Seminario

<u>Def.</u> (piccola perturbazione random di F): Sia M spazio metrico e $F: M \longrightarrow M$ continua.

Sia $\mathcal{P}(M)$ lo spazio delle probabilità su M dotate della topologia debole.

(La topologia debole per le misure di prob. su uno spazio metrico M è generata dalla seguente base di aperti: $\{ U_{\phi, x, \delta} \mid \phi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ limitate e continue, $x \in \mathbb{R}$, $\delta > 0 \}$ dove

$U_{\phi, x, \delta} := \{ \mu \in \mathcal{P}(M) \mid \left| \int_M \phi \, d\mu - x \right| < \delta \}$).

Sia $Q_x^\varepsilon \in \mathcal{P}(M)$ $\forall x \in M$ $\forall \varepsilon > 0$ famiglia di probabilità. Assumiamo che:

<u>Ass. 1</u> $Q_\cdot^\varepsilon : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ sono boreliane $\forall \varepsilon > 0$.

<u>Ass. 2</u> $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in M} \left| \underbrace{\int_M (g(y) - g(x)) \, Q_x^\varepsilon(dy)}_{} \right| = 0$ $\quad \forall g \in C_b(M)$ (<u>Ass 2. A</u>)

$\quad$ (\forall g \in C_c(M)$ (<u>Ass. 2. B</u>))

" $\leftarrow g(x)$ è costante nell'integrale

$\int_M g(y) \, Q_x^\varepsilon(dy) - g(x)$

sullo stesso sp. di prob.

Sia ora X_n^ε una catena di Markov $\forall \varepsilon > 0$. Per definizione abbiamo delle probabilità di transizione $\forall \varepsilon > 0$: $P^\varepsilon : M \times \mathcal{B}(M) \longrightarrow [0,1]$ t.c. $P^\varepsilon(x, \Gamma) = P[X_{n+1}^\varepsilon \in \Gamma \mid X_n^\varepsilon = x]$ (compattamente possiamo anche scrivere $P^\varepsilon(X_n^\varepsilon, \Gamma) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1}^\varepsilon \in \Gamma} \mid X_n^\varepsilon]$ a.s. nel senso che prendono $x \in M$).

Se vale che $P^\varepsilon(x, \Gamma) = Q_{F(x)}^\varepsilon(\Gamma)$ $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(M)$ allora diciamo che X_n^ε è una piccola perturbazione random di F. (se vale Ass. 2. B diciamo che la perturbazione è vaga)

<u>Oss.</u>: Il significato della Prop. precedente è che la particella salta da x a Fx e poi si disperde randomicamente vicino a Fx con distribuzione $Q_{F(x)}^\varepsilon$.

<u>Def.</u> (misura invariante di una catena di Markov): μ^ε misura di probabilità su M è una misura invariante della catena di Markov X_n^ε se per ogni insieme di Borel $\Gamma \subset M$, si ha:

$$\int_M P^\varepsilon(x, \Gamma) \, d\mu^\varepsilon(x) = \mu^\varepsilon(\Gamma)$$

$\hookleftarrow$ vedere lo come $\int_M P^\varepsilon(y, \Gamma) \, \mu^\varepsilon(dy) = \mu^\varepsilon(\Gamma)$

e dunque $\mu^\varepsilon(dx) = \int_M P^\varepsilon(y, dx) \, \mu^\varepsilon(dy)$

<u>Notazione</u>: $\{\nu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\nu \in \mathcal{P}(M)$, scriviamo $\nu_i \xrightarrow{w} \nu$ (convergenza in senso debole) se

$$\int g \, d\nu_i \xrightarrow{i \to \infty} \int g \, d\nu \quad \forall g \in C_c^b(M).$$

piccola perturbazione random di F

<u>Teorema</u>: Supponiamo μ^ε invariante per la catena di Markov X_n^ε $\forall \varepsilon > 0$ e che esiste una sottosuccessione $\mu^{\varepsilon_i} \xrightarrow{W} \mu$. Allora μ è una misura F-invariante, i.e. $\forall \Gamma \subset M$ insieme di Borel: $\mu(F^{-1}\Gamma) = \mu(\Gamma)$.

<u>dim.</u> Vogliamo mostrare che $\forall g \in C_b(M)$ si ha che $\int_M g(x)\, d\mu(x) = \int_M g \circ F(x)\, d\mu(x)$ così che per $g = \mathbb{1}_\Gamma$: $\int_M \mathbb{1}_\Gamma(x)\, d\mu(x) = \int_M \mathbb{1}_\Gamma(Fx)\, d\mu(x) \iff \mu(\Gamma) = \mu(F^{-1}\Gamma)$.

$$\uparrow$$
$$Fx \in \Gamma \iff x \in F^{-1}(\Gamma)$$

Dunque:

$$\left| \int_M g(x)\, d\mu(x) - \int_M g(Fx)\, d\mu(x) \right| \leq$$

sommo e sottraggo $\int_M g(x)\, d\mu^\varepsilon$ e $\int_M g(Fx)\, d\mu^\varepsilon$ + disug. Δ

$$\leq \left| \int_M g(x)\, d\mu(x) - \int_M g(x)\, d\mu^\varepsilon_{(x)} \right| + \quad (1)$$

$$+ \left| \int_M g(x)\, d\mu^\varepsilon_{(x)} - \int_M g(Fx)\, d\mu^\varepsilon_{(x)} \right| + \quad (2)$$

$$+ \left| \int_M g(Fx)\, d\mu^\varepsilon_{(x)} - \int_M g(Fx)\, d\mu(x) \right| \quad (3)$$

Per $\varepsilon \to 0$ lungo la successione ε^i si ha che $\mu_i \xrightarrow{W} \mu$ e dunque, per def.,

(1) e (3) vanno a 0 (LHS non dipende da ε)

Per quanto riguarda (2):

$$\left| \int_M g(x)\, d\mu^\varepsilon_{(x)} - \int_M g(Fx)\, d\mu^\varepsilon_{(x)} \right| =$$

μ^ε invariante per processo di Markov

$$= \left| \int_M g(x) \int_M P^\varepsilon(y, dx)\, d\mu^\varepsilon(y) - \int_M g(Fx)\, d\mu^\varepsilon(x) \right| =$$

cambio di variabile sul I integrale $x \leftrightarrow y$

$$= \left| \int_M g(y) \int_M P^\varepsilon(x, dy)\, d\mu^\varepsilon(x) - \int_M g(Fx)\, d\mu^\varepsilon(x) \right| =$$

perturbazione random di F: $P^\varepsilon(x, dy) = Q^\varepsilon_{Fx}(dy)$

$$= \left| \int_M \left(\int_M g(y)\, Q^\varepsilon_{Fx}(dy) - g(Fx) \right) d\mu^\varepsilon(x) \right| \leq$$

$\int_M f(x)\, d\mu(x) \leq \sup_x f(x) \cdot \underbrace{\int_M d\mu}_{1 \text{ (prob.)}}$

$$\leq \sup_{x \in M} \left| \int_M g(y)\, Q^\varepsilon_{Fx}(dy) - g(Fx) \right| \leq$$

$F(M) \subseteq M$ dunque $\sup_{x \in F(M)} \cdot \leq \sup_{x \in M} \cdot$

$$\leq \sup_{x \in M} \left| \int_M g(y)\, Q^\varepsilon_x(dy) - g(x) \right| =$$

$$= \sup_{x \in M} \left| \int_M (g(y) - g(x))\, Q_x^\varepsilon(dy) \right| \xrightarrow[\substack{\text{along } i \\ \text{by Ass. 2.A}}]{\varepsilon \to 0} 0 .$$

$\square$

<u>Assunzione 3</u> : $\forall \delta > 0 \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in M} Q_x^\varepsilon (M \setminus B_\delta(x)) = 0$ dove $B_\delta(x) = \{ y : dist(x,y) < \delta \}$.

<u>Lemma</u> : Siano U e W due aperti tali che esiste C chiuso con $U \subseteq C \subseteq W$. Se $\{x_i\} \in U$ definitivamente e $\varepsilon_i \to 0 \implies Q_{x_i}^{\varepsilon_i}(W^c) \longrightarrow 0$

<u>dim.</u> Prendiamo $0 \le g \le 1$ con $g = 0$ su W^c e $g = 1$ su C, g continua. Allora definitivamente:

$$\left| \int_M g(y) - g(x_i)\, Q_{x_i}^{\varepsilon_i}(dy) \right| \underset{\text{def } g,\ x_i \text{ defint. in } U \subseteq C}{=}$$

$$= \left| \int_M (g(y) - 1)\, Q_{x_i}^{\varepsilon_i}(dy) \right| =$$

$$= \Bigg| \underbrace{\int_W \underbrace{(g(y) - 1)}_{0 \le g \le 1 \implies g-1 \le 0}\, Q_{x_i}^{\varepsilon_i}(dy)}_{\le 0} + \underbrace{\int_{W^c} \underbrace{(g(y) - 1)}_{= -1} Q_{x_i}^{\varepsilon}(dy)}_{-\, Q_{x_i}^{\varepsilon}(W^c)} \Bigg| \ge$$

se $a, b \le 0$
$|a+b| \ge |a|$

$$\ge Q_{x_i}^{\varepsilon}(W^c).$$

Per assunzione 2. A il LHS va a 0 per $\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in M}$ $\left(\sup_{x \in M} \ge \sup_{x \in U} \right)$.

$\square$

<u>Teorema</u> Valgono i seguenti fatti :

1 : (Ass 2. A e M metrico completo) $\implies$ Ass. 3

2 : Ass. 3 $\implies$ Ass. 2.B

3 : Sia M localmente compatto e le misure μ^ε invarianti del processo di Markov $(X_n^\varepsilon)_n$ $\forall \varepsilon > 0$; se vale Ass. 2 B e $\mu^{\varepsilon_i} \xrightarrow{V} \mu$ (vagamente : $\int g\, d\mu^{\varepsilon_i} \longrightarrow \int g\, d\mu \ \ \forall g \in C_c(M)$) allora μ è F-invariante. Questo ci dice che il Teorema precedente in un localmente compatto continua a valere per perturbazioni random vaghe.

<u>dim.</u>

1 Assumiamo per assurdo che valga Ass 2. A e non Ass. 3. Allora $\exists\, \gamma, \delta > 0$ e

sottosucc. $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \Pi$ e $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \to 0$ t.c. $Q^{\varepsilon_i}_{x_i}(B_\delta(x_i)) < 1-\gamma \quad \forall i$.

$\boxed{\text{Step 1}}$: Verifichiamo la tesi nel caso in cui $\{x_i\}$ ha un punto di accumulazione, i.e. a meno di rinominare la sottosuccessione $\{x_i\} \to x_0 \in \Pi$. Applichiamo il Lemma precedente con $U := B_{\frac{\delta}{3}}(x_0)$ e $W := B_{2\frac{\delta}{3}}(x_0)$. Dunque:

$$0 \longleftarrow Q^{\varepsilon_i}_{x_i}\left(B_{2\frac{\delta}{3}}(x_0)^c\right) \underset{\uparrow}{\geq} Q^{\varepsilon_i}_{x_i}\left(\left(B_\delta(x_i)\right)^c\right) > \gamma$$

$B_{2\frac{\delta}{3}}(x_0)^c \geq B_\delta(x_i)^c \iff B_\delta(x_i) \geq B_{2\frac{\delta}{3}}(x_0)$ ma se $y \in B_{2\frac{\delta}{3}}(x_0)$ si ha

$d(y,x_i) \leq d(y,x_0) + d(x_0,x_i) < d(x_0,x_i) + \frac{2}{3}\delta$ e dato che x_0 é di acc.

per $\{x_i\}$ $d(x_0,x_i) \to 0 \Rightarrow y \in B_\delta(x_i)$ definit.

$\boxed{\text{Step 2}}$: • $\{x_i\}$ non ha punti di accumulazione. Dunque, siccome Π é completo, a meno di rimpiccidire $\delta > 0$ e a meno di sottosuccessione $d(x_i,x_j) > 2\delta \quad \forall i,j \geq 1$ (altrimenti la succcessione sarebbe di Cauchy, per completezza convergerebbe e dunque avrebbe un punto di accumulazione)

$(*_1)$
• Mostriamo che $\forall K \geq 1 \quad Q^{\varepsilon_i}_{x_i}\left(\bigcup_{j=1}^{K} B_\delta(x_j)\right) \xrightarrow{i\to+\infty} 0$. Poniamo quindi $U := \bigcup_{j=K}^{+\infty} B_{\frac{\delta}{3}}(x_j)$ e $W := \bigcup_{j=K}^{+\infty} B_{2\frac{\delta}{3}}(x_j)$, $\{x_i\} \in U$ defin. per def. e dunque $Q^{\varepsilon_i}_{x_i}(W^c) \longrightarrow 0$, ma $\bigcup_{j=1}^{K} B_\delta(x_j) \subseteq W^c$ ($A \subseteq B^c \iff A \cap B = \emptyset$ dunque é equivalente dire che $\bigcup_{j=1}^{K} B_\delta(x_j) \cap W = \emptyset$ ma se $y \in \bigcup_{j=1}^{K} B_\delta(x_j) \cap \bigcup_{j=K}^{+\infty} B_{2\frac{\delta}{3}}(x_j)$ allora $\exists i \neq j$ $y \in B_\delta(x_j) \cap B_{\frac{2}{3}\delta}(x_i)$ $d(x_i,x_j) \leq$
$\leq d(x_i,y) + d(x_j,x) < \delta + \frac{2}{3}\delta < \delta$, $\lightning$).

$(*_2)$ vale $\forall i$
• Ora, mostriamo che anche $Q^{\varepsilon_i}_{x_i}\left(\bigcup_{j=K}^{+\infty} B_\delta(x_j)\right) \longrightarrow 0$ per $K \to +\infty$: le palle $B_\delta(x_j)$ sono disgiunte ($d(x_i,x_j) > 2\delta$) dunque $1 \geq Q^{\varepsilon_i}_{x_i}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} B_\delta(x_j)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} Q^{\varepsilon_i}_{x_i}(B_\delta(x_j))$ dunque le code vanno a 0 cioé $\lim_K \sum_{j=K}^{+\infty} Q^{\varepsilon_i}_{x_i}(B_\delta(x_j)) = 0 = \lim_K Q^{\varepsilon_i}_{x_i}\left(\bigcup_{j=K}^{+\infty} Q^{\varepsilon_i}_{x_i}(B_\delta(x_j)\right)$.

$(*_3)$
• Costruiamo una sottosuccessione $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\forall j \geq 1: Q^{\varepsilon_{i_j}}_{x_{i_j}}\left(\bigcup_{n\neq j} B_\delta(x_{i_n})\right) < \frac{\gamma}{2}$: la facciamo come segue :

- prendo $i_0 = 0$, poi prendiamo K t.c. $Q^{\varepsilon_{i_0}}_{x_{i_0}}\left(\bigcup_{l=K}^{+\infty} B_\delta(x_l)\right) < \frac{\gamma}{4}$ $((*_2))$ e poniamo $i_j = K + j \quad \forall j \geq 1$. Abbiamo creato dunque una sottosuccessione.

- usiamo ora un argomento "induttivo" : supponiamo che abbiamo costruito una sottosuccessione t.c. $Q^{\varepsilon_{i_j}}_{x_{i_j}}\left(\bigcup_{l\neq j} B(x_{i_l})\right) < \frac{\delta}{2} \quad \forall\, 0 \leq j \leq K$. Ne vogliamo definire una nuova in modo che valga fino a $j=K+1$. Chiaramente lasciamo invariato i_j per $0\le j\le K$; poi prendiamo i_{K+1} il primo della successione $\{i_j\}_{j=K+1}^{+\infty}$ t.c.

$$Q_{x_{i_{K+1}}}^{\varepsilon_{i_{K+1}}}\left(\bigcup_{l=0}^{K} B_\delta(x_{i_l})\right)<\frac{\delta}{4} \quad (*_1)$$

Dunque $$Q_{x_{i_{K+1}}}^{\varepsilon_{i_{K+1}}}\left(\bigcup_{l\neq K+1} B(x_{i_l})\right)=\underbrace{Q_{x_{i_{K+1}}}^{\varepsilon_{i_{K+1}}}\left(\bigcup_{l=0}^{K} B(x_{i_l})\right)}_{<\frac{\delta}{4}}+\underbrace{Q_{x_{i_{K+1}}}^{\varepsilon_{i_{K+1}}}\left(\bigcup_{l=K+2}^{\infty} B(x_{i_l})\right)}_{\text{ci basta definire}}$$

ci basta definire i_{K+2} come il primo indice dopo i_{K+1} per cui questa quantità è $<\frac{\delta}{4}$ $(*_2)$

Per $j\ge K+2$ prendo i_j subito dopo $K+2$.

Procediamo per induzione.

- Inoltre $Q_{x_{i_j}}^{\varepsilon_{i_j}}\left(\left(\bigcup_{n\ge1} B_\delta(x_{i_n})\right)^c\right)\longrightarrow 0$ infatti per il Lemma con $U=\bigcup_{j\ge1} B_{\frac{\delta}{3}}(x_{i_j})$ e $W=\bigcup_{j\ge1} B_{2\frac{\delta}{3}}(x_{i_j})$ e notando che $W\overset{\text{ovvia}}{\subseteq}\bigcup_{j\ge1} B_\delta(x_{i_j})$ si ha immediatamente il risultato.

- Step finale: tutto ciò è assurdo poiché:

$$Q_{x_{i_j}}^{\varepsilon_{i_j}}\left(\bigcup_{n\ge1} B_\delta(x_{i_n})\right)\le Q_{x_{i_j}}^{\varepsilon_{i_j}}\left(B_\delta(x_{i_j})\right)+Q_{x_{i_j}}^{\varepsilon_{i_j}}\left(\bigcup_{n\neq j} B_\delta(x_{i_n})\right)\le$$

$$\xrightarrow{\text{hp. assurdo iniziale}}\le \underbrace{1-\gamma}+\underbrace{\frac{\gamma}{2}}_{(*_3)}=1-\frac{\gamma}{2}\implies Q_{x_{i_j}}^{\varepsilon_{i_j}}\left(\left(\bigcup_{n\ge1} B_\delta(x_{i_n})\right)^c\right)\ge\frac{\gamma}{2}$$

che contraddice il punto precedente.

(2) $g\in C_c(M)\implies g$ è uniformemente continua da cui:

$$\left|\int_M g(y)\,Q_x^\varepsilon(dy)-g(x)\right|\le\left|\int_M g(y)\,Q_x^\varepsilon(dy)-\sup_{y\in B_\delta(x)} g(y)\right|+\left|\sup_{y\in B_\delta(x)} g(y)-g(x)\right|\le$$

$$\xrightarrow{M=B_\delta(x)\cup B_\delta(x)^c}\le\left|\int_{B_\delta(x)^c} g(y)\,Q_x^\varepsilon(dy)\right|+\left|\int_{B_\delta(x)} g(y)\,Q_x^\varepsilon(dy)-\sup_{y\in B_\delta(x)} g(y)\right|+\left|\sup_{y\in B_\delta(x)}\left(g(y)-g(x)\right)\right|\le$$

$$B_\delta(x)^c\subseteq M \longleftarrow \le\sup_{y\in M}|g(y)|\left|Q_x^\varepsilon\left(U_\delta(x)^c\right)\right|+\sup_{y\in M}|g(y)|\left|\left(\int_{B_\delta(x)} Q_x^\varepsilon(dy)-1\right)\right|+\left|\sup_{y\in B_\delta(x)}(g(y)-g(x))\right|\le$$

unif. continua: $\exists\varepsilon\ \forall\delta$: $\forall x,y$ s.t. $d(x,y)<\delta\implies d(g(x),g(y))<\varepsilon$

$$\le\underbrace{2\sup_{y\in M}|g(y)|}_{\text{è il sup su un compatto}\implies\max}\ \underbrace{\left|Q_x^\varepsilon\left(B_\delta(x)^c\right)\right|}_{\to0\text{ per }\varepsilon\to0\text{ e }\delta\to0}+\overbrace{\sup_{y\in B_\delta(x)}|g(y)-g(x)|}^{\le\varepsilon}\longrightarrow0$$

$\leftarrow$ $d\mu$ potrebbe non avere supporto compatto

③ Come nel primo teorema si ottiene $\int_M g\, d\mu = \int_M g \circ F\, d\mu \quad \forall g \in C_c(M)$. La tesi segue

$\leftarrow$ $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \quad \Gamma_i$ compatti

poiché in un localmente compatto i compatti generano la σ-algebra di Borel.

$\square$

<u>Oss.</u> $\forall$ successione $\{z_n\} \subseteq M$ t.c. $\inf_{\substack{i,j \\ i \neq j}} d(z_i, z_j) > 0$, $\{\varepsilon_n\}_n$ t.c. $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, allora: $\lim_{n \to +\infty} Q^{\varepsilon_n}_{z_n}(\{z_n\}) = 1$.

Infatti se non fosse vero $\exists \{\rho_n\}_n$, $\rho_n > 0 \ \forall n$, tale che $Q^{\varepsilon_n}_{z_n}\left(U_{\rho_n}(z_n)\right) < 1 - \gamma$ per un certo $\gamma > 0$ e $\forall n$. Si fa, poi, allo stesso maniera del punto ① del Teorema prec. definendo gli aperti U e W su $U_{\rho_n}(z_n)$ invece che su raggi fissati.

<u>Def.</u> (Perturbazioni random per sistemi dinamici continui): Consideriamo $(F_t)_{t \geq 0}$ un semigruppo a un parametro cioè:

① $F^t : M \longrightarrow M$ continua $\forall t \geq 0$

② $F^0 = id$

③ $F^{t+s} = F_t \circ F_s$

Quando $\forall t$ F^t é invertibile consideremo il gruppo (<u>flusso</u>) definendo $F^{-t} := (F^t)^{-1}$.

Chiamiamo $(X^\varepsilon_t)_{t \geq 0}$ processo di Markov con probabilitá di transizione:

$$P^\varepsilon(t, x, \Gamma) = P\left[X^\varepsilon_t \in \Gamma \,\middle|\, X^\varepsilon_0 = x\right]$$

<u>piccola perturbazione del sistema dinamico continuo</u> (risp. <u>piccola perturbazione vaga</u>) del semiflusso F_t se la mappa $P^\varepsilon(t, \cdot, \cdot) : M \times \mathcal{B}(M) \longrightarrow [0,1]$ soddisfa:

$$(\underline{\text{Ass. 4}}) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in M} \left| \int_M P^\varepsilon(t, x, dy)\, g(y) - g(F_t x) \right| = 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall g \in C_b(M)$$

(risp. $\forall g \in C_c(M)$).

<u>Oss.</u> la forma dell' Ass. 4 é meno restrittiva di quella dell' Ass. 2 dato che il sup lo facciamo solo sull'immagine di F_t.

<u>Def.</u> (misura invariante per processo di Markov X^ε_t): Una misura $\mu^\varepsilon \in \mathcal{P}(M)$ é chiamata misura invariante per il processo di Markov X^ε_t se:

$$\int_M d\mu^\varepsilon(x)\, P^\varepsilon(t, x, \Gamma) = \mu^\varepsilon(\Gamma) \qquad \forall\, t > 0 \quad e \quad \forall\, \Gamma \subset M \text{ insieme di Borel.}$$

Def. (misura invariante per il semiflusso F_t): $\mu \in \mathcal{P}(M)$ é detta invariante rispetto al semiflusso F^t se è F^t-invariante $\forall t \geq 0$.

Prop. (Misura invariante per catene di Markov): $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov con funzione di transizione $P(x,\Gamma) = \mathbb{P}[X_1 \in \Gamma \mid X_0 = x]$. Supponiamo:

1. $P(x,\cdot) \in \mathcal{P}(M)$ é continua rispetto al parametro x nella topologia della convergenza debole in $\mathcal{P}(M)$.
2. M compatto (e metrico)

Allora esiste una misura invariante per la catena di Markov.

dim. Definiamo
$$P : C_0(M) \longrightarrow C_0(M)$$
$$g \longmapsto \left(\begin{aligned} P_g &: M \longrightarrow M \\ x &\longmapsto P_g(x) := \int_M \underbrace{P(x,dy)}_{\text{funzione di trans.}} g(y) \end{aligned} \right)$$

$$P^* : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$$
$$\mu \longmapsto \left(\begin{aligned} P^*\mu &: \mathcal{B}(M) \longrightarrow [0,1] \\ \Gamma &\longmapsto \int_M d\mu(x)\, P(x,\Gamma) \end{aligned} \right)$$

P è ben definita per l'hp 1 $(P(C_0(M)) \subseteq C_0(M))$ e P^* é ben definita poiché
$$P^*\mu(M) = \int_M d\mu(x)\, P(x,M) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. prob. di transizione } P(x,M)=1}}{=} \mu(M) = 1 \qquad (P^*(\mathcal{P}(M)) \subseteq \mathcal{P}(M)).$$

Notiamo che $(P^K)^* = (P^*)^K$ infatti:

$$((P^K)^*\mu)(\Gamma) = \int d\mu(x)\, P^K(x,\Gamma)$$, mentre (facciamo il caso $(P^*)^2$):

$$\mathcal{P}(M) \xrightarrow{P^*} \mathcal{P}(M) \xrightarrow{\qquad P^* \qquad} \mathcal{P}(M)$$

$$\mu \longmapsto P^*\mu : \mathcal{B}(M) \to [0,1] \qquad \longmapsto \qquad P^*(P^*\mu) : \mathcal{B}(M) \longrightarrow [0,1]$$
$$\Gamma \longmapsto \int d\mu(x)\, P(x,\Gamma)$$

$$\Gamma \longmapsto (P^*(P^*\mu))(\Gamma) = \int_M P^*\mu(dx)\, P(x,\Gamma) =$$
def. $P^*\mu$ →
$$= \int d\mu(x)\, P(x,\Gamma)\, P(x,\Gamma) =$$
$$= \int d\mu(x)\, P^2(x,\Gamma)$$

E notiamo che $\int_M g\, dP^*\mu = \int_M P_g\, d\mu$. Vediamolo per le indicatrici:

$$\int_{\Pi} 1_A \, dP^*_\mu = P^*_\mu(A) = \int_{\Pi} P(x, A)\, d\mu(x) = \int_{\Pi} P\, 1_A(x) d\mu(x).$$

$$P 1_A(x) = \int 1_A(y)\, P(x, dy) = P(x, A)$$

Consideriamo una misura arbitraria $\eta \in \mathcal{P}(\Pi)$ e prendiamo $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(P^*)^k \eta}_{\in \mathcal{P}(\Pi) \text{ per quanto appena visto}}$. Dato che Π é compatto anche $\mathcal{P}(\Pi)$ lo é e dunque η_n ha una sotto successione convergente $\{\eta_{n_i}\}_i$.

Sia $\rho \in \mathcal{P}(\Pi)$ t.c. $\eta_{n_i} \xrightarrow{W} \rho$, allora:

$$P^* \eta_{n_i} \overset{\text{def } \eta_{n_i}}{=} P^* \left(\frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i - 1} (P^*)^k \eta \right) \overset{\text{cambio indice}}{=} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (P^*)^k \eta \overset{\text{voglio riavere } \eta_{n_i}}{=}$$

$$= \eta_{n_i} - \eta_{n_i} + \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (P^*)^k \eta = \eta_{n_i} - \frac{\eta}{n_i} + \frac{1}{n_i} (P^*)^{n_i} \eta$$

$$\eta_{n_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i - 1} (P^*)^k \eta$$

ma
- $\frac{\eta}{n_i} \xrightarrow[i \to +\infty]{W} 0$: $\forall g \in C_b(\Pi)$ $\int_\Pi g \, d\frac{\eta}{n_i} = \frac{1}{n_i} \int_\Pi g \, d\eta \le \frac{1}{n_i} \overbrace{\|g\|_\infty}^{<+\infty \text{ supporto compatto}} \cdot 1 \longrightarrow 0$; e
- $\frac{1}{n_i} (P^*)^{n_i} \eta \xrightarrow{W} 0$: $\forall g \in C_b(\Pi)$ $\int_\Pi g \, d\left(\frac{1}{n_i} P^{*\,n_i} \eta \right) = \frac{1}{n_i} \int_\Pi g \, d((P^{n_i})^* \eta) = \frac{1}{n_i} \int P^{n_i} g \, d\eta$

$(P^*)^{n_i} = (P^{n_i})^*$ $\qquad \int g \, dP^*_\mu = \int Pg \, d\mu$

Dunque $P^* \eta_{n_i} \xrightarrow{W} \rho$.

D'altra parte $\forall g \in C^b(\Pi)$:

$$\int_\Pi g \, dP^* \eta_{n_i} = \int_\Pi Pg \, d\eta_{n_i} \xrightarrow[i \to +\infty]{W} \int_\Pi Pg \, d\rho = \int g \, dP^* \rho$$

Dunque $P^* \eta_i \xrightarrow{W} P^* \rho \Rightarrow P^* \rho = \rho$. ← é proprio la def data all'inizio per misura invariante per catena di Markov

$\square$

Prop. (misura invariante per processi di Markov): $(X_t)_{t \ge 0}$ processo di Markov omogeneo con funzione di transizione $P(t, x, \Pi) := P_t(x, \Pi) = \mathbb{P}[X_t \in \Pi \mid x_0 = x]$. Supponiamo:

1. $P(t, x, \cdot) \in \mathcal{P}(\Pi)$ dipende in maniera continua da x nella topologia della convergenza debole in $\mathcal{P}(\Pi)$, $\forall t \ge 0$.

2. Π compatto

3. $\lim_{t \to 0} \sup_x \left| \int_\Pi g(y)\, P(t, x, dy) - g(x) \right| = 0$.

Allora $\exists$ misura invariante per $\{X_t\}_t$

dim. Definiamo, in maniera analoga a quanto prima $\forall t \geq 0$

$$P^t : C_b(M) \longrightarrow C_b(M)$$ (possiamo restringerci subito a C_b per continuità di $\frac{1}{}$)

$$f \longmapsto P_t f(x) = \int_M P(t, x, dy)\, f(y)$$

$$(P^t)^* : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$$

$$\mu \longmapsto (P^t)^*\mu\,(\Gamma) = \int_M P(t, x, \Gamma)\, d\mu(x)$$

Ora $\forall n$ $(X_{\frac{k}{n}})_{k \in \mathbb{N}}$ è catena di Markov (con funzione di transizione $P(x, \Gamma) = \mathbb{P}[X_{\frac{1}{n}} \in \Gamma \mid X_0 = x]$) !!!

e dunque per la prop. precedente $\exists \rho_n \in \mathcal{P}(M)$ con $(P^{\frac{1}{n}})^* \rho_n = \rho_n$.

Ora, per compattezza di $\mathcal{P}(M)$, $\exists \rho \in \mathcal{P}(M)$ e $\{\rho_{n_i}\}_i \in \mathcal{P}(M)$ t.c. $\rho_{n_i} \xrightarrow{W} \rho$.

Sia $g \in C_b(M)$, allora:

$$\int_M g \, d(P^t)^*\rho = \int_M P^t g \, d\rho = \lim_{i \to +\infty} \int_M P^t g \, d\rho_{n_i} =$$ voglio ottenere $\frac{1}{n_i}$ sopra

$$= \lim_{i \to +\infty} \int_M P^t \, d\left(P^{\frac{1}{n_i}} \_\_\_\_\_\right) =$$ $\rho_{n_i} = (P^{\frac{1}{n_i}})^* \rho_{n_i}$

$$= \int g \, d\rho .$$

Usando come $g \in C_b(M)$ $g = \mathbb{1}_\Gamma$ $\forall \Gamma \in \mathcal{B}(M)$ si ha proprio $((P^t)^*\rho)(\Gamma) = \rho(\Gamma)$ che è la def. data sopra (ricorda def. $(P^t)^*$).

$\square$

Corollario: M compatto, $F: M \longrightarrow M$ continua, F^t semiflusso di trasformazioni continue allora ammettono misure di prob. invarianti

← sono due enunciati: uno per F e uno per il semiflusso F^t.

dim. Per il primo basta definire $P(x, \cdot) = \delta_{Fx}$, per il secondo $P(t, x, \cdot) = \delta_{F^t x}$

dove δ_y denota l'unità di massa in un punto y.

$\square$

E se M non è compatto?

Def. (Famiglia tight): $\Pi \subseteq \mathcal{P}(M)$ è detta tight se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \subseteq M$ compatto t.c. $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ $\forall \mu \in \Pi$.

Prop: Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una catena di Markov in uno sp. metrico M con probabilità di transizione $P(x,\Gamma)=\mathbb{P}[X_1\in\Gamma \mid x_0=x]$ t.c. $P(x,\cdot)\in\mathcal{P}(M)$ dipende in maniera continua da nella topologia della convergenza debole su $\mathcal{P}(M)$. Supponiamo che per una successione $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{P}(M)$ la seguente famiglia è tight:

$$\mathcal{F}:=\left\{\mu_n : \mu_n:=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(P^*)^k\sigma_n\ ,\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Allora $\exists$ probabilità invariante.

dim. Per il Teorema di Prohorov $\mathcal{F}$ è relativamente compatta, i.e. ogni successione di elementi di $\mathcal{F}$ ha una sottosuccessione convergente debolmente. In particolare, $\exists\,\mu\in\mathcal{P}(M)$ t.c. $\mu_{n_j}\xrightarrow{W}\mu$ per $n_j\to\infty$. Allora $\forall g\in C_b(M)$:

hp. di cont.

$$\left|\int_M g\,dP^*\mu-\int_M g\,d\mu\right| = \left|\int_M \underbrace{Pg}_{\in C_b(M)}\,d\mu-\int_M \underbrace{g}_{\in C_b(M)}\,d\mu\right| =$$

$$=\lim_{j\to+\infty}\left|\int_M Pg\,d\mu_{n_j}-\int_M g\,d\mu_{n_j}\right| =$$

def. μ_n $\to$
$$=\lim_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_M Pg\,d(P^*)^k\sigma_{n_j}-\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_M g\,d(P^*)^k\sigma_{n_j}\right|=$$

$(P^*)^k=(P^k)^*$ $\to$
$$=\lim_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{n_j}\sum_{k=0}^{n_j-1}\int_M\left(P^{k+1}g-P^kg\right)d\sigma_{n_j}\right|=$$

somma telescopica $\to$
$$=\lim_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{n_j}\int_M\left(P^{n_j}g-g\right)d\sigma_{n_j}\right|\le$$

$\|Pg\|=\sup_{x\in M}Pg(x)=$ $\to$
$$\le\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{n_j}\left(\|P^{n_j}g\|+\|g\|\right)\le$$

$=\sup_{x\in M}\int_M P(x,dy)\,g(y)\le$

$$\le\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{n_j}\,2\,\|g\| = 0$$

g limitata

$=\sup_{x\in M}\|g\|\cdot 1=\|g\|$

$\square$

Oss. Se $\{(P^*)^k\sigma_n\ \ k,n\}$ è tight $\Rightarrow$ $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(P^*)^k\sigma_n\right\}$ è tight. Questo poiché $\forall\varepsilon>0$ C compatto con $(P^*)^k\sigma_n(C)\ge\varepsilon$ allora $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(P^*)^k\sigma_n(C)\ge\min_k(P^*)^k\sigma_n(C)\ge 1-\varepsilon$.

la prima è una "media"

Teorema: Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ catena di Markov e $P(x,\Gamma) = \mathbb{P}[X_1 \in \Gamma \mid X_0 = x]$ funzione di transizione.

Assumiamo che:

1: $P(x,\cdot)$ dipende in maniera continua da x nella topologia della conv. debole

2: $F: \Gamma \longrightarrow \Gamma$ continua, $\exists\, V: \Gamma \longrightarrow [0,+\infty)$ semicontinua superiormente t.c. $\forall C \geq 0$

$K_C := \{x : V(x) \leq C\}$ é compatto.

3: $\exists\, K \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ R>0,\ d>0,\ \delta>0$ t.c. $V(F^K x) \leq \max\{R, V(x)-d\}\ \forall x \in \Gamma$ e

$\sup_{x\in\Gamma}\left(\int_\Gamma V(y)\,P(K,x,dy) - V(F^K x)\right) \leq d-\delta$ dove $P(K,x,\Gamma) = \mathbb{P}[X_K \in \Gamma \mid X_0 = x]$

é lo step K-esimo della prob. di trans. di $\{X_n\}_n$. $(P(1,x,\Gamma) = \mathbb{P}(x,\Gamma))$. (Assumiamo che tutti gli integrali $\exists$).

Allora esiste una probabilitá invariante.

dim. Prima di tutto definiamo una famiglia di operatori $\forall f$ funzione e $\forall\, l \geq 1$, definiti così: $(P^l{}_f)g := P^l(fg)\ \forall g$ funzione.

Step 1: $y \in \Gamma \setminus K_{R+d} \overset{\text{def. hp.}}{=} \{x : V(x) > R+d\} \Rightarrow \int_\Gamma V(z)\,P(K,y,dz) \leq V(y)-\delta$. infatti:

$$\int_\Gamma V(z)\,P(K,y,dz) = \int_\Gamma V(F^K y)\,P(K,y,dz) + \underbrace{\int_\Gamma \big(V(z) - V(F^K y)\big)\,P(K,y,dz)}_{\text{hp. 2}} \leq$$

$$\leq \overline{V(y)-d} + \overline{d-\delta} = V(y)-\delta$$

$V(y) > R+d$
$\Rightarrow V(y)-d > R$
$\Rightarrow V(F^K y) \leq V(y)-d$

Step. 2 $y \in K_{R+d} \Rightarrow \int V(z)\,P(K,y,dz) \leq d-\delta+D$ con $D := \sup_{y\in K_{R+d}} V(F^K y)$:

$$\int_\Gamma V(z)\,P(K,y,dz) \leq \int_\Gamma V(F^K y)\,P(K,y,dz) + \underbrace{\int_\Gamma \big(V(z) - V(F^K y)\big)\,P(K,y,dz)}_{\text{hp. 2}} \leq$$

$$\leq D + \overline{d-\delta} = D+d-\delta$$

Step 3: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\big(P^K \chi_{\Gamma\setminus K_{R+d}}\big)^n}_{\text{operatore definito all'inizio}} \mathbb{1}(x) \leq \begin{cases} (d+D)\,\delta^{-1}, & \text{se } x \in K_{R+d} \\ \delta^{-1} V(x), & \text{se } x \notin K_{R+d} \end{cases}$$ Infatti:

(indicatrice: χ; $\mathbb{1}$: funzione identicamente uguale a 1)

Definiamo: $I(n,x) := \int_{M\setminus K_{R+d}} \text{---} \int_{M\setminus K_{R+d}} V(z_n)\, P(K, z_{n-1}, dz_n) \text{---} P(K, z_1, dz_2)\, P(K, \overset{z_0}{\overset{\shortparallel}{x}}, dz_1)$

Dato che $z_{n-1} \in M \setminus K_{R+d}$ (sennò tanto l'integrale è nullo):

$$\int_{M\setminus K_{R+d}} V(z_n)\, P(K, z_{n-1}, dz_n) \leq V(z_{n-1}) - \delta \quad (\text{Step } 1)$$

da cui $I(n,x) \leq I(n-1,x) - \int_{M\setminus K_{R+d}} \text{---} \int_{M\setminus K_{R+d}} \delta\, P(K, z_{n-2}, dz_n) \text{---} P(K, z_1, dz_2)\, P(K, x, dz_1)$

Chapman-Kolmogorov: $\longrightarrow = I(n-1,x) - \delta\, P((n-1)K, x, M\setminus K_{R+d})$

$P(l+m, x, M) =$

$= \int_M P(l, x, dy)\, P(m, y, M)$

$\left(P^K \mathbb{1}_{\chi_{M\setminus K_{R+d}}}\right)^{n-1} \mathbb{1}(x) = \nearrow =$

$= \left(P^K \mathbb{1}_{\chi_{M\setminus K_{R+d}}}\right)^{n-2} \left(P^K \mathbb{1}_{\chi_{M\setminus K_{R+d}}}\right) \mathbb{1}(x) =$

$= \left(P^K \mathbb{1}_{\chi_{M\setminus K_{R+d}}}\right)^{n-2} \left(P^K \left(\mathbb{1}_{\chi_{M\setminus K_{R+d}}} \mathbb{1}\right)(x)\right) = \dots$

$P : C_0(M) \longrightarrow C_0(M)$

$g \longmapsto \left(\begin{array}{l} P_g : M \longrightarrow M \\ x \longmapsto P_g(x) := \int_M P(x, dy)\, g(y) \end{array} \right)$ ← funzione di trans.

$= I(n-1,x) - \delta \left(P^K \chi_{M\setminus K_{R+d}}\right)^{n-1} \mathbb{1}(x)$

Dunque per induzione:

$$0 \overset{\text{def.}}{\leq} I(n,x) \leq I(1,x) - \delta \sum_{j=1}^{n-1} \left(P^K \chi_{M\setminus K_{R+d}}\right)^j \mathbb{1}(x)$$

da cui $\sum_{j=1}^{n-1} \left(P^K \chi_{M\setminus K_{R+d}}\right)^j \mathbb{1}(x) \leq \delta^{-1} I(1,x) \implies$ per $n \longrightarrow +\infty$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P^K\left(\chi_{M\setminus K_{R+d}}\right) \mathbb{1}(x) \leq \delta^{-1} I(1,x) = \delta^{-1} \int_M V(z)\, P(K, x, dz) \leq \begin{cases} \delta^{-1}(V(x) - \delta), & x \in K_{R+d} \\ \delta^{-1}(D+d-\delta), & x \notin K_{R+d} \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} V(x)\,\delta^{-1}, & x \in K_{R+d} \\ \delta^{-1}(D+d), & x \notin K_{R+d} \end{cases}$$

Step 4 $\quad (P\chi_{M\setminus K_{R+d}})^n 1(x) \le (P^k \chi_{M\setminus K_{R+d}})^{[\frac{n}{k}]} 1(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, infatti:

$[\frac{n}{k}]$ ← integral part

$\xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ← implicata dallo step 3 perché la coda deve andare a 0

$$(P\chi_{M\setminus K_{R+d}})^n 1(x) = \int_{M\setminus K_{R+d}} \dots \int_{M\setminus K_{R+d}} P(1, z_{n-1}, dz_n) \dots P(1, x, dz_1) \le$$

$$\le \int_{M\setminus K_{R+d}} \dots \underbrace{\int_M \dots \int_M}_{K-1 \text{ volte}} P(1, z_{n-1}, dz_n) \dots P(1, x, dz_1) =$$

Chapman-Kolmogorov

$$= \int_{M\setminus K_{R+d}} \dots \int_{M\setminus K_{R+d}} P(K, z_{n-K}, dz_{n-K+1}) \dots P(1, x, dz_1)$$

e iterando segue la tesi.

Step 5 : Definiamo $P_\infty : C_b(K_{R+d+\gamma}) \longrightarrow C_b(K_{R+d+\gamma})$ operatore positivo e $P_\infty 1 = 1$.

assumiamo $V(z) > R+d$ per qualche z. (Altrimenti $M = K_{R+d} \Rightarrow M$ compatto e si conclude per la proposizione). Sia $0 \le q \le 1$ funzione t.c. $q(y) = 1 \ \forall y \in K_{R+d}$ e $q(y) = 0 \ \forall y \in M\setminus K_{R+d+\gamma}$.

Poniamo $r := 1-q$. Definiamo gli operatori $\forall N \ge 0$:

$$P_N := \sum_{n=0}^{N} (Pr)^n (Pq)$$

che agisce sulle funzioni misurabili su $K_{R+d+\gamma}$, $P_N \ge 0$, i.e. $P_N f \ge 0$ se $f \ge 0$, e valgono:

- $P_N(C_b(K_{R+d+\gamma})) \subseteq C_b(K_{R+d+\gamma})$
- $P_{N+1} f \ge P_N f \quad \forall f \ge 0$
- $P_N \chi_{K_{R+d+\gamma}} = \sum_{n=0}^{N} (Pr)^n (Pq) \chi_{K_{R+d+\gamma}} \underset{\text{stiamo guardando tutto in } K_{R+d+\gamma}}{=}$

$$= \sum_{n=0}^{N} (Pr)^n (Pq) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} (Pr)^n (1-Pr) = \cancel{(1-Pr)} \frac{1-(Pr)^{N+1}}{\cancel{1-Pr}} = 1-(Pr)^{N+1} \le 1$$

$r \ge 0$ per def. $\Rightarrow Pr \ge 0$

- $(Pr)^N 1 \le (P\chi_{M\setminus K_{R+d}})^N 1 \xrightarrow[\text{Step 4}]{N\to+\infty} 0$, infatti:

$$(Pr)^N 1(x) = (Pr)^{N-1} P(r1(x)) = (Pr)^{N-1} Pr(x) = (Pr)^{N-1} \Big(\int_M r(z_1) \overbrace{P(x, dz_1)}^{P(1,x,dz_1) \text{ // def}} \Big) =$$

itero

$$= \int_M r(z_N) \int \dots \int r(z_1) P(1, x, dz_N) \dots P(1, z_{N-1}, dz_N) \le$$

$$\le \int_{M\setminus K_{R+d}} \dots \int_{M\setminus K_{R+d}} P(1, x, dz_N) \dots P(1, z_{N-1}, dz_N) = (P\chi_{M\setminus K_{R+d}})^N 1$$

$r = 0$ in K_{R+d} e 1 al massimo 1 fuori

Dunque dato che $(P_r)^n 1 \leq 1$ converge monotamente a 0 su $K_{R+d+\gamma}$ e questa conv. è uniforme per compattezza di $K_{R+d+\gamma}$.

sempre uniforme

- $P_N 1 \xrightarrow{N \to +\infty} 1$: stesso conto di $P_N \chi_{K_{R+d+\gamma}}$ sfruttando alla fine $(P_r)^N 1 \xrightarrow{N \to +\infty} 0$ (punto prec.)

Ora, $\| P_{N+m} f - P_N f \| = \| \sum_{n=N+1}^{N+m} (P_r)^n (P_q) f \| \leq \|f\| \, \| P_{N+m} 1 - P_N 1 \| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

convergenza uniforme posso portare limite dentro e entrambe vanno a 1

$\forall f \in C_b(K_{R+d+\gamma})$. Dunque esiste un limite uniforme:

$$P_\infty := \lim_{N \to +\infty} P_N \qquad (P_\infty : C_b(K_{R+d+\gamma}) \longrightarrow C_b(K_{R+d+\gamma}))$$

che è un'operatore positivo (limite uniforme di operatori positivi) e soddisfa $P_\infty 1 = 1$ $(P_N 1 \xrightarrow{N \to +\infty} 1)$.

<u>Step 6</u>: $\exists \mu$ probabilità P^*-invariante.

Ora per proposizione $\exists \lambda$ prob. P_∞^*-invariante su $K_{R+d+\gamma}$ (i.e. $P_\infty^* \lambda = \lambda$ dove $\int f \, d P_\infty^* \lambda = \int P_\infty f \, d\lambda \quad \forall f \in C_b(K_{R+d+\gamma})$). Definiamo:

$$\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} ((P_r)^*)^n \lambda \qquad \text{dove ancora} \quad \int f \, d(P_r)^* \lambda := \int (P_r) f \, d\lambda$$
$$\forall f \in C_b(K_{R+d+\gamma})$$

Vale ora che $\nu(M) < +\infty$, infatti:

r è 0 su K_{R+d} si salva $n=0$

- $\forall f \equiv 0$ fuori da K_{R+d} allora $(P_r)^n f = 0 \quad \forall \underline{\underline{n \geq 1}} \Longrightarrow \int f \, d\nu = \int f \, d\lambda$ e dunque,

in particolare, per $f = \chi_{K_{r+d}}$ si ottiene $\nu(K_{r+d}) = \lambda(K_{R+d}) \leq 1$

λ è tutta concentrata in $K_{R+d+\gamma}$

- $\nu(M \setminus K_{R+d}) = \int_M \chi_{M \setminus K_{R+d}} \, d \sum_{n=0}^{+\infty} ((P_r)^*)^n \lambda =$

$$= \int_M \chi_{M \setminus K_{R+d}} \sum_{n=0}^{+\infty} d((P_r)^*)^n \lambda =$$

λ è concentrata su $K_{R+d+\gamma}$

$$= \int_{K_{R+d+\gamma}} \sum_{n=0}^{+\infty} (P_r)^n \chi_{M \setminus K_{R+d}} \, d\lambda \leq$$

$(P_r)^n \chi_{M \setminus K_{R+d}} \leq (P_r)^n 1 \leq (P \chi_{M \setminus K_{R+d}})^n 1$

$$\leq \int_{K_{R+d+\gamma}} \sum_{n=0}^{+\infty} (P \chi_{M \setminus K_{R+d}})^n 1 \, d\lambda \leq$$

$(P \chi_{M \setminus K_{R+d}})^n 1(x) \leq$ Step 4 $\leq (P^K \chi_{M \setminus K_{R+d}})^{[\frac{n}{K}]} 1(x)$

$$\leq K \left(1 + \int_{K_{R+d+\gamma}} \sum_{t=1}^{+\infty} (P^K \chi_{M \setminus K_{R+d}})^t 1 \, d\lambda \leq \right.$$

Step 3 $\to \leq K\left(1+(d+D)\delta^{-1}+\delta^{-1}\sup_{x\in K_{R+d+\gamma}} V(x)\right)<+\infty$

V semicontinua + $K_{R+d+\gamma}$ compatto

$\Rightarrow \sum_{n=tK}^{(t+1)K-1}\left(P\chi_{M\setminus K_{R+d}}\right)^n 1(x)\leq$

$\leq K\left(P^K\chi_{M\setminus K_{R+d}}\right)^t 1(x)$

per n da tK a $(t+1)K-1$ $\left[\frac{n}{K}\right]$ fa sempre t, dunque posso cambiare la sommatoria facendola per $t=1$ a $t=+\infty$; poi spezzo la sommatoria semplicemente

Dunque è ben definita $\mu:=\frac{\nu}{\nu(M)}\in\mathcal{P}(M)$. Mostriamo che ν (e quindi μ) è P^*-invariante:

$$P^*\nu=\sum_{n=0}^{+\infty}P^*\left((Pr)^*\right)^n\lambda=$$

$P^*\eta=(Pr)^*\eta+(Pq)^*\eta$ infatti $\int f\,dP^*\eta=\int Pf\,d\eta=$

$=\int P(r+q)f\,d\eta=$ ($r+q\equiv 1$)

$=\int Pr\,f\,d\eta+\int Pq\,f\,d\eta=$

$=\int f\,d(Pr)^*\eta+\int f\,d(Pq)^*d\eta=$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((Pr)^*\right)^{n+1}\lambda+\sum_{n=0}^{+\infty}(Pq)^*(Pr^*)^n\lambda=$$

$$=\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}(Pr^*)^n\lambda}_{\nu-\lambda}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\left((Pr)^n(Pq)\right)^*\lambda}_{\lim_{N\to+\infty}P_N^*\lambda}=$$

$$=\nu-\lambda+\lim_{N\to+\infty}P_N^*\lambda=$$

$$=\nu-\lambda+P_\infty^*\lambda=\nu-\lambda+\lambda=\nu.$$

□

<u>Oss.</u>: Si osserva che se $P(x,M)=Q_{Fx}(M)$ allora possiamo derivare l'assunzione "$\sup_{x\in M}\left(\int_M V(y)P(K,x,dy)-V(F^Kx)\right)\leq d-\delta$" da:

$$(*)\quad \max_{0\leq l\leq K}\sup_{x\in M}\int_M\left(V(F^l y)-V(F^l x)\right)Q_x(dy)\leq(d-\delta)K^{-1}$$ poiché:

$$\sup_{x\in M}\left(\int_M V(y)P(K,x,dy)-V(F^Kx)\right)\overset{\text{Chapman Kolmogorov}}{=}$$

$$=\sup_{v_0\in M}\int_M\text{—}\int_M Q_{Fv_0}(dv_1)\text{—}Q_{Fv_{K-1}}(dv_K)\sum_{i=1}^K\left(V(F^{l-i}v_i)-V(F^{l-i+1}v_{i-1})\right)\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^K\sup_{v_{i-1}\in M}\int_M\left(V(F^{l-i}v_i)-V(F^{l-i}Fv_{i-1})\right)Q_{Fv_{i-1}}(dv_i)\leq K\cdot(d-\delta)K^{-1}=d-\delta$$

Effettivamente la condizione $(*)$ è soddisfatta quando $P(x,\cdot)=Q_{Fx}(\cdot)$, V è continua e Q_x è vicina è vicina all'unità di massa concentrata in x (in uno sp. metrico è naturale prendere come $V(x)=dist(x_0,x)$ con x_0 fissato).