

per proprio il flusso $\Phi_s(p)$ infatti: $\Phi_s(p) = \gamma_p(s)$ ma $\gamma'_p(s) = X(\gamma_p(s)) = \frac{\partial}{\partial x^i}$

Allora $\frac{\partial Y}{\partial x^i} = 0$ dunque $\psi_t(\overline{p+s}) = \psi_t(p) + s e_i \Rightarrow$ commutano. \square

(37)

Teorema (raddrizzamento simultaneo): $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$. $\exists \varphi: U_p \cong \mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi_*(X_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$

\Leftrightarrow ① $X_1(p), \dots, X_k(p) \in T_p M$ linearmente indipendenti.

② X_i commutano loc. in p ($\exists U(p)$ t.c. $[X_i]_U, [X_j]_U = 0$).

dim. \Rightarrow seguono subito ① e ②

\Leftarrow Usando ① visto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $X_i(o) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $p=o$. (in un punto posso sempre farlo). Siano

Φ_t il flusso di M . Definiamo: $\psi(x, \dots, x^n) = \Phi_{x_K}^K \circ \dots \circ \Phi_{x_1}^1(o, \dots, o, x^{k+1}, \dots, x^n) (x_1, \dots, x_k)$

abbastanza piccoli). Ora $d\psi_o = id$ (per $i \geq k+1$, $\psi(o, \dots, o, x^{k+1}, \dots, x^n) = (o, \dots, o, x^{k+1}, \dots, x^n)$)

$\Rightarrow d\psi_o(e_i) = e_i$ e per $i \leq k$ $\psi(o, \dots, o, t_i o, \dots, o) = \Phi_o^k \circ \dots \circ \Phi_o^{i+1} \circ \Phi_t^i \circ \dots \circ \Phi_o^{i-1} \circ \Phi_o^1(o, \dots, o)$

$= \Phi_t^i(o, \dots, o) \Rightarrow d\psi_o(e_i) = X^i(o) = e_i$. Allora f diffeo locale. Fin qui non serve commutare.

Siccome $[X_i, X_j] = 0 \Rightarrow \Phi^i \circ \Phi^j$ commutano allora posso scrivere $\psi = \Phi_x^i \circ \dots \circ \Phi_x^1(o, \dots, o, x^{k+1}, \dots, x^n)$

?

perciò ψ manda $x+te_i$ in curva integrata per $X_i \Rightarrow$ manda $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in X^i . \square

Gruppi di Lie

Def. (morfismo tra gruppi di Lie): un morfismo tra gruppi di Lie è un omomorfismo liscio tra gruppi di Lie.

Def. (algebra di Lie): $\mathfrak{g} = T_e G$ è l'algebra di Lie associata al gruppo di Lie G .

cioè $X(L_g(h)) = (dL_g)_h(X(h))$

Def. (invariante a sx): $X \in \mathcal{X}(G)$ è invariante a sx se $\forall g \in G \quad X \sim_{L_g} X$. ($L_g: x \rightarrow gx$ diffeo).

Oss. X è invariante a sx $\Rightarrow \forall g \in G \quad X(g) = (dL_g)_e(X(e))$. (mi basta controllare sull'identità),

\Rightarrow ovvio (pronto $g=e$) $\Leftarrow X(L_g(h)) = X(gh) = (dL_{gh})_e(X(e)) = (dL_g)_h(dL_h)_e(X(e)) =$

$$= (dL_g)_h(X(h)).$$

v è proprio $X(v)$
 $\Rightarrow v$ inv. a sx

Oss. C'è una corrispondenza biunivoca: $\mathfrak{g} \longleftrightarrow \{ \text{campi invarianti a sx} \} \subseteq \mathcal{X}(G)$

con $[,]$

Prop.: $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{X}(G)$ è una sottoalgebra. (in particolare ha una struttura di algebra).

$v \mapsto X + v \quad X(g) = d(L_g)_e(v)$
 $X(e) \hookrightarrow X$

dim. Bisogna vedere che se X, Y sono inv. a sx $\Rightarrow [X, Y]$ inv. a sx.

L_g è diffeo e per proposizione precedente il bracket commuta con diffeo $\Rightarrow (L_g)_*[X, Y] =$

$$= [L_g_* X, L_g_* Y] = [X, Y]. \quad \square$$

Prop.: $f: G \rightarrow H$ morfismo di gruppi di Lie. Allora $f_* = df_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ morfismo di algebre di Lie.

dim. Siano $v, w \in \mathfrak{g}$. Sia X, Y i campi invarianti a sx associati. Devo mostrare che $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$

Se dimostra che $X, f_* X$ sono f -correlati e $Y, f_* Y$ sono f -correlati ho finito perché allora $[X, Y] \sim_f [38]$

$[f_* X, f_* Y]$ cioè tesi.

$$\xrightarrow{\text{per uso più}} f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$$

Sono correlati poiché f è uno di gruppi: $d f_g (X(g)) \in d f_g ((d L_g)_e(v)) = d(f \circ L_g)_e(v) \stackrel{!}{=} d(L_{f(g)} f)(v)$

$\stackrel{!}{=} d(L_{f(g)})_e \circ d f_e(v) \stackrel{!}{=} X'(f(g))$. \square

$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\quad} & H \\ \downarrow & \nearrow f \circ L_g & \\ X_v: & & X_{v'}: \\ \text{campi inv. a scr.} & X_v(g) = d(L_g)_e(v) & X_{v'}(h) = d(L_h)_e(v') \\ & & \xrightarrow{n} d(L_h)_e(d f_e(v')) \end{array}$

Def.: Se $f: G \rightarrow H$ è un morfismo iniettivo e un'immersione, allora si dice che $f(G) \subset H$ è un sottogruppo di Lie di H .

Esempio: • $Q(n) \subset GL(n)$ è un sottogruppo di Lie.

• $H = S^1 \times S^1$ gruppo di Lie $\cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Ora $\mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T$ con $v \neq 0$. Ora f è composizione di immersioni \Rightarrow è immersione.

In particolare $f(\mathbb{R}) \subset T$ è sottoalgebra di Lie. Infatti se $v(x_0, y_0)$, ci sono due casi:

① $\frac{y_0}{x_0} \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ \Rightarrow f periodica $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{periodo}} T$ ($\text{l'immagine è sgr compatto} = S^1$)

② $\frac{y_0}{x_0} \notin \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ \Rightarrow f è iniettiva. L'immagine è un sgr non compatto di T .

Oss. $H \subset G$ sottogruppo di Lie, $H = \text{Im } f$, $f: T \rightarrow G$ immersione iniettiva. $f^*: T \rightarrow H$ iniettiva

$\Rightarrow K$ è in modo naturale una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} .

Oss. sottoalgebra di Lie di \mathbb{R}^2 sono i sottospazi punti, rette, tutto.

Foliazioni

Def. (K -varietà immersa): M varietà. Una K -varietà immersa in M è l'immagine di un'immersione iniettiva

$$N^K \hookrightarrow M.$$

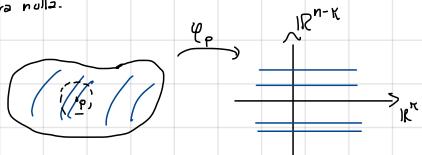
$$n+1$$

Def. (foliazione): una K -foliazione di una n -varietà M è una partizione $\mathcal{F} = \{\lambda_i\}_{i \in I}$ t.c. λ_i K -varietà immersa, dette

foglie, che sia localmente un prodotto, cioè $\forall p \in M \exists \varphi_p: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{n-K} = \mathbb{R}^n$ t.c. \forall foglia λ_i

$\varphi_p(U \cap \lambda_i)$ è unione di K -piani orizzontali. \leftarrow N.B. unione numerabile poiché la foglia è immersa di uno spazio di dim finita. Allora $|I| > \aleph_0$ poiché la foglia ha misura nulla.

Oss. In altre parole, vicino a p la carta φ trasforma la partizione



$\{\lambda_i\}_{i \in I}$ nella partizione di \mathbb{R}^n con K -spazi paralleli.

Esempio: ④ $M = M_1 \times M_2$, $\mathcal{F} = \{\varphi_p \times M_2 \mid p \in M_1\}$

⑤ $E \rightarrow M$ fibrazione, $\mathcal{F} = \{E_p \mid p \in M\}$. (usiamo proprio la banalizzazione $\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$)

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

③ Risolvere es. terzo precedente con gruppi di Lie.

39

Def (foliazioni, alternativa): una κ -foliazione in Π è un atlante $A = \{q_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^\kappa \times \mathbb{R}^{n-\kappa}\}$ t.c. le funzioni di transizione (φ_{ij}) sono localmente del tipo $\varphi_{ij}(x, y) = (\varphi_{ij}^1(x, y), \underbrace{\varphi_{ij}^2(y)}_{\text{le ultime } n-\kappa \text{ coordinate dipendono solo dalle ultime } n-\kappa})$

Prop: le due def. di foliazione sono equivalenti.

dim. def 1 \Rightarrow def 2: considero come atlante proprio $\{q_p\}$. Allora $(\varphi_p)_{ij} : q_i(U_i \cap U_j) \rightarrow q_j(U_i \cap U_j)$, ora ma il numero di piani è infinito numerabile \Rightarrow scomponete completamente $\mathbb{R}^\kappa \times \mathbb{R}^{n-\kappa} \Rightarrow$ le componenti connesse devono essere $\mathbb{R}^\kappa \times \{p\}$ c'è quindi?

Distribuzioni

Def. (κ -distribuzione): una κ -distribuzione D in Π è un κ -sottofibroto di $T\Pi$, cioè $\forall p \in \Pi$ $D_p \subseteq T_p \Pi$ è un κ -sottospazio.

N.B. ogni foliazione \mathcal{F} determina una distribuzione. Infatti $D_p = T_p F$, dove F è la foglia che contiene p .

Def. (distribuzione loc. costante): una distribuzione D è localmente costante se $\forall p \exists U(p) \xrightarrow{f_p} \mathbb{R}^\kappa \times \mathbb{R}^{n-\kappa}$ t.c. $\forall q \in U$ $d\varphi_q(D_q) = \mathbb{R}^\kappa \times \{0\}$.

Def. (distribuzione integrabile): una distribuzione D è integrabile se è ottenuta da \mathcal{F} foliazione.

Prop.: D è localmente costante \Leftrightarrow integrabile.

dim. basta usare la carta q_p che raddrizza \mathcal{F} .

\Rightarrow Le carte definiscono un atlante di una foliazione come nella def. 2: γ corra in $\lambda \cap U$ e $\gamma(\lambda) = p \Rightarrow$

$(\varphi \circ \gamma)'(\cdot) \in \mathbb{R}^\kappa \times \{0\} \Rightarrow$ la seconda componente φ_{ij} non dipende da x .

Def. (distribuzione involutiva): D distribuzione è involutiva se $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\Pi)$ tangenti a D cioè $X(p) \in D_p$,

$Y(p) \in D_p$, $[X, Y]$ è tangente. (un campo vettoriale X è tangente a D se $\forall p X(p) \in D_p$).

Esempio non involutivo: $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$, $D_p = \text{Span}(X(p), Y(p))$, $[X, Y] = X \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) - Y \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \notin D$

Teorema (Grobénius): D è integrabile \Leftrightarrow è involutiva.

dim. Vediamo che D è loc. costante \Leftrightarrow involutiva.

\Rightarrow Localmente, $D_p = \mathbb{R}^\kappa \times \{0\}$, $\Pi = \mathbb{R}^\kappa \times \mathbb{R}^{n-\kappa} \Rightarrow$ devo dire che se X, Y sono orizzontali, anche $[X, Y]$

$$b.c.: [x, y]^i = x^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} - y^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0 \text{ poiché } x^i = y^i = 0. \forall i, j.$$

ne addirizzo uno

(40)

$\downarrow \varphi_*(D_0)$

\Leftrightarrow Dato $p \in \Pi$, prendo una carta qualsiasi $\varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e posso supporre che $\varphi_* D_0 = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (orizzontale in \mathbb{R}^n). Viamo $\Rightarrow 0$, $D(x) \oplus \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$: prendo come campi $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}$ e ottengo X_1, \dots, X_k dove

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^n X_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{frame locale per } D(x). \text{ Ora: } [X_i, X_j]^\theta = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=k+1}^n X_l^i \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{l=k+1}^n X_l^j \frac{\partial}{\partial x^l} \right]^\theta =$$

corr. nella nuova base
do X_l^i f.s. 0

$$= 0 \quad \forall i, j. \text{ Allora } [X_i, X_j] \in W, \text{ ma per hp sta anche } D(x) \Rightarrow = 0, \text{ cioè i campi commutano}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ carta t.c. } \varphi_*(X_i) = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \forall i=1, \dots, k \Rightarrow \varphi_*(D(x)) = \text{Span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\} \text{ orizzontale è loc costante.} \quad \square$$

Prop.: D distribuzione in Π ; X_1, \dots, X_k frame per D . D è involutiva $\Leftrightarrow [X_i, X_j]$ tangente a $D \quad \forall i, j$.

dim. \Rightarrow Siano X, Y tangente a D , $X = \sum_{i=1}^k f_i X_i$, $Y = \sum_{i=1}^k g_i X_i$ con $f_i, g_i \in C^\infty(\Pi)$:

$$[X, Y] = \sum_i \sum_j [f_i X_i, g_j X_j] \in \text{Span}(X_1, X_2, [X_i, X_j]). \quad \square$$

Corollario: Ogni 1-distribuzione è integrabile.

dim. Trovo un frame locale per D , cioè X campo mai nullo, ma $[X, X] = 0$. \square

Gruppi di Lie

Dato G gruppo di Lie, chiamiamo G^0 la componente连通的 contenente e .

Prop. $G^0 \triangleleft G$

dim.: $G^0 \triangleleft G$: dato $g, h \in G^0$, $gh = L_g(h)$ ma L_g è diffeo di G dunque permuta le c.c. e

dato che $h, e \in G^0 \Rightarrow L_g(h), L_g(e)$ stanno nella stessa c.c. ma $L_g(e) = g \in G^0 \Rightarrow gh \in G^0$.

$G^0 \triangleleft G$: $C_g = L_g^{-1} \circ R_g$ molt. a dx
coniugia, stesso ragionamento. \square

Teorema G gruppo di Lie. $\forall H \subset g$ sottogruppo $\exists! H \subset G$ connesso con algebra di Lie H .

dim. Esistenza: siano v_1, \dots, v_k base di H e estendiamo a X_1, \dots, X_k campi invarianti a sx.

Definisco D distribuzione su g : $D(g) = (dL_g)_e(h)$. Vogliamo dire che è involutiva. X_1, \dots, X_k è un

frame locale per D e, per la prop. vista prima, devo mostrare che $[X_i, X_j]$ è tangente a $D \quad \forall i, j$, ma è vero perché $[X_i, X_j]$ è estensione di $[v_i, v_j]$ poiché H è una sottogruppo. Per Frobenius \Rightarrow foliazione

$\mathcal{F} = \{F_i\}$ per g e sia H = foglia che contiene e . È una sottovarietà immersa per def. È un sottogruppo:

dati $g, h \in H$, $gh = L_g(h)$ e D è L_g -invariante $\Rightarrow L_g(\mathcal{F})$ è un'altra foliazione tangente allo stesso

D , ma D determina \mathcal{F} (ex.) $\Rightarrow L_g(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ è L_g -inv. cioè L_g permette le foglie $\Rightarrow L_g(h) \in$

$L_g(e) = g$ sono nella stessa foglia $\Rightarrow L_g(h) \in H$. Unicità non fatta. \square

61

Oss. $\mathcal{L} = \{H + \text{classi laterali}\}$

Oss. $\{\text{stgr. di Lie Connexi}\} \simeq \{\text{sottogruppo di Lie di } G\}$

Mappa esponenziale

Prop.: G gruppo di Lie e X campo invariante a sx. Allora X è completo.

dim. Sia Φ^X il flusso di X , $\forall g \in G$ c'è una linea integrale $\gamma_g: I_g \rightarrow G$ e è ottenuta moltiplicando a sx

$$\gamma_e \cdot \gamma_g = L_g \circ \gamma_e \quad \text{Dunque } I_g = I_e \simeq (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow I_g = \mathbb{R} \quad \forall g.$$

Def. (mappa esponenziale): Sia X come prima e $\phi_X: G \times \mathbb{R} \rightarrow G$ il suo flusso. La mappa esponenziale

$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ è definita come $\exp(X) = \phi_X(e, 1)$. La mappa è liscia poiché $\phi_X(e, t)$ dipende in

maniera liscia dai valori iniziali di X .

Prop.: La mappa $\gamma_X(t): \mathbb{R} \rightarrow G$ con $\gamma_X(t) = \exp(tX)$ è la curva integrale del campo invariante a sx X

con $\gamma_X(0) = e$. È un omomorfismo di gruppi di Lie.

dim. $\gamma_X(t) = \exp(tX) = \phi_{tX}(e, 1) = \phi_X(e, t)$ dunque γ_X è la curva integrale per X con $\gamma_X(0) = e$.

Dato che X è invariante a sx $\gamma_X(s)\gamma_X(t) = \gamma_X(s)(\gamma_X(t)) = \gamma_X(s+t) \Rightarrow$ omo. \square

Def. (sottogruppo a un parametro): un morfismo di gruppi di Lie $\mathbb{R} \rightarrow G$ è chiamato sottogruppo a un parametro

di G .

Prop.: Ogni sottogruppo a un parametro di G è una γ_X come prima per un certo $X \in \mathfrak{g}$.

dim. dato $f: \mathbb{R} \rightarrow G$, poniamo $X = f'_*(1)$. Dato che $f_* = (\gamma_X)_*$, abbiamo che $f = \gamma_X$ (due

omomorfismi $f, f': G \rightarrow H$ tra gruppi di Lie con G connesso che hanno stessa differenziale $f'_* = f'_* \Rightarrow f = f'$). \square

Oss.: Sia G un gruppo di Lie. $d\exp_0: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ è l'identità. In particolare \exp è un diffeo locale

in 0. \leftarrow come si dimostra?

Prop.: $\exp: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ è proprio $\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, quello classico \leftarrow dim?

Derivata di Lie

Non esiste un modo intrinseco (nella varietà) per derivare un campo rispetto a un vettore. (differenza sostanziale con

\mathbb{R}^n). Ha senso, però, derivare un campo rispetto a un altro campo. Vediamo come.

Oss. $f: M \rightarrow N$ diffeomorfismo induce isomorfismo $f_*: \tilde{\Gamma}_h^k M \rightarrow \tilde{\Gamma}_h^k N$.

Def. (derivata di Lie): Sia X un campo vettoriale su una varietà M e sia s un campo tensoriale di tipo (h, k) su M . La derivata di Lie $\mathcal{L}_X s$ è un nuovo campo tensoriale di tipo (h, k) , moralmente ottenuto

derivando s lungo X come segue. Sia Φ_t il flusso generato da X . $\forall p \in M \exists \varepsilon > 0$ suffic. piccolo t.c.

Φ_t è definito in un intorno di p e c'è un diff. locale in $p \quad \forall |t| < \varepsilon$. Dunque $(\Phi_t)_*(s)$ è un

altro campo tensoriale definito in un intorno di $\Phi_t(p)$, che varia in maniera liscia in t , e vogliamo

comparare s e $(\Phi_t)_*(s)$. Notiamo che $(\Phi_{-t})_*(s(\Phi_t(p)))$ è ben definito e vive in $\tilde{\Gamma}_h^k(T_p M)$

$\forall t$ suffic. piccolo e varia in maniera liscia in t e dunque ha senso;

$$(\mathcal{L}_X s)(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_{-t})_*(s(\Phi_t(p))) . \text{ Abbiamo dunque una mappa } \mathcal{L}_X: \Gamma(\tilde{\Gamma}_h^k(M)) \rightarrow \Gamma(\tilde{\Gamma}_h^k(M))$$

che deriva ogni campo tensoriale lungo X .

Oss. $\mathcal{L}_X s$ misura quanto campia s lungo X infatti segue subito che $\mathcal{L}_X s = 0 \Leftrightarrow s$ è invariante sotto Φ_t .

Oss. $\mathcal{L}_X s$ in p dipende dal comportamento locale di X vicino p e non solo dal vettore direzionale $X(p)$

(come, invece, fa la derivata direzionale). Per questo dovremo aggiungere la connessione.

Prop.: • $(h, k) = (0, 0)$, $s = f \Rightarrow \mathcal{L}_X f = Xf$ • $(h, k) = (1, 0)$, $s = Y \Rightarrow \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

• $\mathcal{L}_X(s \otimes s') = (\mathcal{L}_X s) \otimes s' + s \otimes \mathcal{L}_X(s')$ e $\mathcal{L}_X(c(s)) = c \mathcal{L}_X(s)$ (c contrazione). ← dim. ?

Varietà con bordo

Notazione: $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ $\partial \mathbb{R}_+^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$.

Def. (n-varietà topologica con bordo): una n-varietà topologica con bordo è una sp. topologico X t.c.

è T_x , a base numerabile, loc. omotopico a un aperto di \mathbb{R}_+^n . Un atlante liscio è... tutto uguale a prima solo con \mathbb{R}_+^n .

Oss. Le funzioni di transizione preservano punti di bordo ($x_n = 0$) e interni ($x_n > 0$).

Spazio tangente: definito alla stessa maniera con le derivazioni (con le curve dobbiamo fare delle modifiche), ad es.

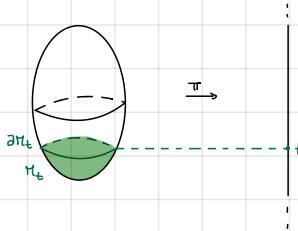
$f: I \rightarrow M$ (I può essere anche chiuso). $T_p M$ è sempre un n-spazio vettoriale $\forall p \in M^n$.

Oss. ∂M è una $(n-1)$ -varietà senza bordo (basta prendere l'atlante di M e restringerlo all'iperpiano

$\partial \mathbb{R}_+^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$). In particolare se $p \in \partial M \Rightarrow T_p \partial M \subset T_p M$ è un iperpiano vettoriale. Inoltre $T_p \partial M$

separa $T_p M$ in vettori uscenti/entranti (la suddivisione uscenti/entranti è ovvia in \mathbb{R}^n_+ e trasferita su M senza ambiguità con le carte).

Esempio: M senza bordo, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, t valore regolare allora $M_t = f^{-1}(-\infty, t]$ è una varietà con bordo $\partial M_t = f^{-1}(t)$.



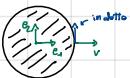
Esempio: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$. $D^n = f^{-1}([-1, 1])$ è varietà con bordo $\partial D^n = S^{n-1}$.

Osservazione: $f: M \rightarrow N$ liscia; $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$; immerso/immersione/embedding tutto come prima ma al posto di \mathbb{R}^n prende aperti di \mathbb{R}^n_+ .

Orientazione: la nozione di orientazione per M si estende anche al caso con bordo, sempre con un'assegnazione locale coerente delle orientazioni su $T_p M$ o, equiv., con un atlante orientato.

Possiamo però aggiungere qualcosa: l'orientazione su M induce un'orientazione su ∂M . Ci sono due casi possibili:

- $\dim M \geq 2$: sia $p \in \partial M$ e $v \in T_p M$ uscente $\Rightarrow T_p M = \text{Span}(v) \oplus T_p \partial M$. Diciamo dunque che v_1, \dots, v_n per $T_p \partial M$ è positiva $\Leftrightarrow v, v_1, \dots, v_n$ è positiva per $T_p M$ (questa scelta è chiamata outward-first convention).



• $\dim M = 1$: dunque $\partial M = \{\text{punti discreti}\}$ e dunque prendiamo per ∂M e lo orientiamo con +1 e -1

(rispetto a +1, i punti hanno un'orientazione canonica!). Poi gli altri +1 e -1 a seconda se i vettori puntano fuori o meno nella linea $T_p M$.



K-Forme

\Rightarrow può avere bordo

Def. (K-forma): M varietà n-dimensionale, $0 \leq k \leq n$. Una K-forma è una sezione ω del fibra

alternante $\Lambda^k(M)$. In altre parole $\forall p \in M$ $\omega_p: T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ è una mappa multilinear

antisimmetrica che varia in maniera liscia con $p \in M$. L'insieme delle K-forme su M è denotato $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k M)$

(è uno spazio vettoriale e un $C^\infty(M)$ -modulo).

In coordinate: $(U \subseteq \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega^k(U))$; base per $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ è $e^i \wedge e^j \wedge \dots \wedge e^{i_k} \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Ricordiamo

che per notazione $e_i \sim \frac{\partial}{\partial x^i}$, $e^i \sim dx^i$ e $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} dx^j$, $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$

Remark: $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ (in particolare $dx^i \wedge dx^i = 0$).

Esempio $x \, dy \wedge dz - xy \, dx \wedge dy + y^3 \, dx \wedge dz$ è una 2-forma in \mathbb{R}^3 .

Allora ogni M -forma in U può essere scritta come

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_K} f_{i_1, \dots, i_K} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_K} \quad \text{dove}$$

f_{i_1, \dots, i_K} è una funzione liscia su U . A volte si osserva il multiindice $\omega = \sum_I f_I dx^I$.

Oss. una n -forma in una n -varietà, dato che $\binom{n}{n} = 1 \Rightarrow \omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Pull-back: spesso pensiamo V e V^* come la stessa cosa, adesso rompiamo questa simmetria: avere un campo tensoriale (α, K) è meglio a volte di avere un campo tensoriale (h, α) . Infatti se $f: M \rightarrow N$ liscia sappiamo già che non possiamo spostare un campo vettoriale in generale, invece un campo tensoriale α di tipo (α, K) sì.

In particolare possiamo portarlo indietro a un campo tensoriale $f^*(\alpha)$ dello stesso tipo (α, K) su M :

$$f^*(\alpha(p))(v_1, \dots, v_K) = \alpha(f(p))([df_p(v_1), \dots, df_p(v_K)]) \quad \forall p \in M \quad \forall v_1, \dots, v_K \in T_p M.$$

Se α è (\dim)-simmetrico allora anche $f^*(\alpha)$ lo è. In particolare il pull-back di una K -forma ω in N è una K -forma $f^*\omega$ in M .

↙ dim.?

Proprietà: $f^*: \mathcal{L}(N) \rightarrow \mathcal{L}^*(M)$ è un morfismo di algebre (in particolare $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$).

In coordinate: $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n \quad \omega = \sum_I g_I dx^I \quad K\text{-forma su } V$. Allora:

↙ dim.?

$$f^*(\omega) = \sum_I (g_I \circ f) df^I \quad \text{dove } f^i: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ è l}'i\text{-esima coordinata di } f \text{ e } df^i \text{ il suo differenziale.}$$

Prodotto wedge: $\omega \in \mathcal{L}^k(N)$, $\eta \in \mathcal{L}^h(M) \Rightarrow \omega \wedge \eta \in \mathcal{L}^{k+h}(M)$. $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$

↙
Oss. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kh} \eta \wedge \omega \quad (\eta(p) = \sum_I \eta_I e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_h}) \quad \omega(p) = \sum_J \omega_J e^{y_1} \wedge \dots \wedge e^{y_K} \Rightarrow$

basta ricordare $e^{i_1} \wedge e^{i_2} = -e^{i_2} \wedge e^{i_1}$ e viceversa.

Contrazioni: $\omega \in \mathcal{L}^k(N)$, $X \in \mathcal{T}(N) \rightsquigarrow \eta \in \mathcal{L}^{k-1}(N)$ ottenuta contragendo ω e X :

$$\eta(p)(v_1, \dots, v_{K-1}) = \omega(X(p), v_1, \dots, v_{K-1}) \quad (\text{continua a essere antisimmetrica perché } \omega \text{ è antisimmetrica})$$

Integrazione: M n-varietà orientata (fissa a priori orientazione), $\omega \in \mathcal{L}_c^k(N) = \{n\text{-forma a supporto compatto}\}$

Andiamo a definire l'integrazione $\int_M \omega \in \mathbb{R}$ per gradini:

↙ pull-back

$$\textcircled{1} \quad \text{supp}(\omega) \subseteq U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{A} \text{ orientato}, \varphi_* \omega := (\varphi^{-1})^* \omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad \text{Si definisce:}$$

$$\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f d\mathbb{R}^n \leftarrow \text{Lebesgue } n\text{-dim.}$$

Vediamo che c'è una buona def. e non dipende dalla carta: se fosse $\overline{\varphi}_* \omega = \overline{f} d\overline{x}^1 \wedge \dots \wedge d\overline{x}^n$ allora

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} d\overline{x}^j \Rightarrow f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{\substack{S \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \text{si cancellano le ripetizioni}}} f \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^{S(1)}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^{S(n)}} d\overline{x}^{S(1)} \wedge \dots \wedge d\overline{x}^{S(n)} =$$

$$= \sum_{\mathbf{x} \in S_n} f \frac{d\mathbf{x}^1}{\partial \mathbf{x}^{(1)}} \wedge \dots \wedge \frac{d\mathbf{x}^n}{\partial \mathbf{x}^{(n)}} \text{sgn}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^n = f \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x}^1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^n. \quad \text{Se } \mathbf{x} \text{ la matrice di cambio}$$

di base non cambia segno perché l'ottante è orientato.

45

② In generale se $S \subseteq E$ con supporto compatto allora $s = s_1 + \dots + s_K$ con s_i con supporto compatto contenuto nel dominio di una carta $U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i$. Infatti $A = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$, prendo partizione dell'unità $\{p_i\}$ localmente finita in un compatto \hookrightarrow pongo $s_i := p_i s$. Allora $s_i \in E$ con supp $\subseteq U_i$ e dato che s è compatto \Rightarrow finito di $s_i \neq 0$.

$$\text{Pongo: } \int_S s = \sum_{i=1}^K \int_{U_i} s_i.$$

È ben definita: prendiamo un'altra partizione dell'unità: $\int_S \omega = \sum_i \int p_i \omega = \sum_i \int \left(\sum_j p_j \right) p_i \omega = \sum_i \sum_j p_j p_i \omega$. Stesso risultato se poniamo p_i' .

③ Posso integrare anche su $S \subseteq M$ borealiano, $\omega \in \Omega_c^n(M)$, allora $\int_S \omega$ è definito in modo analogo

(integro sull'imm. di S tramite la carta).

$$\text{Qss } \int_M \omega = - \int_{\bar{M}} \omega \quad \text{e} \quad \int_S \omega = 0 \quad \text{se } S \text{ ha misura nulla.}$$

Ese. $T = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, $\omega = dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$. Notiamo che è invariante per traslazione cioè $\omega((x,y)) = \omega((x+\alpha, y+\beta))$ (α costante) \Rightarrow scende a una forma sul toro $\omega \in \Omega^2(T)$ e $dx^1, dx^2 \in \Omega^1(T)$

$$\int_T \omega = \int_Q dx^1 \wedge dx^2 = \int_Q 1 = 1 \quad \begin{array}{c} \square \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \end{array} \quad \text{rimuovo perché?}$$

Integrazione su sotto-varietà: $S \subseteq M^n$ k -sottovarietà orientata, $\omega \in \Omega_c^k(M)$ $i : S \hookrightarrow M$. Allora poniamo

$$\int_S \omega = \int_{i^*S} i^* \omega \quad (\text{serve } S \text{ chiuso così che il supporto } i^* \omega \text{ sia compatto}).$$

Casi particolari in \mathbb{R}^n : • una 0-forma in \mathbb{R}^n è una funzione $\omega = f$; $\Omega^0(\mathbb{R}^n) \cong C^\infty(M)$.

• una 1-forma in \mathbb{R}^n è $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^i$ che induce un campo vettoriale $X = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$; $\Omega^1(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$

• una n -forma in \mathbb{R}^n è $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$; $\Omega^n(\mathbb{R}^n) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n)$

• una $(n-1)$ -forma è $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n \rightsquigarrow$ campo vettoriale $X^i = (-1)^{i+1} f_i$.

Esempio: • $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà di dim. 1, $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow \int_S \omega =$
 $S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ è un embedding $(z, b) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n (\gamma(t)) = x^i(t)$

$$= \int_{\gamma([a,b])} f_i dx^1 + \dots + f_n dx^n = \int_a^b \left(f_1 \frac{dx^1}{dt} + \dots + f_n \frac{dx^n}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_a^b X \cdot \gamma'(t) dt = \int_C X \cdot \gamma' \quad \begin{array}{c} ? \\ \uparrow \\ \text{versore tangente} \end{array}$$

$$\bullet S \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{codim}(S) = 1, \quad \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \quad \int_S \omega = \int_S X \cdot n^{\wedge} \quad \text{verso naturale} \quad \text{(46)}$$

Differenziale esterno: trasforma k -forme in $(k+1)$ -forme (in particolare trasforma funzioni, 0 -forme, in 1 -forme).

Iniziamo definendolo in carte: localmente $\omega = \sum_I f_I dx^I$, allora $d\omega := \sum_I df_I \wedge dx^I$

cioè $d\omega = \sum_{i < -i < k} df_{i,-i-k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ($df_{i,-i-k}$ è una 1 -forma quindi va bene). Quando

$\omega = f$ (0 -forma) allora $d\omega$ è il classico differenziale.

$$\begin{aligned} \text{es-} \\ \omega &= xy dx + x y dz \text{ è una } 1\text{-forma in } \mathbb{R}^3 \Rightarrow d\omega = \underset{\uparrow}{x dy \wedge dx} + x dy \wedge dz + y dx \wedge dz \text{ } 2\text{-forma.} \\ d(xy) &= x dy + y dx \end{aligned}$$

• Prop. (ben posto): $d\omega$ è ben definito e si ottiene una funzione lineare di $\Omega^k(\mathbb{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{M})$ t.c.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ locale} \quad \textcircled{2} \text{ sulle funzioni } C^2 \text{ c'è il differenziale usuale} \quad \textcircled{3} \text{ } d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad \textcircled{4} \text{ } d \circ d = 0 \end{aligned}$$

(e' inoltre univocamente determinata da questi assiomi.)

dim Unicità: per $\textcircled{1}$ possa esistere $\omega \in \Omega^k(\mathbb{M})$ $\omega = \sum_I f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

$$\text{Or, } d\omega = \sum_I d(f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \stackrel{\text{linearità}}{=} \sum_I (df_I \wedge dx^I + f_I \wedge d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) \stackrel{\text{suppongo che il prodotto tensoriale tra una } 0\text{-forma e una } k\text{-forma sia il prodotto scalare}}{=} \sum_I df_I \wedge dx^I \stackrel{\text{e } \textcircled{3} \text{ reiterate}}{=}$$

Esistenza: su una carta b posso $d\left(\sum_I f_I dx^I\right) = \sum_I df_I \wedge dx^I$. La linearità è ovvia, la $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$

dim?

seguiamo. Proviamo la $\textcircled{3}$ che, per linearità, possiamo provare su $\omega = f dx^I$ e $\eta = g dx^J$:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(f g dx^I \wedge dx^J) \stackrel{\text{def.}}{=} d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \stackrel{\text{diff. usuale}}{=} df \wedge dx^I \wedge gdx^J + dg \wedge f dx^I \wedge dx^J = \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

$$\text{Proviamo la } \textcircled{4}: \omega = f dx^I, d(d\omega) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I\right) = \left(\overbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i}^{\text{perche' } dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j}\right) \wedge dx^I.$$

□

Teorema (di Stokes): \mathbb{M}^n orientata, $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^{n-1}(\mathbb{M})$:

$$\int_{\mathbb{M}} d\omega = \int_{\partial \mathbb{M}}$$

dim. caso $\mathbb{M} = \mathbb{R}_+^n$: $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$. Per linearità basta provarlo su $\omega = f dx^1 \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$

$$d\omega = df \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \sum_{\substack{i \leq j \\ i \neq i}} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n = (-1)^{i-i} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \text{ Ora ci sono 2 casi:}$$

$$\bullet i \leq n-1: \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega \stackrel{\text{def. integrale}}{=} (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x^i} = (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x^i} = (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \lim_{\mathbb{M} \rightarrow +\infty} (f(\mathbb{M}) - f(-\mathbb{M})) = 0$$

uso qui che $i \leq n-1$ perché se $i=n$

$$\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}_{+}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

$$\bullet i=n: \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \omega = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} i^*(f dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^n}) = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} (f \circ i) i^*(dx^1) \wedge \dots \wedge \underbrace{i^*(dx^n)}_{=0} = 0$$

il pull back si spezza

sopra

e il funzionale

nullo sopra $\partial \mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned} \text{per } i=n : \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial f}{\partial x_n} = (-1)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (0 - f(x^1, \dots, x^n, 0)) = \\ \text{qui deva spezzare } \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

(64)

Cosa generale: scegliamo un atlante $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\} \Rightarrow \omega = \sum_i p_i \omega_i$, ma per

linearità basta provarlo su $p_i \omega_i$, ma allora faccio push-forward $\varphi_*(p_i \omega_i)$ e per lei è vero \square

Corollario: Se \mathbb{M}^n è orientata e sente banda allora $\wedge(n-i)$ -forma ω si ha $\int_{\mathbb{M}} d\omega = 0$. (ovvia $\partial\mathbb{M} = \emptyset$).

Conseguenza: ① $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ arco con estremi p e q e una funzione f definita sull'arco:

$$\int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(q) - f(p) \quad (\text{non dipende dal cammino})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \omega = f dx + g dy \quad 1\text{-forma in } \mathbb{R}^2: \quad d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ = \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad \text{Allora } \forall D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ dominio compatto con bordo} \end{aligned}$$

una curva semplice:

$$\int_{\partial D} f dx + g dy = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Teorema di Green})$$

③ Prendiamo dominio compatto in \mathbb{R}^3 con ∂D superficie e X campo vettoriale su D . Se interpretiamo X come 2-forma abbiamo:

$$\int_D \operatorname{div} X = \int_X \cdot n \quad (\text{teorema della divergenza})$$

④ $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie con bordo ∂S e un campo vettoriale X in \mathbb{R}^3 con supporto su S . Se interpretiamo X come una 1-forma si ha: $\int_S \operatorname{rot} X \cdot n = \int_{\partial S} X \cdot t \quad (\text{Teorema del rotore})$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Oss.} & \underline{\mathcal{N}^0(\mathbb{R}^3)} & \xrightarrow{d} & \underline{\mathcal{N}^1(\mathbb{R}^3)} & \xrightarrow{d} & \underline{\mathcal{N}^2(\mathbb{R}^3)} & \xrightarrow{d} \underline{\mathcal{L}^3(\mathbb{R}^3)} \\ & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ & C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla} & \underline{\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)} & \xrightarrow{\operatorname{rot}} & \underline{\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)} & \xrightarrow{\operatorname{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

Elettromagnetismo: un campo elettromagnetico è una 2-forma su \mathbb{R}^4 , visto come sp. tempo di Minkowski

$$\text{cioè } (\mathbb{R}^4, \eta) \text{ con } \eta \text{ tensore metrico } \eta = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{wlog } c=1): \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

effettivamente in ogni punto c'è una matrice simmetrica con $E=E$; $B=B$.

↓ Ex.: eq. di Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B \\ \nabla \cdot B = 0 \end{array} \right. \quad \left[dF = 0 \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times B = J + \frac{\partial E}{\partial t} \\ \nabla \cdot E = \rho \end{array} \right. \quad \left[d*F = *J \right] \quad \text{con } *: \mathcal{N}^k(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}^{n-k}(\mathbb{R})$$

c'è bisogno di un tensore metrico
generatore sono di $M(V)$

$$\beta \longmapsto * \beta \quad + \cdot \cdot \cdot \propto \alpha \times \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

Forme chiuse ed esatte

Def. (forme chiuse e esatte): M varietà, $\omega \in \Omega^k(M)$. ω è chiusa se $d\omega = 0$; ω è esatta se

$\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M)$ t.c. $\omega = d\eta$.

Oss. esatta \Rightarrow chiusa.

→ nella 12

Coomologia di De Rham: $\mathcal{Z}^k(M) := \{k\text{-forme chiuse}\} \subseteq \Omega^k(M)$ $B^k(M) := \{k\text{-forme esatte}\} \subseteq \mathcal{Z}^k(M)$.

$H^k(M) := \frac{\mathcal{Z}^k(M)}{B^k(M)}$ k -esima gruppo della coomologia di De Rham. $b^k(M) = \dim H^k(M)$ k -esima dimensione

di Betti (eventualmente $+\infty$). N.B. $H^k(M^n) = \{0\}$ $\forall k > n$ dato che $\Omega^k(M) = \{0\}$ se $k > n$.

Def. (forma volume): M orientata. Una forma volume è una n -forma $\omega \in \Omega^n(M)$ t.c. $\forall p \in M$

$\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0 \quad \forall \{v_1, \dots, v_n\}$ base positiva.

Ese. $M = \mathbb{R}^n$ $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ n -forma euclidea $\omega(p)(v^1, \dots, v^n) = \det(v^1, \dots, v^n)$

Prop. M orientata $\Rightarrow \exists$ forma volume su M .

dim. come per l'esistenza del tensore metrico. A titolo qualsiasi $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ e $\{p_i\}$ partizione dell'unità

Su U_i prendo $\varphi_i^*(\omega^E)$ allora sia $\omega = \sum p_i \varphi_i^*(\omega^E)$ funziona perché la condizione $\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0$

$v_1, \dots, v_n \geq 0$ si conserva per comb. convessa. (Si potrebbe dimostrare anche usando che ogni tensore metrico def. forma vol.) \square

Prop. Le forme volume su M orientata sono tutte e sole fw con ω forma volume e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ funzione strettamente positiva.

dim. Che fw è una forma volume è ovvio. Che siano tutte di questo tipo viene dal fatto che $\Lambda^n(T_p M)$

ha dimensione 1 e dunque devono differire di uno scarto puntualmente, che è proprio $f(p)$. \square

Def. (misura da forma volume): Una forma volume su M definisce una misura su M . $B \subseteq M$ boreliano

allora $\text{Vol}(B) := \int_B \omega \in [0, +\infty]$ (ω non è a supporto compatto ma si può vedere come sup sui compatti).

Oss. se $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset \Rightarrow \text{Vol}(B) > 0$ (basta usare carto che preserva orientazione e ω diventa $f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ con f strett. positiva).

Prop. Ogni n -forma su M^n è chiusa. In particolare le forme volume sono chiuse.

dim. $\omega \in \Omega^n(M) \Rightarrow d\omega \in \Omega^{n+1}(M) = \{0\}$. \square

Prop. M compatto, orientato $\partial M = \emptyset \Rightarrow$ le forme volume non sono esatte.

$$\dim. \text{ Se per } \omega = d\eta, \text{ allora per Stokes } \int_{\partial M} \eta = \int_M d\eta = \int_M \omega = \text{Vol}(M) > 0. \quad \square$$

Corollario: M^n compatta, orientata, $\partial M = \emptyset \Rightarrow b^n(M) \geq 1$ (forme chiuse su M non esiste su M in questo caso).

N.B. $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$ unione di componenti connesse. Allora $\mathcal{L}^k(M) = \mathcal{L}^k(M_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}^k(M_k)$

e lo stesso \mathbb{Z}^k , $B^k \Rightarrow H^k(M) = \bigoplus_{i=1}^k H^k(M_i)$. Supponiamo dunque M connessa da ora in poi.

Prop.: M connesso $\Rightarrow H^0(M) = \mathbb{R}$

dim. $H^0(M) = \{ f \in C^\infty(M) \mid df = 0 \} / \text{1-forme} = \{ f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ lsc. costante} \} / \{ f \text{ costante} \} = \mathbb{R}$

Corollario $b^0(M) = \{\# \text{ componenti connesse}\}$

Prop. $H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, k=0 \\ 0, k>0 \end{cases}$ (anche detta coomologia banale)

dim. Dobbiamo dim. $H^1(\mathbb{R}) = 0$. Data $\omega = f(x)dx$ 1-forma $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e si ha $dF = \omega$.

Cioè ogni 1-forma in \mathbb{R} è esatta $\Rightarrow H^1(\mathbb{R}) = 0$. \square

Prop.: La coomologia c'è un funtore controvariente tramite il pull back f^* .

dim. Per prima cosa vediamo che $f^*: \mathcal{L}^k(N) \rightarrow \mathcal{L}^k(M)$ passa al quoziente H^k . Questo è vero perché

f^* commuta con d : $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ (es. consegne). Inoltre $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ e $\text{Id}_N^* = \text{Id}_{H^k(N)}$.

sono verifiche. \square

Prop. È ben definito il prodotto wedge in coomologia: $[\omega] \in H^k(M)$, $[\eta] \in H^l(M)$ allora:

$$[\omega] \wedge [\eta] := [\omega \wedge \eta] \in H^{k+l}(M)$$

dim. • ω, η chiuse $\Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \omega \wedge \eta$ chiusa

• $\omega \wedge \omega = \omega \wedge \omega$. Vediamo che $[\omega \wedge \omega] = [\omega \wedge \omega]$ (per simmetria sarà $= [\omega \wedge \omega]$).

Dunque $\omega \wedge \omega \Leftrightarrow \omega - \omega$ è esatta allora $\omega \wedge \eta \sim \omega \wedge \eta \Leftrightarrow (\omega - \omega) \wedge \eta$ è esatta. Ma in generale

Se β è esatta e η è chiusa $\Rightarrow \beta \wedge \eta$ esatta infatti se $\beta = d\alpha \Rightarrow d(\alpha \wedge \eta) = d(\alpha) \wedge \eta \pm \alpha \wedge d\eta$. \square

Dunque è possibile dare $H^*(M) := \bigoplus_{i \geq 0} H^i(M)$, monito del prodotto \wedge esteso tramite la proprietà distributiva, forma un'algebra.

$$\text{Oss. } [\omega] \wedge [\eta] = (-1)^{k+l} [\eta] \wedge [\omega].$$

Algebra omologico

Def. (complesso di coazione): un complesso di coazione c'è una successione di oggetti:

$C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \xrightarrow{d_1} C^2 \xrightarrow{d_2} \dots$ con C^i sp. vett. (nel nostro caso) e di ormai t.c. $d_i \circ d_{i-1} = 0$. (50)

Def. (morfismo di catene): un morfismo di catene è una collezione $\{f_i : C_i \rightarrow D_i\}$ di morfismi che rendono il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} C^0 & \xrightarrow{d_0^0} & C^1 & \xrightarrow{d_1^1} & C^2 & \xrightarrow{d_2^2} & \dots \\ f_0 \downarrow & \quad \quad \quad f_1 \downarrow & \quad \quad \quad f_2 \downarrow & \quad \quad \quad \vdots & & & \\ D^0 & \xrightarrow{d_0^0} & D^1 & \xrightarrow{d_1^1} & D^2 & \xrightarrow{d_2^2} & \dots \end{array}$$

Def. (coomologia di catene): $H^i(C) = \frac{\text{Ker}(d_i)}{\text{Im}(d_{i-1})}$ (è un funtore covariante)

Def. (omotopia): Un omotopia tra $f, g : C \rightarrow D$ è $h : C \rightarrow D$ t.c. $h^k : C^k \rightarrow D^{k-1} \forall k > 0$ t.c.

$$f - g = dh + hd$$

Prop. f, g omotope $\Rightarrow f_* = g_*$

dim. $[\alpha] \in H^k(C)$. Allora $f(\alpha) - g(\alpha) = dh(\alpha) + h \overset{?}{d}[\alpha] \Rightarrow [f(\alpha) - g(\alpha)] = [dh(\alpha)] = [0]$. \square

Prop. (Identità magica di Cartan): X campo vettoriale su M (anche con bordo). \mathcal{L}_X derivazione di Lie

$$\mathcal{L}_X : \Omega^k \rightarrow \Omega^k ; i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M) \hookrightarrow \omega : \omega^*(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(p)(X(p), v_1, \dots, v_{k-1})$$

contrazione lungo X e $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ derivazione esterna. Allora $\mathcal{L}_X = d i_X + i_X d$

Ide. dim. $\overset{\text{cosa va fatto?}}{\text{Si}} f \in C^\infty \in \omega$ -1-forma esatta: $\mathcal{L}_X(f) = Xf$ $i_X f = 0$ $i_X(df) = \overset{?}{X}f$. Inoltre $[\mathcal{L}_X, d] = [\mathcal{L}_X, i_X] = 0$

se $\omega = df \Rightarrow \mathcal{L}_X(df) = d \mathcal{L}_X(f) = d i_X(f) = 0$ e $d i_X(df) = d(df) = d(Xf) = d \mathcal{L}_X(f)$. Dunque in questo

caso vale. Poi si usa che \mathcal{L}_X è derivazione e si mostra che i_X antiderivazione, d'antiderivazione... funzioni. \square

Tesi: $f, g : M \rightarrow N$ omotopicamente equivalenti $\Rightarrow f^* = g^*$.

dim. $f, g : M \rightarrow N$ con $f \sim g \Rightarrow$ posso prendere $F : M \times [0,1] \rightarrow N$ omotopia liscia tra f e g con $F_0 = g$ e $F_1 = f$.

Cerchiamo di costruire $h : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ t.c. $f^* - g^* = dh + hd$. Definisca h così:

$$h(\omega)(p) = \int_0^1 i_t^* \left(\left(i_{\frac{\partial}{\partial t}} F^*(\omega) \right)(p, t) \right) dt \quad \forall p \in M. \quad \text{Dove } \frac{\partial}{\partial t} \text{ è il campo vettoriale costante}$$

lungo $t \in [0,1] \subset i_t : M \rightarrow M \times [0,1]$ è l'embedding $i_t(p) = (p, t)$. In altre parole:

$$h(\omega)(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 F^*(\omega)(p, t) \left(\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_{k-1} \right) dt$$

Vediamo che è omotopia di catene:

$$\begin{aligned} f^*(\omega) - g^*(\omega) &= F_1^*(\omega) - F_0^*(\omega) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F_t^*(\omega) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(i_t^* (F^*(\omega)) \right) dt = \int_0^1 i_t^* \mathcal{L}_X F^*(\omega) dt \\ &= \int_0^1 i_t^* i_X dF^*\omega + \int_0^1 i_t^* d i_X F^*\omega = \int_0^1 i_t^* i_X (d\omega) + d \int_0^1 i_t^* i_X F^*\omega = (hd)(\omega) + d(h\omega). \end{aligned}$$

il differenziale
commuta col
pull-back

Corollario: Due varietà amotapiamente equivalenti hanno la stessa coomologia.

51

dim. $f \circ g \sim id_N$ e $g \circ f \sim id_M \Rightarrow f^* \circ g^* = id$ e $g^* \circ f^* = id$ cioè f^* è unomorfismo. \square

Lemme di Poincaré: $H^*(\mathbb{R}^n) = H^*(\mathbb{R})$ è banale. In generale, M contrattile $\Rightarrow H^*(M)$ banale.

n.B. Se tolgo il bordo la coomologia non cambia infatti: $i: M \setminus \partial M \xrightarrow{\sim} N$ $i^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M \setminus \partial M)$ e si vede

che $i \circ i^{-1}$ è $\sim id$.

vale anche senza questa ip. ma non possiamo dim.

Corollario: Una n-varietà compatta, orientabile, senza bordo, non c'è (mai) contrattile (e non c'è anotop. equivalente a una m-varietà con $m < n$)

dim. per quanto visto ieri $b^n(M) > 0$. \square

Def. (successione esatta): una successione esatta di spazi vettoriali è $0 \rightarrow V_i \xrightarrow{d_i} V_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} V_{i+2} \xrightarrow{d_{i+2}} \dots$ tale che

$$\text{Ker } (d_{i+1}) = \text{Im } d_i.$$

Ex. Se $0 \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1} \rightarrow \dots$ esatta $\Rightarrow 0 \rightarrow V_i^* \leftarrow V_{i+1}^* \leftarrow \dots \rightarrow V_i \otimes W \rightarrow V_{i+1} \otimes W \rightarrow \dots$ esatta.

Ex. (fatto nelle consegne): $0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_k \rightarrow 0$ esatta $\Rightarrow \sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0$.

Lemme (del serpente): A, B, C catene. Consideriamo una successione esatta corta di catene $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$

esatta V_i (matrice $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$). Allora si ha una successione esatta lunga:

$$0 \rightarrow H^i(A) \xrightarrow{\alpha^*} H^i(B) \xrightarrow{\beta^*} H^i(C) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(A) \xrightarrow{\alpha_{i+1}^*} H^{i+1}(B) \xrightarrow{\beta_{i+1}^*} H^{i+1}(C) \xrightarrow{\delta_{i+1}}, \quad \text{siamo di connessione}$$

dim. $0 \rightarrow A_{i-1} \rightarrow B_{i-1} \rightarrow C_{i-1} \rightarrow 0 \quad \text{Definisco } s([\alpha]) = [\alpha]$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & A_i & \xrightarrow{\beta} & B_i & \xrightarrow{\gamma} & C_i \xrightarrow{\epsilon} 0 \\ & & \downarrow & \text{④-cessione} & \downarrow & \text{④-cessione} & \downarrow \\ & & A_{i+1} & \xrightarrow{\alpha} & B_{i+1} & \xrightarrow{\beta'} & C_{i+1} \end{array}$$

Le verifiche che funziona tutto le ho fatte collegando a Eta.

\square

Teorema (Successione esatta di Mayer-Vietoris): $M = \bigcup_U V$ unione di aperti.

$$\begin{array}{ccc} \bigcup U & \xrightarrow{i^*} & U \xrightarrow{\kappa} M \\ \downarrow j^* & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{l^*} & \end{array} \quad \text{(inclusioni)} \quad \xrightarrow{\text{contravariante}} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^k(U \cap V) & \xleftarrow{i^* - j^*} & \mathcal{L}^k(U) \\ \downarrow \text{rest.} & & \downarrow \text{rest.} \\ \mathcal{L}^k(V) & \xleftarrow{l^*} & \mathcal{L}^k(M) \end{array} \quad \text{(rest. delle k-forme sugli aperti)}$$

Allora $0 \rightarrow \mathcal{L}^k(M) \xrightarrow{(\alpha^*, \beta^*)} \mathcal{L}^k(U) \oplus \mathcal{L}^k(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \mathcal{L}^k(U \cap V) \rightarrow 0$ è esatta. In particolare, per lo snodato lemma, ottengo la successione esatta lunga con $s_i([\omega]) = \pm \alpha([p_i] \omega)$. (non serve di dove sapere chi è α).

dim. • (κ^*, l^*) è iniettivo: se $\kappa^* = l^* = 0 \Rightarrow \omega^* = 0$ (la k -forma c'è su due aperti che ricoprono M).

• $\text{Im } (\kappa^*, l^*) = \text{Ker } (i^* - j^*)$: $\boxed{\text{□}} \quad i^*(\kappa^*(\omega)) - j^*(l^*(\omega)) \stackrel{\text{commutativa}}{=} 0 \quad \boxed{\text{□}}$ $i^*(\alpha) = j^*(\beta) \Rightarrow \alpha$ e β sono le stesse in $U \cap V$ e quindi possiamo costruire una k -forma globale su M che funziona.

«come?»

• $i^* - j^*$ è suriettiva: sia $\omega \in \mathcal{L}^k(U \cap V)$ e siano $\{p_U, p_V\}$ part. dell'unità rispetto a $\{U, V\}$. Allora $p_U \omega \in \mathcal{L}^k(U \cap V)$ si estende a $\mathcal{L}^k(V)$

ponendo $\rho_p \omega(p) = 0 \forall p \in V \setminus U$.  Analogamente $\rho_V \omega$ si estende a $\mathcal{R}^k(U)$. Dunque $\omega = i^*(\rho_V \omega)$

$\sim j^*(\rho_V(\omega))$. \square

Coomologia di S^n : $H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k \neq 0, n \\ 0, & k = 0, n \end{cases}$ ($n \geq 1$)

dim. $U \cong S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \sim \text{punto}$ $V \cong S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n \sim \text{punto}$, $U \cap V = S^n \setminus \{NS\} \cong S^{n-1}$. Dunque:

$$H^{i-1}(\text{punto}) \oplus H^{i-1}(\text{punto}) \rightarrow H^{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow H^i(S^n) \rightarrow H^i(\text{punto}) \oplus H^i(\text{punto}). \quad \text{Se } i \geq 1, H^{i-1}(S^{n-1}) \cong H^i(S^n).$$

Se $i=1$: $0 \rightarrow H^0(S^n) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H^0(S^{n-1}) \rightarrow H^1(S^n) \rightarrow 0$ Dunque se $n > 1$ $H^0(S^{n-1}) = \mathbb{R} \Rightarrow H^1(S^n) = 0$

Se $n=1 \Rightarrow H^1(S^1) = \mathbb{R}$. \square

Coomologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$: $H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k \text{ pari} \quad k \leq 2n \\ 0, & k \text{ dispari} \end{cases}$

dim. $H = \{z_0 = 0\}$, $P = [1, 0, -1, 0]$. $U := \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus H \cong \mathbb{C}^n$, $V := \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \{P\} \xrightarrow{\text{retrazione}} H \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, $U \cap V \cong$

$\cong \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \cong S^{2n-1}$. Per induzione:

$$n=1: \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = S^2 \Rightarrow H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0, 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \checkmark;$$

$$n>1: H^{i-1}(S^{2n-1}) \rightarrow H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \rightarrow H^i(\text{punto}) \oplus H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H^i(S^{2n-1})$$

per $i-1 \neq 0, 2n-1$ $\stackrel{0}{\checkmark}$ $i \neq 0$ $\stackrel{0}{\checkmark}$ per $i \neq 0, 2n-1$ $\stackrel{0}{\checkmark}$

Dunque per $i \neq 0, 1, 2n-1, 2n \Rightarrow H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \stackrel{h_p \text{ ind.}}{\cong}$ tesi, gli altri casi sono simili. \square

Coomologia a supporto compatto : \mathcal{M} varietà, $\mathcal{R}_c^k(\mathcal{M}) \cong \mathcal{E}_c^k(\mathcal{M}) \cong \mathcal{B}_c^k(\mathcal{M})$. Ha sempre:

$$\rightarrow \mathcal{R}_c^{k+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \mathcal{R}_c^k(\mathcal{M}) \xrightarrow{d} \mathcal{R}_c^{k+1}(\mathcal{M}) \rightarrow \dots, H_c^k(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{E}_c^k(\mathcal{M})}{\mathcal{B}_c^k(\mathcal{M})}. \quad \text{Se } \mathcal{M} \text{ compatto } \mathcal{R}_c^k = \mathcal{R}^k.$$

Oss. se la forma a supporto compatto è ancora compatto dunque possiamo dare una struttura di algebra

$$\text{anche a } H_c^* := \bigoplus_k H_c^k(\mathcal{M}).$$

Prop. : \mathcal{M} connessa $H_c^0(\mathcal{M}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \mathcal{M} \text{ compatto} \\ 0, & \mathcal{M} \text{ non compatto} \end{cases}$ \leftarrow + coomologia "normale"

Oss. non è un invarianto

per esempio \leftarrow ma dovrebbe essere
per diffeomorfismo (?)

$$\text{dim. } H_c^0(\mathcal{M}) = \{f \in C_c^\infty(\mathcal{M}) \mid f \text{ costante}\} = \{0\}$$

Se \mathcal{M} non è compatto e $f(\mathcal{M}) = \text{costante} \Rightarrow \text{costante} = 0$ altrimenti non sarebbe a supp. compatto \square

$$\text{Prop. } H_c^i(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & i=1 \\ 0, & i=0 \end{cases}$$

dim. $i=0$, appena visto.

$$i=1: H_c^1(\mathbb{R}) = \mathcal{R}_c^1(\mathbb{R}) / \{df \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}. \quad \text{In generale, dim } \mathcal{M} = n, \mathcal{M} \text{ orientato e } \partial \mathcal{M} = \emptyset$$

Def. $\int_{\mathcal{M}}: \mathcal{R}_c^n(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\omega \mapsto \int_{\mathcal{M}} \omega$, è definita anche in coomologia cioè :

$\int_{\Omega} H_c^k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ $[\omega] \mapsto \int_{\Omega} \omega$ infatti se prende altro rappresentante $\omega' = \omega + d\eta \Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \omega' = \int_{\Omega} \omega + \int_{\Omega} d\eta = \int_{\Omega} \omega + \int_{\partial\Omega} \eta = \int_{\Omega} \omega.$$

Stokes



Inoltre $\int_{\Omega} H_c^k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e' sempre surgettivo infatti su \mathbb{R}^n considero $\omega = \rho(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \mathcal{L}_c^n(\mathbb{R}^n)$.

$\int \omega = \int p > 0$. Poi basta costruire su \mathbb{R} qualcosa che in carte faccia $\omega \Rightarrow$ date che $\int f \omega$ e' lineare

si ha lo surgettività (\mathbb{R} ha dim 1 come sp.vettoriale, basta non prendere lo 0 per essere surgettivo).

Inoltre $\int_{\Omega} H_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ e' iniettivo: $\omega \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R})$ t.c. $\int_{\Omega} \omega = 0 \Rightarrow \exists f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ t.c. $\omega = df$

perche' e' a supporto compatto? Ds un certo punto in poi sara' costante ma non mi sembra

(se $\omega(x) = g(x) dx$ si pone $f(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$) e allora $\omega = df = \omega$ in $H_c^1(\mathbb{R})$. Dunque $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. \square

Lemma (Poincaré, caso compatto): $H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k \neq n \\ 0 & k = n \end{cases}$

dim Identifichiamo \mathbb{R}^n con $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, $p \in \mathbb{S}^n$. Si dimostri. Sia $\omega \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n)$ una k-forma chiusa con

supporto, bisogna vedere che e' esatta. Data che ω e' a supporto compatto possiamo estenderla a una forma su \mathbb{S}^n .

come? Dato che $H_c^k(\mathbb{S}^n) = 0$ per $k < n$ si ha che $\exists \eta \in \mathcal{L}_c^{k-1}(\mathbb{S}^n)$ t.c. $\omega = d\eta$. Il problema e' che

η potrebbe non essere contenuta in \mathbb{R}^n , allora modificiamo η in η' che avra' supporto in \mathbb{R}^n e

soddisfi $d\eta' = \omega$. Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ una palla di un certo raggio che contiene il supporto di ω . Ormai $d\eta = \omega$

su $\mathbb{S}^n \setminus B$ ($d\eta = \omega$). Se $k=1$, allora η e' una funzione su \mathbb{S}^n che e' una costante c su $\mathbb{S}^n \setminus B$.

Poniamo $\eta' = \eta - c$ e otteniamo $d\eta' = d\eta = \omega$ e η' ha supporto in B , quindi $k=1$ ok. Se $k > 1$, dato

che $\mathbb{S}^n \setminus B$ e' contrattibile $\exists \alpha \in \mathcal{L}^{k-2}(\mathbb{S}^n \setminus B)$ t.c. $d\alpha = \eta$. Prendiamo una bump function p con supporto

in $\mathbb{S}^n \setminus B$ che e' uguale a 1 in un intorno di p . Ormai puoi estendere a \mathbb{S}^n e $\eta' := \eta - d(p\alpha) \in \mathcal{L}^{k-1}(\mathbb{S}^n)$

diventa a vicina a p , allora ci dà una forma a supporto compatto in \mathbb{R}^n . In particolare $d\eta' = d\eta = \omega$.

Nel caso $k=n$ troviamo iso tra $H_c^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ e e' sempre $\int_{\mathbb{R}^n} : H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. E' sempre surgettiva

per dim. prec., vediamo che e' iniettiva: sia $\omega \in \mathcal{L}_c^n(\mathbb{R}^n)$ una forma chiusa con $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Estendiamola

a \mathbb{S}^n . Sappiamo già che $\int_{\mathbb{S}^n} : H^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{S}^n$ e' isomorfismo. Data che $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 0$, la forma ω e' esatta

in \mathbb{S}^n e' conclude come prima. \square

È CORAZZANTE!

Functorialità: se $f: \mathbb{M} \rightarrow N$ e' propria, $f^*: \mathcal{L}_c^k(N) \rightarrow \mathcal{L}_c^k(\mathbb{M})$ e $f^*: H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(\mathbb{M})$.

Toreur (Mayer-Vietoris compatto): Se \mathbb{M} varietà anche con bordo; $\cup, V \subset \mathbb{M}$ i aperti t.c. $\mathbb{M} = \cup V$.

Allora:

$$\begin{array}{ccc}
 U \cap V & \xrightarrow{i^*} & U \\
 \downarrow j^* & \swarrow k^* & \downarrow l^* \\
 V & \xrightarrow{l^*} & M
 \end{array} \quad (\text{inclusioni}) \quad \rightsquigarrow \text{contravariante}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & i^* & & -\mathcal{L}^k(U) \\
 & & \nearrow & & \downarrow k^* \\
 -\mathcal{L}^k(U \cap V) & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & & & -\mathcal{L}^k(M) \\
 \downarrow j^* & & & & \downarrow l^* \\
 & & -\mathcal{L}^k(V) & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & -\mathcal{L}^{n-k}(M)
 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{adesso sono le}) \\ (\text{estensioni a } \infty) \end{array}$$

ci dà la successione esatta $\rightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{i^* - j^*} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{l^* + m^*} H_c^{n-k}(M) \rightarrow H_c^{n-k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$

dim. basta vedere che c'è esatta o $\rightarrow \mathcal{L}_c^*(U \cap V) \xrightarrow{i^* - j^*} \mathcal{L}_c^*(U) \oplus \mathcal{L}_c^*(V) \xrightarrow{l^* + m^*} \mathcal{L}_c^*(M) \rightarrow 0$. Per lo

sggettivitò usare partizione dell'unità. \square

Dualità di Poincaré:

Sia M una varietà liscia orientata senza bordo. Definiamo la mappa bilineare: $\mathcal{L}^k(M) \times \mathcal{L}_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$

t.c. $(\omega, \eta) \mapsto \langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge \eta \in \mathbb{R}$. La mappa è ben definita dato che $\omega \wedge \eta$ ha supporto compatto.

Usando Stokes e $\partial M = \emptyset$ passa in coomologia e dunque abbiamo $H^k(M) \times H_c^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ che è bilineare

bilineare ci dà: $\text{PD}: H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*$ t.c. $[\omega] \mapsto ([\eta] \mapsto \langle [\omega], [\eta] \rangle)$

Teorema (dualità di Poincaré): la mappa PD è un isomorfismo.

Per la dimostrazione ossiamo questo lemma:

Lemme: Sia \mathcal{A} una collezione di aperti in M determinati dalla regola:

① \mathcal{A} contiene tutti gli aperti difformi a \mathbb{R}^n ;

② se $U, V, U \cap V \in \mathcal{A} \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{A}$

③ Se $U_i \in \mathcal{A}$ sono disgiunti a coppie $\Rightarrow \bigcup U_i \in \mathcal{A}$.

Allora ogni aperto di M si trova in \mathcal{A} . (In particolare $M \in \mathcal{A}$). \leftarrow SE DICE DIR?

dim. teorema

Sia $\mathcal{A} = \{U \subseteq M \mid \text{PD}: H^k(U) \rightarrow H_c^{n-k}(U)^* \text{ è iso}\}$. Vediamo che \mathcal{A} soddisfa le ip del lemma e dunque

$\mathcal{A} = M$, cioè tesi.

① Sia $U \cong \mathbb{R}^n$. È tutto a tranne per $n=0$, dunque dobbiamo controllare $\text{PD}: H^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_c^n(\mathbb{R}^n)^*$

è iso. Hanno entrambi dimensione 1 quindi basta vedere che non c'è banale; se γ è una n -forma a supporto

compatto su \mathbb{R}^n con $\int \gamma = 1$ e 1 è la funzione costante $\langle 1, \gamma \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \wedge \gamma = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma = 1$.

② Sono $U, V, U \cap V \in \mathcal{A}$, vediamo che $U \cup V \in \mathcal{A}$. Consideriamo il seguente diagramma con U, V :

$$\rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k(U \cup V) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow$$

$$\downarrow \text{PD} \qquad \downarrow \text{PD} \qquad \downarrow \text{PD}$$

$$\rightarrow H_c^{n-k+1}(U \cap V)^* \xrightarrow{\delta^*} H_c^{n-k}(U \cup V)^* \rightarrow H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* \rightarrow$$

Basta vedere che il diagramma commuta e poi usare le mmz dei s: il quadrato difficile è quello con f:

$$\text{PD}(\delta([\omega]))([\alpha]) = \int_{U \cap V} d\rho_U \wedge \omega \wedge \alpha \quad \text{con } \{\rho_U, \rho_V\} \text{ partizione sub. di } \{U, V\},$$

$$\delta^*(\text{PD}([\omega]))([\alpha]) = \text{PD}([\omega])(\delta([\alpha])) = \int_{U \cap V} \omega \wedge d\rho_V \wedge \alpha \quad \text{e sono uguali o meno di segno.}$$

(3) Se $U = \bigsqcup U_i$ e $U_i \in \tau \Rightarrow U \in \tau$. Usiamo: $H^k(\bigsqcup U_i) \xrightarrow{\text{prod}} H_c^{n-k}(\bigsqcup U_i)^*$
 $\pi^* H^k(U_i) \xrightarrow{\sim} \pi_* H_c^{n-k}(U_i) = \bigoplus H_c^{n-k}(U_i)^*$
 che commuta.

N.B. M orientato senza bordo $\Rightarrow b^k(M) = b_c^{n-k}(M)$. Se M anche compatta $b^k(M) = b_c^{n-k}(M)$.

Corollario: M compatta, orientata e senza $\partial \Rightarrow b^i(M) \neq 0 \forall i$

dim. Compatta $\Rightarrow H^k(M) \xrightarrow{\text{prod}} H^{n-k}(M)^* \xrightarrow{\text{inclusione}} H^k(M)^* \xrightarrow{\text{inclusione}} V \rightarrow V^* \xrightarrow{\text{?}} \dim V < +\infty$.

Def. (caratteristica di Euler-Poincaré): M compatta $\Rightarrow \chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b^i(M)$.

Corollario: Se $\dim M = n$ dispari con M compatta, orientabile e senza bordo $\Rightarrow \chi(M) = 0$.

Esempi: $\chi(S^{2n}) = 2$, $\chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = n+1$, $\chi(S_g) = 2 - 2g$

Formula di Künneth: $M \in N$ varietà (entrambe con bordo). Le proiezioni $\pi_M: M \times N \rightarrow N$ e $\pi_N: M \times N \rightarrow M$

ci danno una mappa bilineare $H^k(M) \times H^l(N) \rightarrow H^{k+l}(M \times N)$ $(\omega, \eta) \mapsto \pi_M^* \omega \wedge \pi_N^* \eta$ che passa

in coomologia e per le proprietà dei prodotti tensori si ha una mappa lineare $H(M) \otimes H(N) \rightarrow H^{k+h}(M \times N)$.

In particolare $\psi: \bigoplus_k (H^k(M) \otimes H^{l-k}(N)) \xrightarrow{\text{?}} H^{k+h}(M \times N)$ è: ψ . In particolare $b^k(M \times N) = \sum_{k-h}^l b^h(M) b^{l-h}(N)$

Ese (toro) $= b^0(S^1 \times S^1) = 1 \quad b^1(S^1 \times S^1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \quad b^2(S^1 \times S^1) = 1 \quad \text{Poincaré}$. In generale $b^k(S^1 \times \dots \times S^1) = \binom{n}{k}$

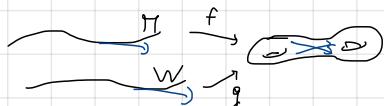
Ex: $\chi(M \times N) = \chi(M) \chi(N)$ (fatto per caso). $\chi(M \times V) = \chi(M) + \chi(V) - \chi(M \cap V)$

• $\widetilde{M} \rightarrow M$ mv. grado $d \Rightarrow \chi(\widetilde{M}) = d\chi(M)$.

Trasversalità

Def. (trasverse): $f: M \rightarrow N$, $g: W \rightarrow N$, lisce, $f \circ g$ sono trasverse se $\forall p \in M$, $g \in W$ t.c.

$$f(p) = g(q) \text{ allora } d f_p(T_p M) + d g_q(T_q W) = T_{f(p)} N$$



Def. (sp. vett. trasversi): V sp. vett., $U, W \subseteq V$ s.s.p. vett. sono

trasversi e $U + W \subset V$.

Def.: $f: M \rightarrow N$, $i: W \hookrightarrow N$ inclusione, f è trasversa a W se f e i sono trasverse ($f \pitchfork W$).

Def. $M, N \subseteq N$ sono trasverse se lo sono le loro inclusioni ($M \pitchfork N$).

(56)

Oss.: se $\eta = \{p\}$, $g \pitchfork \eta \Leftrightarrow p$ regolare (usare $\text{Ker } d_{\eta_p} = T_p \eta$). \hookrightarrow NEL LORO OSTE $f(p)$ val. reg.

Oss.: $f: M \rightarrow N$, $g: W \rightarrow N$. se $\dim(M) + \dim(W) < \dim N$, $f \pitchfork g \Leftrightarrow f(N) \cap g(W) = \emptyset$ perche' c' e' vera a vuoto, se avesse intersezione quel punto non potrebbe mai andare bene perche' in generale $\dim_{\eta} \eta = \dim M$

Prop.: $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\pi} B$, $p \in B$, $f \pitchfork E_p$ $\Leftrightarrow p$ e' regolare per $\pi \circ f$.

dim. Sia $p \in M$ t.c. $f(p) \in E_q$. Ors $T_{f(p)} E_q = \text{Ker } d\pi_{f(p)}$ dunque

$$\text{Ker } d\pi_{f(p)} + \underbrace{d f_p(T_p M)}_{\text{Im } df_p} = T_{f(p)} E \Leftrightarrow \text{Im}(d(\pi \circ f))_p = T_q M. \quad \square$$

Ex.: $E \xrightarrow{\pi} B$ fibrato, $W \subseteq E$ sottovarietà e' immagine di una sezione $s: B \rightarrow E \Leftrightarrow$ interseca trasversalmente ogni fibra E_q in un solo punto.

Prop.: $g: W \rightarrow N$, $\eta \subseteq N$, $g \pitchfork \eta \Rightarrow g^{-1}(\eta) \subseteq W$. se non c' e' vuoto, e' una sottovarietà di codim $g^{-1}(\eta) = \dim \eta$

dim. Sia $p \in g^{-1}(\eta)$. $w \in \eta$ posso vedere tutto in carte e supponere $(M, N) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m})$ e

$g = (q = g(p))$. Sia $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ la proiezione srl $\pi \neq$ fattore. Vicino a p $g^{-1}(\eta) =$

$$= g^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = g^{-1}(\pi^{-1}(0)) = (\pi \circ g)^{-1}(0) \text{ e per prop. prec (dato che } \pi \text{ e' una fibrazione) si ha che}$$

c' e' regolare e dunque $\pi \circ g$ e' una submersione in p . Quindi $g^{-1}(\eta)$ e' una sottovarietà vicina a p e

quindi dunque, di codim = $\dim N - \dim \eta$. \square

Teorema (di trasversalità di Thom): sia $F: M \times S \rightarrow N$ una mappa liscia tra varietà senza bordo. Se F

e' trasversa a una qualche sottovarietà $Z \subseteq N$, allora $F_S = F(\cdot, s): M \rightarrow N$ e' anche trasversa a Z

$\forall s \in S$.

dim.: Dato che $F \pitchfork Z$, la preimmagine $W := F^{-1}(Z) \subset M \times S$ e' una sottovarietà liscia. Consideriamo

la proiezione $\pi: M \times S \rightarrow S$ e in particolare la restrizione $\pi|_W: W \rightarrow S$. Il claim e': se s e' un valore

regolare per $\pi|_W$ allora $F_s \pitchfork Z$. Questo concluderebbe per il lemma di Sard. Sia $(p, s) \in W$. Dato

che s e' regolare per $\pi|_W$ si ha: $T_{(p,s)} W + T_{(p,s)}(M \times \{s\}) = T_{(p,s)}(M \times S)$. Dato che $F \pitchfork Z$:

$$dF_{(p,s)}(T_{(p,s)}(M \times S)) + T_{F(p,s)} Z = T_{F(p,s)} N. \text{ Combinando le due eq:}$$

$$T_{F(p,s)} N = \underbrace{dF_{(p,s)}(T_{(p,s)} W)}_{\text{e' contenuto in lui}} + \underbrace{dF_{(p,s)}(T_{(p,s)}(M \times \{s\}))}_{\text{e' contenuto in lui}} + T_{F(p,s)} Z = dF_{(p,s)}(T_{(p,s)}(M \times \{s\})) + T_{F(p,s)} Z$$

$$= d(F_s)_p(T_p M) + T_{F(p,s)} Z. \quad \square$$

Corollario: $W \subseteq \mathbb{R}^n$ sottov., $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$, $f_S: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $f_S(p) = f(p) + s \Rightarrow f_S \pitchfork W \quad \forall s \in \mathbb{R}^n$.

dim. $F: M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $F(p, s) = f(p) + s$ è una sommersione e quindi è chiaramente trasversa a qualsiasi sottovarietà $S \subseteq \mathbb{R}^n$. \square

Def. (classi di Thom): sia M^n varietà orientata senza bordo. Sia $S \subset M$ una K -sottovarietà orientata chiusa senza bordo. Sappiamo già che $\int_S: H_c^K(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è una mappa lineare e per il teorema di Poincaré questa mappa lineare corrisponde a un elemento $[S] \in H^{n-K}(M)$ (Poincaré usando come $K := n - K$), chiamata classe di Thom di S . Una $(n - K)$ -forma chiusa $\tilde{\gamma}_S$ t.c. $[\tilde{\gamma}_S] = [S]$ è chiamata forma di Thom di S . In particolare soddisfa: $\int_M \tilde{\gamma}_S \wedge \eta = \int_S \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{L}_c^K(M)$. La classe di Thom di M , $[M] \in H^0(M) = \mathbb{R}$ mentre se $p \in M$, $[p] \in H^k(M) = H_c^k(M)^* = \mathbb{R}$ (M compatta) o 0 (non compatta).

Prop.: $f \sim g$ omotopie $\Rightarrow [f] = [g]$.

dim. $F: S \times [0, 1] \rightarrow M$ omotopia. Allora $F^* \omega \in \mathcal{L}^K(S \times [0, 1])$:

$$\int_S F^* \omega - \int_S g^* \omega = \int_S F^* \omega = \int_{\partial(S \times [0, 1])} \omega = \int_{S \times [0, 1]} F^*(d\omega) = 0.$$

ω chiuso

\square es.: parte interna di una varietà compatta con bordo oppure \mathbb{R}^n

Caso compatto: se $b^i(M) < +\infty \ \forall i$ (in questo caso M si dice di tipo finito) la dualità di Poincaré ci dà un iso canonico $H^k(M)^* \cong H_c^{n-k}(M)$ (si sta usando $V = W^* \Rightarrow V = V^*$ che è vero solo in dim. finita).

Se $S \subset N$ è compatto, abbiamo la mappa lineare $\int_S: H^K(M) \rightarrow \mathbb{R}$ $\omega \mapsto \int_S \omega$, che corrisponde per Poincaré a un elemento $[S] \in H_c^{n-k}(M)$. È sempre caratterizzato da $\int_M \tilde{\gamma}_S \wedge \eta = \int_S \eta \quad \forall \eta \in \mathcal{L}^K(M)$ chiusa. Essendo S compatto l'inclusione $i: S \hookrightarrow M$ induce $i_*: H_c^{n-k}(S) \rightarrow H_c^{n-k}(M)$.

Prop.: i_* è proprio l'inclusione cioè $i_*([S]) = [S]$

dim. $H_c^{n-k}(U) \ni [S] = [\tilde{\gamma}_S]$ forma di Thom e per lei vale $\int_S \eta = \int_U \eta \wedge \tilde{\gamma}_S$ (a meno di segno) $\forall \eta \in \mathcal{L}_c^k(U)$ chiusa. Allora $\int_U \eta \wedge \tilde{\gamma}_S = \int_M \eta \wedge (i_* \tilde{\gamma}_S) \Rightarrow i_* \tilde{\gamma}_S$ è forma di Thom su M (questa proprietà le caratterizza) \square

↳

Stando sempre nel caso compatto dunque possiamo ridursi a studiare in un intorno di S , ad esempio un intorno tubolare $U = U \cap S$ che ha sicuramente numeri di Betti finiti (dato che è omotopicamente eq. a S). Dunque

dobbiamo studiare il campo di un fibrato vett. su S . (se ho un fibrato vett. $E \sim S$ per ex. consegne e dunque S di tipo finito).

Prop.: Sia $E \xrightarrow{\text{orientato, connesso, orientato, compatto, senza bordo}} S$ fibrato vett. di dim n . Pensiamo S embeddata in E tramite a-sezione. Ora sappiamo

che la classe di Thom $[S]$ è un elemento di $H_c^k(E)$. Allora una k -forma chiusa $\eta \in \Omega_c^k(E)$ è una forma di Thom per $S \Leftrightarrow \int_{E_p} \tilde{\gamma} \wedge \eta = 0$.

Dimo. Sappiamo che $\tilde{\gamma}$ di Thom per $S \Rightarrow \int_E \tilde{\gamma} \wedge \eta = \int_S \eta$ e η chiusa è $\Omega^k(E)$. La mappa $s_0 \circ \pi : E \rightarrow E$ è omotopia all'identità $\Rightarrow [\eta] = (s_0 \circ \pi)^*[\eta] \Rightarrow \int_E \tilde{\gamma} \wedge \eta = \int_E \tilde{\gamma} \wedge \pi^* s_0^* \eta$. Considero

$U \subseteq S$ aperto bandizzante e dominio di una carta (a meno di restringere):

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow & \sim & \downarrow \pi_1 \\ U & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^n \end{array} \leftarrow \eta = \sum_{I,J} f_{I,J}(x,y) dx^I \wedge dy^J \Rightarrow \pi^*(s_0^*[\eta]) = \sum_{I,J} f_{I,J}(x,0) dx^I \wedge dy^J$$

$$* = \sum_{I,J} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \tilde{\gamma} \wedge f_{I,J}(x,0) dx^I \wedge dy^J = \sum_{I,J} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\gamma} \wedge f_{I,J}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\gamma}.$$

$\Rightarrow \int_{E_p} \tilde{\gamma} = \text{costante} =: K$ perché le fibre sono isotipe? + connesse. Sia η_0 una forma volumica su S

$$\text{e } \eta := \pi^* \eta_0. \quad \text{Allora } \int_S \eta_0 = \int_S \eta = \int_E \tilde{\gamma} \wedge \eta = K \int_S \eta_0 \Rightarrow K = 1. \quad \square$$

$\rightarrow M$ compatto, orientato, senza ∂ ; $N, W \subseteq M$ compatti, orientati, senza ∂ e trasversi. Sia $X = M \# W$

con $X = \emptyset$ (lo supponiamo) e' ancora una sottovarietà compatta con $\text{codim } X = \text{codim } N + \text{codim } W$ e si ha

$\nu X = \nu M \oplus \nu W$. La varietà X è naturalmente orientata; νM e νN sono orientati in νX b è in X .

(infatti v_1, \dots, v_K base $T_p S$ è positiva $\Leftrightarrow v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_K$ estesa su $T_p W$ è positiva in $T_p M$)

trasverso?

Teorema: M compatto, orientato, senza ∂ ; $N, W \subseteq M$ compatti, orientati, senza ∂ , $S = N \# M$. Allora

$$[N] \wedge [W] = [N \# W] \quad (\text{no dim.})$$

Esempio Ogni iperpiano $H \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è naturalmente orientato. Dato che gli iperpiani sono tutti isotopi, $[H] \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$

c'è indipendente dalla scelta di H . Ogni sottospazio proiettivo di codimENSIONE K $S \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è l'intersezione trasversa

$$\text{di } K \text{ iperpiani} \Rightarrow [S] = [H] \wedge \dots \wedge [H] = [H]^K. \quad \text{In particolare } [H]^n \in H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \text{ è il duale di Poincaré}$$

di un punto, che è il generatore di $H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \Rightarrow H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\text{algebra}} \mathbb{R}[x]/(x^{n+1})$ con $x = [H] \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$.

Def. (intersezione algebrica): solite ip. con M e W che hanno dimensione complementare. Allora $X = M \# W$

è una collezione finita di punti orientati, discorsi con un ± 1 dipendente da come $T_p W \oplus T_p N$ matcha

con $T_p N$. L'intersezione algebrica $i(M, W) = \sum$ orientazione dei punti di X .

Corollario: $\text{codim } S = K$, $\text{codim } W = n - K \Rightarrow i(S, W)$ è invariante per omotopia.

Oss. se $\dim M = 2n$, $H^*(M) \times H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ è non deg.; $\omega, \eta \in H^n(M)$, $\omega \wedge \eta = (-1)^n \eta \wedge \omega$ (S9)

\Rightarrow simm. per n pari e antisimm. per n dispari \Rightarrow ho una segnatura (invariante per le varietà di dim multipli di 4).

Esempio: sulle superfici ho forme antisimm: $H^*(M) \times H^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ Ex: $H^*(S^2) = \mathbb{R}^{2g}$

Geometria differenziale

Setting: (M, g) varietà prl, g tensore metrico di tipo (p, q) con $p+q=n$.

Oss. $v \in T_p M$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ dove $\langle v, w \rangle = g(v)(v, w)$ (norma $\Leftrightarrow g=0$ cioè definito positivo).

Def.: $v \in T_p M$ di tipo spazio se $\langle v, v \rangle > 0$, tempo se $\langle v, v \rangle < 0$, luce se $= 0$.

Oss. nel caso riemanniano è ben definita l'angolo tra due vettori $\neq 0$ (come?)

Def (lunghezza curva): $\gamma: [a, b] \xrightarrow{I} M$ liscia. Allora $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M$.

Oss. $L(\gamma)$ è invariante per riparametrizzazione. (cioè $\eta: J \xrightarrow{\text{intervallo chiuso}} I$ liscia, monotona, suriettiva. $\gamma \circ \eta$ mag. η).

Def. (distanza fra punti): (M, g) Riemanniana, connessa. $p, q \in M$, $d(p, q) = \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma: [a, b] \rightarrow M, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \}$. a volte è davvero un tipo distanza tra $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Oss. la def. ha senso anche se M non Riemanniana ma succedono cose strane. (non è distanza).

Prop.: d è distanza. (e è compatibile con la topologia della varietà).

dim. $\cdot d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$: \Rightarrow ovvia; \Leftarrow proviamo che se $p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0$. Sia $\varphi: U \rightarrow V$ una curva

con $p \in U$ e $\varphi(p) = q \in V$. Scegliamo un disco $D \subset U$ di un qualche raggio r centrato nell'origine.

g letto in carte su D è g_{ij} dipendente in maniera liscia da $x \in D$. $\forall x \in D$ e $v \in T_x \mathbb{R}^n$, siano $\|v\|_E$

e $\|v\|_g$ risp. la norma euclidea e la norma di g di v . Dato che D è compatto $\exists R > m > 0$ t.c.:

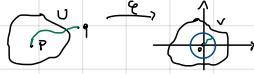
~~qui siamo anche dicendo che dentro ogni aperto di M c'è una d-palla e viceversa ogni d-palla è aperta (ovvio) \Rightarrow è compatibile~~
 $m \|v\|_E < \|v\|_g < M \|v\|_E \quad \forall x \in D \text{ e } \forall v \in T_x \mathbb{R}^n$. Sia α una curva in V che va da 0 a un qualche

punto in ∂D . La lunghezza euclidea è $\geq r \Rightarrow$ la g-lunghezza è $> rm$. Dato che ogni curva γ che

connette p con q deve intersecare $\varphi^{-1}(\partial D) \Rightarrow L(\gamma) \geq rm \Rightarrow d(p, q) \geq rm$.

\hookrightarrow φ mantiene le distanze? in ogni caso ci basta di metà,

cioè che sia > 0



$\cdot d(p, q) = d(q, p)$: ovvio;

$\cdot d(p, q) + d(q, z) \geq d(p, z)$: se γ va da $p \rightarrow q$ e η va da $q \rightarrow z$ allora possiamo concatenare in maniera

~~per avere la liscezza~~

liscia $\gamma \circ \eta$ per avere una curva da $p \rightarrow z$. (si riparametrizzino γ e η usando le funzioni di transizione). □

Def. (forma volume): (M, g) orientata prl, ω_g forma volume t.c. $\omega_g(p)(v_1, \dots, v_n) = 1$ se v_1, \dots, v_n

è base ortonormale positiva ($\langle v_i, v_j \rangle = \pm \delta_{ij}$) Ex: ω_g ben definita

Prop. In carte $\omega_g = \sqrt{|\det g_{ij}|} \overbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}^{(\omega)^E}$ (enclosed puncture).

dim. per il teorema spetrale se $x \in \mathbb{R}^n$, $g_{ij}(x) \Rightarrow \exists$ base orthonormale per $g^E = g_{ij}$ e ortogonale per g_{ij} .

Sappiamo $g_{ij} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{pmatrix}$ e e_1, \dots, e_n orthonormali per $g^E \Rightarrow \frac{e_1}{\|e_1\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|}$ orthonormali per g_{ij} . \square

Esempi importanti:

• $\mathbb{R}^{p,q} = (\mathbb{R}^n, g^{p,q})$ con $g^{p,q} = \begin{pmatrix} -I_q & \\ & I_p \end{pmatrix}$ (segnatura p,q), $\langle x, y \rangle = \sum x_i^2 - \sum x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2$

• $\mathbb{S}^{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p+q} \mid \langle x, x \rangle = 1\} \quad (\langle x, x \rangle = -x_1^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2)$

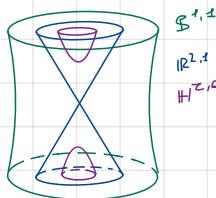
• $\mathbb{H}^{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \mid \langle x, x \rangle = -1\}$.

$$\begin{aligned} \omega_g(p)(v_1, \dots, v_n) &= \\ &= \det A \omega_g(p)(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

base orthonormale

Prop. $\mathbb{S}^{p,q}$ e $\mathbb{H}^{p,q}$ sono sottovarietà di \mathbb{R}^{p+q+1} e $\forall x \in \mathbb{S}^{p,q}$, $T_x \mathbb{H}^{p,q}$ si ha $T_x \mathbb{S}^{p,q} = x^\perp$ e

$T_x \mathbb{H}^{p,q} = x^\perp$.



dim. Facciamo per $\mathbb{S}^{p,q}$ (uguale per $\mathbb{H}^{p,q}$). Ors, $\langle x+y, x+y \rangle = \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\text{in } \mathbb{S}^{p,q}} + 2 \langle x, y \rangle + \underbrace{\langle y, y \rangle}_{\text{in } \mathbb{S}^{p,q}} \Rightarrow$
 ↪ ↪ parte lineare $\star \rightarrow$ vedo anche così:
 $d f_x(y) = 2 \langle x, y \rangle$ con $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad x \xrightarrow{f} \langle x, x \rangle \quad x \in \mathbb{S}^{p,q}$. Dunque se $x \neq 0$ non è banale \Rightarrow tutti i valori $\neq 0$ sono regolari. \square

$$\begin{aligned} \star d f_x(y) &= (f \circ \gamma)'(0) = (\underbrace{\langle x+ty, x+ty \rangle'}_{\gamma(t)=x+ty})(0) = (\underbrace{\langle x, x \rangle}_{\text{in } \mathbb{S}^{p,q}} + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle)'(0) \\ &= 2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Def. (sottovarietà pseudo-riemanniana): (π, g) p.R. $N \subseteq \mathbb{R}$ sottovarietà e' sottovarietà p.R. se $g|_{T_p N}$ e' non degenera $\forall p \in N$.

Oss. N sottovarietà p.R eredita struttura p.R con $g|_N$.

Oss. Se π e' Riemanniano \rightarrow ogni $N \subseteq \pi$ eredita struttura riemanniana.

Prop. $\mathbb{S}^{p,q}, \mathbb{H}^{p,q}$ sono sottovarietà p.R di segnatura (p,q) .

dim. per $\mathbb{S}^{p,q}$ (uguale per $\mathbb{H}^{p,q}$): $T_x \mathbb{S}^{p,q} = x^\perp$ e il prodotto scalare ristretto a x^\perp ha proprio segnatura p,q ($\langle x, x \rangle = 1$). \square

Esempi riemanniani:

• $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n,0}$ sp. euclideo $\bullet \mathbb{H}^n = \mathbb{H}^{n,0} \cap \{x > 0\}$ sp. iperbolico (varietà riemanniana dentro varietà lorentziana)

• $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n,0}$ sfera

Def. (isometria): $(\pi, g), (N, h)$ p.R, $\varphi: \pi \rightarrow N$ chiamata isometria se $\forall p \in \pi, d\varphi_p: T_p(\pi) \rightarrow T_{\varphi(p)} N$

e' isometria cioè $\forall v, w \in T_p \pi \quad \langle v, w \rangle = \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle$.

$$g(p)(vw) \quad h(\varphi(p)) (d\varphi_p(v), d\varphi_p(w))$$

Def. ($O(p, q)$): $J_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_q \\ I_p \end{pmatrix}$, $O(p, q) = \{A \in M(n) \mid {}^t A J_{p,q} A = J_{p,q}\} = \{\text{iso di } \mathbb{R}^n \text{ che preservano}$

$\eta^{p,q}$ con $p+q=n\}$. In particolare $O(p, 0) = O(p)$ è il gruppo ortogonale.

Prop.: ① $x \mapsto Ax+b$ $A \in O(p, q)$, $b \in \mathbb{R}^n$ isometrica di $\mathbb{R}^{p,q}$

\rightarrow ④ e ⑦ uguali a ③?

② $x \mapsto Ax$, $A \in O(p+1, q)$ isom. di $\mathbb{S}^{p,q} \subseteq \mathbb{R}^{p+1,q}$

③ $x \mapsto Ax$, $A \in O(p, q+1)$ isom. di $H^{p,q} \subseteq \mathbb{R}^{p,q+1}$

$$(Ax)^T J_{p,q+1} (Ax) = x^T A^T J_{p,q+1} A x$$

dimm. ③ Se $x \in H^{p,q}$ $\langle x, x \rangle = -1 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = -1$ cioè $Ax \in H^{p,q+1}$ (ben definito). In particolare,
 d'Alx: $T_x H^{p,q} \rightarrow T_{Ax} H^{p,q+1}$ $v \mapsto Av$ è la matrice
 visto prima di una matrice \rightarrow è isometria per questa.

Def. (frame su $M_{p,R}$): Un frame su $(M, g)_{p,R}$ è il dato di (p, v_1, \dots, v_n) , $p \in M$, v_1, \dots, v_n base

di $T_p M$ t.c. v_i per $i \leq p$ sia di tipo spazio e v_i per $i > p$ siano di tipo tempo (segnato $(p, n-p)$). \uparrow libro
 la prende ottimale

Ese. le isometrie ①, ②, ③ agiscono in modo libero e transitivo sul frame di $\mathbb{R}^{p,q}$, $\mathbb{S}^{p,q} \subset H^{p,q}$.

Connessioni: N.B.: non serve un tensore metrico per definire le connessioni. Serve per definirne una preferenza (Leri-Cita). La connessione ha come applicazione il poter formalizzare il concetto di "andare dritto"

Def. (connessione): una connessione ∇ è un'operazione che assegna a ogni $v \in T_p M$ ∇_v e a ogni campo

vettoriale X definito in un intorno di p , un altro vettore tangente $\nabla_v X \in T_p M$ chiamato derivazione

covariante di X lungo v t.c. valgono:

① se $X = Y$ sono uguali in un intorno di p allora $\nabla_v X = \nabla_v Y$ (locale)

② linearità in entrambi i termini: $\nabla_v (\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_v (X) + \mu \nabla_v (Y)$ e $\nabla_{\lambda v + \mu w} (X) = \lambda \nabla_v (X) + \mu \nabla_w (X)$

③ Leibniz: $\nabla_v (fX) = \underbrace{\nabla_v f}_{v(f)} X(p) + f(p) \nabla_v X$

④ lascia: $\forall X, Y \in \mathcal{F}(U) \quad p \mapsto \nabla_{Y(p)} X$ è un altro campo vettoriale in U , che denotiamo per semplicità

con $\nabla_Y X$. ($\nabla_{Y(p)} X$ varia in maniera liscia con $p \in U$).

Oss. tutti questi assiomi sono soddisfatti da ∂_v derivata direzionale in \mathbb{R}^n : in effetti: $\partial_v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e b

cosiddetta connessione euclidea su \mathbb{R}^n . \downarrow $\partial: T_p M \times U(p) \rightarrow T_p M$ e $\partial_v X = v^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} e^j$

lineare nella comp. in basso f $X \leftarrow$ Leibniz

In carte: (M, ∇) , $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = v^i e_i \Rightarrow \nabla_v X = v^i \nabla_{e_i} X = v^i \nabla_{e_i} \left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$

$$= v^i \left(\left(\nabla_{e_i} X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j(p) \underbrace{\nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial x^j}}_{\substack{\text{siano in} \\ \text{carte dunque} \\ \nabla_{e_i} = \partial_{e_i}}} \right) = v^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} e^j + v^i X^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) e^k = \boxed{\partial_v X + v^i X^j \Gamma_{ij}^k e^k}$$

questa quantità la possiamo scrivere sempre in funzione di $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ (cioè e_1, \dots, e_n) $\Rightarrow \boxed{\nabla_{e_i} e^j = \Gamma_{ij}^k e^k}$

e Γ_{ij}^k sono i simboli di Christoffel con $\Gamma_{ij}^k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sono n^3 funzioni.

\uparrow
 dipendono dalla carta!!!

↑
 solita derivata
 direzionale +
 termine di connessione
 dato dai simboli
 di Christoffel

Vale anche il contrario: date n^3 funzioni qualsiasi $M_{ij}^k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire $\nabla_v X = \partial_v X + v_i X^j M_{ij}^k e_k$ e questa soddisfa ①, ②, ③, ④ \Rightarrow c'è una connessione ∇ su \mathbb{R}^n . Dunque $\{\text{connessioni su } \mathbb{R}^n\} \xleftrightarrow{1:1} \{M_{ij}^k\}$.

Prop.: dato ∇ connessione e dato $T \in \Gamma_2^1(\pi)$, ha senso definire una nuova connessione $\nabla' = \nabla + T$:

$$\nabla'_v X = \nabla_v X + T(v, X(p)).$$

$$\downarrow T_p \times T_p \times T_p \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

dim. Siamo di lisce, lineari e locali \Rightarrow ok. Leibniz:

$$\nabla'_v(fX) = \nabla_v(fX) + T(v, fX(p)) = v(f) X(p) + f(p) \nabla_v X + f(p) T(v, X(p)) = v(f) X(p) + f(p) (\nabla_v X + T(v, X(p)))$$

Prop.: date ∇, ∇' connessioni, ottengo $T \in \Gamma_2^1(\pi)$ come $T(v, w) := \nabla_v X - \nabla'_v X$ ben definito $\forall p \in M \quad \forall v, w \in T_p M$.

dim. in carte $v = v^i e_i, w = w^j e_j, X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} : T(v, w) = \nabla_v X - \nabla'_v X = \partial_v X + v^i w^j M_{ij}^k e_k - \partial_v X - v^i w^j \tilde{M}_{ij}^k e_k = v^i w^j (M_{ij}^k - \tilde{M}_{ij}^k) e_k$ e ponendo proprio $\tilde{M}_{ij}^k := M_{ij}^k - \tilde{M}_{ij}^k$ si ha $T \in \Gamma_2^1(\pi)$. \square

Dunque ho questi 3 operatori $\mathcal{F}(\pi) \times \mathcal{F}(\pi) \rightarrow \mathcal{F}(\pi)$ \mathbb{R} -bilineari:

- 1° bracket di Lie: $(x, y) \mapsto [x, y]$ $\stackrel{?}{\rightarrow}$ se ho $\nabla \Rightarrow$ derivata covariante: $(x, y) \mapsto \nabla_x y$;
- 2° $\stackrel{?}{\rightarrow}$ C^∞ -bilineare
- 3° se ho $\Gamma_2^1(\pi)$: $(x, y) \mapsto T(x, y)(p) = T(x(p), y(p))$

Derivata covariante di campi lungo curve

Def. (campo su una curva): $\gamma: I \rightarrow M$ curva. Un campo su γ è $X: I \rightarrow T\pi$ t.c. $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$.

Oss.: se $v \in T_p M$ e $X \in \mathcal{F}(U(p))$, $\nabla_v X$ dipende solo dalla restrizione di X su una qualsiasi curva tangente

a v , infatti in carte $\nabla_v X = \partial_v X + v^i X^j M_{ij}^k e_k$ dunque dipende da $v, X(p)$ e ∂_v che dipendono appunto

solo dalla restrizione di X su una qualsiasi curva tangente.

il differenziabile è invertibile

Def. (derivata covariante lungo una curva): Dato $t \in I$ supponiamo $\gamma'(t) \neq 0 \Rightarrow$ localmente γ è embedding.

$\begin{cases} \text{campo su } \gamma \\ \text{campo t.c. } X'(\gamma(t)) = X(t) \end{cases}$

Definizione la derivata covariante lungo γ : $D_t X := \nabla_{\gamma'(t)} X'$ ($D_t X$ è un campo vettoriale dove posso considerare

grande trovare lo perché γ local embedding?

anche un X' che è estensione di X fuori da γ diverso da X , tanto per l'oss. prec. dipende solo da cosa fa

in γ .

$$X'(\gamma(t)) = X(t)$$

!

$$\downarrow$$

non dipende dalla carta! ?

$$\text{In carte: } D_t X = \nabla_{\gamma'(t)} X = \partial_{\gamma'(t)} X' + \gamma'(t)^i (X'(\gamma(t)))^j \Gamma_{ij}^k e_k = \frac{dX}{dt} + \gamma'(t)^i X^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) e_k. \quad (\text{Se } \gamma \text{ non è emb. in } \mathbb{R}^n \text{ se } \gamma' = 0 \Rightarrow DX = \dot{X})$$

Def. (campo parallelo): un campo X su una curva $\gamma: I \rightarrow M$ è parallelo se $DX = 0$. ($\forall t$)

Teorema: dato $t_0 \in I$ e $v \in T_{\gamma(t_0)} M$, $\exists!$ campo parallelo \tilde{X} su γ che estende v cioè t.c. $\tilde{X}(t_0) = v$.

dim. In carte, X è parallelo $\Leftrightarrow D_t X = \frac{dX}{dt} + \gamma'(t)^i X^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) e_k = 0$ cioè $\frac{dX^k}{dt} = -\gamma'(t)^i X^j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$

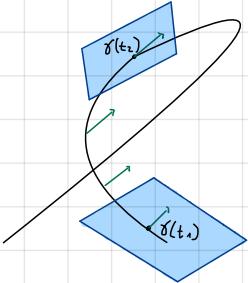
che è un sistema di eq. diff. al primo ordine con condizioni iniziali $X^k(t_0) = v^k \forall k$. Dunque, per Cauchy esiste!

soluzione locale t.c. $X(t) = v$ a.t. che c'è anche lineare la soluzione \exists su tutto I . \square

Trasporto parallelo

Def. (trasporto parallelo): (M, ∇) , $\gamma: I \rightarrow M$. Il trasporto parallelo lungo γ è $\forall t_1, t_2 \in I$ una mappa

$$\Gamma(\gamma)_{t_1}^{t_2}: T_{\gamma(t_1)}M \rightarrow T_{\gamma(t_2)}M \quad \text{t.c. } v \mapsto X(t_2) \text{ con } X \text{ unica estensione parallela di } v.$$



Prop.: $\Gamma(\gamma)_{t_1}^{t_2}$ è un isomorfismo.

dim: è lineare perché X è ottenuto da eq. lineari \Rightarrow le soluzioni formano uno sp.vettoriale. È iso perché ha come inversa $\Gamma(\gamma)_{t_2}^{t_1}$. \square

$$X(v + \tilde{v}) \stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{X(t_2)}_{ii} \stackrel{\text{def.}}{=} \underbrace{\tilde{X}(t_2)}_{ii} \stackrel{\text{def.}}{=} \tilde{X}(t_2) \quad \begin{array}{l} \text{le sol. formano uno sp. vettoriale} \rightarrow X + \tilde{X} \in \\ \text{soluzioni e per unicità} \\ \text{dove essere } \tilde{X} \end{array}$$

Situazione: (M, ∇) ∇ non trasp. se non derivano compi tensoriali

Def.: (M, ∇) , $T \in \Gamma_K^b(M)$; $v \in T_p M$ $\nabla_v T \in \Gamma_K^b(T_p M)$ da definire così.

Si estende a campi tensoriali: Prendiamo un embedding $\gamma: I \rightarrow M$ con $0 \in I$, $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Il trasporto parallelo $\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}$

$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}: \Gamma_h^k(T_{\gamma(t_0)}M) \rightarrow \Gamma_h^k(T_{\gamma(t_1)}M)$. Definiamo $\nabla_v T = \frac{d}{dt} \Gamma(\gamma)^0(T(\gamma(t)))|_{t=0}$.

Lemma: $\nabla_v T$ non dipende da γ , e in carte è del tipo: $\nabla_v T = \partial_v T + \text{termini correttivi}$. (no dim.)

ad esempio: * $\nabla_v X = \partial_v X + v^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$ cioè $(\nabla_v X)^k = \partial_v X^k + v^i X^j \Gamma_{ij}^k$ $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ ($v, 0$)

$$\bullet \quad \nabla_v f = \partial_v f \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (0, 0)$$

$$\bullet \quad \nabla_v \omega = \partial_v \omega - v^i \omega_j \Gamma_{ik}^j \quad \omega \in \Lambda^1(M^n) \quad (0, 1)$$

è ancora simmetrica

$$\bullet \quad g \text{ tensore metrico } (g_{ij} = g_{ji}), (\nabla_v g)_{jk} = \partial_v g_{jk} - v^i g_{ik} \Gamma_{ij}^k - v^i g_{kj} \Gamma_{ik}^j$$

Def.: (M, ∇) la torsione di ∇ è $T \in \Gamma^1_2(M)$ definito in questo modo:

$$p \in M; v, w \in T_p M \quad T(p)(v, w) = \nabla_v Y - \nabla_w X - [X, Y](p) \quad (*)$$

X, Y estensioni cioè $X(p) = Y(p) = v$

Dimostriamo che non dipende dalle estensioni:

$$\begin{aligned} \text{In carte: } (*) &= v^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} + v^i Y^j \Gamma_{ij}^k e_k - w^i \frac{\partial X}{\partial x^i} - w^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k - v^i \frac{\partial Y}{\partial x^i} + w^i \frac{\partial X}{\partial x^i} = \\ &= v^i w^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) e_k \leftarrow \text{non dipende da } X \text{ e } Y \end{aligned}$$

cambio di indice

64

Def. ∇ è simmetrico se tensione $\equiv 0$.

Oss. ∇ simm. $\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ (non dipende dalla cart. perché $T=0$ è una cosa intrinseca).

Teorema: (M, ∇) connessione, g tensione metrica. I seguenti fatti sono equivalenti:

① $\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}: T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ g-isometria $\forall \gamma, t_0, t_1; \leftarrow \nabla$ è compatibile con g

② $\nabla g = 0$ ($\forall v \in T_p M \quad \forall p \in M$).

③ $\nabla_v \langle x, y \rangle = \langle \nabla_v x, y \rangle + \langle x, \nabla_v y \rangle, \forall v \in T_p M \quad \forall x, y \in \mathcal{X}(U(p)) \quad \leftarrow \langle x, y \rangle = g(p)(x(p), y(p))$

④ $\frac{d}{dt} \langle x, y \rangle = \langle D_t x, y \rangle + \langle x, D_t y \rangle, \forall \gamma: I \rightarrow M, X, Y$ campi su γ (se $X, Y: I \rightarrow M$ allora $\langle X, Y \rangle: I \rightarrow \mathbb{R}$ dove $\langle X, Y \rangle = g(\gamma(t))(X(t), Y(t))$)

$\nabla g = \frac{d}{dt} \Gamma(\gamma)_t^a (g(\gamma(t)))|_{t=0}$ isometria $\Rightarrow g$ rimane invariante

dim. $1 \rightarrow 2$:  ci sono dei prodotti scalari sui tangentti ma dato che sono identificati a meno di isometrie il prodotto scalare è sempre lo stesso

$2 \rightarrow 3$: Esercizio: (descrizione assiomatica di ∇): ∇ è l'unica operazione su $T_b^K(M)$ t.c. $\forall p, \forall v \in T_p M$

$\forall T \in T_b^K(M) \quad \nabla_v T \in T_b^K(T_p M)$ t.c.: ① Locale: se $T = T'$ vicino a $p \Rightarrow \nabla_v T = \nabla_v T'$

② Lineare $\nabla_v T$ sia in v che in T

③ Leibniz $\nabla_v (T \otimes T') = \nabla_v T \otimes T' + T \otimes \nabla_v T'$

④ sui campi è la connessione ∇ è funz.

⑤ commuta con contrazioni ⑥ ∇ dipende da maniera liscia da p
(come nel caso dei campi)

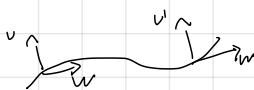
$$\langle x, y \rangle = x^i \delta_{ij} x^j = C(c(g_{ij} x^k y^l)) = C(c(g \otimes X \otimes Y)), \text{ dunque:}$$

$$\nabla_v \langle x, y \rangle = C(c(\nabla_v(g \otimes X \otimes Y))) \stackrel{\text{Leibniz versione tensione}}{=} C(c(c(g \otimes \nabla_v X \otimes Y))) + C(c(c(g \otimes X \otimes \nabla_v Y))) = \\ = \langle \nabla_v x, y \rangle = \langle x, \nabla_v y \rangle$$

$3 \rightarrow 4$: si prende $v = \gamma'(t)$: $\frac{d}{dt} \langle x, y \rangle = \nabla_{\gamma'(t)} \langle x, y \rangle$

per def. di $\Gamma_{t_0}^{t_1}$ sono //
 X, Y paralleli, allora $\frac{d}{dt} \langle x, y \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \text{costante}$



□

Teorema: Data (M, g) pseudo-Riemanniana $\exists! \nabla$ (connessione di Levi-Civita) che sia simmetrica e $(\nabla g = 0)$

compatibile con g . In carte i simboli di Christoffel di ∇ sono

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Oss.: Se g è un prodotto scalare su V sp. vett. di dim. finita induce g prodotto scalare su V^* anche su M

Se v_1, \dots, v_n base di V , v^1, \dots, v^n base di V^* . Allora $g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$ (una inversa dell'altra).

dim. Unicità: In carte se g è simmetrica e compatibile $\alpha = \nabla_v g = \partial_v g - v^i g_{ij} \dots \Gamma_i \dots - v^i g \dots \Gamma_i$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \Gamma_{ik}^l = \Gamma_{kl}^i$$

Se $v=e_i$: $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g_{ij} \Gamma_{ik}^l + g_{ik} \Gamma_{ij}^l$. Ciclano i, j, k 3 volte. Facciamo $b = 1^\circ + 2^\circ - 3^\circ$ e per simmetria

si annulla quasi tutta. Si ottiene $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g_{kl}\Gamma_{ij}^l$. Moltiplica per l'inversa e per $\frac{1}{2}$ e ha fatto.

Esistenza: se si definisce come sopra ∇ simmetrica (ovvia) e ∇ anche compatibile, deve essere quella per unicità, poi incolla. □

Sistematico (M, g) g non ∇ simmetrica e compatibile con g , $T=0$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Ex.

Qss. ∇^L commuta con le isometrie, cioè se $f: M \rightarrow N$ isometria $\Rightarrow \nabla^M = f^* \nabla^N$. Se f diffeo

$$\nabla^M_v(x) = df_p^{-1}(\nabla_{df_p(v)}(f_* X)) \quad v \in T_p M \quad (\text{differ spostano cose guardate e indicano}).$$

Prop. (le connessioni si comportano bene con le sottovarietà): $M \subset P \subset N \subseteq M$ sottovarietà di P . $\forall v \in T_p N$, per N campo in $U(p)$ in M , allora

$$\nabla^N_v X = \pi \left(\nabla^M_v X \right) \quad \pi: T_p M \rightarrow T_p N \quad \text{proiezione regolare} \quad \text{ortogonale}$$

dim. Localmente posso supporre $N = \mathbb{R}^n \times \text{loc}$, $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$, $p=0$ (cioè \exists carta per cui sia così).

$g_{ij}(0)$ posso supporre sia diagonale (dato che è diagonalizzabile e dunque in un punto preciso posso supporre diagonale).

$\Rightarrow g_{ij}(0)$ diagonale. I $\Gamma_{ij}^k(0)$ di ∇^N sono quelli di ∇^M con $1 \leq i, j, k \leq n$ (guardare formula e essere fatto

che g_{ij} è diagonale). Ora: $\nabla^N_v X = v^i \frac{\partial X}{\partial x^i} + v^j X^j \Gamma_{ij}^k e_k$

l'indice nella formula sopra che varia è k questo è lo stesso per entrambe le connessioni. questo si decompon in componenti tangente (uguale) e ortogonale che viene proiettata sull'ellisse dalla proiezione π

e dato che g è diagonale perché le coordinate da noi a M di N sono zero

$\Gamma_{ij}^k, g_{il}, g_{jl}$ sono $\neq 0 \Leftrightarrow l=i, j=k$ dunque quando derivo in quelle direzioni ho sempre zero

Corollario: $N \subseteq M$ $\gamma: I \rightarrow N$ $X: I \rightarrow TN$ campo lungo γ . $D^N X = \pi(D^M X)$. □

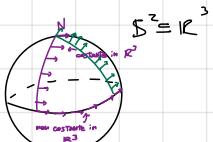
Esempio: \mathbb{R}^n ($\mathbb{R}^{P,q}$, $\gamma_{P,q}$) $\rightsquigarrow M_{ij}^k = 0 \rightsquigarrow \nabla^N_v = \partial_v \rightsquigarrow$ se si ha $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{P,q}$ $X: I \rightarrow \mathbb{R}^{P,q}$

$DX = X'$ allora " X parallelo \Leftrightarrow costante"

Corollario: $N \subseteq \mathbb{R}^{P,q}$ per $\gamma: I \rightarrow N$, $X: I \rightarrow TN$ X parallelo $\Leftrightarrow DX = 0 \Leftrightarrow \pi(X') = 0 \Leftrightarrow X'(+) = 0$

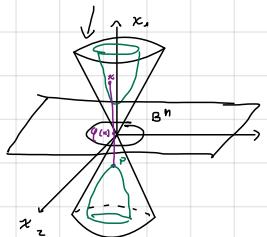
ortogonale a $T_{\gamma(t)} N$.

Ese. $N = S^{P,q}, H^{P,q}$:



Tre varietà Riemanniane fondamentali: \mathbb{R}^n ; S^n ; $H^n = \mathbb{H}^{n,0}$ sp. iperbolico.

$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle x, x \rangle = 1\} \cap \{x_1 > 0\}$ $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Vettori base $= -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$. $\gamma = (-1, 0, \dots, 0)$.



Proiettando lungo ρ come in viola nella figura si ottiene $\varphi: H^n \rightarrow B^n$ (66)

differenziabile.

Def.: Sia g il tensore metrico su B^n ottenuto trasportando $\eta|_{H^n}$ tramite φ .

Prop.: $g = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g_E^{\text{euclideo}}$, $g_{ij} = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \delta_{ij}$

Modello del disco di Poincaré dello sp. iperbolico.

Trasformazioni conformi del tensore metrico

(M, g) Riem. $f: \Pi \rightarrow (0, \infty)$ lascia $g' = f g$

conformi

Prop.: due metriche Riemanniane g, g' su M danno gli stessi angoli $\forall p \in M \Leftrightarrow$ sono ottenute una dall'altra con f

dim. ovvia, algebra lineare. \square

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\} \quad B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \quad \varphi: B^n \rightarrow H^n \text{ inversione lungo una sfera.}$$

Prop.: Il tensore che si ottiene su H^n è $g(x) = \frac{1}{x^n} g_E$

Geodetiche

non serve una metrica

(in realtà per avere una geodetica basta una connessione)

Dà una connessione si definiscono le geodetiche. Dunque se ho (M, g) $\Rightarrow \nabla$ è geodetica.

Def.: (M, g) p.R. $\gamma: I \rightarrow M$ è geodetica se il campo velocità $\gamma'(t)$ è parallelo lungo γ . (Es. $\gamma(t) = p$ costante)

Oss. Se γ è una geodetica, allora $\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle D\gamma', \gamma' \rangle + \langle \gamma', D\gamma' \rangle = 0$. Allora $\gamma'(t)$ è parallelo a se stesso (da cui serve tensore metrico) e con la stessa norma.

Oss. γ' è parallelo (un campo parallelo è sempre o nullo o mai nullo) allora γ è costante o $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$

\Rightarrow regolare.

nel' essere geodetico è importante la param.

Prop. (Omogeneità): $\gamma: I \rightarrow \Pi$ geodetica, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\frac{t}{c})$ è geodetica

dim. $\nabla_v X = 0 \quad v = \gamma'(t) \quad X = \gamma' \Rightarrow \nabla_{cv} c X = c^2 \nabla_v X = 0$ \square

l'intervallo di def. è massimale

Teo.: (M, ∇) p. $\in M$, $v \in T_p M$, $\exists! \gamma_v: I_v \rightarrow M$ geodetica massimale t.c. $\exists t \in I_v \quad \gamma_v(t) = p \quad \gamma_v'(0) = v$.

dim. In carte $\gamma: I \rightarrow M$ $X: I \rightarrow T\gamma$ diventano $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ $X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $DX = X' + v^i X^j \Gamma_{ij}^K e_K = 0$ cioè $(X = \gamma', v = \gamma') \quad \ddot{\gamma}^i + \dot{v}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^K e_K = 0$ (vettoriale) $\Rightarrow \ddot{\gamma}^K + \dot{v}^i \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^K = 0$ (scalare).

Ci viene dunque un prob. di Cauchy del II ordine: $\begin{cases} \ddot{x}^K = -\dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^K \\ x(0) = p \\ \dot{x}(0) = v \end{cases} \Rightarrow \exists! \text{ loc. (c'è sempre dipend. liscio dai dati iniziali). } \square$

Prop.: $N \subseteq \mathbb{R}^{p,q}$ $\gamma: I \rightarrow N$ geod. $\Leftrightarrow \gamma''(t)$ è ortogonale a $T_{\gamma(t)}N$. (67)

dim. viene da fatto che il campo è proprio $\gamma'(t)$. □

Oss. su $(\mathbb{R}^{p,q}, \eta_{p,q})$ $\Gamma_{ij}^k = 0$ $\ddot{x}^k = 0 \Rightarrow x(t)$ retta percorsa a velocità-constante cioè $x(t) = p + t v$.

Prop.: $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $p \in S^n$ $v \in T_p S^n$. Per omogeneità possiamo supporre $\|v\|=1$. $\gamma_v(t) = p \cos t + v \sin t$ ← cerchio max

dim. Innanzitutto $\|\gamma_v(t)\|=1$. $\gamma_v''(t) = -\gamma_v(t)$ e dunque è ortogonale al tangente per def. Poi si ha

$$\gamma_v(a) = p \quad \gamma_v'(a) = v. \quad \square$$

iperbole (differente con prima c'è che queste sono iniettive al contrario delle circ.).

Prop.: $p \in H^n$ iperboloido. $v \in T_p H^n = p^\perp$, $\|v\|=1$, $\eta_{n,1} | \mathbb{R}^{n,1}$. $\gamma_v(t) = \cosh t \cdot p + \sinh t \cdot v$.

dim. $\langle \gamma_v(t), \gamma_v'(t) \rangle = \cosh^2 t \langle \overset{-1}{p}, \overset{1}{p} \rangle + \sinh^2 t \langle \overset{1}{v}, \overset{1}{v} \rangle = -1$. $\gamma_v(a) = p$, $\gamma_v'(a) = v$ e $\gamma_v''(t) = \gamma_v(t) = p \in (p^\perp)^\perp$

Oss. in questi spazi le geodetiche \exists sempre $\forall t$. (si dice che gli spazi sono geodeticamente completi).

Geodetiche del piano iperbolico nel modello del semipiano: $H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ $g_{ij} = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}$

$$(1) \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \text{gli altri sono nulli} \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \quad (\text{ex consegne})$$

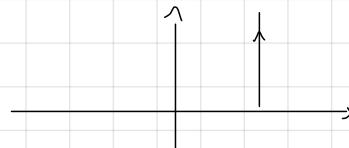
$$\text{L'eq delle geodetiche è } \ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{dunque per } k=1: \begin{cases} \ddot{x}^1 + (\dot{x}^1)^2 \Gamma_{11}^1 + 2 \dot{x}^1 \dot{x}^2 \Gamma_{12}^1 + (\dot{x}^2)^2 \Gamma_{21}^1 = 0 \\ \ddot{x}^2 + (\dot{x}^1)^2 \Gamma_{11}^2 + 2 \dot{x}^1 \dot{x}^2 \Gamma_{12}^2 + (\dot{x}^2)^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{dunque } \begin{cases} \ddot{x}^1 - 2 \frac{\dot{x}^1 \dot{x}^2}{y} = 0 \\ \ddot{x}^2 - \frac{1}{y} (\dot{x}^1)^2 - \frac{1}{y} (\dot{x}^2)^2 = 0 \end{cases} \quad \text{che ha soluzioni:}$$

$$\begin{cases} \text{1° sol.: } x = c \\ \text{(ovvio)} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{y} \Rightarrow y = e^{dt} \quad \text{con } c, d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

geodetiche con velocità 1dl infatti $\gamma(t) = (c, e^{dt})$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\|_H = \|(0, de^{dt})\|_H = \frac{\|(0, de^{dt})\|}{e^{dt}} = 1dl \quad (\text{costante})$$



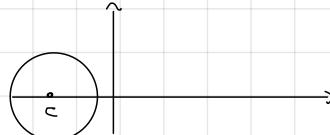
$$\begin{cases} \text{2° sol.: } x = \lambda \tanh dt + c \\ \text{(non ovvio)} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \lambda \frac{1}{\cosh dt} \end{cases}$$

$$\text{verifichiamo che funzionino: } \dot{x} = \lambda \frac{\cosh^2 dt - \sinh^2 dt}{\cosh^2 dt} \cdot d = \lambda d \frac{1}{\cosh^2 dt}$$

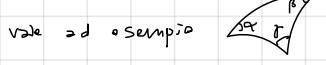
$$\ddot{x} = \lambda d \frac{-2 \cosh dt \sinh dt \cdot d}{\cosh^4 dt} = -2 \lambda d^2 \frac{\sinh dt}{\cosh^3 dt} \quad \dot{y} = -\lambda \frac{1}{\cosh^2 dt} \sinh dt \cdot d$$



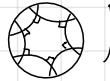
La soluzione sta sempre in $(x-c)^2 + y^2 = \lambda^2$



Dunque le geodetiche sono cerchi e rette (in geometria iperbolica con le geodetiche possono definire poligoni e



vale ad esempio $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ e $\text{Area} = \pi - \alpha - \beta - \gamma$; i sono esagoni con angoli retti;



Flusso geodetico

ci dà le geodetiche γ_v che servono qui:

(M, g) p.R. $\underbrace{g \text{ induce un campo } X}_{\gamma'_v: I_v \rightarrow TM} \text{ su } TM$. Sia $v \in T\mathbb{R}$ allora $X(v) = \gamma''_v(0) \in T_v TM$ ($\gamma_v: I_v \rightarrow M$)
 \downarrow
 $\text{è liscio perché } \gamma_v \text{ dipende in maniera liscia dai dati iniziali}$

Oss.: le linee integrali di X sono i sollevamenti γ_v' . X nō Φ è il flusso geodetico.

Mappa esponenziale

o più viste

$\exp: \mathbb{R}^n \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ $\exp: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ $d\exp_p = id$
 $A \mapsto e^A$

"campo almeno 1 secolo" (\circ c'è sempre in I_v perché $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$)

(M, g) p.R., $T\mathbb{R} \ni v = \gamma_v \in T\mathbb{R}: \forall t \in I_v \cap V \text{ intorno aperto di } 0 \subseteq T\mathbb{R}$. $\exp|_{T\mathbb{R}}$
 $p \in M$ $V_p = V \cap T_p M$ intorno aperto di $0 \in T_p M$. $\exp_p: V_p \rightarrow M$
 $v \mapsto \gamma_v(1)$

$\exp: V \rightarrow M$
 $v \mapsto \gamma_v(1)$

mappa esponenziale (è liscia perché se Φ è il flusso geod. $\exp(v) = \pi(\Phi(v))$)

Prop. (omogeneità): V_p è stabile rispetto a \circ .

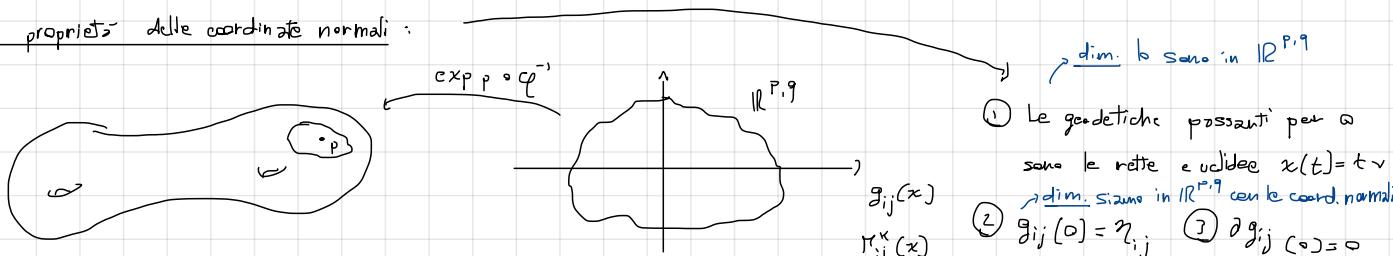
dim.: prendo $t v \in V_p$ e voglio che $t v \in V_p$. $\exists \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$ e dunque per $t \leq 1$ $\gamma_v(t)$ ha senso per $t p \Rightarrow$ tesi.
 \downarrow (mendo rette passanti per \circ in geodetiche)

Prop.: $d(\exp)_0: T_p M \rightarrow T_p M$ è l'identità. Quindi, in particolare è un diffeo locale in 0 .
 $\exp|_{U(0)}: U(0) \rightarrow \exp_p(U(0))$ sia un diffeo

Segliendo base ortonormale per $T_p M$ ottengo $T_p M \cong \mathbb{R}^{P, q}$. Le coordinate che ottengo si chiamano normali,

uniche a meno di $D(p, q)$.
 $\{\text{isometria}\}$

Buone proprietà delle coordinate normali:



Dim. $x^k + x^i x^j \Gamma_{ij}^k = 0$, $x(t) = tv$ sono geodetiche dunque sostituisco

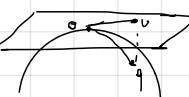
nell'eq. delle geodetiche e ho $v^i v^j \Gamma_{ij}^k(0) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \Gamma_{ij}^k(0) = 0$;

- ① Le geodetiche passanti per \circ sono le rette euclidean $x(t) = t \vee$
 $\text{dim. siamo in } \mathbb{R}^{P, q} \text{ con le coord. normali}$
 $\text{② } \Gamma_{ij}^k(0) = \eta_{ij}^k \quad \text{③ } \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^R}(0) = 0$
 $\text{④ } \Gamma_{ij}^k(0) = 0 \quad \text{implica}$
 $\text{formula equivalenza } \nabla \text{ compatibile con } g$
 $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^R}(0) = g_{ij}^{Rl} + g_{ij}^{Rl}$

Caso Riemanniano

(M, g) Riemann per sì, $\exists r > 0$ t.c. $\exp|_{B(0, r)}$: $B(0, r) \rightarrow \exp_p(B(0, r))$ differenziabile ($\exp_p: V_p \rightarrow M$)

Oss.: $\exp_p(B(0, r)) \subseteq B(p, r) \quad \forall r > 0$ $B(0, r) \subseteq V_p$.



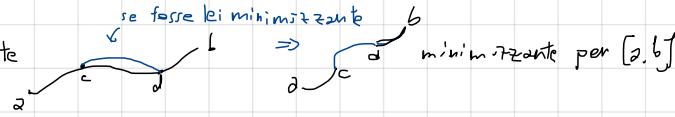
Lemma di Gauss: (\mathbb{M}, g) Riem. per \mathbb{M} . Fissiamo coordinate normali intorno in p . Sfere euclidiene centrate in o , (geodetiche) \downarrow
sono ortogonali alle rette uscenti da o . $\text{Imm}(\exp(\partial B(o, r')) \quad \forall r' < r$ con r t.c. $\exp_{|B(o, r)}$ differ.

dim.: • Usiamo coordinate normali e identifichiamo la palla geodetica B con $B(o, r) \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo un raggio s generato da un qualche $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e una sfera geodetica $S = \partial B(o, r')$ con $r' < r$, intersecando al punto $r'x$. Ovviamente $T_{r'x} S \oplus T_{r'x} S = T_{r'x} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. La linea $T_{r'x} S$ è generata da x stesso e sia $y \in T_{r'x} S$ un qualunque vettore. Dobbiamo provare che $g(r'x)(x, y) = 0$. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ il sottospazio lineare generato da x e y .

Restringendoci a $B(o, r) \cap W$ useremo siamo in dimensione due. Sia $B^* = B \setminus \{o\}$. Supponiamo che la norma euclidea di y sia r' . A meno di ruotare $x = (1, 0)$, $y = (0, r')$, entrambi tangenti a $r'x = (r', 0)$. Estendiamo x e y a campi vettoriali $X = \frac{\partial}{\partial p}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial \theta}$ in B^* come in figura. (sono quelli indotti dalle coordinate polari p e θ). Chiamiamo il prodotto scalare $g(p)$ con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Il nostro scopo è vedere $\frac{\partial}{\partial p} \langle X, Y \rangle = 0$ su ogni raggio. Inoltre, quando $p \rightarrow \infty \|X\|$ è limitata e $Y \rightarrow 0$ dunque $\langle X, Y \rangle = 0$ (sarebbe vicino a 0) e dunque dato che è costante lungo il raggio anche $\langle X, Y \rangle(r'x) = 0$ ma $\langle X, Y \rangle(r'x) = g(r'x)(x, y)$, tesi. Ora, $\frac{\partial}{\partial p}$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}$ sono indotti da cambi di coordinate dunque comutano $\Rightarrow [X, Y] = 0$. Ora, $\frac{\partial}{\partial p} \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X X, Y \rangle + \langle X, \nabla_X Y \rangle$ ma $\nabla_X X = 0$ ovunque poiché i raggi sono geodetiche e dunque campo \emptyset ; in più siamo in una varie. Riemanniana $\Rightarrow T(X, Y) = 0 \stackrel{g(X, Y) = 0}{\Rightarrow} \nabla_X Y = \nabla_Y X \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p} \langle X, Y \rangle = \langle X, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle X, X \rangle = 0$ poiché $\langle X, X \rangle = 1$ dunque (1 raggi sono good. \Rightarrow norma radiale euclidea).

Def.: (\mathbb{M}, g) Riem. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}$ liscia $p = \gamma(a)$ $q = \gamma(b)$; γ è minimizzante se $L(\gamma) = d(p, q)$

Ese.: γ minimizzante, $[c, d] \subseteq [a, b] \Rightarrow \gamma|_{[c, d]}$ minimizzante



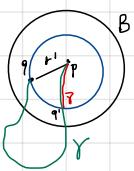
Def.: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}$ loc. minimizzante se $\forall t \in [a, b] \exists [c, d] \subseteq [a, b]$ intorno di t $\gamma|_{[c, d]}$ minim.

Teo.: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{M}$ è loc. minimizzante \Leftrightarrow è una geodetica riparametrizzata.

Prop.: per \mathbb{M} B palla geodetica centrale in p $\forall q \in B$, sia $\gamma_{p,q}$ geodetica a velocità 1 radiale uscente da p

e che arriva in q . Allora $\gamma_{p,q}$ è minimizzante e unica nel senso che qualsiasi altra γ minimizzante

che collega p a q è una sua riparametrizzazione.



Dim.: $r' = L(\gamma_{p,q})$. Sia $\bar{\gamma}$ un'altra curva che connette p con q ,

$\bar{\gamma} = \gamma|_{[p, \text{"punto che tocca sfera geodetica di raggio } r'\text{"}} \quad \text{Vogliamo dire che } L(\bar{\gamma}) \geq r'$. A maggior ragione $L(\gamma) \geq r'$.

$$L(\bar{\gamma}) = \int \|\bar{\gamma}'(t)\| dt = \int \|\bar{\gamma}'(t)_{rad} + \bar{\gamma}'(t)_{tg}\| dt \geq \int \|\bar{\gamma}'(t)_{rad}\| dt \geq r'$$

dopo due sono ortogonali;

questa decomposizione
è possibile semplice
fare ma non è
detto siano + perché $\bar{\gamma}'(t)_{rad}$ sta in un raggio
mentre $\bar{\gamma}'(t)_{tg}$ è lungo ∂B

nella componente
radiale $g = E$ \square

Def.: $U \subseteq \mathbb{M}$ è totalmente normale se $\forall p \in U \exists B$ palla geodetica centrale in p che contiene U .

Lemma: Ogni $p \in \mathbb{M}$ ha $U(p)$ totalmente normale. (dim. non fatta, se uno vuole è sul libro).

Oss.: U tot. normale, $\forall p, q \in U$ è ben definito $\gamma_{p,q}$ che li collega. (unicamente minimizzante).

dim. Teorema: Dato $t \in I$, $p = \gamma(t)$; sia $U(p)$ tot. normale. $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\gamma([t-\varepsilon, t+\varepsilon]) \subseteq U$, $\bar{\gamma} = \gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$

\square Sia $q = \gamma(t+\varepsilon)$. $\exists B \ni q$ geodetica centrata in q , $\bar{\gamma} = \gamma_{qq'}$ $\Rightarrow \bar{\gamma}$ minimizzante AO

$\Rightarrow \gamma$ loc. min. $\Rightarrow \exists \varepsilon' > 0$ t.c. $\gamma|_{[t-\varepsilon', t+\varepsilon']}$ è minimizzante e' contenuta in palla geodetica centrata in $q = \gamma(t+\varepsilon')$ \Rightarrow geodetica. \square

Corollario: $p \in M$. $\forall r > 0$ t.c. $B(o, r) \subseteq V_p$, $\exp(B(o, r)) = B(p, r)$ se r abbastanza piccolo.



in questo caso è già esplicito per $r \gg 0$.

Corollario: La sfera geodetica di raggio r centrata in p è la sfera metrica (i punti che distano r da p)

\hookrightarrow palla $=$ $\{x \in M : d(x, p) \leq r\}$ palla metrica.

Completezza: (M, g) Riemanniana

$\hookrightarrow (S^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n; S^{1,1}, \mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{H}^{1,1})$

Def.: M è geometricamente completa se tutte le geodetiche si estendono a \mathbb{R} .

Lemma: M geod. completa e connessa. $\forall p, q \in M \exists$ geodetica minimizzante che li collega.
devo collegare due punti.

Dim.

S sfera geodetica centrata in p di raggio r con q fuori; $d: S \rightarrow [0, +\infty)$ $\exists x_0 \in S$ minima per d. d.

$$x \mapsto d(x, q)$$

\hookrightarrow S compatto

Prendo $\dot{\gamma}_{p, x_0}$ a velocità unitaria. $L = d(p, q)$. $I = \{t \in [0, L] : d(\gamma(t), q) = L - t\}$. Vogliamo vedere che $I = [0, L]$. $\forall t \in I$, $I \neq \emptyset$ $\hookrightarrow I$ chiuso. Basta vedere che I è aperto e si conclude per connessione.

\downarrow

Lemma (Schreier): (M, g) sfera geodetica con q fuori, $\exists x_0 \in S$ t.c. $d(p, x_0) + d(q, x_0) = d(p, q)$

dim. x_0 punto che minimizza $d: S \rightarrow [0, +\infty)$ $x \xrightarrow{d} d(x, q)$

\downarrow FARE

Poi Cartelli era ubriaco e non è riuscito a finire. \square

e connesso

Corollario: Se M è geometricamente completa $\forall p \in M \exp_p: T_p M \rightarrow M$ suriettiva. $\exp(B(o, r)) = B(p, r) \forall r$.

dim. $\exists q \in B(p, r) d(p, q) = r' < r \exists \gamma$ geod. minimizzante che collega p a q . $L(\gamma) = r' \Rightarrow q = \exp_p(x)$

con $\|x\| = r' \Rightarrow x \in B(o, r)$. \square

Teatrino (Hopf - Rinow): (M, g) Riemanniana connessa. Sono fatti equivalenti:

① Geometricamente completa ② $M \subseteq M$ è compatto \Leftrightarrow chiuso e limitato ③ M completo

dim. ① \Rightarrow ② compatto \Rightarrow chiuso e limitato sempre vero. Sia K chiuso e limitato. M limitato $\Rightarrow \exists r > 0$ t.c.

posta metrica $\stackrel{\text{geod. completa}}{\Rightarrow} \exp_p(B(o, r)) \subseteq \underbrace{\exp_p(B(o, r))}_{\text{compatto}} \hookrightarrow$ chiuso tutto
 $K \subseteq B(p, r) \subseteq \exp_p(B(o, r))$ \Rightarrow chiuso in un compatto è compatto.

② \Rightarrow ③ $\{x_i\}_i$ Cauchy, $\overline{\{x_i\}}$ chiuso e limitato \Rightarrow compatto \Rightarrow comp. per successioni \Rightarrow sottosucc. convergente ma è di Cauchy \Rightarrow completo.

③ → ① Per assurdo $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{M}$ geodetica massimale $b \neq +\infty$. $x_i = \gamma(b - \frac{1}{i})$ di Cauchy perché le geodetiche sono Lips. (senza a velocità costante). Dunque $x_i \rightarrow x_\infty$. In una carta intorno a x_∞ γ è sol. di un sist. diff. di II ordine: $\gamma(b - \frac{1}{i}) \rightarrow x_\infty$ e $\|\dot{\gamma}^1(b - \frac{1}{i})\| < \pi \Rightarrow \gamma$ prosegue oltre b . □

Cor.: (\mathbb{M}, g) Riem. compatto \Rightarrow geod. completo.

Cor.: \mathbb{M} geod. completo, $N \subseteq \mathbb{M}$ chiusa $\Rightarrow N$ geod. completa

la metà da su $N \cap \mathbb{M}$ ma al massimo allunga ($N \xrightarrow{i} \mathbb{M}$ 1-Lipschitz)

Cor.: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ chiusa è geod. completa. (N chiuso in \mathbb{M} completo $\xrightarrow{b} N$ completo $\Rightarrow N$ geod. completo)

Cor.: Qualsiasi varietà ha metrica Riem. geod. completo (basta usare Whitney).

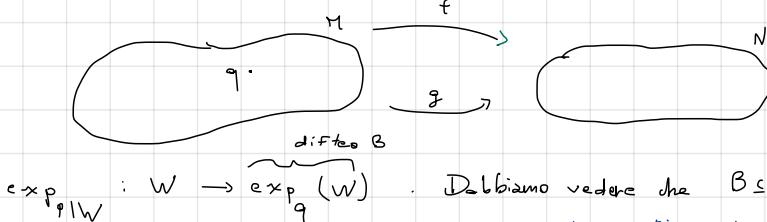
Rigidità delle isometrie

Teorema: $(\mathbb{M}, g), (N, \tilde{g})$ pseudoriemanniane connesse f.g.: $\mathbb{M} \rightarrow N$ isometrie che coincidono al I primo ordine in p

$(f(p) = g(p) \text{ e } df_p = dg_p)$. Allora $f = g$.

dim. $U = \{q \in \mathbb{M} \mid f(q) = g(q) \text{ e } df_q = dg_q\}$. $p \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$. U è chiuso (le condizioni sono chiuse)

La cosa non banale è che U è aperto: $\Rightarrow f = g$ sopra (\mathbb{M})



$\exp_q: T_q \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ diffeo loc in o \Rightarrow

$\exists W$ intorno stabile di $o \in T_q \mathbb{M}$ t.c. $W \subseteq V_q$, t.c.

$\exp_{q|W}: W \rightarrow \exp_q(W)$. Dobbiamo vedere che $B \subseteq U$.

Le isometrie mandano geodetiche in geodetiche $\Rightarrow f \circ \gamma_r = \gamma_{df_q(v)}$, $g \circ \gamma_r = \gamma_{dg_q(v)}$ ma $df_q = dg_q$

Basta mostrare che $f|_B = g|_B$. Mostro che f e g coincidono su qualsiasi geodetica. □

Teo: $\text{Isom}(\mathbb{M})$ formano un gruppo di Lie (non è scritto bene perché quale è la struttura di gruppo di Lie?)

di: $\dim \leq \dim (\text{Isom}(\mathbb{R}^n)) = \dim (\text{Isom}(\mathbb{H}^n)) = \dim (\text{Isom}(\mathbb{S}^n))$
 $\{f(x) = Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\} \xrightarrow{\text{fisso } x} \mathbb{R}^{n(n+1)} + n$

?

Cor.: $\text{Isom}(\mathbb{M})$ (\mathbb{M} connessa) $\supseteq \{ \text{frame di } \mathbb{M} \}$ liberamente

Cor.: $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b\} = O(n) \times \mathbb{R}^n$
 $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) = O(n, 1)$
 $\text{Isom}(\mathbb{S}^n) = O(n+1)$

Curvatura

Def. (\mathbb{M}, g) p.l. Il tensore di Ricmann è un campo tensoriale di tipo $(1, 3)$; $p \in \mathbb{M}, u, v, w$

$x \ y \ z$
 $\uparrow \uparrow \uparrow$
 $\downarrow \downarrow \downarrow$

$R(p)(u, v, w) = \nabla_u \nabla_v z - \nabla_v \nabla_u z - \nabla_{[u, v]}(p) z$ oppure, sui campi è direttamente
 qui posso mettere u qui devo mettere v

$R(x, y, z) = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z$

72

dim. Si struisce che è ben definita cioè non dipende dall'estensione. In carte:

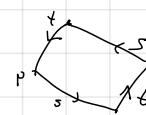
$$\nabla_x (\nabla_y z) = \nabla_x \left(y^i \frac{\partial z}{\partial x^i} + y^j z^j \Gamma_{ij}^k e_k \right) = x^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial z}{\partial x^i} + y^i \left(x^j \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^i} + x^k \frac{\partial z}{\partial x^i} \Gamma_{kj}^j e_j \right) + \\ + x^l \frac{\partial y^i}{\partial x^l} z^j \Gamma_{ij}^k e_k + y^i x^l \frac{\partial z}{\partial x^l} \Gamma_{ij}^k e_k + y^i z^j x^l \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} e_k + y^i z^j \Gamma_{ij}^k x^l \Gamma_{kl}^m e_m$$

e facendo analogamente con $\nabla_v \nabla_x z$ e $\nabla_{[x,y]} z$ si vede che restano solo pezzi che non dipendono dall'estensione. \square

Corollario: $R(u, v, w) = v^l u^i w^j \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{lk}^m - \frac{\partial \Gamma_{li}^k}{\partial x^j} - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^m \right) e_m \quad \forall u, v, w$

Interpretazione geometrica: (M, g) p.t.M $u, v, w \in T_p M$ $R(u, v, w) \in T_p M$. Es: $u, v \in T_p M \Rightarrow \exists X, Y$

(che li estendono t.c. $[X, Y] = 0$ (basta farlo in carte)).



$h_{s,t}: T_p M \rightarrow T_p M$ isometria ottenuta

(misura quanto non commutativa, la dim. è sul libro ma non si fa).

In coordinate normali: solo in $p=0$ $g_{ij}(0) = \gamma_{ij}$, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$, $\Gamma_{ij}^k(0) = 0 \Rightarrow R_{ijkl}^m = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^m}{\partial x^j}$

Def.: $R_{ijkl} = R_{ijkl}^m g_{ml}$, versione (0,4) del tensore di Riemann (grazie alla metrica).

$$R^{(0,4)}(u, v, w, z) = g(R^{(1,3)}(u, v, w), z) \quad (\text{non in coordinate})$$

Corollario: In coordinate normali: $R_{ijkl}(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right)$

Corollario: In coordinate normali: $g_{ij}(x) = \gamma_{ij} + \frac{1}{3} R_{ijkl}(0) x^k x^l + o(\|x\|^2)$

Prop: Simmetrie di R: ① $R_{ijkl} = -R_{jil} = -R_{ijlk}$ ② $R_{ijkl} = R_{klji}$ ③ $R_{ijkl}^l + R_{jkl}^l + R_{kil}^l = 0$

N.B. Sono proprietà intrinseche di R, non dipendono dalle carte (è come prendere una funzione e simmetrica, se

scelgo una base è una matrice simmetrica ma se cambio base rimane simmetrica).

dim. si possono scegliere le carte normali per il N.B. e uscire fuori subito. \square

Teo.: I tensori $R(p) \in \underbrace{\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}}_{\text{sime } n^4} (T_p M)$ che soddisfano ①, ②, ③ sono $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$.

dim.: Salvo l'idea: $\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) = \underbrace{\binom{n}{2}}_2 + \underbrace{\binom{n}{3}}_3 + \underbrace{\frac{n!}{8} \binom{n}{4}}_{3!}$

R_{ijkl} ind con 2, con 3, con 4
 ↓ ↓ ↓
 R_{abab} R_{abac} R_{abcd} ← devo scegliere 4 lettere, il loro ordine e
 devo scegliere 2 lettere su n devo scegliere 3 lettere e quindi si ripete 2 volte poi capire fattore $\frac{1}{8}$ c'è $\frac{3}{3}$

\square

Oss. $n=2 \Rightarrow 1: R_{1212}$ curvatura gaussiana

$n=3 \Rightarrow g: R_{1212} R_{1313} R_{2323} R_{1213} R_{2123} R_{3132}$
 $n=4 \Rightarrow 20$; i gradi dell'universo sono 20.

(73)

$\Rightarrow (\mathcal{M}, g) \text{ non } \nabla g = 0, \nabla \text{ non } R \nabla R \neq 0$

Def.: Se ho un tensore T_{ab}^c , $(\nabla_i T)_{ab}^c := (\nabla_c T)_{ab}^c$

Prop. (Identità di Bianchi): $\nabla_\alpha R_{ijk}^l + \nabla_j R_{ik\alpha}^l + \nabla_k R_{ij\alpha}^l = 0$ (utile per relatività di Einstein).

ricordare: contrazioni non dipende da carte
 δ

Tensore di Ricci: è l'unico campo tensoriale di tipo $(0,2)$ non banale ottenuto contragendo 2 indici di Riemann.

$R_{ij} = R_{kij}^k$ (contraiamo da R_{ijk}^l l e i , ne avremmo 3 di possibilità ma uno viene 0 e l'altro le stesse cambiate di segno)

Prop. il tensore di Ricci è simmetrica se c'è g .

dim. vediamolo con la matrice: $R_{ij} = R_{kij}^k = R_{kjil} g^{lk} = R_{jkl} g^{lk} = R_{lij} g^{kl} = R_{kijl} g^{lk} = R_{kij}^k$
 $= R_{kij}^k = R_{ij}$. (usare simmetrie di Riemann). \square

Oss. R_{ij} e g_{ij} sono entrambi $(0,2)$ simmetrici.

Interpretazione geometrica Ricci: c'è chiaramente una potenziale perdita di informazioni rispetto a Riemann.

Prop.: In coordinate normali: $\det g = \det \eta \left(1 - \frac{1}{6} R_{kl}(0) x^k x^l \right) + o(\|x\|^2)$ (ci dice quanto varia il

determinante di g , mentre Riemann ci dice quanto varia tutto g).

$$\omega_g = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \left(1 - \frac{1}{6} R_{kl}(0) x^k x^l + o(\|x\|^2) \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Con il teorema spetrale si può diagonalizzare simultaneamente due prodotti scalari e dunque $R_{kl}(0)$ sia diagonale.

Def.: (\mathcal{M}, g) ; curvatura scalare, serve g per alzare indice e poi contrarre, $R_{ij}^l = R_{ij}^k g^{kl}$, $R = R_{ij}^i = R_{ij}^k g^{ij}$

(è la traccia del tensore di Ricci che, essendo un prodotto scalare, ha senso calcolarne la traccia solo se c'è g).

Prop.: $\underset{\text{comparazione}}{g}$ Riemanniana: $\text{Vol} \left[\underset{\text{punto metrico, con rabbastanza piccolo è geodetica}}{B(p,r)} \right] = \text{Vol}^{\text{euclideo}} (B(p,r)) \cdot \left(1 - \frac{1}{6(n+2)} R(p) r^2 + o(r^2) \right)$
 $\left(\text{In } \mathbb{R}^n \text{ Vol}^{\text{euclideo}} (B(p,r)) = \pi(n) \cdot r^n \right)$

Esemp.: $n=2$: g Riemanniana, $p \in \mathcal{M}$ v_1, v_2 base ortonormale di $T_p \mathcal{M}$ $R_{1212} = R(p) = 2 K(p)$ curvatura se $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ gaussiana

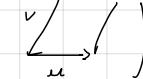
$n=3$: Riemann è determinato da Ricci (in $n=2$ è determinato dalla curvatura scalare)
 \curvearrowleft Ex.

Curvatura sezione

(\mathcal{M}, g) , $p \in \mathcal{M}$, $\sigma \subseteq T_p \mathcal{M}$ piano vettoriale non degenero (rispetto a $g(p)$). u, v base di σ :

$$K(\sigma) = \frac{R(p)(u, v, v, u)}{(\langle u, v \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2)} = Q(u, v)$$

74

Ques. Se g è definito positivo $\mathbb{Q}(u, v) = \text{Area}^2$ 

Prop. La curvatura sezioneale è ben definita.

dim. Ex. facile: ogni altra base è ottenuta da $\{u, v\}$ tramite mosse di questo tipo: $(u, v) \mapsto (v, u)$, $(u, v) \mapsto (u, v + \lambda u)$. Si vede che non cambia $K(\sigma)$ con queste mosse. \square

Interpretazione geometrica



Prop. Se $T_{\text{som}}(K)$ agiscono transitivamente sui frame, allora $K(\sigma)$ non dipende da σ .

dim. g Riemanniana; g agisce transitivamente sui piani \Rightarrow stessa K . \square

Corollario: $S^{p,q}$, $\mathbb{R}^{p,q}$, $H^{p,q}$ hanno curvatura sez. costante risp. $1, 0, -1$.

Ex facile: (M, g) , $\lambda > 0$ non possiamo prendere $(M, \lambda g)$ rimane uguale la connessione di Levi-Civita, geodetiche, trasporto parallelo. Però la curvatura cambia per una qualche potenza di λ quindi possa sempre ricordurni a $1, 0, -1$.

Teorema: L'curvatura sezioneale determina Ricci. (passaggi algebrici: $R(u, v, u, v) = R(u, v, u, u + v) + R(u, v, u, v)$)

Prop. Se la curvatura sezioneale è costante $\Rightarrow R(u, v, w, z) = K(\langle u, z \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle)$.

cioè $\forall p \in M \exists U(p) \xrightarrow[\text{isom.}]{} V \subseteq \mathbb{R}^n$

Def.: Una varietà Riem (M, g) è sferica, euclidea, iperbolica se è loc. isometrica a resp.

S^n, \mathbb{R}^n, H^n .

Def.: (M, g) è localmente omogenea se $\forall p, q \in M \exists U(p) \xrightarrow[\text{isom.}]{} U(q)$.

Esempi: S^n, \mathbb{R}^n, H^n .

Cor.: Una varietà sferica, euclidea, iperbolica è loc. omogenea.

→ curvatura sez. costante

Teo: (M, g) Riemanniana è sferica, euclidea, iperbolica $\Leftrightarrow K(\sigma) = 1, 0, -1 \quad \forall \sigma \subseteq T_p M \quad \forall p$.

dim. \Rightarrow avvia facendo conti;

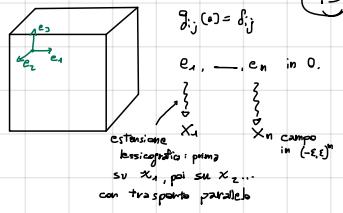
\Leftarrow facciamo sub: (M, g) Riemanniana è euclidea \Leftrightarrow è piatta ($\text{Riem} = 0$).

\Rightarrow euclidea \Rightarrow loc. isom. a \mathbb{R}^n , $\Gamma_{ij}^k = 0 \Rightarrow \text{Riem} = 0$ (il conto nel caso euclideo).

$\hookrightarrow g_{ij}(0) = \delta_{ij}, e_1, \dots, e_n$ bese orthonormale

$\Leftarrow p \in M$. Coordinate normali. $B(p, r)$ palla geodetica. $\varepsilon > 0$ $(-\varepsilon, \varepsilon)^n \subseteq B(p, r)$

$$S_i = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} - \{0\} \quad \nabla e_i = \nabla;$$



Per costruzione $\nabla_i X_k = 0$ su S_i $\forall k=1, \dots, n$. Tesi: $\nabla_j X_k = 0$ su $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$.

Vediamo che $\nabla_j X_k = 0$ su S_i $\forall j \leq i$. Per $i=n$ è la tesi. Induzione su i :

$i+1 \Rightarrow i$: se $j=i+1$ per costruzione. se $j < i+1$ $\nabla_j X_k = 0$ su S_i per h.p. induttiva. Mostri che

$$\nabla_{i+1} \nabla_j X_k = 0 \text{ su } S_{i+1}: [e_{i+1}, e_j] = 0 \text{ (campi costanti commutano). Inoltre } \overset{h.p.}{\nabla} Riem(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

$$-\nabla_{[X, Y]} Z \Rightarrow \nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \nabla_X Z. \text{ Dunque } \nabla_{i+1} \nabla_j X_k$$

li sto utilizzando in 0

$$T \equiv 0 \Rightarrow [X_i, X_h] = \nabla_{X_i} X_h - \nabla_{X_h} X_i = 0 - 0 = 0. \Rightarrow \text{uso il radditività simultaneo} \Rightarrow \exists \varphi: U(p) \rightarrow \mathbb{V}$$

$$\subseteq \mathbb{R}^n. \text{ E' isometria poiché manda basi ortonormali } (X_1, \dots, X_n) \text{ in basi ortonormali } \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Equazione di campo di Einstein

$$\text{Def: } (\mathcal{M}, g) \text{ p.R. tensore di Einstein: } \overset{\text{Ricci}}{\underbrace{g_{ij}}}_{R_{ij}} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad (g = R - \frac{1}{2} R g) \quad R \in C^\infty(\mathcal{M}) \text{ curvatura}$$

$$\text{scalare } R = R_{ij} g^{ij}.$$

$$\text{Prop: } \nabla_a R^a_j = \frac{1}{2} \nabla_j R \quad (T \in \Gamma \overset{h}{\sim} T^b_k(\mathcal{M}) \Rightarrow \nabla T \in \Gamma \overset{h}{\sim} T^b_k(\mathcal{M}), T^b_k \text{ mbo } \nabla_i T^b_k).$$

quando contraiamo otteniamo $\nabla_a T^a_b$ che e' la div(T), in generale se ho piu' indici in alto posso contrarre piu' indici e ottenere piu' divergenze

dim. Segue da identità di Bianchi contracendo. \square

$$\text{Corollario: } \nabla_a \overset{h}{\sim} g_j^a = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{tensore} \\ \downarrow \text{di Einstein} \\ \text{Eq di campo di Einstein:} \\ \text{"La materia genera curvatura"} \end{array} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \begin{array}{c} \text{costante cosmologica} \\ \uparrow \\ \text{descrivere la materia} \\ \text{e energia nell'universo} \end{array}$$

N.B.: hanno tutti div.nula: $\nabla g = 0$ e $\nabla_i T^b_k$ cons. massimo

Relatività generale: Lo spazio-tempo è (\mathcal{M}, g) Lorentziano dato da un campo tensoriale T simm. (0,2), detto campo tensoriale di energia e impulso

\Rightarrow L'E. di campo di Einstein è il primo osserv. della rel. di Einstein. Il secondo e' che "un oggetto non vincolato

nello sp. tempo ha come traiettoria una geodetica".

\Rightarrow Se non c'e' materia dato che $\Delta \approx 0$ (localmente e' 0) $\Rightarrow G \approx 0$ (e anche Ricci) ma Ricm $\neq 0$

Esempio: Modello di Schwarzschild

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \overset{\text{costante}}{(R, \infty)} \times \mathbb{S}^2$$

$t \quad r \quad (\theta, \phi)$

$$h(r) = 1 - \frac{R}{r} \quad 0 < R < r$$

$$g = \begin{pmatrix} -h(r) & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{h(r)} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Ex. $Ric = 0$ (ma Ricm no).

