10. Vektor- och matrisalgebra

I detta kapitel kommer vi lära oss grunderna i vektor- och matrisalgebra. Grundläggande förståelse för detta krävs för att förstå mer tekniska delar av till exempel programmering, statistik och artificiell intelligens (AI).

10.1 Vektorer

En vektor kan antingen vara en kolumn vektor eller en rad vektor. Om ingenting sägs är det enligt konvention en kolumn vektor. Vektorer skrivs med små fetmarkerade bokstäver, exempelvis $\mathbf{v}$, eller med en pil ovan, exempelvis $\vec{v}$. Vi kommer använda små fetmarkerade bokstäver i denna bok.

Definition 10.1. En vektors dimension specificerar hur många rader respektive kolumner den har.

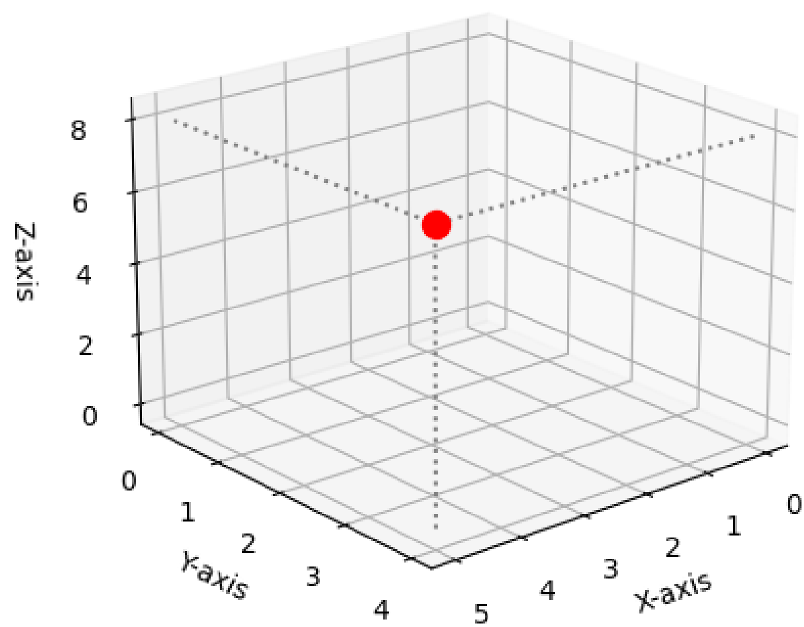
Exempel 10.2. Kolumn vektorn $\mathbf{v}$ nedan har dimensionen 3×1 eftersom den har tre rader och en kolumn.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exempel 10.3. Rad vektorn $\boldsymbol{x}$ har dimensionen 1×7 eftersom den har en rad och sju kolumner.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5, & 2, & 12, & 4, & 5, & 10, & 4 \end{pmatrix}$$

Det finns flertalet tillämpningsområden för vektorer. Inom Matematik kan en punkt i ett 3-dimensionellt koordinatsystem/rum betecknas med en vektor. Exempelvis kan vektorn $\mathbf{v} = (5, 4, 8)$ beteckna en punkt i ett tre dimensionellt rum enligt figur 10.1.



Figur 10.1: En vektor som representerar punkten $(5, 4, 8)$ i ett 3 dimensionellt rum.

Generellt sett kan vi också se högre dimensionella vektorer som punkter i ett n-dimensionellt rum, men om $n > 3$ så kan vi inte visualisera det som vi gjorde i figur 10.1.

Inom tillämpningar i exempelvis programmering, statistik och artificiell intelligens så används vektorer bland annat för att lagra data. Vektorn $\mathbf{x} = (50, 23, 12, 19, 112, 210, 60)$ som består av sju värden hade till exempel kunnat representera antalet glassar ett glassföretag sålt varje dag under en vecka.

Nu när vi introducerat vektorer kan vi utföra olika operationer på dem villket vi går igenom i följande avsnitt.

10.1.1 Operationer på vektorer

Den första operationen vi kommer kolla på är transponat.

Definition 10.4. Transponatet av en vektor $\mathbf{x}$ betecknas $\mathbf{x}^\top$ och omvandlar en rad-vektor till en kolumn vektor och vice versa.

Exempel 10.5. Transponerar vi radvektorn $\mathbf{r} = (2, 1, 3, 5)$ så hade det sett ut enligt följande:

$$\mathbf{r}^\top = (2, 1, 3, 5)^\top = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi ser alltså att radvektorn omvandlats till en kolumnvektor.

Härnäst kollar vi på hur vi multiplicerar en vektor med en skalär. Notera att en skalär helt enkelt är ett ”vanligt tal” såsom 5 eller till exempel 2.9.

Definition 10.6. När vi multiplicerar en vektor med en skalär så mulitpliceras varje enskilt element i vektorn med skalären.

Exempel 10.7. Definiera vektorn $\mathbf{x}^\top = (4, 2, 12, 6)$.
Notera att vi här skrivit $\mathbf{x}^\top$ eftersom det är mer kompakt att skriva ut kolumnvektorn som en radvektor i texten.

Vi multiplicerar vektorn $\boldsymbol{x}$ med skalären 3.

$$3\mathbf{x} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 \\ 3 \times 2 \\ 3 \times 12 \\ 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Vi kollar på ytterligare ett exempel med skalärmultiplikation.

Exempel 10.8. Definiera radvektorn $\mathbf{x} = (4, 1, 9)$. Multiplicerar vi den vektorn med 2.5 får vi:

$$2.5(4, 1, 9) = (10, 2.5, 22.5)$$

Härnäst kollar vi på hur vi kan addera (subtrahera) två vektorer.

Definition 10.9. När vi adderar (eller subtraherar) två vektorer så adderas (eller subtraheras) varje element för sig. Vektoraddition (eller vektorsubtraktion) är endast definierat om vektorerna har samma dimension.

Exempel 10.10. Definiera de två vektorerna $\mathbf{a}^\top = (4, 2, 12, 6)$ och $\mathbf{b}^\top = (1, 1, 3, 5)$. Nu kan vi addera de två vektorerna.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 2+1 \\ 12+3 \\ 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

I kommande exempel är vektor addition inte definierat eftersom de två vektorerna inte har samma dimensioner.

Exempel 10.11. Om vi har två vektorer som vi benämner $\mathbf{x_1} = (5, 1, 6)$ och $\mathbf{x_2} = (3, 3)$ så är $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ inte definierat eftersom $\mathbf{x_1}$ har dimensionen 1×3 och $\mathbf{x_2}$ har dimensionen 1×2. Eftersom dimensionerna inte är samma så är vektor addition inte definierat i detta fallet.

Exempel 10.12. Definiera de två vektorerna $\mathbf{a} = (2, 5, 19)$ och $\boldsymbol{b} = (1, 7, 3)$.

Båda vektorerna har dimensionen (1×3) så vi kan utföra vektorsubtraktion.

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2, 5, 19) - (1, 7, 3) = (2 - 1, 5 - 7, 19 - 3) = (1, -2, 16)$.

Normen av en vektor

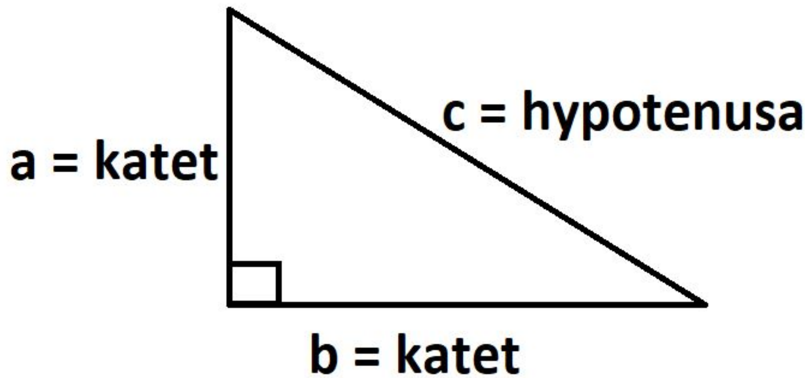
Nu ska vi kolla på ”normen” av en vektor som är ett sätt att generalisera konceptet om avstånd i högre dimensioner.

Vi börjar med pythagoras sats som vi kommer använda för att hitta en formel för avståndet mellan två punkter i ett två dimensionellt koordinatsystem/plan.

Sats 10.13 (Pythagoras sats). För en rätvinklig triangel med kateterna a och b samt hypotenusan c, se figur 10.2, så gäller följande samband:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bevis. Bevisas ej. □

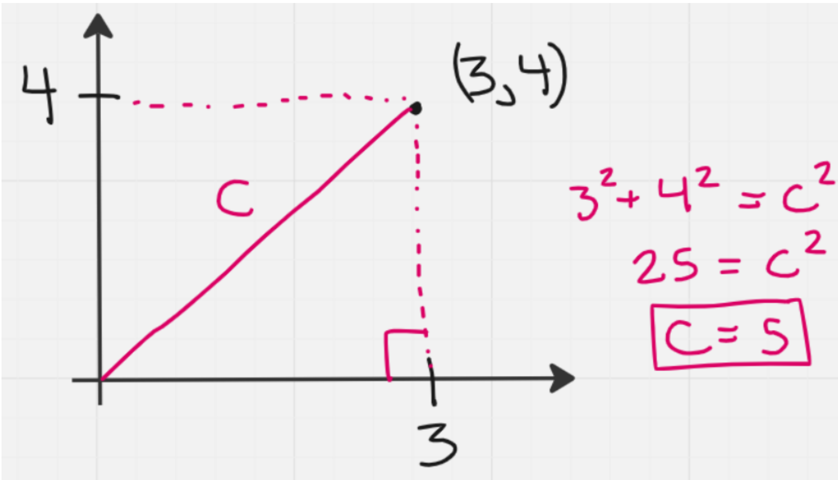


Figur 10.2: Pythagoras sats är en formel som ger ett samband mellan sidorna i en rätvinklig triangel.

Nu går vi igenom ett viktigt exempel för att skapa intution för hur vi kan beräkna avstånd från en punkt till origo i ett två dimensionellt koordinatsystem med hjälp av Pythagoras sats.

Exempel 10.14. Antag att vi har punkten/vektorn $(3, 4)$, vad är avståndet till origo $(0, 0)$? Genom att använda pythagoras sats kan vi enkelt beräkna det. Se figur 10.3 där vi har punkten $(3, 4)$ och genom att skapa en rätvinklig triangel så kan vi beräkna avståndet c från punkten till origo som blir 5. Rent generellt gäller det att avståndet till origo för en godtycklig punkt med kordinaterna (x_1, y_1) ges av formeln $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Använder vi den formeln för exempelvis punkten $(3, 4)$ får vi $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Exempel 10.15 (Avståndsformeln). Genom pythagoras sats kan vi också beräkna avståndet mellan två godtyckliga punkter i ett två dimensionellt koordinatsystem. Antag att vi har



Figur 10.3: Genom att använda Pythagoras sats så beräknar vi avståndet från punkten/vektorn $(3, 4)$ till origo $(0, 0)$.

punkterna (x_1, y_1) samt (x_2, y_2), genom att rita upp en bild och använda pythagoras sats som vi gjorde i exemplet ovan så kan vi härleda avståndsformeln $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Eftersom $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ och $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$ så kan avståndsformeln också skrivas som $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Men det spelar ingen roll då det är godtyckligt vilken punkt vi ser som den "första" respektive den "andra".

Vi kommer nu generalisera konceptet om avstånd i högre dimensioner genom att definiera "normen" av en vektor. Definitionen gäller för både kolumnvektorer och radvektorer.

Definition 10.16 (**Normen**). Normen av en vektor $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ betecknas $\|\mathbf{x}\|$ och definieras enligt:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x^T x)} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}$$

Notera alltså att normen är en funktion som tar en vektor, $\mathbf{x}$, och returnerar en siffra, $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}$.

Exempel 10.17. Nu ska vi beräkna normen av vektorn $\mathbf{x} = (5, 3, 1, 0, 7)$.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{84} \approx 9.17.$$

Vi kan använda normen för att beräkna avståndet mellan två godtyckliga punkter/vektorer i ett n-dimensionellt koordinatsystem/rum, se följande sats.

Sats 10.18. Avståndet mellan två godtyckliga punkter/vektorer, $\mathbf{a}^\top = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ och $\mathbf{b}^\top = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ beräknas genom att använda normen:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Bevis. Bevisas ej. □

Notera att detta är en generalisering av ”avståndsformeln” från exempel 10.15.

Exempel 10.19. Definiera $\boldsymbol{v} = (3, 4)$ och nollvektorn $\mathbf{0} = (0, 0)$. Då gäller det att $\mathbf{v} - \mathbf{0} = (3-0, 4-0) = (3, 4)$. Beräknar vi normen får vi:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{0}\| = \left(3^2 + 4^2\right)^{0.5} = (9 + 16)^{0.5} = (25)^{0.5} = 5.$$

Detta är samma resultat som vi fick i exempel 10.14.

Exempel 10.20. Beräkna avståndet mellan vektorerna $\mathbf{x_1} = (5, 2, 4)$ och $\mathbf{x_2} = (1, 3, 0)$.

Vi börjar med att att utföra vektorsubtraktionen.

$$\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} = (4, -1, 4)$$

Slutligen beräknar vi normen,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\| = \|(4, -1, 4)\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 4^2} &= \sqrt{16 + 1 + 16} \\ &= \sqrt{33} \\ &\approx 5.74.\end{aligned}$$

Vi har alltså att avståndet mellan de två vektorerna är ungefär 5.74 längdenheter.

Övningsuppgifter

Uppgift 10.1.1. Definiera vektorn $\mathbf{x}$ enligt nedan.

$$\mathbf{x} = (4, 3)$$

(a) Vilken dimension har vektorn $\boldsymbol{x}$?

(b) Beräkna $5\mathbf{x}$.

(c) Beräkna $3\mathbf{x}$.

(d) Beräkna $5\mathbf{x} + 3\mathbf{x}$.

(e) Beräkna $8\mathbf{x}$.

(f) Beräkna $4\mathbf{x} - \mathbf{x}$.

(g) Beräkna $\mathbf{x}^\top$, vilken blir den nya dimensionen efter att transponeringen utförts?

(h) Är $\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top$ definierat?

(i) Beräkna $\|\mathbf{x}\|$.

Uppgift 10.1.2. Definiera vektorn $\boldsymbol{v}$ enligt nedan.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(a) Vilken dimension har vektorn $\boldsymbol{v}$?

(b) Beräkna $2\mathbf{v}$.

(c) Beräkna $5\mathbf{v} + 2\mathbf{v}$.

(d) Beräkna $4\mathbf{v} - 2\mathbf{v}$.

(e) Beräkna $\mathbf{v}^\top$, vilken blir den nya dimensionen efter att transponeringen utförts?

(f) Beräkna $\|\mathbf{v}\|$.

Uppgift 10.1.3. Definiera vektorerna $\mathbf{v_1} = (4, 3, 1, 5)$ och $\mathbf{v_2} = (2, 3, 1, 1)$.

(a) Beräkna $\|\mathbf{v_1}\|$.

(b) Beräkna $\|\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}\|$.

10.2 Matriser

En $m \times n$ matris är en rektangulär samling av tal som har m rader och n kolumner. Exempelvis, en 3×2 matris A, med två rader och tre kolumner kan se ut enligt följande:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

där exempelvis a_{12} representerar talet i rad 1 och kolumn 2.

Konventionen är att matriser benämns med stora bokstäver såsom A eller B.

Vektorer, som vi gick igenom i avsnitt 10.1, är specialfall av matriser som har antingen en kolumn eller en rad.

Härnäst kommer vi lära oss om olika operationer som kan genomföras på matriser.

10.2.1 Operationer på matriser

Den första operationen vi kommer kolla på är transponat.

Definition 10.21. Transponatet av en matris A betecknas $A^\top$ och omvandlar matrisen så att A matrisens rader blir kolumnerna i matrisen $A^\top$ eller ekvivalent att A matrisens kolumner blir raderna i matrisen $A^\top$.

Exempel 10.22. Definiera matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Då gäller det att:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att den första raden [4 10 5] i matrisen A blev den första kolumnen i matrisen $A^\top$. Den andra raden [1 1 2] i matrisen A blev den andra kolumnen i matrisen $A^\top$.

Exempel 10.23. Definiera matrisen $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$.
Då gäller det att:

$$B^\top = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Härnäst definierar vi skalärmultiplikation av matriser.

Definition 10.24. När vi multiplicerar en matris med en skalär så multipliceras varje enskilt element i matrisen med skalären.

Vi exemplifierar.

Exempel 10.25. Definiera matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Multiplicerar vi matrisen A med 3 får vi:

$$3A = 3\begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4 & 3\times 10 & 3\times 5 \\ 3\times 1 & 3\times 1 & 3\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Härnäst kommer vi definiera matris addition (matris subtraktion).

Definition 10.26. När vi adderar (eller subtraherar) två matriser så adderas (eller subtraheras) varje element för sig. Matris addition (eller subtraktion) är endast definierat om matriserna har samma dimension.

Exempel 10.27. Vi exemplifierar hur vi adderar två matriser.

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 50 & 0 \\ -25 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+(-5) & 8+5 \\ 10+50 & 10+0 \\ 4+(-25) & 2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 60 & 10 \\ -21 & 12 \end{bmatrix}$$

Exempel 10.28. Definiera de två matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Här är $A + B$ inte definierat eftersom de två matriserna inte har samma dimensioner. A har dimensionen (2×3) och B har dimensionen (2×2).

Nu kommer vi definiera matrismultiplikation som vid första läsning kan tyckas ha en märklig definition som är svår att förstå. Men fortsätt läs så kommer du se att det är enkelt att genomföra matrismultiplikation samt förstå varför det definieras på det sättet som det gör.

Definition 10.29. Antag att A är en $m \times n$ matris och B är en $n \times p$ matris,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Matrisprodukten, $C = AB$ (notera, inget multiplikationstecken används), definieras som $m \times p$ matrisen:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Det gäller alltså att produkten AB är definierad om och endast om antalet kolumner i matrisen A är lika med antalet rader i matrisen B, n i detta fallet. Den nya matrisen, AB, kommer ha lika många rader som den första matrisen A, m i detta fallet, och lika många kolumner som den andra matrisen B, p i detta fallet. Det vill säga $m \times p$ i detta fallet. För att komma ihåg detta kan vi vid varje matrismultiplikation vi utför, rita upp en bild enligt figur 10.4.

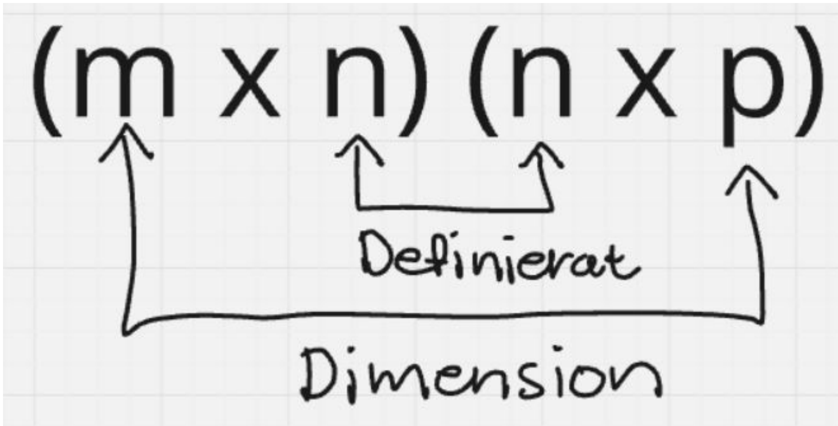
Att genomföra matrismultiplikation kan enligt definitionen tyckas komplicerat men som vi kommer se så är det enkelt.

Exempel 10.30. Definiera

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$



Figur 10.4: Minnesregel för att se när matrismultiplikation är definierat och vilken dimension produkten får. Detta är bra att rita upp varje gång som matrismultiplikation genomförs.

Vi ser att A har dimensionen (2×3) och B har dimensionen (3×2). Eftersom antalet kolumner i A är 3 vilket är lika med antalet rader i B så är matrismultiplikationen definierad. Den nya dimensionen för produkten AB kommer bli lika med antalet rader i A och antalet kolumner i B, d.v.s. (2×2). Här har vi i ord formulerat det som enkelt kan göras enligt figur 10.4.

Produkten AB beräknas enligt följande:

$$AB = \begin{bmatrix} (1 \times 1 + 5 \times 3 + 2 \times 2) & (1 \times 3 + 5 \times 5 + 2 \times 4) \\ (4 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 2) & (4 \times 3 + 1 \times 5 + 3 \times 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 36 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}.$$

Exempel 10.31. Definiera

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att A har dimensionen (2×2) och B har dimensionen (2×2). Eftersom antalet kolumner i A är lika med antalet rader i B är matrismultiplikationen definierad. Den nya dimensionen för produkten AB kommer bli lika med antalet rader i A och antalet kolumner i B, d.v.s. (2×2).

Produkten AB beräknas enligt följande:

$$AB = \begin{bmatrix} (2 \times 5 + 3 \times 7) & (2 \times 6 + 3 \times 8) \\ (4 \times 5 + 1 \times 7) & (4 \times 6 + 1 \times 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 27 & 32 \end{bmatrix}.$$

Varför definieras matrismultiplikation på det sättet som det görs?

Som vi kommer se kan vi skriva ut linjära ekvationssystem på ett väldigt kompakt och elegant sätt nu när vi har definierat matrismultiplikation på det sättet som vi gjort.

Om vi exempelvis har följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 7 \end{aligned}$$

så kan vi skriva det systemet med hjälp av matrismultiplikationen, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Detta systemet kan då skrivas som:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Utför vi matrisprodukten Ax i vänsterledet, så blir systemet:

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sätter vi elementen lika med varandra i vänster- och högerled får vi ursprungsekvationerna som vi började med:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 7 \end{aligned}$$

Detta exemplet var enkelt, men vi kan föreställa oss hur användbart detta är när vi har många ekvationer. Anledningen är att istället för att behöva skriva ut varje enskild ekvation (det kan vara miljontals) så kan vi enkelt definiera matrisen A samt vektorerna $\mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$. Se följande exempel.

Exempel 10.32. Om vi har följande ekvationssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x - y + 2z &= -1 \\ x + 2y - 3z &= 8 \\ 3x - y + z &= 3 \\ 2x - 4y + 5z &= -6 \end{aligned}$$

så kan vi skriva ut systemet med matrismultiplikation enligt

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Vi avslutar detta kapitlet med att poängtera att vi nu introducerat nya matematiska objekt, vektorer och matriser där vektorer är ett specialfall av matriser. Eftersom det är nya matematiska objekt så är det inte säkert att de egenskaperna vi är vana vid för de "vanliga reella talen" gäller även här. För reella tal så vet vi att multiplikation är kommutativt, nämligen att om a och b är reella tal så gäller det att $ab = ba$. Det spelar alltså ingen roll i vilken ordning multiplikationen utförs. Exempelvis är $7 \times 3 = 3 \times 7 = 21$.

Om vi nu kollar på två matriser, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, så kan vi beräkna matrisprodukten $AB = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$. Beräknar vi på motsvarande sätt matrisprodukten BA får vi $BA = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$. Vi ser alltså att $AB \neq BA$ i detta fallet.

I nedanstående två satser specificerar vi vilka regler som gäller.

Sats 10.33 (Räkneregler för matris addition (subtraktion) samt multiplikation med skalärer)**.** Låt A, B och C vara godtyckliga $m \times n$ matriser och låt α samt β vara reella tal. Låt $\mathbf{0}$ vara $m \times n$ matrisen som endast består av nollor, vi kallar den för nollmatrisen. Då gäller följande räkneregler:

(a) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(b) $A+B = B+A$

(c) $A+\mathbf{0} = A$

(d) $A+(-A) = \mathbf{0}$

(e) $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$

(f) $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$

Bevis. Bevisas ej. $\square$

Sats 10.34 (Räkneregler för matrismultiplikation)**.** Om A, B och C är matriser vars dimensioner är sådana att den specificierade multiplikationen är definierad och om α är en godtycklig skalär, då gäller följande räkneregler:

(a) $(AB)C = A(BC)$

(b) $A(B+C) = AB+AC$

(c) $(A+B)C = AC+BC$

(d) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

Bevis. Bevisas ej. $\square$

Övningsuppgifter

Uppgift 10.2.1. Definiera matriserna:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Om det är definierat, utför följande beräkningar:

(a) $2A$

(b) $B - 2A$

(c) $3C - 2E$

(d) $2D - 3C$

(e) $D^\top + 2D$

(f) $2C^\top - 2D^\top$

(g) $A^\top - B$

(h) AC

(i) CD

(j) CB

(k) CI

(l) $AB^\top$

Uppgift 10.2.2. Definiera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna AA^T.

Uppgift 10.2.3. Definiera matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifiera att $AB = AC$ men att $B \neq C$. Vad vi vill demonstrera med detta exemplet är att vi har definierat ett nytt matematiskt objekt (matriser i detta fallet) och att de ”vanliga reglerna” för aritmetik som vi lärt oss från grundskolan inte nödvändigtvis gäller även här.

Uppgift 10.2.4. Skriv det linjära ekvationssystemet nedan på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 7x_1 + x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Verifiera att din lösning är korrekt genom att skriva ut matrismultiplikationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och dubbelkolla att du får tillbaka det ursprungliga ekvationssystemet.