow 0$), allora X soddisfa $e_x(f,g)$. □

Dato $(X_t^x)_{x\in\mathbb{R}^d,\ t\geq 0}$ (la versione continua), definiamo $\forall x\in\mathbb{R}^d$ $\forall t\geq 0$ $\forall h\in C_0(\mathbb{R}^d)$ (infinitesima) $\boxed{P_t\,h(x) := \mathbb{E}[h(X_t^x)]}$ (è un semigruppo)

Oss.: $(t,x) \longmapsto P_t h(x)$ è cont., lim.. Mentre $h \longmapsto P_t h$ è continua (ovvio), lineare (ovvio), limitata:

Vediamo che P_t è una funzione da C_0 a C_0

$$|\mathbb{E}[h(X_t^x)]| \leq \mathbb{E}[|h(X_t^x)\mathbb{1}_{\{|X_t^x|>R\}}|] + \mathbb{E}[|h(X_t^x)\mathbb{1}_{\{|X_t^x|\leq R\}}|] \leq$$

(il sup maggiora $h\mathbb{1}$) (il sup $\geq h$)

$$\leq \sup_{|z|>R}|h(z)| + \sup_{|z|\leq R}|h(z)|\,\mathbb{P}(|X_t^x|\leq R).$$

($\leq \varepsilon$ per $R>>0$)

Se $|x|>2R$, $\{|X_t^x|\leq R\} \subseteq \left\{\left|\int_0^t g(s,X^x)\,ds + \int_0^t f(s,X^x)\,dB_s\right| > R\right\} \Rightarrow$ ($|x-y|\geq|x|-|y|$ con X_t e x)

$$\mathbb{P}(|X_t^x|\leq R) \leq \mathbb{P}\left(\left|\int_0^t g(s,X^x)\,ds\right| > \frac{R}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\int_0^t f(s,X^x)\,dB_s\right| > \frac{R}{2}\right).$$

$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t g(s,X^x)\,ds\right| > \frac{R}{2}\right) = 0$ se $\frac{R}{2} > t\sup_{0\leq s\leq t} g(s,X^x)$. Allora:

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t f(s,X^x)\,dB_s\right| > \frac{R}{2}\right) \overset{\text{Chebychev}}{\leq} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s,X^x)\,dB_s\right|^2\right] \Big/ \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Isometria di Ito

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f(s,X^x)\,dB_s\right|^2\right] = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^k \int_0^t f_j^i(s,X^x)\,dB_s^j\right|^2\right] = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\left\langle \sum_{j=1}^d f_j^i\cdot B^j\right\rangle_t\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \mathbb{E}\left[\left(\left(f_j^i\right)_t^2\cdot\langle B\rangle\right)_t\right] \leq C(f,t,d,K).$$

($= \int_0^t \mathbb{E}[\sum\sum(f_j^i)^2]\,ds$ ← f limitata)

Dunque, $|\mathbb{E}[h(X_t^x)]| \leq$

$$\leq \sup_{|z|>R}|h(z)| + \|h\|_{C_0}\frac{C}{R^2}.$$

Per h,t fissati, $\lim_{|x|\to+\infty}|P_t\,h(x)| = 0$ ($\Rightarrow P_t : C_0(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$)

(possa mettere limsup) $\leq \inf_{R>0}\left(\sup_{|z|>R}|h(z)| + \|h\|_{C_0}\frac{C}{R^2}\right)$

Domanda: vale Chapman–Kolmogorov? $P_{t+s}\,h(x) = P_t(P_s h)(x)$?

Se $f(s,\omega) = \tilde{f}(\omega_s)$ e $g(s,\omega) = \tilde{g}(\omega_s)$ sì.

Oss.: $YW \Rightarrow$ unicità in legge $\Rightarrow$ se Z è v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$ indi. da B allora, dato X^x, il proc. $(X_t^Z)_{t\geq 0}$ risolve $e(f,g)$ con dato iniziale Z.

vedere fine (1)

Oss.: dato X^x, il proc. $(X_{t+s}^x)_{t\geq 0}$ risolve $e(f,g)$ con BM $(B_{t+s}-B_s)_{t\geq 0}$ e dato iniziale X_s^x (cont.; attenzione a f, B) $\Rightarrow$ la legge di $(X_{t+s}^x)_{t\geq 0}$ è la stessa di $(X_t^Z)_{t\geq 0}$ dove Z è v.a. ind. da B con legge uguale a X_s^x $\Rightarrow P_{t+s}\,h(x) = \mathbb{E}[h(X_{t+s}^x)] =$

$$= \mathbb{E}[h(X_t^Z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[h(X_t^Z)\,|\,Z]] \overset{(1)}{=} \mathbb{E}[P_t\,h(Z)] = \mathbb{E}[(P_t h)(X_s^x)] = P_s(P_t h)(x).$$

($\mathbb{E}[h(X_t^Z)\,|\,Z=z] = \mathbb{E}[h(X_t^z)] = P_t\,h(z)$)

Teorema (equazioni lineari): siano H, X semimart. cont.. La sol. di $Y_t = H_t + \int_0^t Y_s\,dX_s$ ($dY = dH + Y\,dX$) si rappresenta con $Y_t = \mathcal{E}(X)_t\left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1}(dH_s - d\langle H,X\rangle_s)\right)$.

dim. conti (a integrare, non a derivare). □ ← CONTI ETTA PAG. 135

Es.: O.U. $dV_t = -\beta V_t\, dt + \sigma\, dB_t$, $V_0 = v$ $\left(\beta \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ d = 1\right)$. $H_t = \sigma B_t + v$, $X_t = -\beta t$

$\Rightarrow$ la sol. é $V_t = e^{-\beta t}\left(v + \int_0^t e^{\beta s}\sigma\, dB_s\right)$. É un processo gaussiano perché f.deter. + $\int$ f.deter. dB
esercizio
é processo gaussiano e $\mathbb{E}[V_t] = e^{-\beta t} v$, $Cov(V_t, V_s) = \frac{\sigma^2 e^{-\beta(t-s)}}{2\beta}\left(e^{2\beta(t\wedge s)} - 1\right)$. É anche di Feller
quella del teorema
Es.: BM geometrico. $dX = \mu X\, dt + \sigma X\, dB$, $X_0 = x$; $\mu, \sigma > 0$. $\left(H_t = 0\ \forall t,\ H_0 = x,\ X = \mu t + \sigma B\right)$. La sol. é $X_t = x \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$.

Ex.: $(d=1)$ $dX = -\nabla \Phi(X)\, dt + \sqrt{\frac{2}{\beta}}\, dW_t$, $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $\Phi(x) \xrightarrow{|x| \to +\infty} +\infty$, W_t BM standard. Assumiamo che X_t abbia densitá ρ_t rispetto a Lebesgue $\forall t$.

1. Scrivere una PDE soddisfatta da ρ_t $\left(\frac{\partial}{\partial t}\rho_t = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\Phi\, \rho)\right)$; o qualcosa del genere
2. trovare $\rho(x) = \rho_t(x)$ che risolve, dedurre che $X_0 \sim \rho(x) \Rightarrow X_t \sim \rho(x)\ \forall t$.

Teorema di Girsanov

$(\Omega, \mathcal{F})$, $(\mathcal{F}^\circ_t)_{t \geq 0}$ filtrazione continua a dx $(\mathcal{F} = \mathcal{F}^\circ_\infty)$. Date P, Q prob. su $\mathcal{F}$. Se $Q \ll \mathbb{P}$ e X é $\mathcal{F}^\circ_t - \mathbb{P}$ semimart., allora X é $\mathcal{F}^\circ_t - Q$ semimart.?

Notazione: $Q \triangleleft \mathbb{P} \Leftrightarrow \forall t \geq 0\ Q_{|\mathcal{F}^\circ_t} \ll \mathbb{P}_{|\mathcal{F}^\circ_t} \Leftrightarrow \exists (D_t)_{t \geq 0}$, $D_t = \frac{dQ_{|\mathcal{F}^\circ_t}}{d\mathbb{P}_{|\mathcal{F}^\circ_t}}$; é una mart. ≥ 0 e $\mathbb{E}_P[D_t] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_\Omega] = 1$.

Prop.: Sono equivalenti: (1) $Q \ll \mathbb{P}$ (2) $(D_t)_{t \geq 0}$ é unif. int.; (3) si puó estendere $Q_{|\mathcal{F}^\circ_t}$ a una misura $\tilde{Q}_{|\mathcal{F}^{\mathbb{P}}_t} \ll \mathbb{P}_{|\mathcal{F}^{\mathbb{P}}_t}$ (abbiamo aggiunto i $\mathbb{P}$-trasc. di $\mathcal{F}$.)

dim. (1)$\to$(2): $D_\infty = \frac{dQ_{|\mathcal{F}^\circ_\infty}}{dP_{|\mathcal{F}^\circ_\infty}} \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ e chiude la mart. $(D_t)_{t \geq 0} \Rightarrow (D_t)_{t \geq 0}$ unif. int.

(2)$\to$(1): per il teorema sulle mart. unif. int. (a tempo continuo) $\exists D_\infty = \lim_{t \to +\infty} D_t$, convergenza in $L^1 \Rightarrow \mathbb{E}_P[D_\infty] = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}_P[D_t] = 1$. Se $A \in \mathcal{F}^\circ_t$, $\mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_\infty] = \lim_{s \to +\infty} \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_s] = \lim_{s \to \infty} Q_{|\mathcal{F}^\circ_s}(A) = Q(A)$. $\forall A \in \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}^\circ_t$, $\mathbb{E}_{D_\infty P}[\mathbb{1}_A] = Q(A)$. Il criterio di coincidenza di misure ci dice che $D_\infty P = Q \Rightarrow D_\infty = \frac{dQ}{dP}$. ((3): no) $\square$

$Q \triangleleft P$, $D_t = \frac{dQ_{|\mathcal{F}^\circ_t}}{dP_{|\mathcal{F}^\circ_t}}$ cadlag.

Prop.: $(D_t)_{t \geq 0}$ é strettamente positiva Q-q.c., ossia posto $T = \inf\{t \geq 0 \mid D_t = 0 \text{ o } D_{t^-} = 0\}$ si ha $Q(T < +\infty) = 0$.

dim.: dato $n \geq 1$, $T_n = \inf\{t \geq 0 \mid D_t \leq \frac{1}{n}\}$ sono t.d.a., $T_n \leq T$. T pure é t.d.a.. Dato

$q \in \mathbb{Q}^+$, $T+q$ é t.d.a. e $T+q \geq T_n$. $\mathbb{E}\left[D_{T_n+q} \mathbb{1}_{\underbrace{\{T_n<+\infty\}}_{\in \mathcal{F}^\circ_{T_n}}}\right] \overset{(D_t)_{t\geq 0} \text{ mart.}}{=} \mathbb{E}\left[D_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n<+\infty\}}\right] \leq \frac{1}{n}$.

Se $n \uparrow +\infty$, nell'evento $\{T<+\infty\}$ $\mathbb{E}_P\left[D_{(T+q)^-} \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}\right] = 0 \Rightarrow D_{(T+q)^-} = 0$ P-q.c. $\forall q \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow D_s = 0$ se $s > T$. Sappiamo che $\mathbb{1}_{\underbrace{\{T<s\}}_{\in \mathcal{F}^\circ_s}} D_s = 0$ P-q.c. $\forall s$.

$0 = \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{\{T<s\}} D_s\right] = Q(T<s) \Rightarrow Q(T<+\infty) = \sup_{s>0} Q(T<s) = 0$. $\square$

<u>Prop.</u>: se $Q \lhd P$ e T é t.d.a. allora D_T e' la densità di $Q_{|\mathcal{F}^\circ_T \cap \{T<+\infty\}}$ rispetto a $P_{|\mathcal{F}^\circ_T \cap \{T<+\infty\}}$.

<u>Oss.</u>: se $Q << P$ vale che $D_T = \dfrac{dQ_{|\mathcal{F}^\circ_T}}{dP_{|\mathcal{F}^\circ_T}}$.

<u>dim.</u> $A \in \mathcal{F}^\circ_T$, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}^\circ_t$. $\quad Q(A \cap \{T \leq t\}) = \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{\underbrace{A \cap \{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}^\circ_{t\wedge T}}} D_t\right] =$

$= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{A \cap \{T \leq t\}} D_{t \wedge T}\right]$. Se $t \uparrow +\infty$, $\{T \leq t\} \uparrow \{T<+\infty\}$. BL $\Rightarrow$ LHS $\uparrow Q(A \cap \{T<+\infty\})$

e RHS $= \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{A \cap \{T \leq t\}} D_T\right] \uparrow \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_{A \cap \{T<+\infty\}} D_T\right]$. $\square$

Se $Q \lhd P$ e $X = X_0 + M + A$. Sotto P $\mathrm{Var}_1(A) < +\infty$ $\forall t \Rightarrow$ sotto Q $\mathrm{Var}_1(A) < +\infty$.

Sotto P $\langle M \rangle_t = \lim_{|\Delta^n| \to 0} \sum_{i=1}^{k} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|^2 + |M_t - M_{t_k}|^2$ in prob. $\Rightarrow$ anche sotto Q.

<u>Ex.</u>: $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Q << P$, allora $X_n \xrightarrow{Q} X$.

<u>Oss.</u>: se M, N mart. loc. cont. sotto P, allora $\langle M, N \rangle$ e' la stessa se calcolata sotto Q.

<u>Teorema</u> (di Girsanov): se $Q \lhd P$ e $(D_t)_{t\geq 0}$ e' cont., data una $(\mathcal{F}^\circ_t, P)$-mart. loc. cont. M allora il processo $\tilde{M} = M - D^{-1} \cdot \langle D, M \rangle$ e' una $(\mathcal{F}^\circ_t, Q)$-mart. loc. cont.. Inoltre, $\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle = \langle M, N \rangle = \langle \tilde{M}, N \rangle$.

<u>dim.</u>: 1 un processo cont. e adattato $(X_t)_{t\geq 0}$ e' una Q-mart. (loc.) se $(X_t D_t)_{t\geq 0}$ e' una P-mart. (loc.).

2 Itô su $\tilde{M}_t D_t$: $d(\tilde{M} D) = \tilde{M}\, dD + D\, d\tilde{M} + d\langle D, \tilde{M} \rangle$. Per costruzione,

$d\tilde{M} = dM - D^{-1} d\langle D, M \rangle \Rightarrow d(\tilde{M} D) = \tilde{M}\, dD + D\, dM - d\langle D, M \rangle + d\langle D, M \rangle$.

1: $(X_t D_t)_{t\geq 0}$ mart. loc. e T t.d.a. t.c. $(XD)^T$ e' mart. sotto P.

$(XD)^T_t = X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}$. Se $s<t$, $A \in \mathcal{F}^\circ_s$, $\mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_A X^T_t\right] \overset{?}{=} \mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_A X^T_s\right]$.

$\mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_A X^T_t \dfrac{dQ_{|\mathcal{F}^\circ_{T\wedge t}}}{dP_{|\mathcal{F}^\circ_{T\wedge t}}}\right] = \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_A X^T_t D_{T\wedge t}\right] = \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_A (XD)^T_t\right] \overset{XD\ P\text{-mart.}}{=} \mathbb{E}_P\left[\mathbb{1}_A (XD)^T_s\right] =$ RHS.

Se $T_n \uparrow +\infty$ P-q.c., $T_n \wedge n \uparrow +\infty$ P-q.c. $\Rightarrow Q$-q.c..

(2) $\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t D_s^{-1}\, d\langle D, M\rangle_s$. Definiamo i t.d.a.: $T_n = \inf\{t \mid D_t \le \frac{1}{n}\} \Rightarrow$

$\tilde{M}_{T_n \wedge t} = M_{T_n \wedge t} - \int_0^{T_n} D_s^{-1}\, d\langle D, M\rangle_s$ é ben def.. Possiamo usare Itô su $\tilde{M}^{T_n} D^{T_n}$:

$\tilde{M}_t^{T_n} D_t^{T_n} = \tilde{M}_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \tilde{M}_s\, dD_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s\, d\tilde{M}_s + \langle M, D\rangle_{T_n \wedge t} =$

$= \tilde{M}_0 D_0 + \int_0^{T_n \wedge t} \tilde{M}_s\, dD_s + \int_0^{T_n \wedge t} D_s\, dM_s$. Quindi $(\tilde{M} D)^{T_n}$ é mart. (loc.) cont. su P.

$T_n \uparrow +\infty$ P-q.c.? Non é detto. Q-q.c. sí e ci basta. □

Def. (coppia di Girsanov): una coppia P, Q é detta di Girsanov se $P_{|\mathcal{F}^0_\infty} \sim Q_{\mathcal{F}^0_\infty}$ e D é cont..

$M \longmapsto \tilde{M} = G_P^Q(M)$ é detta trasformata di Girsanov da P a Q.

Prop.: Se H é cont., adattato e in $L^2_{loc}(M, P)$, allora H é in $L^2_{loc}(\tilde{M}, Q)$ $(Q \ll P)$ e

$(\widetilde{H \cdot M}) = H \cdot \tilde{M}$.

dim. $\widetilde{H \cdot M} = H \cdot M - D^{-1} \cdot \langle D, H \cdot M\rangle = H \cdot M - D^{-1} \cdot (H \cdot \langle D, M\rangle) = H \cdot M - H \cdot (D^{-1} \cdot \langle D, M\rangle) =$

$= H \cdot (M - D^{-1} \cdot \langle D, M\rangle) = H \cdot \tilde{M}$. □

$D_t = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)$?

Prop.: Se $(D_t)_{t\ge0}$ é mart. loc. cont. strett. positiva allora $\exists!\, (L_t)_{t\ge0}$ mart. loc. t.c.

$D_t = D_0\, \mathcal{E}(L)_t$ $\forall t \ge 0$. Inoltre, $(L_t)_{t\ge0}$ soddisfa $L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1}\, dD_s$.

dim. definiamo $L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1}\, dD_s$, mart. loc. usando i t.d.a. $T_n = \inf\{t \ge 0 \mid D_t \le \frac{1}{n}\}$.

Oss.: $D > 0$ P-q.c. $\Rightarrow T_n \uparrow +\infty$ P-q.c.. $\mathcal{E}(L)_t = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)$. $d\mathcal{E}(L)_t = \mathcal{E}(L)_t\, dL_t$.

$dD_t = D_t D_t^{-1}\, dD_t = D_t\, dL_t$; si conclude per unicitá dell' SDE. □

Oss.: se $t \ge 0$ $Q_{|\mathcal{F}^0_t} \sim P_{|\mathcal{F}^0_t}$, allora $D > 0$ P-q.c.

Teo (Girsanov): supponiamo che $Q_{|\mathcal{F}^0_t} = \mathcal{E}(L)_t\, P_{|\mathcal{F}^0_t}$ $\forall t$, $(L_t)_{t\ge0}$ mart. loc. cont.. Allora

$M \mapsto \tilde{M} = M - \langle L, M\rangle$ manda P-mart. loc. in Q-mart. loc..

dim. "$d(D^{-1} \cdot \langle D, M\rangle) = D^{-1}\, d\langle D, M\rangle = D^{-1}\, dD\, dM = dL\, dM = d\langle L, M\rangle$".

$D^{-1} \cdot \langle D, M\rangle = \langle D^{-1} \cdot D, M\rangle = \langle L, M\rangle$. □

Cor.: se $Q \ll P$ e $(B_t)_{t\ge0}$ é P-$\mathcal{F}^0_t$ BM (e $(D_t)_{t\ge0}$ é cont.) allora

$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t D_s^{-1}\, d\langle D, B\rangle_s$ é Q-$\mathcal{F}^0_t$ BM.

dim. sappiamo che $\tilde{B}$ é mart. loc. cont. e $\langle \tilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t = 0$ e $\tilde{B}_0 = 0$. Per Levy $\Rightarrow$

$\tilde{B}$ è Q-BM. $\square$

Oss.: se $D_t = D_0\, \mathcal{E}(L)_t$ e $L_t = \int_0^t H_s\, dB_s$, $H \in L^2_{loc}(B)$, allora $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s\, ds$.

Problema: di solito, L è data (mart. loc. cont.) e $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\geq 0}$ è, a priori, solo una mart. loc. cont. e positiva. Sotto quali cond. è mart.?

Oss.: $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\geq 0}$ è una supermart.. In particolare, è mart. $\iff \mathbb{E}_P[\mathcal{E}(L)_t] = 1 \ \forall t\geq 0$.

Se $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\geq 0}$ è mart., è ben def. $Q_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t\, P_{|\mathcal{F}_t^0} \Rightarrow Q \ll P$.

Prop. (Kazamaki): se $(L_t)_{t\geq 0}$ è mart. loc. cont. e $\left(\exp\left(\frac{1}{2}L_t\right)\right)_{t\geq 0}$ è unif. int. allora $\mathcal{E}(L)$ è mart. unif. int..

dim. sia $a \in (0,1)$ e scriviamo $\mathcal{E}(aL) = \exp\left(aL_t - \frac{a^2}{2}\langle L\rangle_t\right) = \exp\left((a-a^2)L_t\right)\exp\left(a^2\left(L_t - \frac{\langle L\rangle_t}{2}\right)\right)$.

Sia $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty^0$. Allora $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma\, \mathcal{E}(aL)_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_\Gamma \exp\left((a-a^2)L_t\right)\right)\left(\mathbb{1}_\Gamma \exp\left(a^2\left(L_t - \frac{\langle L\rangle_t}{2}\right)\right)\right)\right] \leq$

Hölder $p = \frac{1}{a^2}$

$\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma \exp\left(\frac{a}{1+a}L_t\right)\right]^{1-a^2} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma\, \mathcal{E}(L)_t\right]^{a^2} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma\, \mathcal{E}(aL)_t\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma \exp\left(\frac{a}{1+a}L_t\right)\right]^{1-a^2}$

$\frac{a}{1+a} \leq \frac{1}{2}$, Hölder con $p = \frac{1+a}{2a}$

$\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma \exp\left(L_t/2\right)\right]^{(1-a^2)\frac{2a}{1+a}}$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.c. $P(\Gamma) < \delta \Rightarrow \sup_t \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma \exp\left(\frac{L_t}{2}\right)\right] \leq \varepsilon \Rightarrow \forall\, 0 < a < 1\ (\mathcal{E}(aL)_t)_{t\geq 0}$ è unif.

si devono usare i tempi di arresto (vedi libro)

int. $\Rightarrow$ è mart.. Poniamo $\Gamma = \Omega$:

$1 = \mathbb{E}[\mathcal{E}(aL)_t] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{a}{1+a}L_t\right)\right]^{1-a^2} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t]^{a^2} \overset{a\uparrow 1}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \geq 1 \Rightarrow$ è mart..

bisogna prima passare al lim. dentro, vedi libro

Per $t \to +\infty$, $1 \leq \left(\sup_t \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_t}{2}\right)\right]\right)^{\frac{(1-a^2)2a}{1+a}} \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t]^{a^2}$. Per $a \to 1 \Rightarrow$

$1 \leq \liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq 1$.

Ex: X supermart. pos. e $\mathbb{E}\left[\lim_{t\to+\infty} X_t\right] \geq \mathbb{E}[X_0] \Rightarrow (X_t)_{t\geq 0}$ unif. int.. $\square$

Teorema (Novikov): se $(L_t)_{t\geq 0}$ mart. loc. cont. $L_0 = 0$ e $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty\right)\right] < +\infty$ allora $\mathcal{E}(L)$ è mart. unif. int..

dim: vogliamo $(\exp(L_t/2))_{t\geq 0}$ unif. int.. $\forall p \geq 0\ \exists c_p > 0$ t.c. $|x|^p \leq c_p e^{|x|/2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{E}\left[\langle L\rangle_\infty^p\right] \leq c_p \mathbb{E}\left[e^{\langle L\rangle_\infty/2}\right]$. Per $p=1 \Rightarrow \mathbb{E}[\langle L\rangle_\infty] < +\infty \Rightarrow L \in H_0^2$.

BDG $\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|L_t|^{2p}\right] \leq c_p\, \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\langle L\rangle_\infty}{2}\right)\right]$. $L \in H_0^2 \Rightarrow L_t = \mathbb{E}[L_\infty | \mathcal{F}_t] \Rightarrow$

$0 \leq \exp\left(\frac{L_t}{2}\right) = \exp\left(\frac{\mathbb{E}[L_\infty|\mathcal{F}_t]}{2}\right) \overset{\text{Jenson}}{\leq} \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_\infty}{2}\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]$. Ci basta $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_\infty}{2}\right)\right] < +\infty$.

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_t}{2}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{L_t}{2} - a\langle L\rangle_t + a\langle L\rangle_t\right)\right] \overset{\text{CS}}{\leq} \mathbb{E}\left[\exp\left(L_t - 2a\langle L\rangle_t\right)\right]^{\frac{1}{2}}$.

$\cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(2a\langle L\rangle_t\right)\right]^{\frac{1}{2}} \overset{a=\frac{1}{4}}{=} \mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_t\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\exp\left(\langle L\rangle_t/2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\langle L\rangle_\infty/2\right)\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty.$

Mandiamo $t \to +\infty$ e usiamo Fatou. $\square$

Es.: B BM, $H \in L^2_{loc}(B)$ t.c. $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} H_s^2\, ds\right)\right] < +\infty \Rightarrow \mathcal{E}(H\cdot B)$ é mart. (unif. int.).

Es.: $H_s \equiv 1 \Rightarrow \mathcal{E}((H\cdot B)_t) = \mathcal{E}(B_t) = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$ non é unif. int..

Date f, g, $f: [0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r}$, $g: [0,+\infty]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $e_x(f,g) = \begin{cases} dX_t = g(t,X_t)dt + f(t,X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$

sia $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, B, X)$ una sol.. Sia $h: [0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, c'é un collegamento tra una sol. di $e_x(f,g)$ e una sol. di $e_x(f, g+fh)$. Per semplicitá $d=r=1$.

Poniamo $L_t = \int_0^t h(s,X_s)\, dB_s$; se $\mathcal{E}(L)$ é mart. allora sotto $Q = \mathcal{E}(L)_\infty P$,

$\tilde{B}_t = B_t - \langle L, B\rangle_t^0 = B_t - \int_0^t h(s,X_s)\, ds$ é BM.

Dico che $(\Omega, \mathcal{F}, Q, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \tilde{B}, X)$ é sol. di $e_x(f, g+fh)$:

$$dX_t = g(t,X_t)dt + f(t,X_t)dB_t = g(t,X_t)dt + f(t,X_t)\, d(\tilde{B} + \langle L,B\rangle)_t =$$
$$= \left(g(t,X_t) + h(t,X_t)f(t,X_t)\right)dt + f(t,X_t)\, d\tilde{B}_t.$$

Per essere formali si usa la forma integrale e si applicano le conseguenze di Girsanov.

Dobbiamo assicurarci $\mathcal{E}(L)$ mart.. Per Novikov ci basta $\mathbb{E}_P\left[\exp\left(\langle L\rangle_\infty/2\right)\right] =$

$= \mathbb{E}_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h^2(s,X_s)\, ds\right)\right] < +\infty$ ma quest'ultimo é $< +\infty$ $\forall t$ se $|h| \leq C$ cost.

Es.: $X_t = B_t$ BM soddisfa $e_0(1,0)$. Se $h: \mathbb{R}$ é borel e lim., $\exists$ sol. di $dX_t =$

$= h(X_t)dt + dB_t$.

Oss. se $e_x(f,g)$ ha unicitá in legge allora $\forall h$ lim. $e_x(f, g+fh)$ " " ".

Nell' esempio c'é unicitá in legge.