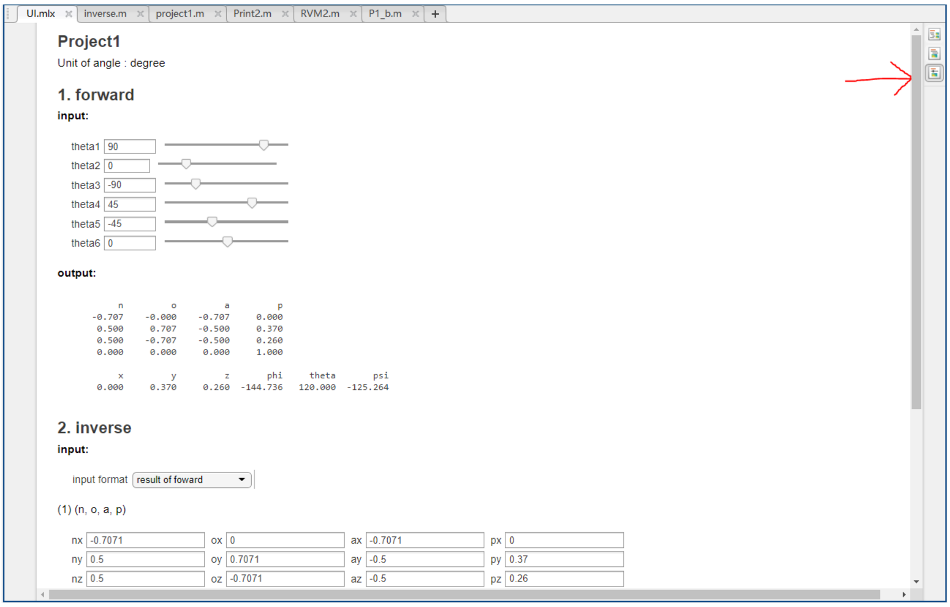
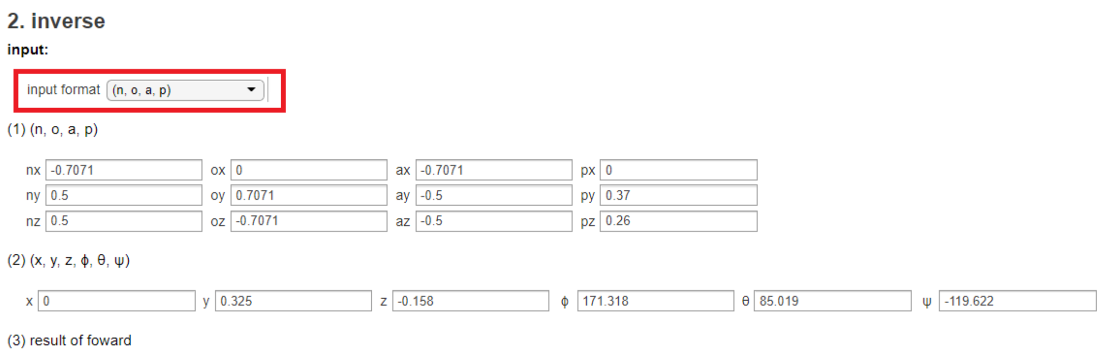
Project 1 洪廷維 L091074

一、介面說明

1. 本專案使用 MATLAB 開發並以 MATLAB Live Editor 作為輸入介面
2. 如何執行
   (1) 點擊 code 資料夾中的 UI.mlx
   (2) 切換至 Hide Code 模式（如圖所示）

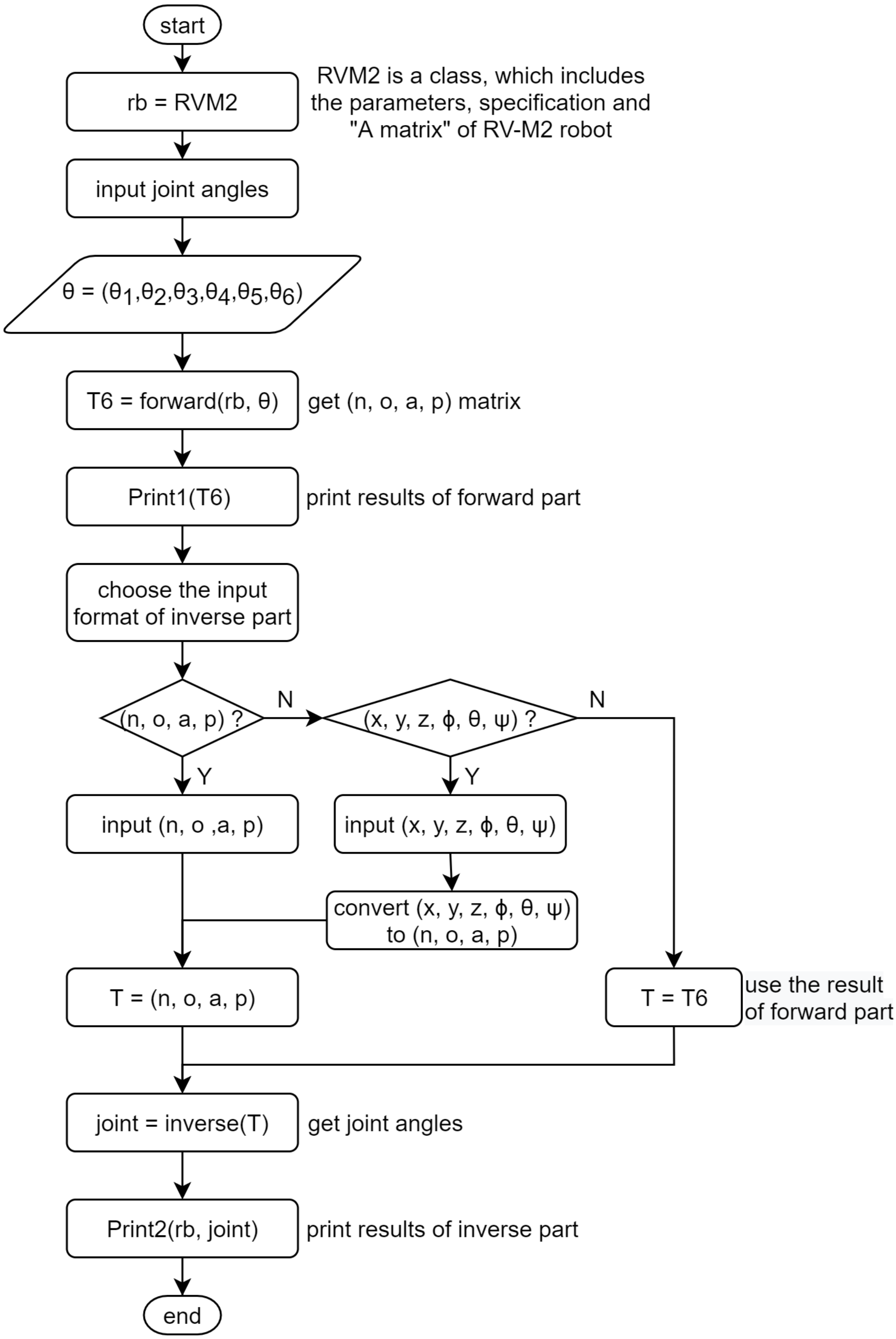


   (3) forward 部分可直接輸入（輸入完按 Enter）或使用滾動條，即可輸出結果
   (4) inverse 部分提供三種輸入格式，請先透過選單選擇（如圖所示），再由下方欄位輸入即可輸出結果



二、程式架構說明

1. 主程式（UI.mlx）流程圖



2. 程式碼說明

(1) 該專題包含 1 個主程式（UI），6 個函數（inverse、forward、Print1、Print2、config2noap、rad2deg），1 個類別（RVM2）

(2) 上述程式在程式碼中皆有註解，故不多加說明，唯挑出核心程式碼（inverse），即逆動態加以說明，詳見第三部分。

三、逆動態數學運算說明

1. 由 D-H model 即 RV-M2 的 kinematic table 可知：

$$A_1=\begin{bmatrix}c_1 & 0 & -s_1 & a_1c_1\\ s_1 & 0 & c_1 & a_1s_1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2\\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}c_3 & -s_3 & 0 & a_3c_3\\ s_3 & c_3 & 0 & a_3s_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}c_4 & 0 & -s_4 & 0\\ s_4 & 0 & c_4 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A_5=\begin{bmatrix}c_5 & 0 & s_5 & 0\\ s_5 & 0 & -c_5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A_6=\begin{bmatrix}c_6 & -s_6 & 0 & 0\\ s_6 & c_6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

, where c_i and s_i denote $\cos(\theta_i)$ and $\sin(\theta_i)$ respectively, $i = 1,2,\dots 6$

2. 求θ_1：

$A_1A_2 \dots A_6 = T_6$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & a_1c_1 + a_2c_1c_2 - a_3c_1s_2s_3 + a_3c_1c_2c_3\\ * & * & * & a_1s_1 + a_2c_2s_1 - a_3s_1s_2s_3 + a_3c_2c_3s_1\\ * & * & * & -a_2s_2 - a_3c_2s_3 - a_3c_3s_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$, where “$*$” denotes unimportant elements

$$\Rightarrow \frac{p_y}{p_x} = \frac{s_1(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23})}{c_1(a_1 + a_2c_2 + a_3c_{23})}, \text{where } c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -150^\circ \le \theta_1 \le 150^\circ, \text{if } p_y = p_x = 0\\ \theta_1 = atan2(p_y, p_x)\ or\ atan2(p_y, p_x) + \pi\ , otherwise\end{cases}$$

3. 求θ_2：

$A_2A_3 \dots A_6 = A_1^{-1}T_6$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & a_2c_2 + a_3c_{23}\\ * & * & * & a_2s_2 + a_3s_{23}\\ * & * & * & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & -a_1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -s_1 & c_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x\\ n_y & o_y & a_y & p_y\\ n_z & o_z & a_z & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$let\ f_1 = c_1p_x + s_1p_y - a_1, f_2 = -p_z \Rightarrow \begin{cases} f_1 = a_2c_2 + a_3c_{23}\\ f_2 = a_2s_2 + a_3s_{23}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f_1 - a_2c_2)^2 = a_3c_{23}\\ (f_2 - a_2s_2)^2 = a_3s_{23}\end{cases} \Rightarrow 2a_2f_1c_2 + 2a_2f_2s_2 = f_1^2 + f_2^2 + a_2^2 - a_3^2$$

$$let\ g_1 = \frac{f_1}{f_2}, g_2 = \frac{f_1^2 + f_2^2 + a_2^2 - a_3^2}{2a_2 f_2} \Rightarrow s_2 = g_2 - g_1 c_2 \Rightarrow 1 - c_2^2$$

$$= g_2^2 - 2g_1 g_2 c_2 + g_1^2 c_2^2 \Rightarrow c_2 = \frac{g_1 g_2 \pm \sqrt{g_1^2 - g_2^2 + 1}}{1 + g_1^2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \mathrm{atan}(s_2, c_2)\ \ (2\ solutions)$$

4. 求θ_3：

$$\begin{cases} f_1 = (a_2 c_2 + \ a_3 c_{23})^2 \\ f_2 = (a_2 s_2 \ + \ a_3 s_{23})^2 \end{cases} \Rightarrow c_3 = \frac{f_1^2 + f_2^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \Rightarrow s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2}$$

$$\Rightarrow \theta_3 = \mathrm{atan}(s_3, c_3)\ \ (2\ solutions)$$

5. 求θ_4：

$let\ T_{36} = (A_1 A_2 A_3)^{-1} \mathrm{T}_6$ and $\mathrm{T}_{36}(\mathrm{i}, \mathrm{j})$ denotes the element in the i-th row and j-th column of T_{36}

$$\Rightarrow A_4 A_5 A_6 = T_{36} \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * & c_4 s_5 & 0 \\ * & * & s_4 s_5 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{T}_{36}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -110^\circ \ \le \theta_4 \le 110^\circ, \text{if } T_{36}(1,3) = T_{36}(2,3) = 0 \\ \theta_4 = atan2\big(T_{36}(2,3), T_{36}(1,3)\big)\ or\ atan2\big(T_{36}(2,3), T_{36}(1,3)\big) + \pi \\ , otherwise \end{cases}$$

6. 求θ_5、θ_6：

$$A_5 A_6 = (A_1 A_2 A_3 A_4)^{-1} \mathrm{T}_6 \Rightarrow \begin{bmatrix} * & * & s_5 & 0 \\ * & * & -c_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{46}$$

$$\Rightarrow \theta_5 = atan2(T_{46}(1,3), -T_{46}(2,3), \theta_6 = atan2(T_{46}(3,1), -T_{46}(3,2))$$