Es. ETI

Lezione 12 Marzo

Es. 1.1. : A partire dagli assiomi dati dimostrare che:

1. Se R è una relazione binaria, allora esistono $dom(R)$, $Imm(R)$:

il dominio di R e l'immagine di R esistono entrambi per l'assioma di separazione e di unione; infatti dato R:

$$dom(R) = \{ x \in \bigcup\bigcup R \mid \exists y . (x,y) \in R \}$$

$$Imm(R) = \{ y \in \bigcup\bigcup R \mid \exists x : (x,y) \in R \}$$

2. Se $\equiv$ è una relazione di equivalenza su A, allora esiste l'insieme quoziente:

l'insieme quoziente è per definizione l'insieme delle classi di equivalenza. Dunque le classi di equivalenza esistono per l'assioma di separazione essendo definite come:

$$[a] = \{ x \in A \mid x R a \}$$

Quindi l'insieme quoziente esiste per l'assioma potenza e l'assioma di separazione infatti se $\equiv$ è definita su X:

$$\text{Insieme quoziente} = \{ K \in \mathcal{P}(X) \mid K \text{ è una classe di equivalenza per } \equiv \}$$

3. : $\forall A \forall B$ esiste $Fun(A,B)$:

$Fun(A,B)$ per definizione è l'insieme di tutte le funzioni da A in B. Dunque ricordiamo che $f \in Fun(A,B)$ se $f \subseteq A \times B$ è una relazione e $\forall a \in Dom f \ \exists! b$ t.c. $(a,b) \in f$. Allora $Fun(A,B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ e dunque per l'assioma delle potenze e di separazione:

$$Fun(A,B) = \{ f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f \text{ è funzione da } A \text{ a } B \}$$

è ben definito.

4 Data la sequenza $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ esiste $\prod_{i \in I} A_i$:

gli elementi di $\prod_{i \in I} A_i$ sono delle I-sequenze che non sono altro che funzioni da I nell'insieme $\bigcup_{i \in I} A_i$ (che esiste per l'assioma dell'unione) e dunque per l'assioma di separazione $\exists \prod_{i \in I} A_i \subseteq \mathrm{Fun}\left(I, \bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

(L'assioma della scelta ci assicura che non sia vuoto.)

Lezione 17 Marzo

Es. 2.1. : • $0, 1, 2, 3$ sono a 2 a 2 diversi:

secondo la definizione dei naturali di Von Neumann $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$
$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e dunque è evidente

come questi 4 insiemi siano a 2 a 2 diversi tra loro.

• se $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ si ha $i < j$ (nel senso informale) $\iff i \in j$:

dalla costruzione possiamo notare che $0 = \emptyset \in 1, 2, 3$; $1 = \{\emptyset\} \in 2, 3$
e $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in 3$ e quindi il se e solo se è ovvio.

Es. 2.2. : $\{\{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ non sono numeri naturali :

per dimostrare questo fatto usiamo la proposizione per la quale
se $x \in \omega$ e $x \neq 0 \Rightarrow \emptyset \in x$ e se $x, y \in \omega$ allora se $x \in y \rightarrow \hat{x} \in \hat{y}$:

dunque $\{\{\emptyset\}\} \neq 0$ allora $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ ma questo non è vero quindi
$\{\{\emptyset\}\} \notin \omega$; $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ invece ha 0 come elemento ma

allora $\{\emptyset\} = 1 \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}$ ma anche

questo è falso dunque nemmeno questo insieme è un naturale.

Es. 2.3. : dimostrare le seguenti proprietà $n, m \in \omega$:

1 $n \in m \iff n \subsetneq m$:

$\boxed{\Rightarrow}$ prendo un elemento $k \in n \in m$ allora per transitività di m $k \in m$.
Inoltre ω gode della proprietà irriflessiva e dunque $n \notin n \Rightarrow n \subsetneq m$.

$\boxed{\Leftarrow}$ facciamo per induzione su m:

se $m=0$: allora la proprietà è vera a vuoto;

$P(m) \to P(\hat{m})$: dunque $n \subsetneq \hat{m} = m \cup \{m\}$. Dunque se $m \notin n \Rightarrow n \subsetneq m$ e dunque per Hp induttiva $n \in m \in \hat{m}$ e per transitività $n \in \hat{m}$.

Se invece $m \in n \Rightarrow$ per il punto precedente $m \subsetneq n$ cioè $\hat{m} = m \cup \{m\} \subseteq n$ ma questo è assurdo dato che $n \subsetneq \hat{m}$.

2 $\hat{n} \in \hat{m} \to n \in m$: $\hat{n} = n \cup \{n\} \in \hat{m} = m \cup \{m\}$. Dunque o $n \cup \{n\} = m$ e quindi $n \in m$ (tesi) o $n \cup \{n\} \in m$ ma dunque $n \cup \{n\} \subsetneq m$ cioè $n \in m$ (tesi).

3 $\forall x \; x \in n \to x \in \omega$: voglio mostrare la transitività di ω cioè se $n \in m \in \omega \Rightarrow n \in \omega$. Per induzione su m:

$m=0$: la proprietà è vera a vuoto;

$P(m) \to P(\hat{m})$: $n \in \hat{m} \in \omega$ cioè $n \in m \cup \{m\} \in \omega$: dunque se $n = m \Rightarrow$ ho finito perché $n \in \omega$; se $n \neq m$ allora $n \in m \in \omega$ e per Hp. induttiva $n \in \omega$.

4 $n \cap m$ è un numero naturale e $n \cap m = \min\{n, m\}$: per induzione su m:

$m = \emptyset$: allora $n \cap m = \emptyset = 0$ e dunque è tutto vero;

$P(m) \to P(\hat{m})$: $n \cap \hat{m} = n \cap (m \cup \{m\})$ dunque se $m \notin n$ $n \cap (m \cup \{m\}) = n \cap m$ e si conclude per Hp. induttiva. Se invece $m \in n$ allora $m \subsetneq n$ e dunque $n \cap (m \cup \{m\}) = \hat{m}$ e dunque è un naturale e effettivamente $\min\{n, \hat{m}\} = \hat{m}$.

5 $n \cup m$ è un numero naturale e $n \cup m = \max\{n, m\}$: per induzione su m:

Se $m = \emptyset$: $n \cup \emptyset = n$ che è un naturale e $\max\{n, \emptyset\} = n$;

$P(m) \to P(\hat{m})$: $n \cup \hat{m} = n \cup (m \cup \{m\})$ quindi se $n \in m$ $n \cup \hat{m} = \hat{m}$ e quindi è un numero naturale e $\max(n, \hat{m}) = \hat{m}$. Se invece $n \notin m$ allora dato l'ordinamento totale o $n = m$ e quindi $n \cup \hat{m} = \hat{m}$ e $\max(n, \hat{m}) = \hat{m}$ oppure $m \in n$ allora $\hat{m} \subseteq n$ e quindi $n \cup \hat{m} = n$ e $\max(n, \hat{m}) = n$.

$\underline{\epsilon}$ $\hat{n}$ è il successore di n, cioè non accade per nessun $m \in \omega$ che $n < m < \hat{n}$: supponiamo ci sia allora $n \in m \in n \cup \{n\}$ dunque se $m \in n$ ho un assurdo perché avrei $n \in m \in n$ e per transitività $n \in n$ ma allora assurdo per irriflessività di ω. Allora $m = n$ ma $n \in m$ che implica $n \not\in m$ e dunque assurdo.

Lezione 19 Marzo

Esercizio 3.1: Mostrare che l'induzione usuale e l'induzione forte sono la stessa cosa:

Supponiamo di avere l'induzione usuale e vediamo che possiamo ottenere quella forte: entrambe verificano $P(0)$. Ora se ho che $(\forall y < x \; P(y)) \rightarrow P(x)$ significa che in particolare che $P(x-1) \rightarrow P(x)$ e dunque per l'induzione usuale $P(x)$ è verificato $\forall x \in \omega$.
Se invece suppongo l'induzione forte e ho che $P(y) \longrightarrow P(y+1) \; \forall y$ allora ricorsivamente $P(0) \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow \text{——} \rightarrow P(x)$
(N.B. qui non uso un'induzione perché i passaggi sono finiti) allora ho che $(\forall y < x \; P(y)) \longrightarrow P(x)$ e dunque per induzione forte $P(x)$ è vera $\forall x \in \omega$.

Esercizio 3.2.: Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni a 2 a 2 compatibili allora $F = \bigcup \mathcal{F}$ è una funzione e $dom(F) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$:

$\bigcup \mathcal{F}$ è una relazione binaria poiché ogni suo elemento appartiene a qualche funzione in $\mathcal{F}$ e dunque deve essere una coppia ordinata. Il fatto che sia una funzione e dunque soddisfi l'univocità deriva dalla mutua compatibilità infatti se $x \in \bigcap_{i \in I} Dom\, f_i$ per un certo $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ allora $f_i(x) = f_j(x) \; \forall i, j \in I$ e dunque si ha l'univocità (oltre che l'esistenza).
Resta da mostrare che $dom(F) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$: innanzitutto vediamo che $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom f$ esiste e questo è vero perché $\forall f \in \mathcal{F}$ $dom\, f \in \mathcal{P}(\bigcup\bigcup\bigcup X)$ e dunque grazie all'assioma dell'unione e di potenza è ben definita. Ora l'uguaglianza: $\boxed{\subseteq}$ un elemento $x \in dom(F)$ è un elemento di $dom(f)$ per una certa $f \in \mathcal{F}$; $\boxed{\supseteq}$ un elemento $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(f)$ significa che $\exists f \in \mathcal{F}$ t.c. $x \in dom(f)$ e quindi $x \in dom(F)$.

Es. 3.3.: Sia A un insieme, $a \in A$ e $g: \omega \times A \rightarrow A$ una funzione. φ è un'approssimazione finita se $\varphi: K+1 \rightarrow A$ con K numero naturale con $\varphi(0) = a$ e $\varphi(n+1) = g(n, \varphi(n))$. Mostrare che $\mathcal{F} = \{\varphi \mid \varphi \text{ è appross. finita}\}$ è un insieme.

Dunque dimostriamo che $\exists$ l'insieme di tutte le funzioni che hanno come dominio un naturale e come codominio A, chiamandolo $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \omega} A^n$.

$$\mathcal{G} = \{ \varphi \in \mathcal{P}(\omega \times A) \mid \varphi \text{ è una funzione e } \exists_{n \in \omega} \text{ t.c. } \operatorname{dom} \varphi = n \}$$

Questo insieme esiste dato che $\omega \times A$ è ben definito, per l'assioma di potenza $\mathcal{P}(\omega \times A)$ è un insieme e $\mathcal{G}$ lo ottengo con l'assioma di separazione.
Adesso $\mathcal{F}$ lo ottengo sempre per separazione, infatti:

$$\mathcal{F} = \{ \varphi \in \mathcal{G} \mid \varphi \text{ è un'approssimazione finita} \}$$

Lezione 22 Marzo

Es. 4.1. : Trovare esplicitamente funzione biiettiva $\Psi : [0,1] \longrightarrow (0,1)$:

La funzione che definisco ψ :

$$\psi : [0,1] \longrightarrow (0,1)$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}, & x=0 \\ \frac{1}{3}, & x=1 \\ \frac{1}{n+2}, & x=\frac{1}{n} \text{ con } n>1 \\ x, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione è iniettiva infatti se $x_1 = \frac{1}{n_1}$ e $x_2 = \frac{1}{n_2}$ $\Rightarrow \psi(x_1) = \frac{1}{n_1+2} \neq \frac{1}{n_2+2} = \psi(x_2)$ e entrambi sono diversi da $\psi(0)$ e $\psi(1)$. Se $x_1 = \frac{1}{n}$ e $x_2 \neq 0, 1, \frac{1}{n}$ allora $\psi(x_1) = \frac{1}{n+2}$ e $\psi(x_2) = x_2$ ma $x_2 \neq \frac{1}{n+2}$ per Hp.. Se $x_1, x_2 \neq 0, 1, \frac{1}{n}$ con $x_1 \neq x_2$ allora è ovvio perché $\psi(x_1) = x_1 \neq x_2 = \psi(x_2)$

La funzione è surgettiva: prendo un elemento della forma $\frac{1}{n}$ con $n > 1$ allora se $\frac{1}{n} = \frac{1}{2} = \psi(0)$, se $\frac{1}{n} = \frac{1}{3} = \psi(1)$. se $n > 3$ $\frac{1}{n} = \psi\left(\frac{1}{n-2}\right)$.

Se l'elemento x non è della forma $\frac{1}{n}$ allora la controimmagine di x è proprio x.

Lezione 24 Marzo

Es. 5.1.: 1. $X = \bigcup \mathcal{P}(X)$:

$\bigcup \mathcal{P}(X) = \{ \bigcup Y \mid Y \subseteq X \} = \{ x \in Y \mid Y \subseteq X \}$ e dunque se $x \in X$ essendo $X \subseteq X$ $x \in \bigcup \mathcal{P}(X)$; se $x \in \bigcup \mathcal{P}(X)$ allora $x \in Y$ per un certo $Y \subseteq X$ e dunque $x \in X$.

2. $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$:

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X)) = \{ Y \mid Y \subseteq \mathcal{P}(\bigcup X) \} = \{ Y \mid Y \subseteq \{ Z \mid Z \subseteq \bigcup X \} \} =$

$= \{ Y \mid Y \subseteq \{ Z \mid Z \subseteq \{ K \in T \mid T \in X \} \} \}$

Vediamo se X rispetta queste condizioni; ci chiediamo dunque se $X \subseteq \{ Z \mid Z \subseteq \{ K \in T \mid T \in X \} \}$: prendo un elemento $x \in X$ allora $x \subseteq \{ K \in T \mid T \in X \}$? Prendo un elemento $w \in x$ allora $w \in x$ e $x \in X$ quindi è vero e $X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$.

3 $\bigcup(\bigcup(\mathcal{P}(X))) \in \mathcal{P}(\bigcup X)$.

per dim precedente $\bigcup(\mathcal{P}(X)) = X$ dunque la tesi è $\bigcup X \in \mathcal{P}(\bigcup X)$

$\bigcup X = \{ y \in Y \mid Y \in X \}$ $\quad \mathcal{P}(\bigcup X) = \{ T \mid T \subseteq \bigcup X \}$

Affinché $\bigcup X \in \mathcal{P}(\bigcup X)$ allora $\bigcup X \subseteq \bigcup X$ e questo è vero dunque ho la tesi.

4. Dimostrare che se esiste X allora esiste $\{ \mathcal{P}(x) \mid x \in X \} \overset{\text{def.}}{=} I$:

dimostriamo che l'insieme in questione è contenuto in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$.

Come abbiamo visto prima:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X)) = \{ Y \mid Y \subseteq \{ Z \mid Z \subseteq \{ K \in T \mid T \in X \} \} \}$$

dunque è vero che $\mathcal{P}(x)$ con $x \in X$ è un elemento di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$?

Bisogna vedere se $\mathcal{P}(X) \subseteq \{ z \mid z \subseteq \{ K \in T \mid T \in X \} \}$: un elemento di $\mathcal{P}(x)$ con $x \in X$ è un elemento Y tale che $Y \subseteq x$, $x \in X$ e effettivamente è proprio la definizione del membro di destra. Dunque per l'assioma di potenza e di unione esiste $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X))$. A questo punto per l'assioma di separazione ho che:

$$I = \{ Z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\bigcup X)) \mid Z = \mathcal{P}(x) \text{ con } x \in X \}$$

<u>5</u>: Per quali $X = \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = \{ Y \mid Y \subseteq \mathcal{P}(X) \} = \{ Y \mid Y \subseteq \{ T \mid T \subseteq X \} \}$$

Sicuramente se $X = \emptyset$ l'uguaglianza è vera. In generale perché i due insiemi siano uguali deve valere che:

$$x \in X \iff x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \iff x \subseteq \mathcal{P}(X) \iff (\forall y \in x \Rightarrow y \in \mathcal{P}(X)) \iff$$

$$\iff (\forall y \in x \Rightarrow y \subseteq X) \iff (\forall y \in x \Rightarrow (\forall z \in y \Rightarrow z \in X)) \iff$$

$$\forall z \forall y (z \in y \in x \in X \Rightarrow z \in X)$$

<u>Es. 5.2.</u>: usando (A.C.) e ricorsione dimostrare che se A è infinito allora $\exists f: \mathbb{N} \to A$ iniettiva:

dato (A.C.) esiste una funzione di scelta $g: \mathcal{P}(A) \longrightarrow A$. A questo punto per ricorsione numerabile definisco:

$$\begin{cases} a_0 = g(A) \\ a_{n+1} = g(A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}) \end{cases}$$

Dunque proprio perché A è infinito la ricorsione è ben definita e dunque se considero la funzione f:

$$f. \mathbb{N} \longrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$$
$$n \longmapsto a_n$$

questa è una bijezione con un sottoinsieme di A e dunque tesi

Es. 5.3. : se A e B sono finiti allora $A \cup B$ è finito:

supponiamo che $|A| = n$ e $|B| = m$. allora dim. per induzione su n:

- se $n=0$: $A \cup B = B$ e dunque l'unione è finita;
- $P(n) \rightarrow P(\hat{n})$: $|A| = \hat{n}$ mi dà una funzione $f: \hat{n} \longrightarrow A$ bigettiva e dunque $f_{|n}: n \rightarrow A \setminus \{f(n)\}$ è una bigezione. Per Hp. induttiva $|A \setminus \{f(n)\} \cup B|$ è finito e dunque $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi: (A \setminus \{f(n)\}) \cup B \longrightarrow k$ è bigettiva. Se $f(n) \in B$ ho finito se $f(n) \notin B$ allora considero
$\overline{\varphi}: A \cup B \longrightarrow \hat{k}$ t.c. $\overline{\varphi}_{|(A \setminus \{f(n)\}) \cup B} = \varphi$ e $\overline{\varphi}(\{f(n)\}) = k$
e questa è ovviamente una bigezione

Es. 5.4 : Se A, B sono finiti allora $A \times B$ sono finiti:

supponiamo sempre $|A| = n$, $|B| = m$ allora per induzione su n:

- se $n=0$: $|A \times B| = 0$ e dunque è vero;
- $P(n) \longrightarrow P(\hat{n})$: $|A \times B| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come insiemi}}}{=} \hat{n} \times m = (n \cup \{n\}) \times m = (n \times m) \cup (\{n\} \times m)$, ora
il primo insieme è finito per Hp. mentre $\{n\} \times m$ è finito perché esiste la funzione $f: \{n\} \times m \longrightarrow m$ bigezione e dunque
$(n, k) \longmapsto k$
per l'esercizio precedente si ha la tesi.

Es. 5.5. : Se A e B sono finiti, allora $\mathrm{Fun}(A, B)$ è finito: supponiamo sempre $|A| = n$ e $|B| = m$. Per induzione su n:

- $|A| = 0$: allora $\mathrm{Fun}(A, B) = \emptyset$ e quindi è verificata;
- $P(n) \rightarrow P(\hat{n})$: dunque considero le funzioni da $\hat{n}$ in m (come insiemi)
$\mathrm{Fun}(\hat{n}, m) = \{$funzioni da n in $m\} \times \{$funzioni da $\{n\}$ in $m\}$. Dunque
il 1° insieme è finito per Hp induttiva mentre il 2° ha ovviamente cardina-

lità n. Quindi per l'es. precedente si ha la tesi.

Es. 5.6 : Se A, B sono finiti $\Rightarrow \mathcal{P}(A)$ finito:

Supponiamo $|A| = n$, per induzione:

- $n = 0 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 1$ dunque finito.
- $P(n) \to P(\hat{n})$: consideriamo la funzione φ:

$$\varphi : \mathcal{P}(\hat{n}) \longrightarrow \mathcal{P}(n) \times \{0, 1\}$$
$$X \longmapsto \begin{cases} (X \cap n, 0) & \text{se } n \in X \\ (X \cap n, 1) & \text{se } n \notin X \end{cases}$$

Vediamo che φ è iniettiva: ovviamente presi $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(\hat{n})$ $X_1 \neq X_2$ se uno dei due ha n come elemento e l'altro no sicuramente la loro immagine è diversa. Se entrambi hanno n allora deve valere che $\exists$ un elemento $k < n$ (WLOG) t.c. $k \in X_1$ e $k \notin X_2$. Dunque $X_1 \cap n \neq X_2 \neq n$. Se invece nessuno dei due ha n allora $X_1 \cap n = X_1 \neq X_2 = X_2 \cap n$.
Vediamo che φ è surgettiva; preso un elemento in $\mathcal{P}(n) \times \{0\}$ $(Z, 1)$ basta prendere $Z \cup \{n\} \in \mathcal{P}(\hat{n})$; preso un elemento in $\mathcal{P}(n) \times \{1\}$ $(Z, 1)$ basta prendere proprio $Z \in \mathcal{P}(\hat{n})$. Dunque φ è una bigezione. Per esercizio precedente e per hp. induttiva il codominio è finito dunque si ha la tesi.

Es. 5.7 : Se R è una relazione finita, $\mathrm{dom}(R)$ e $\mathrm{Imm}(R)$ sono finiti:

ricordando $\mathrm{Dom}\, R = \{x \in \bigcup\bigcup R \mid \exists y \ (x, y) \in R\}$ e $\mathrm{Imm}\, R = \{y \in \bigcup\bigcup R \mid \exists x \ (x, y) \in R\}$ è ovvio che se l'insieme $\{(x, y) \mid (x, y) \in R\}$ è finito allora basta considerare le funzioni:

$$f_1 : R \longrightarrow \mathrm{Dom}\, R \qquad f_2 : R \longrightarrow \mathrm{Imm}\, R$$
$$(x, y) \longmapsto x \qquad (x, y) \longmapsto y$$

che sono ovviamente surgettive e dunque $|\mathrm{Dom}\, R| \leq |R|$ e $|\mathrm{Imm} R| \leq |R|$ e dunque si ha la tesi.

Es. 5.8 : Se $\mathcal{F}$ è una famiglia finita di insiemi finiti, $\bigcup \mathcal{F}$ è finita:

Supponiamo $|\mathcal{F}| = n$ e facciamo per induzione su n:

- $n = 0$: $\mathcal{F} = \emptyset$ e dunque è finita;
- $P(n) \to P(\hat{n})$: $\bigcup_{i \in \hat{n}} A_i = \left(\bigcup_{i \in n} A_i\right) \cup A_n$ ma il membro $\bigcup_{i \in n} A_i$ è finito

per Hp. induttiva e dunque $\left(\bigcup_{i \in n} A_i\right) \cup A_n$ è finito per esercizio precedente (unione di due insiemi finiti)

Es. 5.9 : assumendo PA_{II} dim. che $\forall x, y, z$ $(x+y)+z = x+(y+z)$:

per induzione su z:

- $z = 0$: $(x+y)+0 = x+y = x+(y+0)$
- $P(z) \to P(S(z))$: $(x+y)+S(z) = S((x+y)+z) \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} S(x+(y+z)) =$
$= x+(S(y+z)) = x+(y+S(z))$

Es. 5.10 : assumendo PA_{II} dim. $\forall x, y, z$ $x+y = y+x$:

dimostriamo che $\forall K$ $0+K = K$, per induzione su K:

- $K = 0$: $0+0 = 0$
- $P(K) \to P(S(K))$: $0+S(K) = S(0+K) \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} S(K)$

dimostriamo che $\forall s, t$ $S(s)+t = s+S(t)$, per induzione su t:

- $t = 0$: $S(s)+0 = S(s)$ invece $s+S(0) = S(s+0) = S(s)$
- $P(t) \to P(S(t))$ = $S(s)+S(t) = S(S(s)+t) = S(s+S(t)) =$
$= s+S(S(t))$.

dunque per induzione su x:

- $x = 0$: $0+y = y = y+0$ vero;
- $P(x) \to P(S(x))$: $S(x)+y = x+S(y) = S(x+y) \overset{\text{Hp. ind.}}{=} S(y+x) = y+S(x)$

e dunque tesi

Es. 5.11 : $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$:

dim. che $\forall K \quad 0 \cdot K = 0$:

- $K = 0$: $\quad 0 \cdot 0 = 0$
- $P(K) \rightarrow P(S(K)) = 0 \cdot S(K) = 0 \cdot K + 0 \overset{\text{Hp. ind.}}{=} 0$

dim. che $\forall m, n \quad m \cdot n + n = (m+1) n$, per induzione su n:

- $n = 0$: $\quad m \cdot 0 + 0 = 0 = (m+1) \cdot 0$
- $P(n) \rightarrow P(S(n))$: $m \cdot S(n) + S(n) = (m \cdot n + m) + S(n) = S(m \cdot n + m + n) =$
$S(m \cdot n + n + m) \underset{\text{Hp. ind.}}{=} S((m+1) n + m) = (m+1) n + S(m) \underset{\text{def.}}{=} S(m) \cdot S(n)$

dunque per induzione su x:

- $x = 0$: $\quad 0 \cdot y = 0 = y \cdot 0$ vero
- $P(x) \rightarrow P(S(x))$: $y \cdot S(x) \underset{\text{def.}}{=} y \cdot x + y \underset{\text{Hp. induttiva}}{=} x y + y = (x+1) y = S(x) \cdot y$

Es. 5.12 : dim. che $\forall x, y, z$: $x(y+z) = xy + xz$:

per induzione su z.

- $z = 0$: $\quad x(y+0) = xy = x \cdot y + x \cdot 0$
- $P(z) \longrightarrow P(S(z))$: $\quad x(y + S(z)) = x \cdot S(y+z) = x(y+z) + x =$
$\underset{\text{Hp. ind.}}{=} xy + xz + x = xy + x\,S(z)$

Es. 5.13 : $\forall x, y, z \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$: per induzione su z

- $z = 0$: $(x \cdot y) \cdot 0 = 0 = x \cdot (y \cdot 0)$
- $P(z) \rightarrow P(S(z)) = (x \cdot y) S(z) = (x \cdot y) \cdot z + (x y) \underset{\text{Hp. ind.}}{=} x(y \cdot z) + x y =$
$= x(y \cdot z + y) = x \cdot (y \cdot S(z))$

Es. 5.14 : $(N, <)$ totalmente ordinato :

dimostriamo intanto l'ordine stretto verificando le proprietà irriflessiva e transitiva (l'asimmetrica viene di conseguenza):

• irriflessiva: vediamo che $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \not< n$: per induzione su n:

• $n=0$: se $n<n$ allora $\exists K \neq 0$ t.c. $0 = 0+K$ cioè $K=0$ ↯

• $P(n) \longrightarrow P(S(n))$: supponiamo $\exists K \neq 0$ t.c. $S(n) = S(n) + K = S(n+K)$ ma S è iniettiva come funzione $\Rightarrow n = n+K$ e questo è assurdo per Hp. induttiva

• transitiva: devo mostrare $\forall n, m, k \quad n<m<k \Rightarrow n<k$: per induzione su k:

• $k=0$: $n<m<0 \Rightarrow n<0$: vero a vuoto;
• $P(k) \rightarrow P(S(k))$: $n<m<S(k)$ dunque $m=k$ o $m<k$: se $m<k$ allora $n<m<k<S(k)$ è per Hp. induttiva $n<S(k)$. Se invece $m=k$ $n<k<S(k)$ cioè $n<S(k)$.

Ora verifichiamo l'ordine totale: cioè $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n<m$ o $n=m$ o $m<n$: per induzione su n:

• $n=0$: $\forall m \in \mathbb{N} \quad n=0<m$ infatti $0 = 0+m$.
• $P(n) \rightarrow P(S(n))$: supponiamo che $m<n$. Allora $m<n<S(n)$ e per prop. transitiva $m<S(n)$. Se $m=n$ allora $m=n<S(n)$. Se $n<m$ allora $S(n) = m$ o $S(n) < m$. In entrambi i casi $S(n)$ e m sono confrontabili.

Es. 5.15: $\forall x, y, z \; \mathbb{N}$: $x<y \Rightarrow x+z < y+z$:

per induzione su z:

• $z=0$: $x+0 < y+0 \iff x<y$ vero
• $P(z) \rightarrow P(S(z))$: $x + S(z) = S(x+z)$ ma $x+z<y+z$ per Hp. induttiva e dato che S è una funzione strettamente crescente (infatti se $x<y$ allora $y = x+\overset{\neq 0}{K}$ cioè $S(y) = S(x+K) = S(x)+K$ cioè $S(x)<S(y)$) $S(x+z) < S(y+z) = y+S(z)$ e dunque per proprietà transitiva $x+S(z) < y+S(z)$.

Es. 5.16: $\forall x, y, z$: $z \neq 0 \rightarrow (x<y \rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$. :

per induzione su z:

- $z = S(0)$: $\quad x < y \longrightarrow \quad x \cdot S(0) = x \cdot 0 + x = x < y \cdot 0 + y = y \cdot S(0)$
- $P(z) \longrightarrow P(S(z))$: $\quad x \cdot S(z) = x \cdot z + x < yz + x < y \cdot z + y = y \cdot S(y)$

Hp. induttiva e es. prec. $\qquad$ poiché $x < y$

Lezione 26 Marzo

Es. 6.1.: definire somma e prodotto su ω (che rispetti PA_{ii}) usando la ricorsione numerabile:

Definiamo la somma:

$$\begin{cases} n+0=n \\ n+\hat{m} = \widehat{(n+m)} \end{cases}$$

con $\hat{}$ che fa da funzione successore e che quindi rispetta per def. PA_{ii}

Definiamo la somma:

$$\begin{cases} n\cdot 0=0 \\ n\cdot \hat{m} = n\cdot m + m \end{cases}$$

, come sopra

Es. 6.2.: Se $(A,<)$, $(B,<)$ sono insiemi totalmente ordinati finiti con $|A|=|B|$ allora sono isomorfi. Ogni insieme totalmente ordinato e finito è ben ordinato.:

mostriamo che ogni insieme totalmente ordinato finito (e non vuoto) ha massimo e minimo. E dunque dato che ogni sottoinsieme di un insieme totalmente ordinato e finito è totalmente ordinato e finito si ha che è un buon ordine. Supponiamo $|A|=n$. Per induzione su n:

- $n=1$: allora A ha solo un elemento che fa da max e da min.
- $P(n) \longrightarrow P(\hat{n})$: prendiamo $a\in A$. Allora $|A\setminus\{a\}|=n$ dunque ci sono max e min. rispettivamente b e c. Dunque confronto con a con b e c (posso farlo perché A è totalmente ordinato) e $\max_A = \max(a,b)$ e $\min_A = \min(a,c)$.

A questo punto dimostriamo per induzione su $n=|A|=|B|$:

- se $n=0$: la proprietà e' vera a vuoto;
- $P(n) \longrightarrow P(\hat{n})$: supponiamo che $a\in A = \max(A)$ allora $|A\setminus\{a\}|=n$

e allo stesso modo prendo $b \in B = \max(B)$ e considero $|B \setminus \{b\}|$ che ha cardinalità n. Per Hp. induttiva esiste isomorfismo d'ordine tra $A \setminus \{a\}$ e $B \setminus \{b\}$ dato che sono sottoinsiemi bene ordinati e finiti. Vale dunque $f: A \setminus \{a\} \longrightarrow B \setminus \{b\}$ isomorfismo d'ordine. A questo punto estendo f a $\tilde{f}: A \longrightarrow B$ t.c. $\tilde{f}|_{A \setminus \{a\}} \equiv f$ e $\tilde{f}(a) = b$. Questo è ovviamente un isomorfismo e è anche d'ordine proprio perché a e b erano rispettivamente i massimi di A e di B.

<u>Es. 6.3.</u>: l'insieme ordinato $(\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}), <)$ con l'ordine delle minime differenze è separabile.:

Prendo le $\mathrm{Seq}(\mathbb{Z})$. Considero la seguente funzione:

$$\varphi: \mathrm{Seq}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto (a_1, \ldots, a_n, 0 \ldots)$$

definitivamente zero

Ovviamente $\mathrm{Seq}(\mathbb{Z})$ dato che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ e che $|\mathrm{Seq}\,\mathbb{N}| = \aleph_0 \Rightarrow$

$|\mathrm{Seq}\,\mathbb{Z}| = \aleph_0$. Dunque voglio mostrare che $\mathrm{Imm}(\mathrm{Seq}(\mathbb{Z}))$ è denso in $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$. Prendo due elementi $(x_1, \ldots, x_n \ldots) <$ $(y_1, \ldots, y_n \ldots)$ allora supponiamo che il min dove differiscono è $\bar{i}$ e si ha dunque $x_{\bar{i}} < y_{\bar{i}}$. Allora prendo come elemento di $\mathrm{Imm}(\mathrm{Seq}(\mathbb{Z}))$ questo $(\underset{y_1}{\overset{\shortparallel}{x_1}}, \ldots, \underset{y_{\bar{i}-1}}{\overset{\shortparallel}{x_{\bar{i}-1}}}, x_{\bar{i}}, x_{\bar{i}+1} + 1, 0 \ldots)$

e questo ovviamente è $> (x_1, \ldots, x_n \ldots)$ e $< (y_1, \ldots, y_n \ldots)$

Lezione 27 Marzo

Es. 7.1.: $X+Y$ è un taglio, inoltre $\mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{q+q'}$:

mostriamo le 3 proprietà per essere taglio:

- prendo $\mathbb{Q} \ni K < x+y \in X+Y$ allora $\exists\, m>0$ t.c. $x+y = K+m$ e dunque $K = x+(y-m)$ ma $y-m < y \in Y \Rightarrow y-m = y' \in Y \Rightarrow K = x+y' \in X+Y$
- supponiamo abbia massimo $m \Rightarrow m \in X+Y$ cioè $m = x+y$ con $x \in X$ e $y \in Y$. Dato che X non ha max $\exists\, x' > x \wedge x' \in X$ dunque $m = x+y < x'+y \in X+Y$ e questo è assurdo.
- è ovviamente proprio perché non è vuoto e posso trovare sempre un elemento in $\mathbb{Q}$ che non appartiene a $X+Y$ quando questi sono propri.

Mostriamo che $\mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{q+q'}$: $\boxed{\subseteq}$: prendo $x \in \mathbb{Q}_q$ e $y \in \mathbb{Q}_{q'}$ cioè $x<q$ e $y<q' \Rightarrow x+y < q+q'$ cioè $x+y \in \mathbb{Q}_{q+q'}$. $\boxed{\supseteq}$: prendo $K \in \mathbb{Q}_{q+q'}$ cioè $K < q+q' \Rightarrow \exists\, m>0$ t.c. $q+q' = K+m \Rightarrow K = \left(q-\frac{m}{2}\right)+\left(q'-\frac{m}{2}\right)$ con $q-\frac{m}{2} < q$ e $q'-\frac{m}{2} < q' \Rightarrow K = x+y$ con $x \in \mathbb{Q}_q$ e $y \in \mathbb{Q}_{q'}$.

Es. 7.2.: $-X$ è un taglio e $X+(-X) = \mathbb{Q}_0$:

$-X$ è definito come $-X = \{-x \mid x \notin X\}$ quando X^c non ha minimo; se invece X^c ha minimo $X = \mathbb{Q}_q$ e $-X = \mathbb{Q}_{-q}$. Nel 1° caso quindi se prendo un elemento $K < -x$ allora $-K > x$ cioè $-K \notin X$ infatti se $-K \in X$ dato che $x \leq -K$ anche $x \in X$ e questo darebbe un assurdo. Dunque $K = -(-K)$ con $-K \notin X$ e dunque $K \in -X$. Supponiamo abbia max $m \Rightarrow m = -\bar{x}$ con $\bar{x} \notin X$ e $-\bar{x} \geq -x \;\; \forall x \notin X \Rightarrow \bar{x} \leq x \;\; \forall x \notin X$ cioè $\bar{x}$ è minimo per X^c $\lightning$.
E ovviamente è proprio perché X è proprio. Vediamo che $X+(-X) = \mathbb{Q}_0$:
$\boxed{\subseteq}$: prendo $x_1 \in X$ e $x_2 \in -X \Rightarrow x_1 + x_2 = x_1 - x_3$ con $x_3 \notin X$ inoltre $x_3 > x_1$ altrimenti se $x_3 \leq x_1$ $x_3 \in X$ $\lightning$ dunque $x_1 - x_3 < 0$ cioè $x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}_0$.
$\boxed{\supseteq}$: prendo $x<0$. Se $X<0$ ma $\exists\, x_1 \in X$ t.c. $x_1 > x \Rightarrow x \in X$ e dunque $x = x+0$ con $x \in X$ e $0 \in -X$ dato che $0 = -0$ e $0 \in X^c$.
Se $\nexists\, x_1 \in X$ t.c. $x_1 > x$ allora $x \in X^c$ (altrimenti x sarebbe max per X). Inoltre dato che $-X \not< 0$ x in particolare $\in$ a $-X$ cioè $x = -K$ con $0 < K \in X^c$. Considero ora $\bar{x}$ t.c. $\bar{x} \in -X$ ma $\bar{x} + K \notin -X$ e questo esiste dato che $-X$ è limitato a destra. Dunque $x = \bar{x} - \bar{x} + x$. Vediamo che

$x - \bar{x} \in X$. Questo è vero poiché $\bar{x} - x > x_2 > 0 > x_3$ per un certo $x_2 \in -X$ e per un certo $x_3 \in X \Rightarrow \bar{x} - x > x_3 \Rightarrow x - \bar{x} < x_3 \Rightarrow x - \bar{x} \in X$. Nel caso in cui $X \not< 0$ allora $-X < 0$ e la dimostrazione è analoga. Infine nel caso $\mathbb{Q}_{-q}$ questo è un taglio per definizione e inoltre $\mathbb{Q}_q + \mathbb{Q}_{-q} = \mathbb{Q}_0$ per la stessa dim. di prima.

Es. 1.3.: Se $X, Y > 0 \Rightarrow X \cdot Y$ è un taglio e $\mathbb{Q}_q \cdot \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{qq'}$:

$X \cdot Y$ è definito come $X \cdot Y = \{ x \cdot y \mid x \in X\ x > 0 \wedge y \in Y\ y > 0 \} \cup \mathbb{Q}_0$.
Dunque se $K < 0 \Rightarrow K \in \mathbb{Q}_0 \subseteq X \cdot Y$. Se $K > 0$ e $K < x \cdot y$ allora $\exists m > 0$ t.c. $x \cdot y = K + m$ dunque $x \cdot y - m \frac{x}{x} = K$ $K = x\left(y - \frac{m}{x}\right)$ ora $y - \frac{m}{x} < y$ dato che $\frac{m}{x} > 0$ e $y - \frac{m}{x} > 0$ poiché $y - \frac{m}{x} = \frac{K}{x} > 0$. Dunque $K = x \cdot y'$ con $x > 0 \wedge x \in X$ e $y' > 0$ e $y' \in Y$.
Supponiamo abbia massimo m allora $m = \bar{x} \cdot \bar{y}$ con $\bar{x} \in X$ e $\bar{y} \in Y$.
Inoltre $\bar{x} \cdot \bar{y} \geq x \cdot \bar{y}$ $\forall x \in X$ e dato che $\bar{y} > 0 \Rightarrow \bar{x} > x$ $\forall x \in X$ dunque X avrebbe massimo $\lightning$.
Inoltre $X \cdot Y$ è proprio sempre perché X, Y lo sono.
Vediamo $\mathbb{Q}_q \cdot \mathbb{Q}_{q'} = \mathbb{Q}_{qq'}$: $\boxed{\subseteq}$: prendo un elemento $x \cdot x'$ t.c. $0 < x < q$ e $0 < x' < q' \Rightarrow x \cdot x' < q \cdot q'$ cioè $x \cdot x' \in \mathbb{Q}_{qq'}$. Se invece prendo $K < 0 \Rightarrow K < 0 < qq' \Rightarrow K \in \mathbb{Q}_{qq'}$ (siamo sempre nell'Hp. che $\mathbb{Q}_q, \mathbb{Q}_{q'} > 0$)
$\boxed{\supseteq}$: prendo un elemento K in $\mathbb{Q}_{qq'}$ se $K < 0 \Rightarrow K \in \mathbb{Q}_0 \subseteq \mathbb{Q}_q \cdot \mathbb{Q}_{q'}$; se invece $0 < K < qq'$ allora sicuramente $\exists\, \bar{q} < q$ t.c. $\frac{K}{q'} < \bar{q} < q$ dato $\frac{K}{q'} < q$ lo ottengo dall'Hp. e inoltre $\mathbb{Q}_q$ non ha max quindi deve esistere questo $\bar{q}$. Allora $K < \bar{q}\, q' < qq'$ e quindi
$\bar{q}\, q' = K \cdot m$ con $m > 1 \Rightarrow K = \bar{q} \frac{q'}{m}$ dove $\bar{q} \in \mathbb{Q}_q$ per Hp e $\frac{q'}{m} < q'$ dato che $m > 1$ e dunque $\frac{q'}{m} \in \mathbb{Q}_{q'}$.

Es. 1.6: 1: $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$:

$$X + (Y + Z) = \{ x + K \mid x \in X\ K \in Y + Z \} = \{ x + (y + z) \mid x \in X\ y \in Y\ z \in Z \}$$
$$= \{ (x + y) + z \mid x \in X\ y \in Y\ z \in Z \} = \{ K + z \mid K \in X + Y\ z \in Z \} = (X + Y) + Z$$

2: $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ (li assumo tutti positivi):

$$X \cdot (Y \cdot Z) = \{x \cdot k \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (k>0 \wedge k \in Y \cdot Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$
$$= \{x \cdot (y \cdot z) \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (y>0 \wedge y \in Y) \wedge (z>0 \wedge z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$
$$= \{(x \cdot y) \cdot z \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (y>0 \wedge y \in Y) \wedge (z>0 \wedge z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$
$$= (X \cdot Y) \cdot Z$$

3: $X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ $(X, Y, Z > 0)$:

$$X \cdot (Y+Z) = \{x \cdot k \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (k>0 \wedge k \in Y+Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$
$$= \{x \cdot (y+z) \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (y+z>0 \; y \in Y \; z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$
$$= \{xy + xz \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (y+z>0 \; y \in Y \; z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$
$$= \{xy + xz \mid (x>0 \wedge x \in X) \wedge (y>0 \wedge y \in Y) \wedge (z>0 \wedge z \in Z)\} \cup \mathbb{Q}_0 =$$

$= XY + XZ$ dove il penultimo passaggio è dovuto al fatto che mettere $y+z>0$ o $y>0 \wedge z>0$ è del tutto uguale infatti se $y>0 \wedge z>0$ è ovvio che $y+z>0$ ma dato che $X(Y+Z)$ e $XY+XZ$ sono tagli allora se uno tra y, z è <0 (wlog $y<0$) allora $\exists \bar{y} \in Y$ t.c. $\bar{y} > 0 > y$ e dunque $x\bar{y} + xz < xy + xz$ e quindi appartiene comunque a $XY + XZ$.

Es. 4.5: $X \cdot \left(\frac{1}{X}\right) = \mathbb{Q}_1 \quad \forall X \neq \mathbb{Q}_0$:

Se $X>0$ allora $\frac{1}{X} = \{\frac{1}{x} \mid x \notin X\}$. Dunque $X \cdot \frac{1}{X} = \{x \cdot \frac{1}{y} \mid x>0 \; x \in X \wedge y>0 \; y \notin X\} \cup \mathbb{Q}_0$.

$\boxed{\subseteq}$: se $k<0$ allora ovviamente $k \in \mathbb{Q}_1$. Se $k>0 \Rightarrow k = \frac{x}{y}$ con $x \in X$ e $y \notin X \Rightarrow y > x$ e dunque $\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow k \in \mathbb{Q}_1$.

$\boxed{2}$ se $K<0 \Rightarrow K \in \mathbb{Q}_0{}^c \; X\left(\frac{1}{X}\right)$. Se $K=0$ allora basta prendere $0 \in X$ e un elemento nel complementare di X $\overline{x} \Rightarrow 0 \cdot \frac{1}{\overline{X}} = 0$ e quindi $0 \in X \cdot \frac{1}{X}$. Se $0<K<1 \Rightarrow$ se $X>1$ allora $K \in X$. Ora $K \in \mathbb{Q}$ dunque $K = \frac{p}{q}$ con $p<q$. Dunque se $p \in X$ e $q \in X^c$ ho finito. Se sua $p, q \in X \Rightarrow$ sicuramente $\exists \, \overline{x} \in X$ t.c. $\frac{q}{p}\overline{x} \notin X$ (dato che $\frac{q}{p}>1$) e dunque considero z t.c. $p \cdot z = \overline{x} \in X$ ($\exists$ è proprio $\frac{\overline{x}}{p}$) e $q \cdot z = \frac{q}{p} \cdot \overline{x} \notin X$ allora $K = \frac{p \cdot z}{q \cdot z}$ e rispetta le proprietà.

Se $p, q \in X^c$ allora $\exists \, \overline{x} \in X^c$ t.c. $\frac{p}{q} \cdot \overline{x} \in X$ (dato che $\frac{p}{q}<1$). Dunque considero z t.c. $p \cdot z = \frac{p}{q} \cdot \overline{x} \in X \Rightarrow q \cdot z = \cancel{q} \cdot \frac{\overline{x}}{\cancel{q}} \in X^c$. Allora $K = \frac{p \cdot z}{q \cdot z}$ rispetta le richieste.

Se $p \in X^c$ e $q \in X \Rightarrow$ questo porta a un assurdo perché $p<q$ e quindi se $q \in X \Rightarrow p \in X$.

Se $X<0 \Rightarrow \frac{1}{X} \overset{\text{def.}}{=} -\frac{1}{(-X)}$ e quindi la dim. segue allo stesso modo usando la definizione di prodotto tra due elementi negativi.

__Es. 7.7__: se $A \neq \emptyset$ allora $\{B \mid |B| = |A|\}$ non è un insieme:

supponiamo sia un insieme. Dunque definisco l'insieme $I = (A \setminus \{a\}) \cup \{\{B \mid |B| = |A|\}\}$ con a elemento di A. Allora $|I| = |A|$ e dunque $\{B \mid |B| = |A|\} \in I \in \{B \mid |B| = |A|\}$; dunque si crea un catena discendente numerabile infinita di insiemi che violano il principio di fondazione.

__Es. 7.6__: Se $\mathbb{F}$ è un campo ordinato e $\mathbb{Q}$ non è denso in $\mathbb{F}$ allora $\mathbb{F}$ non è completo:

Dimostriamo la contronominale. Se $\mathbb{F}$ è completo allora $\mathbb{F}$ soddisfa la proprietà archimedea. Dunque prendo $x, y \in \mathbb{F}$ t.c. $0<x<y$ e $y-x>1$. Per la proprietà archimedea $\exists \, K \in \mathbb{N}$ t.c. $K \cdot 1 > \frac{1}{y-x}$ cioè $(y-x) > \frac{1}{K}$.

Definisco dunque l'insieme $S = \{ n \in \omega \mid n \cdot \frac{1}{K} > x \} \neq \emptyset$

Per il buon ordinamento di ω chiamo $z = \min(S)$. Dunque

$$x < \frac{z}{K} = \frac{z-1}{K} + \frac{1}{K} \leq x + \frac{1}{K} < x + (y-x) = y$$

poiché z è il minimo
con quella proprietà

Dunque se scelgo $q = \frac{z}{K} \in \mathbb{Q}$ ho trovato il razionale che mi dà la densità. Per gli altri casi si procede in modo analogo grazie sempre alla proprietà archimedea.

Lezione 3 Aprile

Es. 8.1: Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è ben ordinato, A è al più numerabile:

Dunque dato che A è ben ordinato $\forall a \in A$ con $a \neq \max(A)$ è ben definito il minimo degli elementi maggiori stretti di a, chiamiamolo $\bar{a}$. Allora definisco la seguente mappa φ:

intervallo aperto

$$\varphi: A \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(\mathbb{Q} \cap (x, \bar{x})) & \text{se } x \neq \max(A) \\ f(\mathbb{Q} \cap (x, +\infty)) & \text{se } x = \max(A) \end{cases}$$

dove f è una funzione di scelta per $\mathbb{Q}$.

φ è ben definita perché $\mathbb{Q} \cap (x, \bar{x}) \neq \emptyset$ dato che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Inoltre φ è iniettiva infatti se $x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow (x_1, \bar{x}_1) \cap (x_2, \bar{x}_2) = \emptyset$ e dunque $f(\mathbb{Q} \cap (x_1, \bar{x}_1)) \neq f(\mathbb{Q} \cap (x_2, \bar{x}_2))$. Inoltre è ovvio che se $x = \max(A)$ $(x, \infty) \cap (y, \bar{y}) = \emptyset$ $\forall y \in A \setminus \max(A)$. Dunque si è trovata una funzione iniettiva da A in $\mathbb{Q} \Rightarrow |A| \leq \aleph_0$. TESI.

Es. 8.2: Se $A, B \subset \mathbb{R}$ sono ben ordinati, anche $A+B$ lo è:

Consideriamo $A+B = \{a+b \mid a \in A \; b \in B\} \subseteq \mathbb{R}$.

$A+B$ è totalmente ordinato in quanto sottoinsieme di $\mathbb{R}$ insieme totalmente ordinato. Vediamo che ogni sottoinsieme ammette minimo.

Prendo $S \subseteq A+B$ allora posso considerare i seguenti due insiemi:

$$X_1 = \{ a \in A \mid \exists b \in B : a+b \in S \} \subseteq A$$

$$X_2 = \{ b \in B \mid \exists a \in A : a+b \in S \} \subseteq B$$

Per buon ordinamento di A, B chiamo $m_1 = \min X_1$ e $m_2 = \min X_2$.

Adesso definisco altri 2 insiemi.

$Y_1 = \{ a \in A \mid a + m_2 \in S \} \subseteq A$

$Y_2 = \{ b \in B \mid m_1 + b \in S \} \subseteq B$

Dato il buon ordinamento di A, B chiamo $n_1 = \min Y_1$ e $n_2 = \min Y_2$.
Dunque per definizione vale che $n_1 + m_2 \in S$ e $m_1 + n_2 \in S$.
Inoltre vale $\forall x \in S \quad x \overset{*}{\geq} \min(n_1 + m_2, m_1 + n_2)$ e dunque

$\min(n_1 + m_2, m_1 + n_2) = \min(S)$

(*: da notare che questo è vero perché siamo su $\mathbb{R}$ e dunque se per esempio in S ha l'elemento $5+3=8$ allora ha anche altre infinite scritture come ad esempio $2+6$, $7+1$, $10-2$ ...)

<u>Es 8.3</u>: l'insieme degli ordini totali con la relazione ot è un buon ordine:

dato che vale la tricotomia dei buoni ordini allora la relazione ot è un ordine totale. Adesso dimostriamo che per ogni sottoinsieme X dell'insieme degli ordini totali si trova l'elemento con tipo d'ordine minimo. Si prende $A \in X$. Se $\forall B \in X$ $ot(A) \leq ot(B)$ allora A ha tipo di ordine minimo ed è l'elemento che stavamo cercando. Altrimenti consideriamo l'insieme non vuoto $Y = \{ a \in A \mid \exists B \in X \ \ B \simeq X_a \}$. Dato che A è un buon ordine $\exists \min(Y) = \bar{a}$. Allora il minimo tipo d'ordine è $B \in X$ t.c. $B \simeq A_{\bar{a}}$.

Lezione 2 Aprile

Es. 9.1.: Dato un insieme $\mathcal{F}$ di insiemi ben ordinati $\exists (A, <)$ buon ordine con $ot(A) \leq ot(B)$ $\forall (B, <) \in \mathcal{F}$:

Per l'esercizio 8.3 si ha che $\forall$ sottoinsieme dell'unione dei buoni ordini si ha un minimo secondo la relazione data da ot. Dunque per l'insieme $\mathcal{F}$ $\exists (\bar{A}, <)$ buon ordine t.c. $(\bar{A}, <) \in \mathcal{F}$ e $ot(\bar{A}, <) \leq ot(B, <)$ $\forall (B, <) \in \mathcal{F}$.

Es. 9.2.: $ot(\omega)$ è il più piccolo tra i tipi d'ordine di insiemi infiniti:

Prendiamo $(A, <)$ buon ordine infinito, allora costruiamo la seguente mappa φ:

$$\varphi : \omega \longrightarrow A \quad \text{definita per ricorsione numerabile}$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \min A \\ \varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \dots, \varphi(n)\}). \end{cases}$$

φ è ben definita in quanto A è infinito e dunque quella differenza insiemistica è sempre diversa dal vuoto. La mappa è strettamente crescente infatti se $n < m \Rightarrow \varphi(n)$ mi restituisce l'n-esimo elemento minore in A, invece $\varphi(m)$ mi restituisce m-esimo elemento minore di A e dunque $\varphi(m) > \varphi(n)$.
Inoltre $< \varphi(n) \mid n \in \omega >$ è un segmento iniziale di A infatti se $A \ni x < \varphi(n)$ per un certo $n \in \omega$ allora x è l'i-esimo elemento

minore di A con $i < n \implies x = \varphi(i)$ con $i \in \omega$.

Es. 9.3. : $(A \oplus B) \oplus C \cong A \oplus (B \oplus C)$:

Dunque per come è definita $\oplus$ nel membro di sinistra ci sono le coppie $(x, 0)$ con $(x, 0) \in (A \oplus B) \times \{0\}$ le coppie $(c, 1) \in C \times \{1\}$. Per definizione la coppia $(x, 0)$ si può riscrivere o come $((a, 0), 0)$ con $(a, 0) \in A \times \{0\}$ o come $((b, 1), 0)$ con $(b, 1) \in B \times \{1\}$.
Nel membro di destra invece ci sono le coppie $(a, 0) \in A \times \{0\}$ e le coppie $(y, 1) \in (B \oplus C) \times \{1\}$. Ora le coppie $(y, 1)$ possono essere della forma $((b, 0), 1)$ con $(b, 0) \in B \times \{0\}$ o $((c, 1), 1)$ con $(c, 1) \in C \times \{1\}$. L'isomorfismo che definiamo è φ:

$$\begin{aligned}
\varphi : (A \oplus B) \oplus C &\longrightarrow A \oplus (B \oplus C) \\
(c, 1) &\longmapsto ((c, 1), 1) \\
((a, 0), 0) &\longmapsto (a, 0) \\
((b, 1), 0) &\longmapsto ((b, 0), 1)
\end{aligned}$$

dunque la mappa è ovviamente una bigezione. Vediamo che è strettamente crescente: in $(A \oplus B) \oplus C$ si ha che gli elementi della forma

$((a, 0), 0) < ((b, 1), 0) < (c, 1) \quad \forall a, b, c \in A, B, C$ rispettivamente;

questo per definizione di $\oplus$. Dunque:

$$\varphi(((a, 0), 0)) = (a, 0) < ((b, 0), 1) = \varphi(((b, 1), 0)) < ((c, 1), 1) = \varphi((c, 1))$$

sempre per def. di $\oplus$.
Adesso basta far vedere che se un elemento $((a_1, 0), 0) < ((a_2, 0), 0)$

$\implies (a_1, 0) < (a_2, 0)$ ma questo è ovvio perché per def di $\oplus$ l'Hp. significa che $a_1 < a_2$ e dunque anche $(a_1, 0) < (a_2, 0)$. Analogo per gli elementi delle altre due forme.

Es. 9.4: $(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$:

per come è definito $\otimes$ nel membro di sinistra ha gli elementi della forma $((a,b),c)$ mentre nel membro di destra gli elementi della forma $(a,(b,c))$ $\forall\, a,b,c \in A,B,C$ (rispettivamente).

Dunque considero la funzione:

$$\varphi : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$$
$$((a,b),c) \longmapsto (a,(b,c))$$

è ovviamente un isomorfismo, verifichiamo la stretta crescenza:

se $((a_1,b_1),c_1) < ((a_2,b_2),c_2)$ allora possiamo avere i seguenti casi (per def. di $\otimes$):

- $c_1 < c_2$: allora $(b_1,c_1) < (b_2,c_2) \Rightarrow (a_1,(b_1,c_1)) < (a_2,(b_2,c_2))$ e dunque è rispettata la crescenza
- $c_1 = c_2,\ b_1 < b_2$: allora $(b_1,c_1) < (b_2,c_2) \Rightarrow (a_1,(b_1,c_1)) < (a_2,(b_2,c_2))$ e dunque è rispettata la crescenza
- $c_1 = c_2,\ b_1 = b_2,\ a_1 < a_2$: allora $(b_1,c_1) = (b_2,c_2) \Rightarrow (a_1,(b_1,c_1)) <$ $< (a_2,(b_2,c_2))$ e dunque è rispettata la crescenza

Es. 9.5: $\{0,1\} \otimes \omega \simeq \omega$ e $\omega \otimes \{0,1\} \simeq \omega \oplus \omega$:

- $\{0,1\} \otimes \omega \simeq \omega$: gli elementi nel membro di sx sono della forma $(0,n)$ con $n \in \omega$ o $(1,n)$ con $n \in \omega$. Definisco φ:

$$\varphi : \{0,1\} \otimes \omega \longrightarrow \omega$$
$$(x,n) \longmapsto \begin{cases} 2 \cdot n & \text{se } x = 0 \\ 2n+1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La funzione è strettamente crescente poiché se $(x_1, n_1) < (x_2, n_2)$ si ha 2 casi possibili:

- $n_1 < n_2$: $\varphi((x_1, n_1))$ può essere o $2n_1$ o $2n_1+1$ mentre $\varphi((x_2, n_2))$ può essere $2n_2$ o $2n_2+1$: ora se $n_1 < n_2$ $2n_1 < 2n_2 < 2n_2+1$. Vediamo che $2n_1+1 < 2n_2$ e questo è vero poiché $2(n_2 - n_1) > 1$ dato che $n_2 > n_1$.

- $n_1 = n_2$, $x_1 < x_2$: allora $x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$ $\varphi((x_1, n_1)) = 2n_1$ e $\varphi((x_2, n_2)) = 2n_2+1$ e dato che $n_1 = n_2$ la crescenza è soddisfatta.

Per dire che φ è surgettiva basta notare che n è pari allora $(0, \frac{n}{2})$ è controimmagine di n ; se n è dispari allora $(1, \frac{n-1}{2})$ è controimmagine di n.

- $\omega \otimes \{0,1\} \simeq \omega \oplus \omega$: gli elementi del membro di sinistra sono elementi della forma $(n, 0)$ o $(n, 1)$. Anche gli elementi del membro di destra sono della forma $(n, 0)$ e $(n, 1)$. Dunque φ è definita:

$$\varphi : \omega \otimes \{0,1\} \longrightarrow \omega \oplus \omega$$
$$(n, x) \longmapsto (n, x) \quad \text{con } x \in \{0,1\}$$

È ovviamente una bigezione, vediamo la crescenza: se $(n_1, x_1) < (n_2, x_2)$ per def di $\otimes$ deve valere una di queste ipotesi:

- $x_1 < x_2$: ciò significa che $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ allora $(n, 0) < (n, 1)$ anche nella def di $\oplus$
- $x_1 = x_2$, $n_1 < n_2$: allora si ha o $(n_1, 0) < (n_2, 0)$ o $(n_1, 1) < (n_2, 1)$ dove le disuguaglianze sono rispettate anche nella def di $\oplus$.

Es. 9.6 : Siano $(A,<)$, $(B,<)$ ordini totali. $A \otimes B$ buon ordine $\iff$ A, B buoni ordini:

$\boxed{\Leftarrow}$ Irriflessiva : se fosse che $(a,b) < (a,b) \Rightarrow a<a$ ma $\lightning$ perché A buon ordine ;

Transitività : sia $(a_1,b_1) < (a_2,b_2) < (a_3,b_3)$. Consideriamo i possibili casi:

- $b_1 < b_2 \wedge b_2 < b_3$: allora dato che B è buon ordine $b_1 < b_3$ e dunque $(a_1,b_1) < (a_3,b_3)$;
- $b_1 < b_2 \wedge b_2 = b_3 \wedge a_2 < a_3$: allora $b_1 < b_2 = b_3$ dunque $(a_1,b_1) < (a_3,b_3)$;
- $b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2 \wedge b_2 < b_3$: allora $b_1 < b_3$ e dunque $(a_1,b_1) < (a_3,b_3)$
- $b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2 \wedge b_2 = b_3 \wedge a_2 < a_3$: allora per transitività di A $a_1 < a_3$ e $b_1 = b_3 \Rightarrow (a_1,b_1) < (a_3,b_3)$

Ordine totale : supponiamo di avere (a_1,b_1) e (a_2,b_2). Dato che B è buon ordine $b_1 < b_2$ o $b_1 = b_2$ $b_1 > b_2$. Nel primo e nel ~~terzo~~ caso si ha rispettivamente $(a_1,b_1) < (a_2,b_2)$ $(a_1,b_1) > (a_2,b_2)$. Se $b_1 = b_2$ allora dato che A è buon ordine $a_1 = a_2$, $a_1 < a_2$ e $a_1 > a_2$ e dunque rispettivamente $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$, $(a_1,b_1) < (a_2,b_2)$, $(a_1,b_1) > (a_2,b_2)$

Buon ordine : prendiamo un sottoinsieme non vuoto S di $A \otimes B$ allora prendiamo $\bar{b} = \min \{ b \in B \mid (a,b) \in S \}$ e $\bar{a} = \min \{ a \in B \mid (a,\bar{b}) \in S \}$ e dunque $(\bar{a},\bar{b})$ è il minimo di S.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo che $A \otimes B$ sia un buon ordine : mostriamo che A, B sono buoni ordini : IRRIFLESIVITÀ : se fosse che $a<a$ allora l'elemento $(a,b) < (a,b)$ poiché $b=b$ e $a<a$. Dunque assurdo perché $A \otimes B$ è un

buon ordine. Se $b < b$ allora $(a, b) < (a\ b)$ e dunque sempre assurdo.

• <u>Transitività</u>: supponiamo $(a_1, b_1) < (a_2, b_2) < (a_3, b_3) \Rightarrow (a_1, b_1) < (a_3, b_3)$

$\forall\ a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$: dunque supponiamo $a_1 < a_2 < a_3$ allora per def. di $\otimes$ $(a_1, b) < (a_2, b) < (a_3, b) \Rightarrow (a_1, b) < (a_3, b) \Rightarrow$

dato che $b = b$ deve essere $a_1 < a_3$.

Supponiamo adesso $b_1 < b_2 < b_3$ allora per def. di $\otimes$ $(a, b_1) < (a, b_2) < (a, b_3)$

$\Rightarrow (a, b_1) < (a, b_3) \Rightarrow$ $b_1 \leq b_3$ ma se fosse che $b_1 = b_3 \Rightarrow a < a$ $\lightning$.

Dunque $b_1 < b_3$.

<u>Ordine totale</u>: prendiamo $a_1, a_2 \in A \Rightarrow$ se considero (a_1, b) e (a_2, b) per buon ordine di $A \otimes B$ deve essere $(a_1, b) > (a_2, b)$ o $(a_1, b) < (a_2, b)$ o $(a_1, b) = (a_2, b)$. Ma $b = b$ e dunque deve valere che $a_1 > a_2$, $a_1 < a_2$ o $a_1 = a_2$.

Se invece considero $b_1, b_2 \in B \Rightarrow$ considero (a, b_1) e (a, b_2) e per buon ordine di $A \otimes B$ deve essere che $(a, b_1) < (a, b_2)$, $(a, b_1) > (a, b_2)$ o $(a, b_1) = (a, b_2)$. Nel primo caso $b_1 \leq b_2$ ma $a = a \Rightarrow b_1 < b_2$; nel secondo caso $b_1 \geq b_2$ ma $a = a \Rightarrow b_1 > b_2$; nel terzo caso $b_1 = b_2$ $\wedge\ a = a \Rightarrow b_1 = b_2$.

<u>Buon ordine</u>: prendiamo sottoinsieme di A $S \neq \emptyset$. Allora prendiamo sottoinsieme di $A \times B$ $\bar{S} = S \times \{b\}$ con $b \in B$. Allora $\bar{S}$ ha minimo chiamiamolo $(\bar{a}, b)$. Allora $(\bar{a}, b) \leq (a, b)$ con $a \in S$ e $\bar{a} \in S$.

$\Rightarrow \bar{a} < a$ $\forall a \in S$ e $\bar{a} \in S$ cioè $\bar{a}$ è minimo di S.

prendiamo sottoinsieme di B $T \neq \emptyset$. Allora consideriamo $\bar{T} = \{a\} \times T \subseteq A \times B$ con $a \in A$. Allora $\bar{T}$ ha minimo chiamiamolo $(a, \bar{b})$ con $\bar{b} \in T$. Dunque $(a, \bar{b}) \leq (a, b)$ $\forall b \in T$. Dato che $a = a$ deve valere che $\bar{b} < b$ $\forall b \in T$ e $\bar{b} \in T$ cioè $\bar{b}$ è il minimo di T.

Es. 9.7 : $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$:

un elemento nel membro di sinistra è un elemento del tipo (a, x) con $a \in A$ e $x \in B \oplus C$ dunque può essere o $(a, (b, 0))$ o $(a, (c, 1))$. Invece nel membro di destra gli elementi sono della forma $(x, 0)$ con $x \in A \otimes B$ o $(y, 1)$ con $y \in A \otimes C$ dunque sono della forma $((a, b), 0)$ o $((a, c), 1)$ con $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$.

Dunque definisco φ:

$$\varphi : A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$
$$(a, (b, 0)) \longmapsto ((a, b), 0)$$
$$(a, (c, 1)) \longmapsto ((a, c), 1)$$

È ovviamente un isomorfismo insiemistico, vediamo che è strettamente crescente: prendo due elementi del 1° tipo allora $(a_1, (b_1, 0)) > (a_2, (b_2, 0))$ e per def. di $\otimes$ o vale che $(b_1, 0) > (b_2, 0)$ allora per def. di somma $b_1 > b_2$ e allora $((a_1, b_1), 0) > ((a_2, b_2), 0)$ oppure $(b_1, 0) = (b_2, 0)$ (cioè $b_1 = b_2$) e $a_1 > a_2$. Dunque $((a_1, b_1), 0) > ((a_2, b_2), 0)$.

Prendo 2 elementi del 2° tipo e la dimostrazione è identica.

Adesso prendo $(a_1, (b_1, 0)) < (a_2, (c_1, 1))$ allora è ovvio che $((a_1, b_1), 0) < ((a_2, c_1), 1)$ per def. di $\oplus$. Il caso invece in cui $(a_1, (b_1, 0)) \geq (a_2, (c_1, 1))$ non esiste perché vorrebbe dire che $(b_1, 0) \geq (c_1, 1)$ e questo è assurdo.

Es. 9.8. $|Fun_0(\omega,\omega)| = \aleph_0$:

Dunque un elemento in $Fun_0(\omega,\omega)$ è una ω-upla a elementi in ω dove gli elementi diversi da 0 sono in numero finito. Proprio perché sono in numero finito se ho l'elemento $(m_0, \_\_, m_n, \_\_) = K$ allora $\overline{n}_K = \max\{n \in \omega \mid m_n \neq 0\}$ è ben definito. Dunque considero φ:

$$\varphi : |Fun_0(\omega,\omega)| \longrightarrow Seq(\mathbb{N})$$

$$(m_0, \_, m_n, \_) \longmapsto (m_0, \_\_, m_{\overline{n}})$$

questa funzione è iniettiva poiché se $x = (m_0, \_, m_n, \_\_) \neq (m_0', \_, m_n', \_) = y$ allora deve $\exists\, m_i \neq 0, m_j' \neq 0$ t.c. $m_i \neq m_j'$ e dato che $i \leq \overline{n}_x$ e $j \leq \overline{n}_y$ allora $(m_0, \_, m_{\overline{n}_x}) \neq (m_0', \_, m_{\overline{n}_y})$.

Ovviamente è surgettiva perché se ho $(K_1, \_\_, K_n) \in Seq(\mathbb{N})$ basta considerare come controimmagine $(K_1, \_, K_n, 0, \_\_)$.
è def. infinitamente 0

Dunque $|Fun_0(\omega,\omega)| = |Seq(\mathbb{N})| = \aleph_0$.

Lezione 3 Aprile

Es. 10.1: Se $B = \{b_1, \dots, b_K\}$ con $b_i < b_j$ se $i < j$, è finito con K elementi $\Longrightarrow \exp(A,B) \cong A \otimes \dots \otimes A$ (K volte):

Dunque per definizione $\exp(A,B)$ è l'insieme $Fun_0(B,A)$ ordinato dall'ordinamento della massima differenza. Ora dato che B è finito $Fun_0(B,A) = Fun(B,A)$ e dunque sono K-uple a elementi in A. Dunque se considero φ:

$$\varphi : \exp(A,B) \longrightarrow A \otimes \dots \otimes A \quad (K \text{ volte})$$
$$(a_1, \dots, a_K) \longmapsto (a_1, \dots, a_K)$$

è ovviamente un isomorfismo e vediamo che mantiene la stretta crescenza: se $(a_1, \dots, a_K) < (a_1', \dots, a_K')$ allora per l'ordinamento della massima differenza $\exists \bar{K}$ t.c. $a_{\bar{K}} < a'_{\bar{K}}$ e $\forall i > \bar{K}$ con $i \in \{1, \dots, K\}$ si ha che $a_i = a_i'$. Dunque anche per la def. di prodotto $(a_1, \dots, a_K) <$ $< (a_1', \dots, a_K)$.

Es. 10.2: Se $A \simeq A'$ e $B \simeq B' \Rightarrow A \oplus B \simeq A' \oplus B'$:

dunque se $A \simeq A' \Rightarrow \exists f$ isomorfismo d'ordine tra A e A'. Allo stesso $\exists g$ isomorfismo d'ordine tra B e B'. Dunque definisco φ:

$$\varphi : A \oplus B \longrightarrow A' \oplus B'$$
$$(a,0) \longmapsto (f(a),0)$$
$$(b,1) \longmapsto (g(b),1)$$

dunque φ è ben definita proprio perché $f(a) \in A'$ e $g(b) \in B'$. È strettamente crescente poiché se $(a_1, 0) < (a_2, 0) \Rightarrow a_1 < a_2$ dunque

$f(a_1) < f(a_2) \Rightarrow (f(a_1), 0) < (f(a_2), 0)$. Allo stesso modo per 2 elementi della forma $(b_1, 1) < (b_2, 1)$. Se invece $(a, 0) < (b, 1)$ è ovvio che $(f(a), 0) < (g(b), 1)$ per def. di $\oplus$. Il caso $(b, 1) < (a, 0)$ non esiste.

La funzione è surgettiva per la surgettività di f e g.

<u>Es. 10.3.</u> : $A \simeq A'$ e $B \simeq B' \Rightarrow A \otimes B \simeq A' \otimes B'$:

Come nell'esercizio precedente si hanno le f, g definite come prima. Definisco dunque φ:

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes B &\longrightarrow A' \otimes B' \\ (a, b) &\longmapsto (f(a), g(b)) \end{aligned}$$

φ è ben definita per come sono definite f e g. É un isomorfismo poiché f, g lo sono. Dimostriamo la stretta crescenza:

$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$: allora o vale che $b_1 < b_2 \Rightarrow g(b_1) < g(b_2) \Rightarrow (f(a_1), g(b_1)) < (f(a_2), g(b_2))$ oppure $b_1 = b_2$ e $a_1 < a_2 \Rightarrow g(b_1) = g(b_2)$ e $f(a_1) < f(a_2) \Rightarrow (f(a_1), g(b_1)) < (f(a_2), g(b_2))$.

<u>Es. 10.4</u> : Se $A \simeq A'$ e $B \simeq B'$ allora $\exp(A, B) \simeq \exp(A', B')$:

si ha sempre f, g definite come nell' 10.2.

Dunque ho il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, leftrightarrow, "g"'] & A \arrow[d, leftrightarrow, "f"] \\ B' \arrow[r, "f \circ \psi \circ g^{-1}"'] & A' \end{tikzcd}$$

con $\psi \in \mathrm{Fun}_0(B, A)$

Dunque definisco φ:

$$\varphi: \mathrm{Fun}_0(B, A) \longrightarrow \mathrm{Fun}_0(B', A')$$
$$\psi \longmapsto f \circ \psi \circ g^{-1}$$

Come si vede dal diagramma è ben definita.

È surgettiva poiché se $\sigma \in \mathrm{Fun}_0(B', A')$ allora prendo come controimmagine $f^{-1} \circ \sigma \circ g \in \mathrm{Fun}_0(B, A)$.

Vediamo la stretta crescenza: prendo $\psi_1 < \psi_2$ significa che se $\bar{b} = \max\{b \in B \mid \psi_1(b) \neq \psi_2(b)\} \Rightarrow \psi_1(\bar{b}) < \psi_2(\bar{b})$.

Devo mostrare che $f \circ \psi_1 \circ g^{-1} < f \circ \psi_2 \circ g^{-1}$: supponiamo che $\tilde{b}' = \max\{b' \in B' \mid f \circ \psi_1 \circ g^{-1}(b') \neq f \circ \psi_2 \circ g^{-1}(b')\} \Longrightarrow$ supponiamo per assurdo $f \circ \psi_1 \circ g^{-1}(\tilde{b}') \geq f \circ \psi_2 \circ g^{-1}(\tilde{b}') \Longrightarrow$ per stretta crescenza di $f \Rightarrow \psi_1 \circ g^{-1}(\tilde{b}') \geq \psi_2 \circ g^{-1}(\tilde{b}')$: dunque $g^{-1}(\tilde{b}') < \bar{b}$ e per stretta crescenza di $\Rightarrow \tilde{b}' < g(\bar{b})$ ma allora per def. di $\tilde{b}'$ $f \circ \psi_1 \circ g^{-1} \circ g(\bar{b}) = f \circ \psi_2 \circ g^{-1} \circ g(\bar{b}) \Longrightarrow$

$\psi_1(\bar{b}) = \psi_2(\bar{b})$ assurdo.

<u>Es. 10.5.</u>: Se $\exp(A, B)$ è ben ordinato, allora A e B sono bene ordinati:

- <u>Riflessività</u>: se $a < a$ con $a \in A$ allora prendo $\varphi \in \exp(A, B)$ t.c. scelgo $b \in B$ e $\varphi(b) = a \wedge \varphi(\bar{b}) = 0$ altrimenti $\Longrightarrow \varphi(b) = a < a = \varphi(b)$ e dunque $\varphi < \varphi$ e è assurdo perché $\exp(A, B)$ buon ordine.

  Se $b < b$ con $b \in B$ allora definisco φ t.c. $\varphi(b) = a \in A$ e $\varphi(\bar{b}) = 0$ $\forall \bar{b} \in B$, $\bar{b} \neq b$. Allora dato che $b < b$ $\{b \in B \mid \varphi(b) \neq \varphi(b)\}$ non può essere vuoto e questo contraddice l'Hp. di funzione.

• <u>Transitività</u> : se $a_1 < a_2 < a_3 \Rightarrow$ voglio dire che $a_1 < a_3$. Definisco le seguenti 3 funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in exp(A, B)$: scelgo $\bar{b} \in B$ dunque

$\varphi_1(\bar{b}) = a_1 \wedge \varphi_1(b) = 0 \quad \forall b \in B \wedge b \neq \bar{b}$; alla stessa maniera

$\varphi_2(\bar{b}) = a_2 \wedge \varphi_2(b) = 0 \quad \forall b \in B \wedge b \neq \bar{b}$ e

$\varphi_3(\bar{b}) = a_3 \wedge \varphi_3(a_3) = 0 \quad \forall b \in B \wedge b \neq \bar{b} \Longrightarrow \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ cioè

$\varphi_1 < \varphi_3$ e dunque deve essere che $a_1 < a_3$.

Se invece ho $b_1 < b_2 < b_3$ costruisco le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ t.c. $\varphi_1(b_1) = a > 0 \in A$ (a fissato) e $\varphi_1(b) = 0 \ \forall b \in B \wedge b \neq b_1$;

$\varphi_2(b_2) = a \in A$ (stesso a) e $\varphi_2(b) = 0 \ \forall b \in B \wedge b \neq b_2$

$\varphi_3(b_3) = a \in A$ (stesso a) e $\varphi_3(b) = 0 \ \forall b \in B \wedge b \neq b_3$

$\Longrightarrow \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \Longrightarrow \varphi_1 < \varphi_3$ cioè nel max $b \in B$ per cui

$\varphi_1(b) \neq \varphi_3(b) \Longrightarrow \varphi_1(max) < \varphi_3(max) \Longrightarrow b_1 < b_3$.

• <u>Ordine Totale</u> : prendiamo due elementi $a_1, a_2 \in A$. Allora costruiamo $\varphi_1, \varphi_2 \in exp(A, B)$ t.e. scelgo $\bar{b} \in B$

$\varphi_1(\bar{b}) = a_1 \wedge \varphi_1(b) = 0 \quad \forall b \in B \wedge b \neq \bar{b}$ e

$\varphi_2(\bar{b}) = a_2 \wedge \varphi_2(b) = 0 \quad \forall b \in B \wedge b \neq \bar{b}$ allora

se $\varphi_1 = \varphi_2 \Longrightarrow a_1 = a_2$; se $\varphi_1 < \varphi_2 \Longrightarrow a_1 < a_2$; se $\varphi_1 > \varphi_2 \Longrightarrow a_1 > a_2$.

Prendiamo 2 elementi $b_1, b_2 \in B$:

costruisco 2 funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \in exp(A, B)$

t.c. $\varphi_1(b_1) = a > 0 \in A$ (a fissato) e $\varphi_1(b) = 0 \ \forall b \in B \wedge b \neq b_1$;

$\varphi_2(b_2) = a \in A$ (stesso a) e $\varphi_2(b) = 0 \ \forall b \in B \wedge b \neq b_2$

se $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow b_1 = b_2$; se $\varphi_1 > \varphi_2 \Rightarrow b_1 > b_2$ se $\varphi_1 < \varphi_2 \Rightarrow b_2 > b_1$.

- Buon ordine: prendo un sottoinsieme S di A allora $S = \{a_i\}_{i\in I}$. Allora considero $\bar{S} = \{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq Exp(A,B)$ t.c. scelto $\bar{b} \in B$ $\varphi_i(\bar{b}) = a_i$ $\wedge$ $\varphi_i(b) = 0$ $\forall b \in B, b \neq \bar{b}$. $\bar{S}$ ha minimo $\varphi_{\bar{i}}$ cioè $\varphi_{\bar{i}}(\bar{b}) = a_{\bar{i}} \leq a_i = \varphi_i(\bar{b}) \Rightarrow a_{\bar{i}}$ è il minimo di S.

Prendo un sottoinsieme T di B allora $T = \{b_i\}_{i\in I}$. Prendo dunque $\bar{T} = \{\varphi_i\}_{i\in I} \subseteq Exp(A,B)$ t.c. scelto $\bar{a} \in A$ $\varphi_i(b_i) = \bar{a}$ $\wedge$ $\varphi_i(b) = 0$ $\forall b \in B \wedge b \neq b_i$. Allora $\bar{T}$ ha minimo $\varphi_{\bar{i}}$ cioè deve essere $b_{\bar{i}} \leq b_i$ $\forall i \in I$ e dunque $b_{\bar{i}}$ è il minimo di T.

Es. 10.6.: (senza AC): Supponiamo X infinito con $|X \times X| = |X|$.
Se $|A_i| = |X|$ per $i = 1, \dots, k$ allora $|A_1 \cup \dots \cup A_k| = |X|$:

dimostriamo per induzione su k:

- $k = 1$: $|A_1| = |X|$ per Hp. dell'esercizio;
- $P(k) \to P(k+1)$: dunque per Hp. induttiva $|A_1 \cup \dots \cup A_k| = |X|$ inoltre $|A_{k+1}| = |X|$. Mostriamo dunque la doppia inclusione per il passo induttivo: $\boxed{\leq}$ $|A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nel caso in cui } (A_1 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1} = \emptyset}}{\leq} |A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}| = |X \times \{0,1\}|$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dato che } X \text{ è infinito}}}{\leq} |X \times X| = |X|$;

$\boxed{\geq}$: ovvio poiché $|A_i| \geq |X|$ $\forall i$.

Lezione 7 Aprile :

Es. 11.2. : Se α è un ordinale infinito, $\omega \subseteq \alpha$.

dato che α è infinito allora $\alpha \neq n$ $\forall n \in \omega$. Dunque deve valere o che $n \in \alpha$ $\forall n \in \omega$ o che $\alpha \in n$ $\forall n \in \omega$. Ma il secondo caso porta a un assurdo poiché avrei che se $\alpha \in n = \{0, \dots, n-1\}$ e dunque $\alpha = m \in \omega$, assurdo. Dunque $n \in \alpha$ $\forall n \in \omega$ cioè $\omega \subseteq \alpha$.

Es 11.1. : Se $\alpha \neq \emptyset$ è un ordinale, $\emptyset \in \alpha$:

Se α è un ordinale finito allora $\alpha = n$ per un certo $n \in \omega$ e per definizione $0 = \emptyset \in n = \alpha$. Se invece α è infinito allora per l'es. 11.2 si ha che $0 = \emptyset \in \omega \subseteq \alpha$ cioè $\emptyset \in \alpha$.

Es. 11. 3. : La proprietà "Ogni insieme non vuoto di ordinali ha minimo" equivale alla non esistenza di catene discendenti di ordinali $\alpha_0 \ni \alpha_1 \ni \dots$:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Se esistesse una catena discendente come sopra allora considero

$$X = \{\alpha_i\}_{i \in \omega} \implies X \text{ è un insieme non vuoto di buoni ordini}$$

che però non ha minimo e dunque assurdo

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supponiamo per assurdo che esiste un insieme non vuoto di ordinali X t.c. X non ammette minimo. Allora definisco una funzione di scelta

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$$
$$Y \longmapsto \varphi(Y)$$

Definisco quindi per ricorsione numerabile $\alpha_0 = \varphi(X)$;

$\alpha_{n+1} = \varphi(\{x \in X \mid x < \alpha_n\})$ che è ben definita poiché X non ha minimo. Allora $\alpha_0 \ni \dots \ni \alpha_{n+1} \dots$ è una catena discendente, assurdo

Lezione 9 Aprile

Es. 12.1. : usando il rimpiazzamento, verificare che $\omega_1 = \{\alpha \text{ ordinale} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$ è un insieme : MANCANTE

Es. 12.2. : MANCANTE

Es. 12.3. : dimostrare che $\{\alpha \text{ ordinale} \mid \exists A \subset \mathbb{R}\ (A, <) \simeq \alpha\} = \omega_1$:

da esercizio precedente si sa che un sottoinsieme bene ordinato di $\mathbb{R}$ ha cardinalità al più numerabile. Quindi gli elementi di A sono ordinali al più numerabili. Vediamo che effettivamente sono tutti e soli: infatti ogni insieme totalmente ordinato numerabile è isomorfo (con isomorfismo d'ordine) a un sottoinsieme di $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Dunque effettivamente gli elementi di A sono tutti e soli gli ordinali al più numerabili cioè $A = \omega_1$.

Terza Consegna ETI

David Venerato

N° matricola: 590954

Es. 20.1. : La classe in ZFC (estensione di una formula)

$$Sing = \{x \mid \exists y \ x = \{y\}\}$$ non é un insieme

dim.

Supponiamo Sing insieme. Dunque osserviamo che per ogni I insieme allora $\{I\} \in Sing$. Dunque se considero $\bigcup Sing$ (che e' un insieme per l'assioma dell'unione) ottengo un insieme che ha per elementi tutti gli insiemi. Questo e' assurdo per il paradosso di Cantor.

Es. 20.2 : La classe in ZFC (estensione di una formula)

$$Pair = \{x \mid \exists y, z \ \text{"} x = (y, z) \text{"}\}$$ non é un insieme

dim.

Supponiamo per assurdo Pair insieme. Allora in particolare $Sing \subseteq Pair$ (basta scegliere $y = z$) e dunque come nell'es 20.1 avrei che Pair é l'insieme di tutti gli insiemi. Assurdo per il paradosso di Cantor.

Es. 20.3. : Per ogni a, la classe ZFC (estensione di una formula)

$$C_a = \{x \mid a \in x\}$$ non é un insieme

dim.

Supponiamo per assurdo C_a insieme. Allora per ogni insieme X per l'assioma dell'unione esiste l'insieme $\{X\} \cup \{a\} = \{X, a\} \in C_a$. Dunque $\bigcup C_a$ é un insieme che contiene tutti gli insiemi e questo é assurdo per il paradosso di Cantor.

<u>Es. 20.6.</u> : In NGB, $\forall A, B$ (classi) esistono $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$.

<u>dim.</u>

- Per definizione $A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$. Dato che A, B sono classi segue immediatamente che "$x \in A \cup x \in B$" é una formula predicativa dato che "$x \in A$" implica "x insieme". Dunque $A \cup B$ é una classe per l'assioma di comprensione
- Per definizione $A \cap B = \{x \mid x \in A \cap x \in B\}$. Con lo stesso ragionamento di prima "$x \in A$" implica "x insieme" per definizione e dunque "$x \in A \cap x \in B$" é una formula predicativa. Allora $A \cap B$ é una classe per l'assioma di comprensione.
- Gli elementi di $A \times B$ sono coppie ordinate del tipo $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ con $a \in A$ e $b \in B$. Dunque se $(a, b) \overset{def.}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ allora $(a, b) \in$ $\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Vediamo che $\mathcal{P}(U)$ con U classe in gene-

rale é una classe. Per definizione $\mathcal{P}(U) = \{x \text{ insieme} \mid x \subseteq U\}$.

Ora, "$x \subseteq U$" é equivalente a "$\forall y\, (y \in x \longrightarrow y \in U)$"; dunque

dato che la variabile y deve appartenere alla classe U allora y

é un insieme. Dunque la formula scritta prima é predicativa e dunque

per l'assioma di comprensione $\mathcal{P}(U)$ é una classe. Quindi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

é una classe e $A \times B = \{x \mid \exists a \in A\ \exists b \in B \text{ t.c. } x = (a,b)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

é una classe per l'assioma di comprensione dato che a, b sono insiemi

poiché appartengono rispettivamente alla classe A e la classe B.

Es. 20.5.: in NGB vale l'assioma del sottoinsieme: $\forall C\ \forall b$ insieme

$C \cap b$ é un insieme

dim.

Dunque se $C \cap b = \emptyset$ allora $C \cap b$ é un insieme. Se $C \cap b \neq \emptyset$

fisso un elemento $x \in C \cap b$. Quindi definisco la funzione:

$$F : V \longrightarrow V$$
$$y \longmapsto \begin{cases} y, & y \in C \cap b \\ x, & y \notin C \cap b \end{cases}$$

Dunque $F[b] = \{F(y) \mid y \in b\}$ é un insieme per l'assioma di rimpiazzamento.

Ora $F[b] = C \cap b$ infatti se $k \in F[b] \Rightarrow \exists\, y \in b$ t.c. $F(y) = k$ e

dunque in ogni caso $k \in C \cap b$. Se $k \in C \cap b \Rightarrow k \in b$ e dunque $k \in F[b]$.

Quindi si ha la tesi.

Es. 20.6 : NGB ingloba l'assioma di separazione, cioè dimostra la separazione ristretta a insiemi.

dim.

Dunque prendo una formula del linguaggio in ZFC, $p()$. Dato che le variabili di $p()$ sono tutte insiemi allora la formula $p()$ è predicativa in NGB. Dunque $\exists$ la classe C che è data da $p()$ e dall'assioma di comprensione. Adesso sfrutto l'assioma di separazione in NGB e trovo l'insieme I tale per cui $\forall x \in I$ $p(x)$ è vera. $C \cap I$ per l'esercizio precedente è un insieme dunque tesi.

Es. 20.7. : dimostrare in ZF (non usando la scelta) che il lemma di Zorn implica che per ogni insieme infinito A, $\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ iniettiva.

dim.

Il lemma di Zorn implica il teorema di Zermelo per cui ogni insieme é bene ordinabile. Dunque A é bene ordinabile. Definisco per ricorsione numerabile f:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A \qquad \begin{cases} f(0) = \min(A) \\ f(n+1) = \min(A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}) \end{cases}$$

La funzione f é ben definita poiché A é infinito dunque

$A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\} \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque ne esiste il minimo.

Inoltre é ovviamente iniettiva per costruzione.

Es. 21.1 : in NGB dimostrare l'esistenza di

$$R = \{ z \text{ insieme} \mid z \notin z \}$$

$$V = \{ z \text{ insieme} \}$$

$$ORD = \{ \text{ordinali} \}$$

$$SING = \{ \text{singoletti} \}$$

$$PAIR = \{ (x,y) \mid x, y \text{ insiemi} \}$$

$$APPARTENENZA = \{ (z,y) \mid z, y \text{ insiemi } z \in y \}$$

dimostrare, inoltre, che le classi sopra definite non sono insiemi

dim.

- Dato che " $z \notin z$ " é una formula predicativa (poiché z insieme), per l'assioma di comprensione R é una classe. Inoltre per l'assioma di fondazione non puó esistere un insieme che ha sé stesso come elemento dunque R é l'insieme di tutti gli insiemi che per il paradosso di Cantor non é un insieme.
- $V = \{ z \text{ insieme} \} = \{ z \text{ insieme} \mid z = z \}$ e dunque é una classe per l'assioma di comprensione. Non é un insieme per il paradosso di Cantor.
- Consideriamo la formula " z transitivo e $(z, \in)$ é un buon ordine ".
  Se z insieme la formula diventa predicativa e dunque $ORD = \{ z \text{ insieme} \mid$

x transitiva $\wedge$ $(x, \in)$ buon ordine$\}$ è una classe per l'assioma di comprensione.

Il paradosso di Burali-Forti ci garantisce che questa classe non sia un insieme

- $Sing = \{$singoletti$\} = \{ x \mid \exists y$ insieme t.c. $x = \{y\} \}$ e dato che y per definizione è un insieme per la formula di comprensione $Sing$ è una classe. Per esercizio precedente non può essere un insieme.

- $Pair = \{ (x, y) \mid x, y$ insiemi$\} = \{ z \mid \exists x$ insieme $\exists y$ insieme t.c. $z = (x, y)\}$ dunque la formula è predicativa e dunque per l'assioma di comprensione $Pair$ è una classe. Per esercizio precedente non è un insieme.

- APPARTENENZA $= \{ (x, y) \mid x, y$ insiemi $x \in y\} = \{ z \mid \exists x$ insieme $\exists y$ insieme t.c. $x \in y \wedge z = (x, y)\}$; dato che x, y sono insiemi la formula è predicativa e dunque APPARTENENZA è una classe.

Supponiamo sia un insieme. Allora per l'assioma dell'unione

$\bigcup\bigcup$ Appartenenza è un insieme. Ma dato che $(x, \{x\})$ $\in$ Appartenenza $\forall x$ insieme, allora $x \in \bigcup\bigcup$ Appartenenza $\forall x$ insieme.

Assurdo per l'assioma di Cantor.

Es. 21.2.

Sia A una classe definiamo $\mathcal{P}(A) = \{ x$ insieme $\mid x \subseteq A\}$, mostrare che $\mathcal{P}(A)$ è una classe. Inoltre vale l'implicazione:

A classe propria $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A)$ classe propria.

<u>dim.</u>

$\mathcal{P}(A)$ classe è stato dimostrato nell'esercizio 20.9.

Innanzitutto A classe propria $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A)$ classe propria è equivalente

a mostrare A insieme $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A)$ insieme (in NGB).

$\boxed{\Rightarrow}$ Se A è classe propria allora per l'assioma potenza ristretto a insiemi

$\mathcal{P}(A)$ è un insieme.

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $\mathcal{P}(A)$ è un insieme allora per l'assioma dell'unione ristretto

a insiemi $\bigcup(\mathcal{P}(A)) = A$ è un insieme.

<u>Es. 21.3</u>

Sia F una funzione iniettiva definita su una classe propria A. Allora

$F[A] = \{F(a) \mid a \in A\}$ è una classe propria

<u>dim.</u>

Per l'assioma di rimpiazzamento in NBG dato che a è un insieme

($a \in A$ classe) allora $F(a)$ è un insieme. Dunque

$F[A] = \{b \text{ insieme} \mid \exists a \in A \text{ t.c. } b = F(a)\}$ e dato che a, b sono

insiemi per l'assioma di comprensione $F[A]$ è una classe.

Supponiamo ora $F[A]$ insieme.

Dato che f é iniettiva ha l'inversa sinistra t.c. $f^{-1} \circ F(a) = a \ \forall a \in A$.

Allora $F^{-1}(F[A]) = \{ f^{-1} \circ f(a) \mid a \in A \} = \{ a \mid a \in A \} = A$. Dato che $F[A]$ é un insieme, la sua immagine tramite f^{-1} é un insieme per l'assioma di rimpiazzamento. Allora A é un insieme.

Es. 21.4.

Per ogni insieme A l'insieme $A \times \{0\}$ non contiene nessun ordinale

dim.

Supponiamo $A \times \{0\}$ contenga un ordinale $x = (a, 0)$. Per definizione di coppia $(a, 0) = \{ \{a\}, \{a, 0\} \}$. Donque $0 \in \{a, 0\} \in \{ \{a\}, \{a, 0\} \}$ e dato che $(a, 0)$ é ordinale $0 \in \{ \{a\}, \{a, 0\} \}$. Donque per estensionalitá $0 = \{a\} \vee 0 = \{a, 0\}$. In entrambi i casi avrei che $a \in 0$ che é assurdo dal momento che $0 \overset{\text{def.}}{=} \emptyset$.

Es. 22.1. : Se α, β sono ordinale allora:

$$\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$$

dim.

Dimostriamolo per induzione transfinita su β:

- $\beta = 0$: $\alpha + 0 = \alpha$ e $\alpha \oplus 0$ per definizione di $\oplus$ é $\alpha \times \{1\} \cup 0 \times \{1\} = \alpha \times \{1\}$. É ovvio che $\varphi : \alpha \longrightarrow \alpha \times \{1\}$, $x \longrightarrow (x, 1)$ é un isomorfismo d'ordine.

- $P(\beta) \longrightarrow P(\beta+1)$: per ipotesi induttiva $\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$, devo mostrare che $\alpha + (\beta+1) \cong \alpha \oplus (\beta+1)$. Per definizione $\alpha + (\beta+1) = (\alpha+\beta)+1 = (\alpha+\beta) \cup \{\alpha+\beta\}$; $\alpha \oplus (\beta+1) = \alpha \times \{0\} \cup (\beta+1) \times \{1\} = \alpha \times \{0\} \cup (\beta \cup \{\beta\}) \times \{1\} = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \cup \{\beta\} \times \{1\}$.

Chiamo φ l'isomorf. smo d'ordine tra $\alpha+\beta$ e $\alpha \oplus \beta$ e definisco:

$$\psi : (\alpha+\beta) \cup \{\alpha+\beta\} \longrightarrow \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \cup \{\beta\} \times \{1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \varphi(x), & x \in \alpha+\beta \\ (\beta, 1), & x = \alpha+\beta \end{cases}$$

ψ é ovviamente un isomorfismo poiché ristretto a $\alpha+\beta$ lo é e $\psi(\alpha+\beta) = (\beta, 1) \neq y \quad \forall y \in \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} = \alpha \oplus \beta$. L'isomorfismo é d'ordine poiché ristretto a $\alpha+\beta$ lo é e $\alpha+\beta > x \in \alpha+\beta$ per definizione e allo stesso modo $(\beta,1) > y \ \forall y \in \alpha \oplus \beta$ dato che $(\beta,1) > (z,1) > (\kappa,0)$ $\forall z \in \beta \ \forall \kappa \in \alpha$. (si usa il fatto che $\beta > z \ \forall z \in \beta$).

- $\beta = \lambda$ limite: per ipotesi $\forall \gamma \in \lambda \ \exists$ isomorfismo d'ordine:

$$f_\gamma : \alpha + \gamma \longrightarrow \alpha \oplus \gamma$$

Notiamo inoltre che se $\gamma_1 < \gamma_2$ allora:

$$f_{\gamma_2}|_{\alpha+\gamma_1} = f_{\gamma_1}$$ poiché tra due buoni ordini se vi è un isomorfismo d'ordine, questo è unico.

Dunque f_γ sono compatibili $\forall \gamma \in \lambda$ e dunque è ben definita la funzione $F = \bigcup_{\gamma \in \lambda} f_\gamma$ dove $\mathrm{Dom}\, f = \bigcup_{\gamma \in \lambda} (\mathrm{Dom}\, f_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \lambda} \alpha + \gamma = \alpha + \lambda$ e $\mathrm{Im}\, F = \bigcup_{\gamma \in \lambda} (\mathrm{Im}\, f_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \lambda} \alpha \oplus \gamma = \alpha \oplus \lambda$. Vediamo che mantiene l'ordine: se $\kappa_1, \kappa_2 \in \alpha + \lambda \Rightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in \lambda$ t.c. $\kappa_1 \in \alpha + \gamma_1$ e $\kappa_2 \in \alpha + \gamma_2$. Dunque dato che λ ordinale WLOG $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow$ $\kappa_1, \kappa_2 \in \alpha + \gamma_2$ dunque $F(\kappa_1) = f_{\gamma_2}(\kappa_1)$, $f_{\gamma_2}(\kappa_2) = F(\kappa_2)$ e dunque dato che f_{γ_2} iso. d'ordine si ha la tesi (implica anche l'iniettività)

Es. 22.2.: L'insieme dei Lebesgue-misurabile è equipotente all'insieme delle parti di $\mathbb{R}$.

dim.

Dunque i Lesbegue-misurabile sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dunque $|\mathcal{L}| \leq 2^{c}$.

Inoltre l'insieme di Cantor ha cardinalità uguale a $\mathbb{R}$ e è Lesbegue-misurabile (ha misura nulla) e ogni sottoinsieme di Cantor è misurabile perché sottoinsieme di insieme di misura nulla. Ma allora $|\mathcal{L}| \geq |\mathcal{P}(\text{Cantor})| = 2^{c}$.

Dunque tesi.

Es. 23. 1.

Le 2 formulazioni delle ricorsioni Transfinite sono tra loro equivalenti

dim.

· Ricorsione transfinita (II) $\longrightarrow$ ricorsione transfinita (I):

Supponiamo di avere 2 funzioni G_1, G_2 definite su V classe universale e a_0.

Definisco quindi

$$\varphi : V \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto \begin{cases} a_0 & \text{se } x = \emptyset \\ G_1(x(\alpha)) & \text{se } x \text{ è una funzioni di dominio } \alpha+1 \\ G_2(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque per ricorsione transfinito (II forma) $\exists!\ F : \text{ORD} \longrightarrow V$ t.c.

$\forall \alpha\ F(\alpha) = \varphi(F_{|\alpha})$. Dunque per definizione $F(0) = \varphi(0) = a_0$. Inoltre

$F(\beta+1) = \varphi(F_{|\beta+1}) = G_1(F(\beta))$ e $F(\lambda) = \varphi(F_{|\lambda}) = G_2(F_{|\lambda})$.

Dunque F è la funzione cercata per la ricorsione transfinita di 1° tipo.

· ricorsione transfinita (I) $\longrightarrow$ ricorsione transfinito (II):

Sia G funzione definito su V. Dunque definisco Φ_1, Φ_2:

$$\Phi_1 : V \longrightarrow V$$
$$x \longmapsto \begin{cases} a_0, & x = \emptyset \\ G(y_{|\beta+1}), & \text{se } x = y(\beta) \text{ con } y : \text{ord} \longrightarrow V \text{ funzione} \\ \Phi_2(x), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Phi_2 : V \longrightarrow V$$

$$x \longmapsto \begin{cases} a_0 & , x = \emptyset \\ \Phi_1(x), & \text{se } x = y(\beta) \text{ con } y : ord \longrightarrow V \text{ funzione} \\ G(x) \end{cases}$$

Dunque per ricorsione transfinita del I tipo $\exists!\ F : ord \longrightarrow V$ t.c.:

$$\begin{cases} F(0) = a_0 \\ F(\beta+1) = \Phi_1(F(\beta)) \\ F(\lambda) = \Phi_2(F|_\lambda) & \text{se } \lambda \text{ limite} \end{cases}$$

Dunque se α successore allora $\alpha = \beta + 1$ e dunque $F(\alpha) = F(\beta+1) =$ $= \Phi_1(F(\beta)) = G(F|_{\beta+1}) = G(F|_\alpha)$. Se $\alpha = \lambda$ limite allora $F(\lambda) = \Phi_2(F|_\lambda) = G(F|_\lambda)$. Dunque F e' la funzione cercata per la ricorsione transfinita di II tipo.

Es. 23.2 : se $n, m < \omega$ allora la somma ordinale $n+m$ coincide con la somma $n+m$ come numeri naturali

dim.

Sappiamo che ω é un modello dell'aritmetica di Peano e che questo é unico a meno di isomorfismi. Inoltre la somma ordinale su ω rispetta PA2 e PA3 infatti se $S : \omega \to \omega$, $n \mapsto n+1$ é la funzione iniettiva:

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta) \end{cases} \quad (\text{ definizione somma ordinale})$$

Dunque la somma ordinale e la somma come naturali deve essere la stessa altrimenti avrei trovato 2 sistemi isomorfi $(\omega \simeq \omega)$ distinti, assurdo.

Es. 23.3. : $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha \otimes \beta$

dim.

Dimostriamolo per induzione transfinita su β:

- $P(0)$: $\alpha \cdot 0 = 0$ per definizione ; $\alpha \otimes 0$ per definizione é $A \times 0 = \emptyset$. Dunque $P(0)$ vera.
- $P(\beta) \to P(\beta+1)$: $\alpha(\beta+1) \overset{def.}{=} (\alpha \cdot \beta) + \alpha$. Invece $\alpha \otimes (\beta+1) = (\alpha \otimes \beta) \oplus \alpha$. Dunque per quanto dimostrato nell'esercizio pre-

dente $(\alpha \cdot \beta) + \alpha \simeq (\alpha \cdot \beta) \oplus \alpha$ ma per ipotesi induttiva

$\alpha \cdot \beta \simeq \alpha \otimes \beta$ dunque $(\alpha \cdot \beta) + \alpha \simeq (\alpha \otimes \beta) \oplus \alpha$, tesi.

- $\beta = \lambda$ limite: per ipotesi induttiva $\forall \gamma < \lambda$ si ha:

$$f_\gamma : \alpha \cdot \gamma \longrightarrow \alpha \otimes \gamma \quad \text{isomorfismo d'ordine}$$

Supponiamo $\gamma_1 < \gamma_2$; $\gamma_1, \gamma_2 < \lambda$ allora $f_{\gamma_2 | \alpha \cdot \gamma_1}$ é un isomorfismo d'ordine tra $\alpha \cdot \gamma_1$ e $\alpha \otimes \gamma_1$ e dato che tra 2 buoni ordini vi é al massimo un isomorfismo: $f_{\gamma_2 | \alpha \cdot \gamma_1} \equiv f_{\gamma_1}$

Dunque f_γ $\forall \gamma$ sono funzioni mutualmente compatibili e dunque $F = \bigcup_{\gamma < \lambda} f_\gamma$ é una funzione con $\text{Dom } F = \bigcup_{\gamma < \lambda} (\text{Dom } f_\gamma) = \bigcup_{\gamma<\lambda} (\alpha \cdot \gamma) = \alpha \cdot \bigcup_{\gamma < \lambda} \gamma = \alpha \cdot \lambda$ e $\text{Im } F = \bigcup_{\gamma < \lambda} (\text{Im } f_\gamma) = \bigcup_{\gamma < \lambda} (\alpha \otimes \gamma) = \alpha \otimes \bigcup_{\gamma < \lambda} \gamma = \alpha \otimes \lambda$. Adesso vediamo che mantiene l'ordine: se $K_1, K_2 \in \alpha \cdot \lambda \Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \lambda$ t.c. $K_1 \in \alpha \cdot \gamma_1$ e $K_2 \in \alpha \cdot \gamma_2$. Dunque dato che λ ordinale WLOG $\gamma_1 < \gamma_2 \Rightarrow$ $K_1, K_2 \in \alpha \cdot \gamma_2$ dunque $F(K_1) = f_{\gamma_2}(K_1)$, $f_{\gamma_2}(K_2) = F(K_2)$ e dunque dato che f_{γ_2} é iso d'ordine si ha la tesi (questo implica anche l'iniettivitá).

<u>Es. 23.4</u>: Se $n, m < \omega$ allora il prodotto ordinale $n \cdot \omega$ coincide con

il prodotto $n \cdot m$ come numeri naturali.

dim.

Per come definito il prodotto sugli ordinali si ha che la funzione iniettiva

$$S: \omega \to \omega \qquad n \mapsto n+1$$

fa sí che si possa riscrivere il prodotto ordinale:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta \in \omega$$

Dunque il prodotto ordinale su ω rispetta PAZ e PAG e dunque dato che su ω esiste unico prodotto (ω visto come insieme dei naturali) che rispetta PAZ e PAG $\Rightarrow$ prodotto ordinale e come naturali deve coincidere.

Es. 23.5. : $\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$. Mostrare se vale il viceversa

dim.

Per induzione su β:

- $P(0)$: la proprietá é vera a vuoto
- $P(\beta) \to P(\beta+1)$: se $\alpha < \beta + 1 \Rightarrow \alpha \leq \beta$ dunque se $\alpha < \beta$ sfrutta l'ipotesi induttiva $\gamma + \alpha < \gamma + \beta < (\gamma + \beta) + 1 = \gamma + (\beta + 1)$; se $\alpha = \beta \Rightarrow \gamma + \beta < (\gamma + \beta) + 1 = \gamma + (\beta + 1)$.
- $\beta = \lambda$ limite: $\alpha < \lambda \Rightarrow \alpha < \bigcup_{\delta < \lambda} \delta$. Dato che λ é limite

$\exists\, \bar{\delta}$ t.c. $\bar{\delta} > \alpha \implies$ per ipotesi induttiva $\eta + \alpha < \eta + \bar{\delta}$. Dunque

$\eta + \alpha < \eta + \bar{\delta} < \bigcup_{\delta < \lambda} (\eta + \delta) = \eta + \lambda$.

Non vale, invece, la somma a destra. Un controesempio é:

$0 < 1$ ma $0 + \omega = 1 + \omega$. Infatti $0 + \omega = \omega$. Mostriamo che anche

$1 + \omega = \omega$. $\boxed{\subseteq}$ Se $k \in 1 + \omega = \bigcup_{n \in \omega} (1 + n) \implies \exists\, \bar{n}$ t.c. $k \in 1 + \bar{n}$

ma per esercizio precedente la somma ordinale su ω é uguale alla somma

tra naturali, allora $1 + \bar{n} = \tilde{n} \in \omega$. Dunque $k \in \tilde{n} \in \omega \implies k \in \omega$ (per

transitività). $\boxed{\supseteq}$ Se $k \in \omega \implies k \in \bigcup_{n \in \omega} n$ cioé $\exists\, \bar{n}$ t.c. $k \in \bar{n}$

e sempre per la motivazione precedente $k \in \bar{n} \in \bar{n} + 1 = 1 + \bar{n} \in 1 + \omega$

$\implies k \in 1 + \omega$. Dunque $1 + \omega = \omega$.

<u>Es. 23.6</u>: $\alpha < \beta \longrightarrow \eta \cdot \alpha < \eta \cdot \beta$ per $\eta \neq 0$. Dire se vale il viceversa.

<u>dim.</u>

Per induzione transfinita su β:

- $P(0)$: la proprietá é vera a vuoto;

- $P(\beta) \to P(\beta + 1)$: $\alpha < \beta + 1 \longrightarrow \alpha \leq \beta$. Dunque se $\alpha < \beta$ per ipotesi

induttiva $\eta \cdot \alpha < \eta \cdot \beta$ e dunque $\eta \cdot \alpha < \eta \cdot \beta < \eta\beta + \eta = \eta(\beta + 1)$

dove l'ultima disuguanzia segue per esercizio precedente. Se $\alpha = \beta$

$\eta\beta < \eta\beta + \eta = \eta(\beta + 1)$.

• $\beta = \lambda$ limite: $\alpha < \beta = \bigcup_{\delta \in \lambda} \delta$. Dunque $\exists \bar{\delta}$ t.c. $\alpha < \bar{\delta}$ e per ipotesi

induttiva $\eta \cdot \alpha < \eta \cdot \bar{\delta} < \eta \cdot \bigcup_{\delta \in \lambda} \delta = \bigcup_{\delta \in \lambda} \eta \delta = \eta \cdot \lambda$.

Non vale il viceversa infatti $1 < 2$ ma $\omega = 2\omega$. Dimostriamolo:

$\boxed{\subseteq}$: Se $K \in \omega \Rightarrow K \in \bigcup_{n \in \omega} n$ dunque $\exists \bar{n} \in \omega$ t.c. $K < \bar{n} < \bar{n} + \bar{n} = 2\bar{n}$

cioé $K \in 2\bar{n} \in 2\omega \Rightarrow K \in 2\omega$.

$\boxed{\supseteq}$ Se $K \in 2\omega \Rightarrow K \in \bigcup_{n \in \omega} 2n$ cioé $\exists \bar{n} \in \omega$ t.c. $K < 2\bar{n}$ ma $2\bar{n} \in \omega$

(dato che il prodotto ordinale su ω é il prodotto tra naturali) $\Rightarrow K < \tilde{n}$, $\tilde{n} \in \omega$

dunque $K \in \tilde{n} \in \omega \Rightarrow K \in \omega$.

<u>Es. 23.7</u>: $\alpha^\beta \simeq Exp(\alpha, \beta)$

<u>dim.</u>

Per induzione su β:

• $P(0)$: $\alpha^0 = 1$ per definizione; $Exp(\alpha, 0)$ per definizione sono le funzioni dal vuoto in α. Ma di funzione vuota, $\forall \alpha$, ne esiste una ed una soltanto

dunque $Exp(\alpha, 0) = 1$.

• $P(\beta) \to P(\beta+1)$: $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$ ma per esercizio precedente

$\alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^\beta \otimes \alpha$ inoltre per ipotesi induttiva $\alpha^\beta \simeq Exp(\alpha, \beta)$ e dunque

$\alpha^\beta \otimes \alpha = Exp(\alpha, \beta) \otimes \alpha$. Dunque resta da provare che

$Exp(\alpha, \beta) \otimes \alpha \simeq Exp(\alpha, \beta+1)$. Dunque definisco la seguente funzione:

$$\Phi : Exp(\alpha, \beta) \otimes \alpha \longrightarrow Exp(\alpha, \beta+1)$$

$$(f, x) \longmapsto g \quad t.c. \quad g(z) = \begin{cases} f(z), & z < \beta \\ x, & z = \beta \end{cases}$$

Notiamo che é ben definita poiché $f : \beta \to \alpha$ dunque se $z < \beta$ $g(z) = f(z)$ é una buona definizione e se $z = \beta \Rightarrow g(z) = x \in \alpha$ é un'altra buona definizione che permette di affermare che $g \in Fun(\beta+1, \alpha)$.

Vediamo l'iniettività: se $(f_1, x_1) \neq (f_2, x_2) \Rightarrow$ se $x_1 \neq x_2$ $\Phi((f_1, x_1)) = g_1$ t.c. $g_1(\beta) = x_1$ e $\Phi((f_2, x_2)) = g_2$ t.c. $g_2(\beta) = x_2$ e dunque $g_1 \neq g_2$. Se invece $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists z < \beta$ t.c. $f_1(z) \neq f_2(z)$ e dunque $g_1 \neq g_2$. Mostriamo la surgettività: sia $h \in Fun_0(\beta+1, \alpha)$ allora $h(\beta) = \bar{x}$ per un certo $\bar{x} \in \alpha$ e $h_{|\beta} \in Fun_0(\beta, \alpha)$ cioé $h_{|\beta} = \bar{f} \in Exp(\alpha, \beta)$. Dunque h ha come controimmagine $(\bar{f}, \bar{x})$.

Mostriamo che mantiene l'ordine: supponiamo $(f_1, x_1) < (f_2, x_2)$. Allora o $x_1 < x_2$ e dunque $\Phi((f_1, x_1)) = g_1$ t.c. $g_1(\beta) = x_1$ e $\Phi((f_2, x_2)) = g_2$ t.c. $g_2(\beta) = x_2$; e quindi per l'ordine della massima differenza tra funzioni: $g_1 < g_2$. Se invece $x_1 = x_2 \Rightarrow f_1 < f_2$ cioé $f_1(K) < f_2(K)$ con $K = \max\{p \in \beta \mid f_1(p) \neq f_2(p)\}$. Dunque $g_1(\beta) = g_2(\beta) = x_1 = x_2$ e quindi dato che $g_{1|\beta} = f_1$ e $g_{2|\beta} = f_2$ $g_1 < g_2$.

• $\beta = \lambda$ limite: $\alpha^{\lambda} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta}$ e per ipotesi induttiva $\forall \eta \in \lambda$:

$$f_\eta : \alpha^\eta \longrightarrow Exp(\alpha, \eta) \text{ isomorfismo d'ordine}$$

Dunque se $\eta_1 < \eta_2 \implies f_{\eta_1} = f_{\eta_2 | \eta_1}$ poiché tra buoni ordini se c'è un isomorfismo, questo è unico. Allora f_η sono mutualmente compatibili $\forall \eta$ e dunque $\bigcup f_\eta = F$ è una funzione con $\mathrm{Dom} f = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^\eta = \alpha^\lambda$ e $\mathrm{Imm} f = \bigcup_{\eta \in \lambda} Exp(\alpha, \eta) = Exp(\alpha, \lambda)$.

Mostriamo che mantiene l'ordine: se $x_1, x_2 \in \alpha^\lambda$ allora $\exists \eta_1, \eta_2 < \lambda$ t.c. $x_1 \in \alpha^{\eta_1}$ e $x_2 \in \alpha^{\eta_2}$ e WLOG supponendo $\eta_1 < \eta_2 \implies$ $x_1, x_2 \in \alpha^{\eta_2}$. Allora $F(x_1) = f_{\eta_2}(x_1)$ e $F(x_2) = f_{\eta_2}(x_2)$ e dato che f_{η_2} mantiene l'ordine si ha la tesi.

<u>Es. 23.8.</u>: Se $n, m < \omega$ allora l'esponenziale ordinale n^m coincide con l'esponenziale n^m con numeri naturali

<u>dim.</u>

Per esercizio precedente $n^m = |Fun_0(m,n)|$ (ordinale) mentre per definizione di esponenziale nei naturali n^m è l'unico naturale equipotente a $Fun(m,n)$.

Dato che m, n sono insiemi finiti $\implies Fun_0(m,n) = Fun(m,n)$ e dunque m^n ordinale deve coincidere con m^n con i naturali.

Es. 23.9. : Dimostrare $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

dim.

Per induzione su γ:

- $P(0)$: $\alpha\cdot(\beta+0)=\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot 0$

- $P(\gamma)\longrightarrow P(\gamma+1)$: $\alpha(\beta+(\gamma+1))=\alpha((\beta+\gamma)+1)=\alpha(\beta+\gamma)+\alpha=$

 $=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha=\alpha\beta+\alpha(\gamma+1)$ dove le ultime 2 uguaglianze derivano da $P(\gamma)$.

- $\gamma=\lambda$ limite: si ha che $\beta+\lambda$ é limite dato che λ é limite e dunque

 $\alpha(\beta+\lambda)=\bigcup_{\eta\in\lambda}\alpha(\beta+\eta)=\bigcup_{\eta\in\lambda}(\alpha\beta+\alpha\eta)$ dove l'ultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva. Inoltre dato che in generale $\alpha\cdot\beta$ successore $\longleftrightarrow$ α,β successore $\Rightarrow$ $\alpha\cdot\lambda$ é limite e dunque $\bigcup_{\eta\in\lambda}(\alpha\beta+\alpha\eta)=$

 $=\alpha\beta+\alpha\lambda$.

Es. 23.10 : dimostrare $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

dim.

Per induzione transfinita su γ.

- $P(0)$: $\alpha\cdot(\beta\cdot 0)=0=(\alpha\cdot\beta)\cdot 0$

- $P(\gamma)\longrightarrow P(\gamma+1)$: $(\alpha\cdot\beta)(\gamma+1)=(\alpha\cdot\beta)\gamma+\alpha\beta=\alpha\cdot(\beta\gamma)+\alpha\beta=$

 $=\alpha(\beta\gamma+\beta)=\alpha\cdot(\beta\cdot(\gamma+1))$ dove il terzultimo $\boxed{=}$ segue da ipotesi induttiva e gli ultimi 2 da proprietà distributiva.

- $\gamma = \lambda$ limite: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} (\alpha \cdot \beta) \cdot \eta = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha \cdot (\beta \cdot \eta)$ ma dato che $\beta \cdot \lambda$ è limite allora $\bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha(\beta \cdot \eta) = \alpha \cdot (\beta \cdot \lambda)$

Es. 23.11.: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta + \gamma}$

dim.

Per induzione transfinita su γ:

- $P(0)$: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{0} = \alpha^{\beta} \cdot 1 = \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta + 0}$
- $P(\gamma) \to P(\gamma + 1)$: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma + 1} = \alpha^{\beta} \cdot (\alpha^{\gamma} \cdot \alpha) = (\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}) \cdot \alpha = \alpha^{\beta + \gamma} \cdot \alpha =$
$= \alpha^{(\beta + \gamma) + 1} = \alpha^{\beta + (\gamma + 1)}$
- se $\gamma = \lambda$ limite: $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\lambda} = \alpha^{\beta} \cdot \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\eta} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\beta + \eta} =$
$= \alpha^{\beta + \lambda}$ dove l'ultimo uguaglianza segue dal fatto che $\beta + \lambda$ è limite.

Es. 23. 12.: $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

dim.

Per induzione transfinita su γ:

- $P(0)$: $(\alpha^{\beta})^{0} = 1 = \alpha^{0} = \alpha^{\beta \cdot 0}$
- $P(\gamma) \to P(\gamma + 1)$: $(\alpha^{\beta})^{\gamma + 1} = (\alpha^{\beta})^{\gamma} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta \gamma} \cdot \alpha^{\beta} = \alpha^{\beta \gamma + \beta} =$
$= \alpha^{\beta \cdot (\gamma + 1)}$
- $\gamma = \lambda$ limite: $(\alpha^{\beta})^{\lambda} = \bigcup_{\eta \in \lambda} (\alpha^{\beta})^{\eta} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\beta \cdot \eta} = \alpha^{\beta \lambda}$

Es. 23.13. : calcolare $(\omega+1)^\omega$:

Partiamo calcolando $(\omega+1)^n$ $\forall n\in\omega$. Andiamo per induzione supponendo

che $(\omega+1)^n = \omega^n + \omega^{n-1} + \_\_ + 1$.

· $P(0)$: $(\omega+1)^0 = 1$

· $P(n) \longrightarrow P(n+1)$: $(\omega+1)^{n+1} = (\omega+1)^n \cdot (\omega+1) = (\omega^n + \omega^{n-1} + \_\_ + 1)(\omega+1) =$

$= (\omega^n + \_\_ + 1)\omega + (\omega^n + \_\_ + 1)$.

Ora $(\omega^n + \_\_ + 1)\omega = \omega^{n+1}$ infatti:

$$(\omega^n + \_\_ + 1)\omega = \bigcup_{\bar{n}\in\omega} (\omega^n + \_\_ + 1)\bar{n} \leq \bigcup_{\bar{n}\in\omega} (\omega^n + \omega^n)\bar{n} = \bigcup_{\bar{n}\in\omega} (\omega^n \cdot 2)\bar{n} =$$

$$= \bigcup_{\bar{n}\in\omega} \omega^n (2\bar{n}) = \bigcup_{\tilde{n}\in\omega} \omega^n \tilde{n} = \omega^{n+1}.$$

Inoltre $(\omega^n + \_\_ + 1)\omega = \bigcup_{\bar{n}\in\omega} (\omega^n + \_\_ + 1)\bar{n} \geq \bigcup_{\bar{n}\in\omega} \omega^n \cdot \bar{n} = \omega^{n+1}$.

Dunque $(\omega^n + \_\_ + 1)\omega = \omega^{n+1}$.

Dunque $(\omega+1)^{n+1} = \omega^{n+1} + \omega^n + \_\_ + 1$. Dunque tesi dell'induzione.

Allora $(\omega+1)^\omega = \bigcup_{n\in\omega} (\omega+1)^n = \bigcup_{n\in\omega} (\omega^n + \_\_ + 1) \geq \bigcup_{n\in\omega} \omega^n = \omega^\omega$ ma

vale anche $(\omega+1)^\omega = \bigcup_{n\in\omega} (\omega^n + \_\_ + 1) \leq \bigcup_{n\in\omega} (\omega^n + \_\_ + \omega^n) =$

$$= \bigcup_{n\in\omega} \omega^n (n+1) \leq \bigcup_{n\in\omega} \omega^n \omega = \bigcup_{n\in\omega} \omega^{n+1} = \bigcup_{n\in\omega} \omega^{1+n} = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$$

Dunque $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$.

Es. 24.1. : Se $\mathcal{C}$ è un insieme di cardinali, allora $\bigcup\mathcal{C} = \sup_{\kappa\in\mathcal{C}} \kappa$

dim.

Dunque dato che $\bigcup\mathcal{C}$ contiene ogni $\kappa\in\mathcal{C} \Rightarrow \bigcup\mathcal{C} \geq \kappa \ \forall \kappa\in\mathcal{C}$.

Supponiamo dunque che un altro cardinale γ sia t.c. $\gamma \geq \kappa \ \forall \kappa \in \mathcal{C}$.

Per la tricotomia degli ordinali (i cardinali sono in particolare ordinali)

$\gamma < \bigcup\mathcal{C}$, $\gamma = \bigcup\mathcal{C}$ o $\gamma > \bigcup\mathcal{C}$. Se $\gamma < \bigcup\mathcal{C} \Rightarrow \gamma \in \bigcup\mathcal{C}$ cioè esiste

$\overline{\kappa}\in\mathcal{C}$ t.c. $\gamma \in \overline{\kappa} \in \mathcal{C}$ e dunque $\gamma < \overline{\kappa}$. (N.B. si usa in maniera

cruciale che $\in$ e $<$ sono la stessa per i cardinali). Assurdo.

Dunque $\gamma \geq \bigcup\mathcal{C}$ e dunque $\bigcup\mathcal{C}$ è il più piccolo dei maggioranti

cioè $\bigcup\mathcal{C} = \sup_{\kappa\in\mathcal{C}} \kappa$.

Es. 24.2. : Se $\alpha < \beta$ allora $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

dim.

Per induzione transfinita su β:

- $P(0)$: $\alpha < 0$ assurdo e dunque la proprietà è vera a vuoto.
- $P(\beta) \longrightarrow P(\beta+1)$: per definizione $\aleph_{\beta+1} = H(\aleph_\beta)$. Ora sappiamo

che $H(\aleph_\beta)$ è un ordinale e $\aleph_\beta$ è cardinale (dunque ordinale) quindi

$H(\aleph_\beta) > \aleph_\beta$ (perché per ogni insieme A $H(A) \not\preceq A$ e in questo caso vale la tricotomia degli ordinali). Allora $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ per ipotesi induttiva e $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$ donque $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}$.

- $\beta = \lambda$ limite: $\aleph_\lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} \aleph_\eta$ e dato che $\alpha < \lambda \Rightarrow \exists\, \bar{\eta} \in \lambda$ t.c. $\bar{\eta} > \alpha$ donque per ipotesi induttiva: $\aleph_\alpha < \aleph_{\bar{\eta}} \leq \bigcup_{\eta \in \lambda} \aleph_\eta = \aleph_\lambda$.

<u>Es. 24.3.</u> : Senza A.C. $|\omega_1| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))|$.

<u>dim.</u>: fatta a lezione

<u>Es. 24.4</u> : $\mathcal{G}_\omega$ include l'algebra generata da $\mathcal{G}$.

- mancante

Es. 24.5. : Mostrare che $|B_{\omega_1}| = c$

dim.

Innanzitutto si osserva che $|B_{\omega_1}| \geq c$ dato che contiene gli aperti di $\mathbb{R}$.

Inoltre $|B_{\omega_1}| \leq \sum_{\alpha \in \omega_1} |B_\alpha| = \max\{\aleph_1, \sup_{\alpha \in \omega_1} |B_\alpha|\}$. Se quindi mostriamo che $\forall \alpha \in \omega_1$ $|B_\alpha| = c$ allora si è conclusa. Mostriamolo per induzione transfinita su α:

- $P(0)$: $B_0 = \{\text{aperti}\}$ dunque $|B_0| = c$.
- $P(\alpha) \longrightarrow P(\alpha+1)$: per definizione $B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup \{X^c \mid X \in B_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n \in \omega} X_n \mid X_n \in B_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n \in \omega} X_n \mid X_n \in B_\alpha\}$. Dunque $|B_\alpha| = c$ per ipotesi induttiva; $\{X^c \mid X \in B_\alpha\}$ è ovviamente in bigezione con B_α e dunque la sua cardinalità è c; gli ultimi 2 insiemi, invece, sono al massimo quanti i sottoinsiemi numerabili di di B_α cioè $\leq c^{\aleph_0} = c$.

Dunque unione finita di insiemi con cardinalità al più c ha cardinalità $\leq c$. Inoltre dato che B_α ha proprio cardinalità del continuo deve essere che $|B_{\alpha+1}| = c$

- $\alpha = \lambda$ limite: $B_\lambda = \bigcup_{\gamma \in \lambda} B_\gamma$ è un'unione al più numerabile di insiemi con cardinalità del continuo (per ipotesi induttiva) e dunque ha cardinalità del continuo.

Es. 25.1. : $\alpha \cdot \beta$ successore $\iff$ α e β sono successori

dim.

Per dimostrare questo proposizione si avrà bisogno dei seguenti 2 fatti:

- $\alpha + \beta$ è successore $\longleftrightarrow$ lo è β: questo fatto è vero poiché se $\beta = \gamma + 1 \implies \alpha + \beta = \alpha + (\gamma+1) = (\alpha+\gamma)+1$ e dunque $\alpha+\beta$ è successore. Se invece $\beta = \lambda$ limite $\implies$ se $\alpha + \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha + \eta$ avesse massimo $\exists\, \overline{\eta}$ t.c. $\alpha + \overline{\eta} \geq \alpha + \eta \quad \forall \eta \in \lambda$ cioè $\overline{\eta} \geq \overline{\eta} \ \forall \eta \in \lambda$ ma questo è assurdo perché λ limite.
- $0 \cdot \alpha = 0 \ \forall \alpha$ ordinale: per induzione su α. Se $\alpha = 0 \implies 0 \cdot 0 = 0$ vero.

  Se $P(\alpha)$ vero $\longrightarrow 0 \cdot (\alpha+1) = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$.

  Se $\alpha = \lambda$ limite $\implies 0 \cdot \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} 0 \cdot \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} 0 = 0$.

Dunque procediamo con la dimostrazione: se $\alpha = 0$ allora $\alpha \cdot \beta = 0$ che è limite. Se $\alpha \neq 0$, $\beta = \lambda$ limite allora $\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha \cdot \eta$ e dunque se avesse massimo $\exists\, \overline{\eta} \in \lambda$ t.c. $\alpha \cdot \overline{\eta} \geq \alpha \cdot \eta \ \forall \eta \in \lambda$ e dunque $\overline{\eta} > \eta$ $\forall \eta \in \lambda$. Assurdo perché λ limite. Se $\beta = \gamma + 1 \implies \alpha \cdot (\gamma + 1) = \alpha \cdot \gamma + \alpha$ che è successore $\iff$ α è successore.

Es. 25.2. : Supponiamo $\alpha_1 \leq \alpha_2$ e $\beta_1 \leq \beta_2$ allora

1 : $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$

2. $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$

3. $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$

dim.

1: Distinguiamo in casi:

- se $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$ allora la tesi è ovviamente vera;

- se $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2$ allora la tesi è già stata dimostrata precedentemente;

- se $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$: dimostriamo per induzione su $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

• $P(0)$: $\alpha_1 + 0 = \alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_2 + 0$.

• $P(\beta) \rightarrow P(\beta+1)$: $\alpha_1 + (\beta+1) = (\alpha_1 + \beta) + 1 \leq (\alpha_2 + \beta) + 1 = \alpha_2 + (\beta+1)$

dove per la disuguaglianza si usa l'ipotesi induttiva e il fatto che se x, y ordinali allora $x < y \Leftrightarrow x+1 < y+1$. Questo è vero poiché se $x < y \Rightarrow x+1 \leq y < y+1$ e se $x+1 < y+1 \Rightarrow x+1 \leq y$ cioè $x+1 \leq y$ e dunque $x < y$.

• $\beta = \lambda$ limite : $\alpha + \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha + \eta \leq \bigcup_{\eta \in \lambda} \beta + \lambda = \beta + \lambda$.

- Se $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2$: $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha_1 + \beta_2$ e $\alpha_1 + \beta_2 \leq \alpha_2 + \beta_2$

dunque $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$.

2. Distinguiamo in casi:

- $\alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 = \beta_2$ allora la tesi e' ovviamente vera.

- $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 < \beta_2$ allora la tesi segue da esercizio precedente

- $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$: per induzione su β:

$\cdot$ $P(0)$: $\alpha_1 \cdot 0 = 0 \leq 0 = \alpha_2 \cdot 0$

$\cdot$ $P(\beta) \to P(\beta+1)$: $\alpha_1(\beta+1) = \alpha_1 \cdot \beta + \alpha_1 \overset{\text{somma a destra e ipotesi ind.}}{\leq} \alpha_2 \cdot \beta + \alpha_1 \underset{\text{somma a sinistra}}{<} \alpha_2 \cdot \beta + \alpha_2 =$

$= \alpha_2(\beta+1)$

$\cdot$ $\beta = \lambda$ limite: $\alpha \lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha \cdot \eta \leq \bigcup_{\eta \in \lambda} \beta \cdot \eta = \beta \cdot \lambda$

- $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2$: $\alpha_1 \cdot \beta_1 < \alpha_2 \cdot \beta_1$ e $\alpha_2 \cdot \beta_1 \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$

allora $\alpha_1 \cdot \beta_1 < \alpha_2 \cdot \beta_2$.

3 Distinguiamo per casi:

- Se $\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$ la tesi e' ovviamente vera.

- Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ e $\beta_1 < \beta_2$: per induzione su β_2 :

$\cdot$ $P(0)$: vero a vuoto

$\cdot$ $P(\beta_2) \to P(\beta_2+1)$: $\alpha^{\beta_2+1} = \alpha^{\beta_2} \cdot \alpha > \alpha^{\beta_2} \geq \alpha^{\beta_1}$

$\cdot$ $\beta_2 = \lambda$ limite: $\alpha^{\beta_2} = \alpha^{\lambda} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta}$ e dato che $\beta_1 < \beta_2 \Rightarrow \exists\, \bar{\eta} \in \lambda$ t.c.

$\alpha^{\bar{\eta}} \geq \alpha^{\beta_1}$ e dunque $\bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta} \geq \alpha^{\bar{\eta}} \geq \alpha^{\beta_1}$.

- Se $\alpha_1 < \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$: per induzione su β:

$\cdot$ $P(0)$: $\alpha_1^0 = 1 \leq 1 = \alpha_2^0$;

- $P(\beta) \to P(\beta+1)$: $\alpha_1^{\beta+1} = \alpha_1^{\beta} \cdot \alpha \leq \alpha_2^{\beta} \cdot \alpha = \alpha_2^{\beta+1}$

- $\beta = \lambda$ limite: $\alpha_1^{\lambda} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha_1^{\eta} \leq \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha_2^{\eta} = \alpha_2^{\lambda}$

– $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2$: $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_1^{\beta_2}$ e $\alpha_1^{\beta_2} \leq \alpha_2^{\beta_2}$ dunque $\alpha_1^{\beta_1} \leq \alpha_2^{\beta_2}$.

<u>Es. 25.3.</u> : α^{β} successore $\iff$ α successore e β ordinale finito

<u>dim.</u>

Donque se $\beta = \lambda$ limite allora $\alpha^{\lambda} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta}$ che non ha massimo altrimenti $\exists \overline{\eta}$ t.c. $\alpha^{\overline{\eta}} > \alpha^{\eta}$ $\forall \eta \in \lambda$ e dunque $\overline{\eta} > \eta$ $\forall \eta \in \lambda$. Assurdo perché λ limite. Se invece $\beta = \gamma + 1 \Rightarrow \alpha^{\gamma+1} = \alpha^{\gamma} \cdot \alpha$ che, per dimostrazione precedente, é limite se α é limite. Donque per ora condizione necessaria perché α^{β} sia successore é che β sia successore (o $\beta = 0$) e che α é successore. Verifichiamo dunque il caso in cui α e β siano successori. Ora dimostriamo un fatto che ci servirá cioé che ogni ordinale z si puó scrivere come $\lambda + n$ con λ limite e $n \in \omega$. Questo é vero poiché per la divisione euclidea $\exists \gamma_1, \gamma_2$ t.c. $z = \omega \cdot \gamma_1 + \gamma_2$ con $\gamma_2 = n \in \omega$ e $\omega \cdot \gamma_1$ limite dato che ω limite. Dunque se $\beta = \gamma + 1$ allora $\gamma + 1 = \lambda + n$ con λ limite e $n \in \omega$. Se $\lambda \neq 0$ allore $(\alpha+1)^{\lambda+n} = (\alpha+1)^{(\lambda+n-1)+1} = (\alpha+1)^{(\lambda+n-1)} \cdot \alpha = \text{—} = (\alpha+1)^{\lambda} \cdot \alpha^{n}$ e dunque come visto prima $(\alpha+1)^{\lambda}$ é limite e dunque $(\alpha+1)^{\lambda+n}$ limite.

Se invece $\lambda = 0$ $\beta = n$ dunque $(\alpha+1)^n = (\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+1)$ che é successore poiché prodotto di successori. Ovviamente se $\beta = 0$ $\alpha^0 = 1$ che é successore $\forall \alpha$.

Es. 26.1 : Dato un qualunque ordinale β consideriamo:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta \\ \alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} \end{cases}$$ allora la sequenza α_n e' crescente e $\alpha = \bigcup \alpha_n$ e' limite.

dim.

Dimostriamo la crescenza per induzione su n:

$P(0)$: Vediamo che $\alpha_1 > \alpha_0$: $\alpha_1 = \omega^{\alpha_0} = \omega^{\beta}$ e $\omega^{\beta} \geq \beta$ per esercizio 26.2.

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$: dunque per ipotesi induttiva $\alpha_n = \omega^{\alpha_{n-1}} \geq \alpha_{n-1} = \omega^{\alpha_{n-2}}$.

Ora $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n} = \omega^{(\omega^{\alpha_{n-1}})} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per es. 25.2.}}}{\geq} \omega^{(\omega^{\alpha_{n-2}})} = \omega^{\alpha_{n-1}} = \alpha_n$.

Adesso mostriamo che $\alpha = \bigcup \alpha_n$ e' limite. Vediamo allora che non ha massimo: se esistesse massimo γ allora $\gamma \geq \alpha_n$ $\forall n \in \omega$ e inoltre $\gamma \in \bigcup \alpha_n$ dunque $\exists \bar{n}$ t.c. $\gamma \in \alpha_{\bar{n}}$ e questo e' assurdo per ipotesi di massimo.

Es. 26.2 : $\omega^\alpha \geq \alpha$.

dim.

Per induzione su α.

· $P(0)$: $\omega^0 = 1 \geq 0$

· $P(\alpha) \longrightarrow P(\alpha+1)$: $\omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot \omega$ ora per ipotesi induttiva $\omega^\alpha \geq \alpha$

dunque $\omega^\alpha \cdot 2 \geq \alpha \cdot \omega > \alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha \geq \alpha + 1$ (tutti banali passaggi dovuti alle dimostrazioni precedenti).

· $\alpha = \lambda$ limite: $\omega^\lambda = \bigcup_{\eta \in \lambda} \omega^\eta \underset{\uparrow}{\leq} \bigcup_{\eta \in \lambda} \eta = \lambda$

ipotesi induttiva

Es. 26.3. : dimostrare unicità forma normale di Cantor.

dim

Supponiamo di avere la forma normale di Cantor per α. Dimostriamo per induzione transfinita forte su α. Dunque supponiamo $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} n_k$ e $\alpha = \omega^{\beta_1} m_1 + \dots + \omega^{\beta_r} m_r$. Se $\alpha_1 < \beta_1 \Rightarrow \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\beta_r} \cdot m_r \leq$

$\leq \omega^{\beta_1} (m_1 + \dots + m_1) < \omega^{\beta_1 + 1} \leq \omega^{\alpha_1} \leq \alpha$. Assurdo. Allora deve essere che $\alpha_1 = \beta_1$. Ora se considero la divisione euclidea per $\omega^{\beta_1} = \omega^{\alpha_1}$

ottengo $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + K_1 = \omega^{\alpha_1} \cdot n_2 + K_2$ e dato che il resto e il quoziente della divisione euclidea sono unici $n_1 = m_1$ e $\omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k =$

$= \omega^{\beta_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\beta_r} n_r$. Dunque per ipotesi induttiva forte si ha la tesi

Es. 27.1. : Se $\eta > \eta_1 > \dots > \eta_k$ e $n_i < \omega \Rightarrow \omega^\eta > \omega^{\eta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\eta_k} \cdot n_k$.

dim.

dimostriamolo per induzione transfinita su η:

- $P(0)$: la proposizione é vero a vuoto
- $P(\eta) \to P(\eta+1)$: $\omega^{\eta+1} = \omega^\eta \cdot \omega$; dunque $\eta_k < \dots < \eta_1 < \eta+1$.

Se $\eta_1 < \eta$ allora per ipotesi induttiva $\omega^\eta > \omega^{\eta_1} n_1 + \dots + \omega^{\eta_k} \cdot n_k$.

Donque per esercizio precedente $\omega^\eta \cdot \omega \underset{\substack{\downarrow \\ \text{moltiplicazione a sinistra}}}{\geq} \omega^\eta \cdot 1 > \omega^{\eta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\eta_k} n_k$.

Se invece $\eta_1 = \eta$ allora $\eta = \eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_k$ e donque per ipotesi induttiva $\omega^\eta > \omega^{\eta_2} \cdot n_2 + \dots + \omega^{\eta_k} \cdot n_k$. Sommando a sinistra per $\omega^{\eta_1} n_1$ ho che $\omega^{\eta_1} n_1 + \omega^\eta > \omega^{\eta_1} n_1 + \omega^{\eta_2} n_2 + \dots + \omega^{\eta_k} n_k$.

Ma $\omega^{\eta_1} n_1 + \omega^\eta = \omega^\eta (n_1 + 1) < \omega^\eta \omega = \omega^{\eta+1}$ e donque tesi.

- $\eta = \lambda$ limite: dato che $\lambda_1 < \lambda$ e λ limite allora $\exists \bar{\delta} \in \lambda$ t.c. $\bar{\delta} > \lambda_1$

e donque per ipotesi induttiva $\omega^{\bar{\delta}} > \omega^{\eta_1} n_1 + \dots + \omega^{\eta_k} \cdot n_k$ ma

$\omega^{\bar{\delta}} \leq \bigcup_{\delta \in \lambda} \omega^\delta = \omega^\lambda$, tesi.

Es. 27.2 : Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $\forall \beta < \alpha$ si ha $\beta \cdot \alpha = \alpha$

(ii) $\forall \beta, \eta < \alpha$ si ha $\beta \cdot \eta < \alpha$

(iii) $\alpha = (\omega)^{(\omega^\eta)}$ per qualche η

dim.

- (i) $\longrightarrow$ (ii) : dunque $\eta < \alpha$ allora se $\beta \neq 0$ $\beta \cdot \eta < \beta \cdot \alpha \overset{(i)}{=} \alpha$. Se $\beta = 0$

$\alpha > 0$ e dunque $\beta \cdot \eta = 0 < \alpha$.

- (ii) $\longrightarrow$ (iii) : dato che α é moltiplicamente chiuso lo é anche additivamente e dunque sappiamo che $\alpha = \omega^{\delta}$. Adesso si vuole dimostrare che δ é additivamente chiuso : $x, y < \delta \Rightarrow \omega^{x}, \omega^{y} < \omega^{\delta}$ dunque $\omega^{x+y} = \omega^{x} \cdot \omega^{y} < \alpha =$
$= \omega^{\delta}$. Donque per esercizio precedente $x + y < \delta$. Allora $\delta = \omega^{\eta}$.

Donque $\alpha = (\omega)^{(\omega^{\eta})}$.

(iii) $\longrightarrow$ (i) : si suppone quindi $\alpha = (\omega)^{(\omega^{\delta})}$. Donque prendo $\beta < \alpha$.

Allora β in forma normale di Cantor é del tipo $\beta = \omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega^{\beta_s} \cdot n_s$ con $\beta_1 < \omega^{\delta}$. Donque $\beta \cdot \alpha = (\omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega^{\beta_s} n_s) \cdot \omega^{(\omega^{\delta})} =$

$$= (\omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega^{\beta_s} n_s) \cdot (\omega \cdot \omega^{\omega^{\delta}}) = ((\omega^{\beta_1} + \dots + \omega^{\beta_s} n_s) \cdot \omega)\, \omega^{\omega^{\delta}} =$$
$$= \omega^{\beta_1 + 1} \cdot \omega^{\omega^{\delta}} = \omega^{(\beta_1 + 1) + \omega^{\delta}} = \omega^{\omega^{\delta}} = \alpha .$$

(N.B. si é usato il fatto noto che $(\omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega^{\beta_s} \cdot n_s)\omega = \omega^{\beta_1 + 1}$ con $\omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega^{\beta_s} n_s$ forma normale di Cantor).

Es. 27.3. : Trovare caratterizzazioni delle coppie di ordinali $\alpha, \beta < \omega^3$ t.c. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

dim.

Dunque dato che $\alpha, \beta < \omega^3$ allora avranno una scrittura in forma normale di Cantor del tipo $\alpha = \omega^2 \cdot n_1 + \omega \cdot n_2 + n_3$ e $\beta = \omega^2 \cdot m_1 + \omega\, m_2 + m_3$.

• <u>1° Caso:</u> $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3 \neq 0$

Dunque $\alpha \cdot \beta = (\omega^2 \cdot n_1 + \omega \cdot n_2 + n_3) \cdot (\omega^2 m_1 + \omega m_2 + m_3) =$

$= (\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3)(\omega^2 m_1) + (\omega^2 \cdot n_1 + \omega n_2 + n_3)(\omega m_2) + (\omega^2 \cdot n_1 + \omega n_2 + n_3) \cdot m_3 =$

$= [((\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3)\omega] \cdot \omega] m_1 + [(\omega^2 \cdot n_1 + \omega n_2 + n_3) \cdot \omega] m_2 + (\omega^2 \cdot n_1 + \omega n_2 + n_3) \cdot m_3 =$

$= \omega^4 \cdot m_1 + \omega^3 \cdot m_2 + \omega^2 \cdot (n_1 \cdot m_3) + \omega n_2 + n_3$

[Si usa il fatto che $(\omega^{\beta_1} n_1 + \dots + \omega\, n_k^{\beta_k})\omega = \omega^{\beta_1 + 1}$ e $(\omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k) \cdot n =$
$= \omega^{\beta_1}(n_1 \cdot n) + \dots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k$].

Allo stesso modo:

$\beta \cdot \alpha = \omega^4\, n_1 + \omega^3 \cdot n_2 + \omega^2 (m_1 \cdot n_3) + \omega m_2 + m_3$

Dato che ho scritto $\alpha \cdot \beta$ e $\beta \cdot \alpha$ nella forma normale di Cantor e che questa scrittura e' unica, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \iff$

$$\begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \\ m_1 \cdot n_3 = n_1 \cdot m_3 \\ m_2 = n_2 \\ m_3 = n_3 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \\ m_3 = n_3 \end{cases}$$

• <u>2° caso:</u> $n_1 = m_1 = 0$; $n_2, m_2, n_3, m_3 \neq 0$

$\alpha \cdot \beta = (\omega \cdot n_2 + n_3)(\omega m_2 + m_3) = (\omega n_2 + n_3)\omega m_2 + (\omega n_2 + n_3) m_3 = \omega^2 m_2 +$

$+\omega n_2 m_3 + n_3$. Mentre $\beta \cdot \alpha = (\omega m_2 + m_3)(\omega n_2 + n_3) = \omega^2 n_2 + \omega m_2 n_3 + m_3$

Dunque $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \iff \begin{cases} n_2 = m_2 \\ n_3 = m_3 \end{cases}$

- <u>3° caso</u> : $n_1 = m_1 = n_2 = m_2 = 0$; $n_3, m_3 \neq 0$:

$\alpha = n_3$ $\beta = m_3$ dunque α, β sono naturali e quindi commutano sempre.

- <u>4° caso</u> : i coefficienti sono tutti 0 dunque $\alpha = \beta = 0$ e banalmente commutano

- <u>5° caso</u>: $n_1, m_1, n_2, m_2 \neq 0$; $n_3 = m_3 = 0$:

$\alpha = \omega^2 n_1 + \omega n_2$ $\beta = \omega^2 \cdot m_1 + \omega \cdot m_2 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = (\omega^2 n_1 + \omega n_2)(\omega^2 m_1 + \omega m_2)$

$= \omega^4 m_1 + \omega^3 m_2$ e allo stesso modo $\beta \cdot \alpha = \omega^4 \cdot n_1 + \omega^3 n_2$ allora

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_2 \end{cases}$

- <u>6° caso</u> : $n_1, m_1, n_3, m_3 \neq 0$; $n_2 = m_2 = 0$:

$\alpha \cdot \beta = (\omega^2 n_1 + n_3)(\omega^2 m_1 + m_3) = \omega^4 m_1 + \omega^2 n_1 \cdot m_3 + n_3$ e allo stesso

modo $\beta \cdot \alpha = \omega^4 n_1 + \omega^2 m_1 \cdot n_3 + m_3$ dunque $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ n_3 = m_3 \end{cases}$

- <u>7° caso</u> : $n_1, m_1 \neq 0$, resto uguale a 0: $\alpha = \omega^2 n_1$ e $\beta = \omega^2 m_1 \Rightarrow$

$\alpha \cdot \beta = \omega^2 n_1 \cdot \omega^2 m_1 = \omega^4 m_1$ e $\beta \cdot \alpha = \omega^4 \cdot n_1$ dunque $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \iff n_1 = m_1$;

- <u>8° caso</u> : $n_2, m_2 \neq 0$, il resto uguale a 0: $\alpha \cdot \beta = \omega n_2 \cdot \omega m_2 = \omega^2 m_2$

e $\beta \cdot \alpha = \omega m_2 \cdot \omega n_2 = \omega^2 \cdot n_2$ e dunque $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \iff n_2 = m_2$

- <u>9° caso</u> : $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_1 = 0$; $m_2, m_3 \neq 0$: $\alpha = \omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3$

$\beta = m_2\omega + m_3 \Rightarrow \alpha\cdot\beta = (\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3)(\omega m_2 + m_3) = \omega^3 m_2 + \omega^2 n_1 m_3 + \omega n_2 + n_3$

e $\beta\cdot\alpha = (\omega m_2 + m_3)(\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3) = \omega^3 n_1 + \omega^2 n_2 + \omega m_2 n_3 + m_3$ e

dunque $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha \iff \begin{cases} m_2 = n_1 \\ n_1\cdot m_3 = n_2 \\ n_2 = m_2\cdot n_3 \\ n_3 = m_3 \end{cases}$

(il caso in cui $n_1 = 0$, $n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_1, m_2, m_3 \neq 0$ è speculare)

· <u>10° caso</u>: se $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_2 = 0$; $m_1, m_2 \neq 0$ praticamente identico

a caso 9°.

· <u>11° caso</u>: se $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_3 = 0$, $m_1, m_2 \neq 0$ procedimento identico caso 9°

· <u>12° caso</u>: se $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_1 = m_2 = 0$, $m_3 \neq 0$:

$\alpha\cdot\beta = (\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3)\cdot m_3 = \omega^2 n_1 m_3 + \omega n_2 + n_3$ e

$\beta\cdot\alpha = m_3(\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3) = \omega^2 n_1 + \omega n_2 + m_3\cdot n_3$ dunque

$\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha \iff \begin{cases} n_1\cdot m_3 = n_1 \\ m_3 n_3 = n_3 \end{cases} \iff m_3 = 1$

· <u>13° caso</u>: se $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_1 = m_3 = 0$, $m_2 \neq 0$:

$\alpha\cdot\beta = (\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3)\,\omega m_2 = \omega^3 m_2$ e $\beta\cdot\alpha = \omega m_2(\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3) =$

$= \omega^3 n_1 + \omega^2 n_2 + \omega m_2 n_3 \Rightarrow \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha \iff n_1 = m_2$, $n_2 = 0$, $m_2 n_3 = 0$

· <u>15° caso</u>: se $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_1 \neq 0$; $m_2, m_3 \neq 0$: $\alpha\cdot\beta = (\omega^2 n_1 + \omega n_2 + n_3)\cdot\omega^2 m_1$

$= \omega^4 m_1$ mentre $\beta\cdot\alpha = \omega^4 n_1 + \omega^3 n_2 + \omega^2 n_3 m_1 \Rightarrow \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha \iff \begin{cases} m_1 = n_1 \\ n_2 = 0 \\ n_3 m_1 = 0 \end{cases}$

- 15° caso: se $n_1, n_2, n_3 \neq 0 \wedge m_1 = m_2 = m_3 = 0$: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha = 0$

Tutti gli altri casi sono praticamente identici ai precedenti.

4° Consegna ETI

David Vencato

N° di matricola: 590954

Lezione 8 Maggio

Es. 1.1.

- La somma e il prodotto tra cardinali sono associativi e commutativi:

Per definizione se K e μ sono due cardinali allora $K+\mu$ é l'unico cardinale in bigezione con $A \cup B$ dove $|A| = K$ e $|B| = \mu$ e $A \cap B = \emptyset$. Dunque $\mu + K$ e' $B \cup A$ e dato che $A \cup B = B \cup A$ allora si ha la tesi per la somma. Allo stesso modo l'associatività deriva sempre dall'associatività insiemistica tale per cui se A, B, C sono insiemi $(A \cup B) \cup C = $ $= A \cup (B \cup C)$.

Per definizione se K e μ sono 2 ardinali $K \cdot \mu$ é definito come l'unico cardinale in bigezione con $A \times B$ con $|A| = K$ e $|B| = \mu$. Dunque definismo l'isomorfismo $\alpha : A \times B \longrightarrow B \times A$ t.c. $(a, b) \longmapsto (b, a)$. Da questo si ottiene la commutatività. Per l'associatività si usa l'ovvio bigezione tra insiemi $\gamma : A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C$ t.c.

$(a, (b, c)) \longmapsto ((a, b), c)$.

- $K \cdot (\mu + \eta) = K \cdot \mu + K \cdot \eta$:

supponiamo A, B, C insiemi t.c. $|A| = K$, $|B| = \mu$ e $|C| = \eta$ con $B \cap C = \emptyset$. Allora considero la funzione :

$$\alpha : A \times (B \cup C) \longrightarrow (A \times B) \cup (A \times C) \ \text{t.c.}$$

$$(a, x) \longmapsto (a, x)$$

Per come é stata definita α e' una buona definizione e bigettiva. Dunque si ha la tesi.

- $K^{\mu} \cdot K^{\eta} = K^{\mu + \eta}$, $(K^{\mu})^{\eta} = K^{\mu \cdot \eta}$:

dimostrate durante il corso

- Monotonia. Siano $K \leq K'$ e $\mu \leq \mu'$ allora: $K + \mu \leq K' + \mu'$; $K \cdot \mu \leq K' \cdot \mu'$; $K^{\mu} \leq K'^{\mu'}$:

dunque considero A, B, A', B' insiemi t.c. $|A| = K$, $|A'| = K'$, $|B| = \mu$ e $|B'| = \mu'$. Dunque per ipotesi esistono $\alpha : A \longrightarrow A'$ e $\beta : B \longrightarrow B'$ con α e β funzioni iniettive. Inoltre possiamo supporre tutti gli insiemi disgiunti e dunque $K + \mu = |A \cup B|$ e $K' + \mu' = |A' \cup B'|$. Quindi:

$$\gamma : A \cup B \longrightarrow A' \cup B'$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \alpha(x), & x \in A \\ \beta(x), & x \in B \end{cases}$$

La mappa é ben definita per disgiunzione degli insiemi e inoltre é iniettiva poiché lo sono le componenti. Dunque $K + \mu \leq K' + \mu'$

Allo stesso modo considero:

$$\mu : A \times B \longrightarrow A' \times B'$$

$$(a, b) \longmapsto (\alpha(a), \beta(b))$$

Dunque sempre per iniettività di α e β lo è anche μ. Dunque $K \cdot \mu \leq K' \cdot \mu'$.

Infine per quanto riguarda l'esponenziazione: una funzione $f \in Fun(B, A)$ è del tipo $f = \{(b, f(b)) \mid b \in B\}$ e allo stesso modo se $f' \in Fun(B', A')$ allora $f' = \{(b', f'(b')) \mid b' \in B\}$. Dunque se considero l'insieme $\{(\beta(b), \alpha(f(b))) \mid b \in B\}$ ottengo una funzione che ha come dominio $\beta(B)$. Allora per farla diventare elemento di $Fun(B', A')$ definisco l'insieme $\{(\beta(b), \alpha(f(b))) \mid b \in B\} \cup (B' \setminus \beta(B)) \times \{a'\} = I_f$ con $a' \in A'$. Definendo dunque la funzione $\lambda : fun(B, A) \longrightarrow Fun(B', A')$ t.c. $f \longmapsto I_f$. Allora λ è iniettiva poiché se $f_1 \neq f_2$ allora $\exists \bar{b} \in B$ t.c. $f_1(\bar{b}) \neq f_2(\bar{b})$. Dunque $\lambda(f_1)(\beta(\bar{b})) = \alpha(f_1(\bar{b})) \neq \alpha(f_2(\bar{b})) = \lambda(f_2)(\beta(\bar{b}))$ dove "$\neq$" deriva dall'iniettività di α. Allora $\lambda(f_1) \neq \lambda(f_2)$. Da questo la tesi.

Es. 1.2.: Verificare che $c^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$.

dim.

$$c^{\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_0 \aleph_1} = 2^{\aleph_1}$$ dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\forall \alpha, \beta$ ordinali: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$

Lezione 12 Maggio

Es. 2.1.: Se α, β sono cardinali infiniti allora $|\alpha^{\beta}| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$

dim.

Per induzione transfinita su β.

- $P(0)$: la tesi e' vera a vuoto

- $P(\beta) \longrightarrow P(\beta+1)$: dunque per definizione $\alpha^{\beta+1} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha$ e dunque

$|\alpha^{\beta+1}| = |\alpha^{\beta} \cdot \alpha| = \max\{|\alpha^{\beta}|, |\alpha|\} = \max\{\max\{|\alpha|, |\beta|\}, |\alpha|\} =$

$= \max\{|\beta|, |\alpha|\} = \max\{|\beta+1|, |\alpha|\}$ dove nell'ultimo passaggio sfruttiamo il fatto che β e' infinito

- $\beta = \lambda$ limite: per definizione $\alpha^{\lambda} = \bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta}$ e dunque usando il teorema delle somme infinite tra cardinali $|\alpha^{\lambda}| \leq |\bigcup_{\eta \in \lambda} \alpha^{\eta}| \leq \sum_{\eta \in \lambda} |\alpha^{\eta}| = \max\{|\lambda|, \sup |\alpha^{\eta}|\} = \max\{|\lambda|, \sup(\max\{|\alpha|, |\eta|\})\} = \max\{|\lambda|, |\alpha|\}$.

Inoltre $\max\{|\lambda|, |\alpha|\} \leq |\alpha^{\lambda}|$ in quanto λ e' limite e dunque $\lambda > 1$ e allora $|\alpha^{\lambda}| > |\alpha|$. Inoltre la funzione $\gamma: \lambda \longrightarrow \alpha^{\lambda}$ t.c. $\eta \longmapsto \alpha^{\eta}$ e' un'ovvia funzione iniettiva. Dunque tesi.

Es. 2.2.: Siano $k_i \leq \mu_i \quad \forall i \in I \Rightarrow \sum_{i \in I} k_i \leq \sum_{i \in I} \mu_i$

dim.

Per ipotesi si hanno $\langle A_i, i \in I \rangle$ e $\langle B_i, i \in I \rangle$ famiglie di insiemi disgiunti t.c. $\forall i \in I$ $|A_i| = \kappa_i$ e $|B_i| = \mu_i$. Usando l'assioma della scelta si ha

$\langle f_i : A_i \longrightarrow B_i \mid i \in I \rangle$ famiglia di funzioni iniettive. Allora.

$$\gamma : \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{t.c.} \quad a \longmapsto f_i(a)$$ dove i é l'unico

indice t.c. $a \in A_i$. (data la disgiunzione). γ é ovviamente iniettiva e dunque

tesi.

<u>Es. 2.3.</u> : Se $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ allora $\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} \kappa_i \right)$

<u>dim.</u>

Per ipotesi si ha $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ famiglia di insiemi disgionti t.c. $|A_i| = \kappa_i$

$\forall i \in I$. Allora si definisce: $\gamma : \bigsqcup_{i \in I} A_i \longrightarrow \bigsqcup_{j \in J} \left(\bigsqcup_{i \in I_j} A_i \right)$ t.c. $x \longmapsto x$.

La funzione é ben definita poiché se $x \in \bigsqcup_{j \in J} \left(\bigsqcup_{i \in I_j} A_i \right)$ $\exists! \, \bar{j} \in J$ t.c.

$x \in \bigsqcup_{i \in I_{\bar{j}}} A_i$ dato che $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ e inoltre per disgiunzione degli A_i

allora $\exists! \, \bar{i} \in I$ t.c. $x \in A_{\bar{i}}$. Per come é stata definita la funzione é

ovviamente iniettiva e sorgettiva.

<u>Es. 2.4.</u> : Se $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ allora $\prod_{i \in I} \kappa_i = \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} \kappa_i \right)$

<u>dim.</u>

Per ipotesi si ha $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ famiglia di insiemi disgionti t.c. $|A_i| = \kappa_i$ $\forall i \in I$.

Definiamo dunque: $\gamma : \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I_j} A_i \right)$ t.c.

$$\langle a_i \mid i \in I \rangle \longmapsto \langle \langle a_i \mid i \in I_j \rangle \mid j \in J \rangle.$$

Dall' ipotesi $I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ segue che γ é ben definito e bigettiva (di fatto si é riordinato la I-opla).

<u>Es. 2.5.</u>: $\forall\, K$ cardinale e insieme I abbiamo $\prod_{i \in I} K = K^{|I|}$.

<u>dim</u>

per ipotesi supponiamo A insieme t.c. $|A| = K$ e dunque definiamo:

$$\gamma : \prod_{i \in I} A \longrightarrow Fun(I, A) \quad t.c. \quad \langle a_i \mid i \in I \rangle \longmapsto \{(i, a_i), i \in I\}$$

dove quest' ultimo insieme é una funzione da I in A dato che $a_i \in A$.

Definisco dunque $\gamma^{-1} : Fun(I, A) \longrightarrow \prod_{i \in I} A$ t.c. $f \longmapsto \gamma^{-1}(f)$

dove se $f = \{(i, f(i)) \mid i \in I\}$ allora $\gamma^{-1}(f) = \langle f(i) \mid i \in I \rangle$. Allora

$\gamma \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ \gamma = id$. Dunque $\prod_{i \in I} K = \left| \prod_{i \in I} A \right| = |Fun(I, A)| = |A^I| =$

$= \max\{|A|, |I|\} = \max\{K, |I|\} = K^{|I|}$.

<u>Es. 2.6.</u> : siano K e μ_i cardinali, allora $\prod_{i \in I} K^{\mu_i} = K^{\sum_{i \in I} \mu_i}$

<u>dim.</u>

Per ipotesi si ha $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ famiglia di insiemi disgiunti t.c. $|A_i| = \mu_i$

$\forall i \in I$ e B insieme t.c. $|B| = K$. Dunque si ha che

$$\prod_{i \in I} K^{\mu_i} = \left| \prod_{i \in I} Fun(A_i, B) \right| \quad e \quad K^{\sum_{i \in I} \mu_i} = \left| Fun\left(\bigcup_{i \in I} A_i, B \right) \right|.$$

Dunque definisco :

$$\gamma : \prod_{i \in I} Fun(A_i, B) \longrightarrow Fun\left(\bigcup_{i \in I} A_i, B \right) \quad t.c.$$

$< f_i \mid i \in I > \longmapsto f$ dove $f : \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow B$ t.c. $f(x) = f_i(x)$ dove

i é l'unico indice t.c. $x \in A_i$ e $f_i : A_i \longrightarrow B$.

Dunque la funzione é iniettiva poiché se $< f_i^1 \mid i \in I > \neq < f_i^2 \mid i \in I >$ allora

$\exists \bar{i}$ t.c. $f_{\bar{i}}^1 \neq f_{\bar{i}}^2$ cioé $\exists \bar{a} \in A_{\bar{i}}$ per cui $f_{\bar{i}}^1(\bar{a}) \neq f_{\bar{i}}^2(\bar{a})$.

Dunque $f^1(\bar{a}) \neq f^2(\bar{a})$ e quindi γ é iniettiva. Inoltre se prendo

un elemento $f \in Fun(\bigcup_{i \in I} A_i, B)$ allora $f = \{ (a, f(a)) \mid a \in \bigcup_{i \in I} A_i \}$.

Dato che A_i sono disgiunti sono ben definite $f_i = \{ (a, f(a)) \mid a \in A_i \}$

e dunque la controimmagine di f é proprio $< f_i \mid i \in I >$.

<u>Es. 2.7.</u> : siano K_i e μ cardinali allora: $\left(\prod_{i \in I} K_i \right)^\mu = \prod_{i \in I} K_i^\mu$.

<u>dim.</u>

Per ipotesi si ha $< A_i \mid i \in I >$ famiglia di insiemi disgiunti t.c. $|A_i| = K_i$

$\forall i \in I$ e B insieme t.c. $|B| = \mu$. Dunque $\left(\prod_{i \in I} K_i \right)^\mu = Fun(B, \prod_{i \in I} A_i)$

mentre $\prod_{i \in I} K_i^\mu = \prod_{i \in I} Fun(B, A_i)$.

Definiamo dunque: $\gamma : Fun(B, \prod_{i \in I} A_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} Fun(B, A_i)$ t.c.

$f \longmapsto \gamma(f)$; dove chiamo "x_i = i-esima componente di $f(b)$" e

dunque $\{ (b, x_i) \mid b \in B \} \in Fun(B, A_i)$. Quindi si definisce

$\gamma(f) = < \{ (b, x_i) \mid b \in B \} \mid i \in I \} >$. La funzione é iniettiva poiché

se $f_1 \neq f_2$ allora $\exists \bar{b}$ t.c. $f_1(\bar{b}) \neq f_2(\bar{b})$. Dunque se $f_1(\bar{b}) = < a_i^1 \mid i \in I >$

e $f_2(\bar{b}) = \langle a_i^2 \mid i \in I \rangle \Rightarrow \exists \bar{i}$ t.c. $a_{\bar{i}}^1 \neq a_{\bar{i}}^2$ e dunque $\gamma(f_1) \neq \gamma(f_2)$.

Inoltre se $x \in \prod_{i \in I} Fun(B, A_i)$ allora $x = \langle f_i \mid i \in I \rangle$ con $f_i : B \to A_i$.

Dunque la controimmagine di x é proprio $\{ (b, f(b)) \mid b \in B \}$ con $f(b) = \langle f_i(b) \mid i \in I \rangle$. Quindi γ é iniettiva e sorgettiva e dunque tesi.

<u>Es. 2.8.</u> : Trovare un esempio di prodotto $\prod_{i<\alpha} K_i$ dove la sequenza é non-decrescente e α ordinale (non cardinale) e tale che la formula vista a lezione non valga.

<u>dim.</u>

Considero $\alpha = \omega + 1$. Come successione di cardinali $K_i = 1 \ \forall i \in \omega$ e $K_\omega = 2$. Allora $\prod_{i<\omega+1} K_i = 2$ ma secondo la formula

$$\prod_{i<\omega+1} K_i = (\sup K_i)^{|\omega+1|} = 2^{\aleph_0}$$

Lezione 14 Maggio

Es. 3.1. : Sia K un cardinale infinito e $\{A_i \mid i \in I\}$ una sequenza di insiemi tali che $|I| \leq K$ e $|A_i| \leq K$ allora $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq K$

dim.

Dunque $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq \sum_{i \in I} |A_i| \leq \sum_{i \in I} K = \max\{|I|, \sup K\} \leq \max\{K, K\} = K$; dove la prima oguaglianza deriva dal teorema della somma infinita di cardinali.

Es. 3.2. : Se $K_i \leq \mu_i \ \forall i \in I$ allora $\sum_{i \in I} K_i \leq \prod_{i \in I} \mu_i$

dim.

Dunque per esercizio precedente $\sum_{i \in I} K_i \leq \sum_{i \in I} \mu_i$. Resta dunque da provare che $\sum_{i \in I} \mu_i \leq \prod_{i \in I} \mu_i$. Dunque per ipotesi si ha $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ famiglia di insiemi disgiunti t.c. $|A_i| = \mu_i \ \forall i \in I$. Quindi:

$\sum_{i \in I} \mu_i = \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right|$ e $\prod_{i \in I} \mu_i = \left|\prod_{i \in I} A_i\right|$. Prendo x elemento t.c. $x \notin A_i \ \forall i \in I$. Per A.C., inoltre, prendo $\langle y_i \mid i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} A_i$.

Dunque definisco $\gamma : \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow \prod_{i \in I} (A_i \cup \{x\})$ t.c.

$a \longmapsto \langle a_i \mid i \in I \rangle$ dove $a_i = a$ se $a \in A_i$ e $a_i = x$ se $a \notin A_i$ (per la disgiunzione degli A_i $\exists!\, i$ t.c. $a \in A_i$). Dunque la funzione é iniettiva poiché se $a_1 \neq a_2$ allora: $a_1, a_2 \in A_i$ e dunque le I-uple immagini hanno la i-esima coordinata diversi; se $a_1 \in A_i$ e $a_2 \in A_j$ con $i \neq j$ allora si ha l'iniettività poiché $x \notin A_i$ $\forall i \in I$.

Bisogno dunque vedere che $\left| \prod_{i \in I} (A_i \cup \{x\}) \right| \leq \left| \prod_{i \in I} A_i \right|$. Ma questo é ovvio poiché $|A_i|$ non é finito e dunque $|A_i \cup \{x\}| = |A_i|$ $\forall i \in I$.

Da questo la tesi.

Lezione 15 Maggio

Es. 4.1. : $\forall\, \vartheta$ regolare esistono cardinali arbitrariamente grandi di cofinalità ϑ.

dim.

Per definizione di regolare ϑ è un cardinale infinito t.c. $\operatorname{cof} \vartheta = \vartheta$. Dunque supponiamo μ sia un cardinale tale che $\operatorname{cof} \mu = \vartheta$, allora devo mostrare che $\exists\, \eta > \mu$ t.c. $\operatorname{cof} \eta = \vartheta$. Supponiamo $\mu = \aleph_\alpha$ per un certo α ordinale e dato che ϑ è un ordinale limite (è un cardinale) allora $\alpha + \vartheta$ è un ordinale limite. Dunque $\aleph_{\alpha+\vartheta} = \operatorname{cof}(\alpha + \vartheta) = \operatorname{cof}(\vartheta)$ e $\aleph_{\alpha+\vartheta} > \aleph_\alpha$.

(Si usa il fatto che $\operatorname{cof}(\alpha + \beta) = \operatorname{cof}(\beta)$ $\forall\, \alpha, \beta$ ordinale)

Es. 4.2. : • $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \le \sum_{i \in I} |A_i|$ • Se I ordinato ed $\bigcup_{j<i} A_i \subsetneq A_i$ allora vale l'uguaglianza

dim.

- Dunque per definizione $\exists\, \kappa_i$ cardinali t.c. $|A_i| = \kappa_i$. Allora

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \le \left|\bigsqcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{i \in I} |A_i|$$

- MANCANTE

Es. 4.3. : Se κ é un cardinale infinito allora $|Fin(\kappa)| = |Seq(\kappa)| = \kappa$

dim.

Per prima cosa si nota che $\kappa^n = \max\{\kappa, n\} = \kappa$ e inoltre $\sum_{n\in\omega} \kappa = \kappa \cdot \aleph_0 =$
$= \max\{\kappa, \aleph_0\} = \kappa$.

Per definizione $Fin(\kappa)$ sono i sottoinsiemi finiti di κ e dunque:

$Fin(\kappa) = \bigcup_{n\in\omega} I_n(\kappa)$ dove $I_n = \{X \subseteq \kappa \mid |X| = n\}$. Allora vediamo che $|I_n| \leq \kappa^n$. Infatti se X é finito posso numerare i suoi elementi e dunque $\gamma : I_n \longrightarrow \kappa^n$ t.c. $X \longmapsto \gamma(X)$ dove $\gamma(X) : n \longrightarrow \kappa$ t.c. $\gamma(X)(i) = x_i \in X \subseteq \kappa$. La mappa γ é iniettiva poiché se X_1 e X_2 hanno cardinalitá diverse allora $\gamma(X_1)$ e $\gamma(X_2)$ hanno domini diverse e se $|X_1| = |X_2|$ ma $X_1 \neq X_2$ allora $\exists \bar{x}$ t.c. WLOG $\bar{x} \in X_1 \wedge \bar{x} \notin X_2$ e dongue $\gamma(X_1) \neq \gamma(X_2)$.

Per l'osservazione iniziale $|Fin(\kappa)| = |\bigcup_{n\in\omega} I_n| \leq \sum_{n\in\omega} |I_n| \leq \sum_{n\in\omega} \kappa^n = \kappa$.

L'altra inclusione $(\kappa \leq Fin(\kappa))$ é una banale conseguenza del considerare gli elementi di κ come singoletti e due element di $fin(\kappa)$. Dunque $Fin(\kappa) = \kappa$.

La dimostrazione per $Seq(\kappa)$ é analoga in quanto per definizione $Seq(\kappa)$ sono le sequenze finite di elementi in κ.

Es. 4.4. : Per ogni cardinale κ vale $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

dim.

MANCANTE

Lezione 19 Maggio

Es. 5.1. : $x \subseteq y \in V_\alpha \rightarrow x \in V_\alpha$.

dim.

Per induzione transfinita su α:

- $\alpha = 0$: allora $V_\alpha = \emptyset$ e dunque la proprietà è vera a vuoto.

- $P(\alpha) \rightarrow P(\alpha+1)$: dunque se $y \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ si ha che $y \subseteq V_\alpha$. Quindi: $x \subseteq y \subseteq V_\alpha$ cioè $x \subseteq V_\alpha$ e dunque $x \in P(V_\alpha) \in V_{\alpha+1}$

- $\alpha = \lambda$ limite: allora se $y \in V_\lambda \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \lambda$ t.c. $y \in V_\varepsilon$ e dunque se $x \subseteq y$ per Hp induttiva $x \in V_\varepsilon$. Dato che $V_\lambda = \bigcup_{\varepsilon \in \lambda} V_\varepsilon$ si ha che $x \in V_\varepsilon \subseteq V_\lambda$ allora $x \in V_\lambda$.

Es. 5.2. : Sia $\mathcal{F} \in V_\alpha \Rightarrow \bigcup \mathcal{F} \in V_\alpha$.

dim.

Dunque se $\mathcal{F} \in V_\alpha$ dato che ogni elemento di V_α è contenuto in un livello inferiore allora $\exists\, \beta < \alpha$ t.c. $\mathcal{F} \subseteq V_\beta$. Dunque $\bigcup \mathcal{F} \subseteq V_\beta$ dato che se $x \in \bigcup \mathcal{F}$ allora $x \in y \in \mathcal{F} \subseteq V_\beta$ e per transitività $x \in V_\beta$. Quindi $\bigcup \mathcal{F} \in P(V_\beta) = V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$ e dunque $\bigcup \mathcal{F} \in V_\alpha$

Es. 5.3. : Sia A un insieme, consideriamo la successione di insiemi definita per ricorsione numerabile

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = \bigcup A_n \end{cases}$$

, pensiamo $TC(A) = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ e mostrare che $TC(A)$ é la chiusura transitiva di A ovvero il piú piccolo insieme transitivo che contiene A.

dim.

Dimostriamo che $TC(A)$ é un insieme transitivo. Sia quindi $x \in y \in TC(A)$.

Per definizione di $TC(A)$ $\exists n \in \omega$ t.c. $y \in A_n$ e dunque $x \in \bigcup A_n = A_{n+1}$.

Allora $x \in TC(A)$.

Dimostriamo ora che é la chiusura transitiva di A. Prendiamo dunque V insieme transitivo tale che $A \subseteq V$. Dimostriamo che $TC(A) \subseteq V$.

Equivale quindi a mostrare che $\forall x \in TC(A) \Rightarrow x \in V$. Se $x \in TC(A)$ allora $x \in A_n$ per un certo $n \in \omega$. Inoltre dato che $A \subseteq V$ e che V é transitivo $x \in \underbrace{\bigcup \text{—} \bigcup}_{n \text{ volte}} A$ implica $x \in V$. Dunque tesi.

Es. 5.4. : $A \in V_a$ allora $TC(A) \in V_a$.

dim.

Dunque dato che V_a é transitivo allora $A \subseteq V_a$. Ma allora V_a é un insieme transitivo che contiene A allora per esercizio precedente $TC(A) \subseteq V_a$

$\Rightarrow$ per transitivitá $TC(A) \in V_a$.

Lezione 21 Maggio

Es. 6.1. : Non esistono catene $\in$ - discendenti $\longrightarrow$ Assioma di fondazione

dim.

Supponiamo che $\exists\, x \neq \emptyset$ t.c. $\forall\, t \in x$ si ha $t \cap x \neq \emptyset$. Allora usando la funzione di scelta f su $P(x)$ e $y \in x$ si definisce per ricorsione la seguente successione : $\begin{cases} x_0 = y \\ x_{n+1} = f(x_n \cap x) \end{cases}$. Questa appena definita e' una catena $\in$ - discendente , assurdo.

Es. 6.2. : Sia $x \in V_\beta$ allora $\exists\, \alpha > \beta$ con $x \subseteq V_\alpha$

dim.

Per induzione su β:

- $\beta = 0$: vero a vuoto
- $P(\beta) \longrightarrow P(\beta+1)$: $x \in V_{\beta+1} = P(V_\beta)$ cioe' $x \subseteq V_\beta$
- $\beta = \lambda$ limite: $x \in V_\lambda \Rightarrow x \in V_\varepsilon$ per un certo $\varepsilon < \lambda$ ma dunque $x \subseteq V_\varepsilon$ dal momento che V_ε e' transitivo. Dunque tesi.

Es. 6.3. : Mostrare che $\forall \alpha$ ordinale $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$ e in particolare per $\alpha \geq \omega^2$ si ha $|V_\alpha| = \beth_\alpha$

dim.

Per induzione su α:

- $\alpha = 0$: devo mostrare che $|V_\omega| = \beth_0 = \aleph_0$. Per definizione:

$$|V_\omega| = \left|\bigcup_{n\in\omega} V_n\right| \leq \sum_{n\in\omega} |V_n| = \max\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$$ dove la penultima

uguaglianza segue dal fatto che $|V_\omega| \geq 2^{n-1}$ e dunque (data l'arbitrarietà di

n) $|V_\omega| \geq \aleph_0$.

- $P(\alpha) \longrightarrow P(\alpha+1)$: $|V_{\omega+(\alpha+1)}| = |V_{(\omega+\alpha)+1}| = |P(V_{\omega+\alpha})| = 2^{|V_{\omega+\alpha}|} =$

$= 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$.

- $\alpha = \lambda$ limite: $|V_{\omega+\lambda}| = \left|\bigcup_{\varepsilon\in\lambda} V_{\omega+\varepsilon}\right| \leq \sum_{\varepsilon\in\lambda} \beth_\varepsilon = \max\{|\lambda|, \beth_\lambda\} = \beth_\lambda$.

  Per l'altra disuguaglianza si osserva che $\forall \varepsilon \in \lambda$ $|V_{\omega+\lambda}| \geq |V_{\omega+\varepsilon}| = \beth_\varepsilon$

  e dunque $|V_{\omega+\lambda}| \geq \beth_\lambda$. Dunque tesi.

<u>Es. 6.5.</u> : Trovare α t.c. :

- $\mathbb{Z} \in V_\alpha$
- $\mathbb{Q} \in V_\alpha$
- $\mathbb{R} \in V_\alpha$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \in V_\alpha$

<u>dim.</u>

- Per come è stato definito $\mathbb{Z}$ si ha che $\mathbb{Z} \subseteq \omega \times \omega$ e dunque è un

insieme di coppie ordinate $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ con $a, b \in \omega$. WLOG $a \leq b$

e essendo che $a \in V_{a+1}$ e $b \in V_{b+1}$ allora $a, b \in V_{b+1}$. Dunque $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

è incluso in V_{m+2}. Dunque $\omega \times \omega \subseteq V_\omega$ e dunque $\mathbb{Z} \in V_{\omega+1}$.

- Per come è stato definito $\mathbb{Q}$ il ragionamento è analogo a $\mathbb{Z}$, dunque $\mathbb{Q} \in V_{\omega+1}$.

- $\mathbb{R}$ è stato definito come sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ e dunque se $\mathbb{Q} \in V_{\omega+1}$ allora $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \in V_{\omega+2}$ e dunque $\mathbb{R} \in V_{\omega+2}$.

- MANCANTE