CURSO DE PROGRAMACIÓN COMPETITIVA URJC - 2020

Sesión 4 (5ª Semana)

David Morán (david.moran@urjc.es)
Juan Quintana (juandavid.quintana@urjc.es)
Sergio Pérez (sergio.perez.pelo@urjc.es)
Jesús Sánchez-Oro (jesus.sanchezoro@urjc.es)
Isaac Lozano (isaac.lozano@urjc.es)
Raúl Martín (raul.martin@urjc.es)

Contenidos

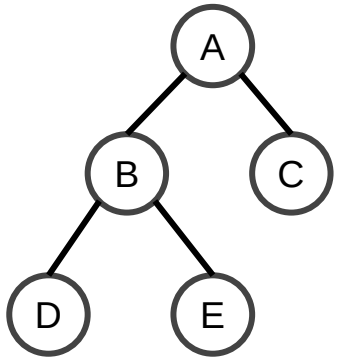
- Grafos
  - Introducción
  - Representación
  - Recorrido en Anchura y Profundidad (BFS, DFS)

Contenidos

- Grafos
  - Bipartitos
  - Componentes Conexas
  - Ordenamiento Topológico
  - Puntos de articulación

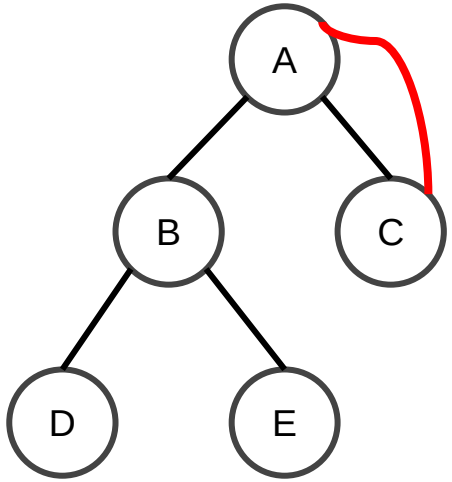
Grafos

- Árboles: representan relaciones jerárquicas
  - Tienen un padre (excepto la raíz)
  - Pueden tener hijos



Grafos

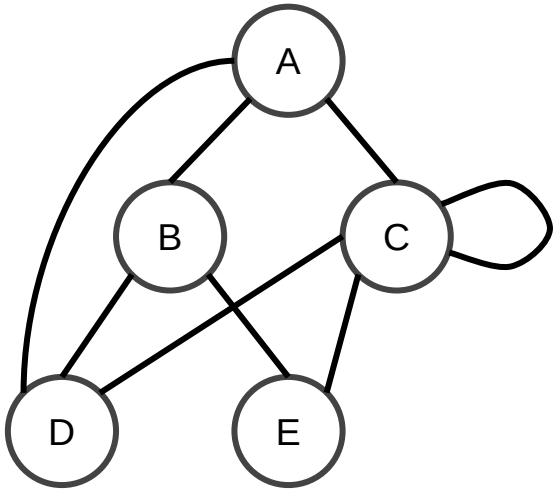
- Restricciones jerárquicas:
  - No admite ciclos



- C no puede ser padre de su padre (A)

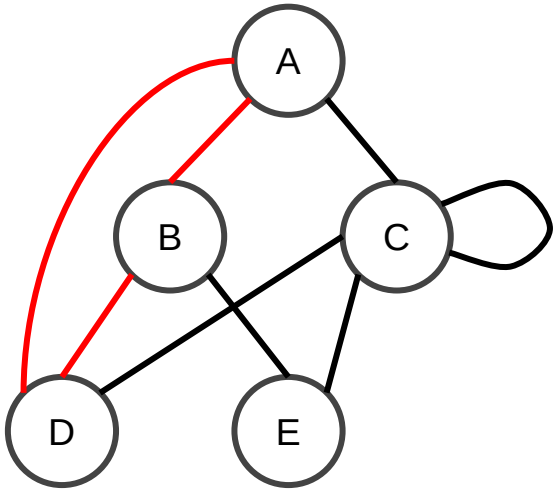
Grafos

- Grafos: mayor libertad para representar un sistemas y sus relaciones/interacciones



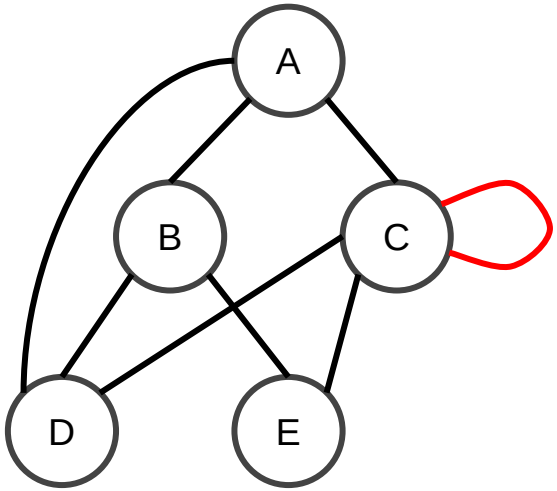
Grafos

- podemos tener ciclos



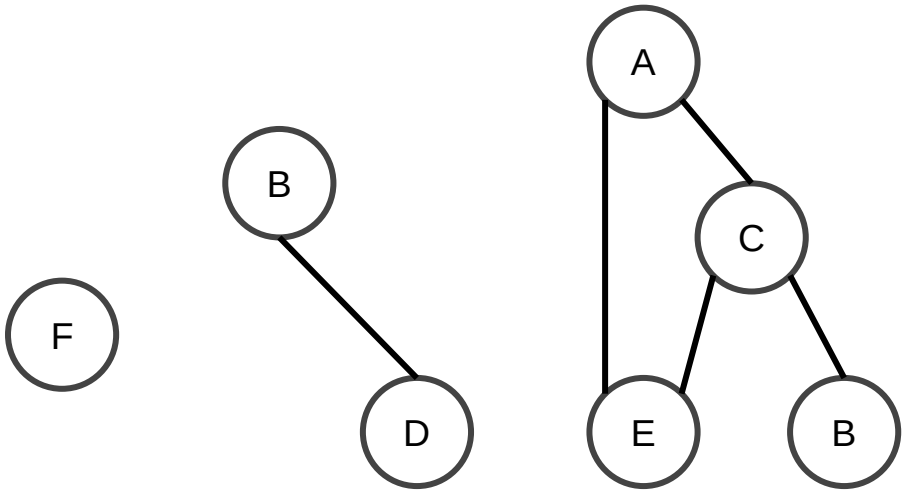
Grafos

- podemos tener bucles sobre el mismo elemento



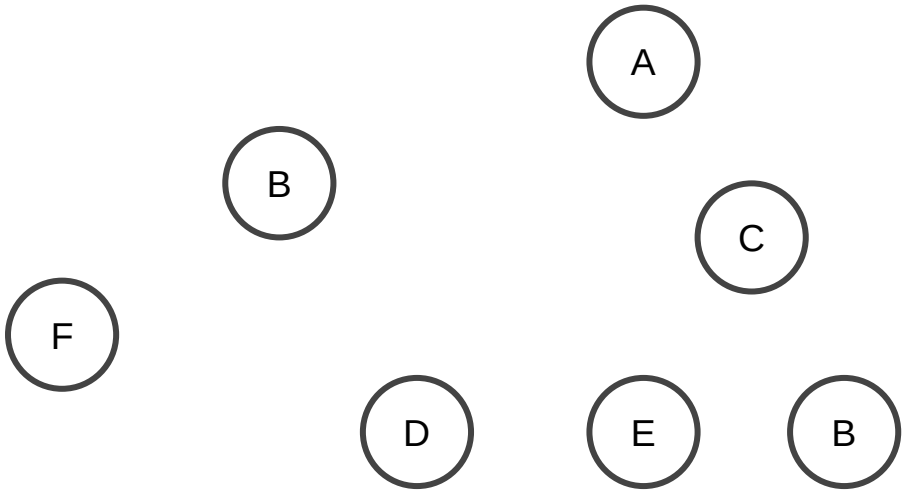
Grafos

- podemos tener grupos aislados en un mismo grafo



Grafos

- o elementos totalmente aislados entre sí



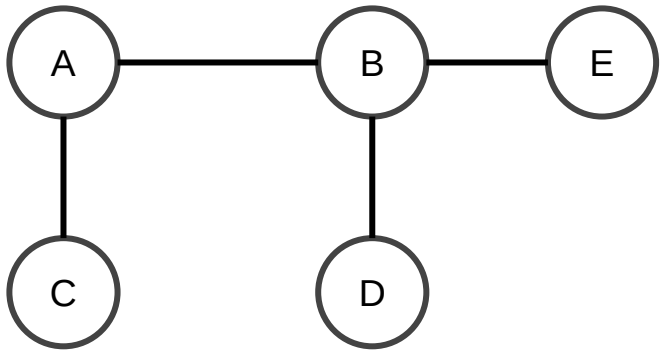
Grafos

- Definición: G = (V,E)
  - Conjunto de vértices:

V={A,B,C,D,E}

  - Conjunto de aristas:

E={(A,B),(A,C),(B,D),(B,E)}

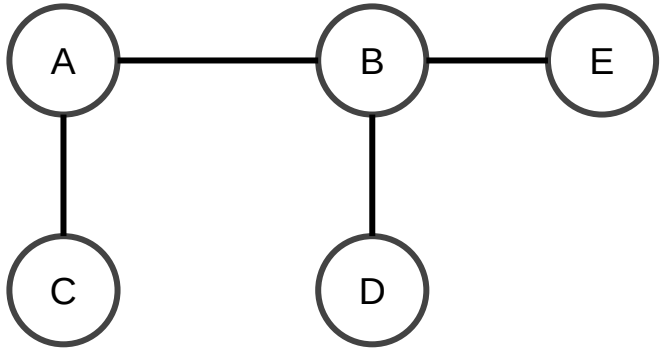


Grafos

- Grafo no dirigido G = (V,E)
  - las aristas no tienen dirección

E={(A,B),(A,C),(B,D),(B, E)}

(A,B) ⇔ (B,A)

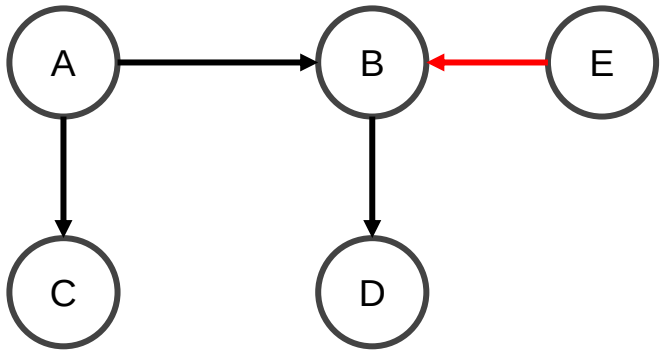


Grafos

- Grafo dirigido G = (V,E)
  - aristas tienen dirección (orden)

E={(A,B),(A,C),(B,D),(E, B)}

(E,B) ≠ (B,E)



Grafos

- Grafo ponderado G = (V,E)
  - las aristas tienen pesos/valores

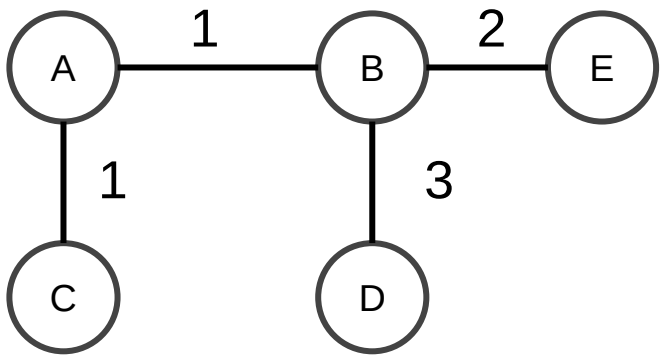
E={(A,B),(A,C),(B,D),(B, E,)}

  - función de pesos (f)

f((A,B)) = 1

f((B,D)) = 3

...

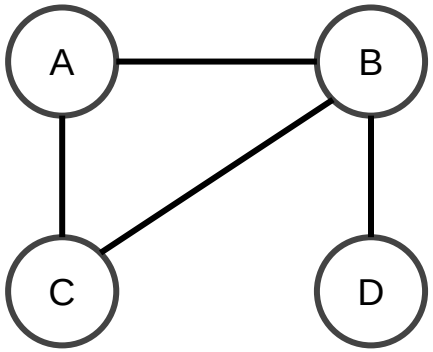


Grafos - Implementación

- Implementaciones
  - Matriz de adyacencia
  - Lista de adyacencia
  - Lista de aristas

Grafos - Matriz

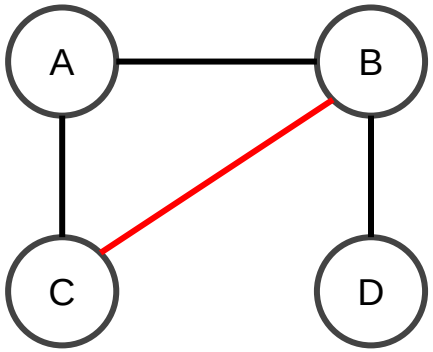
- Matriz de adyacencia
  - Array de dos dimensiones



	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	0	1	0	0

Grafos - Matriz

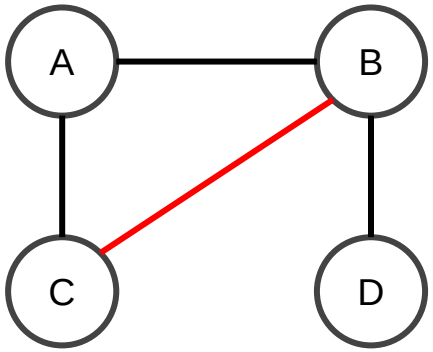
- Arista (B,C) ⇒ m[1][2] = 1



	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	0	1	0	0

Grafos - Matriz

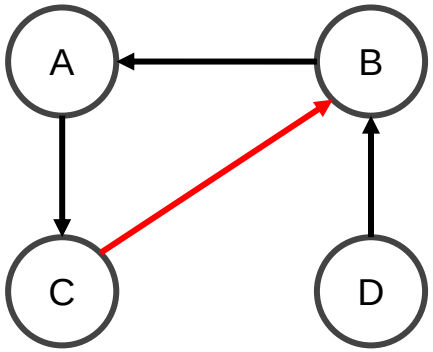
- Matriz simétrica en grafos no dirigidos
- m[fila][col]==m[col][fila]



	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	0	1	0	0

Grafos - Matriz

- Si el grafo es dirigido...
- m[2][1]=1 y =m[1][2]=0



	A	B	C	D
A	0	0	1	0
B	1	0	0	0
C	0	1	0	0
D	0	1	0	0

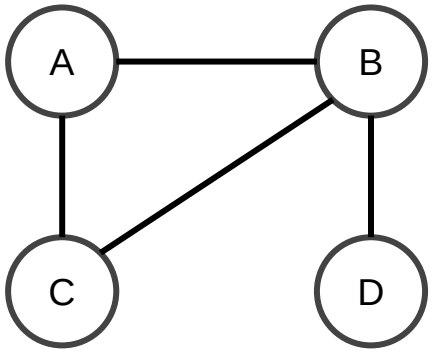
Grafos - Matriz

- Matriz de adyacencia
  - Memoria: $O(|V|^2)$
  - Acceso: O(1)
  - Aristas de un vértice: O(|V|)
    - hay que recorrer toda la fila (incluso si solo tiene una o ninguna)

- Caso de uso: grafos densos (N~=5000)

Grafos - Lista

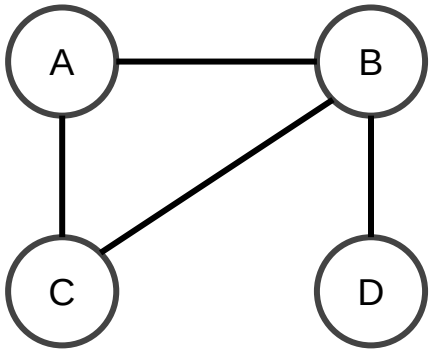
- Lista de adyacencia
  - enumerar las aristas por vértice



A	⇒	{B,C}
B	⇒	{A,C,D}
C	⇒	{A,B}
D	⇒	{B}

Grafos - Lista

- Lista de adyacencia
  - guardar cada lista en un array



A	{B,C}
B	{A,C,D}
C	{A,B}
D	{B}

Grafos - Lista

- Lista de adyacencia
  - Memoria: O(|V|+|E|)
  - Acceso: O(|V|)
    - recorrer todas las aristas de la lista
  - Aristas de un vértice: O(1)
    - en el peor caso tiene aristas a todos los vértices
- útil en grafos dispersos

Grafos - Lista

- Consultar si existe una arista (pseudocódigo)

```
grafo = vector<int> adyacentes[]
//inicializar el vector / añadir aristas
A = 0
C = 2
adyacentesA = grafo[A]
existeAC = grafo[A].contiene(C)
```

Grafos - Mapas

- Permite utilizar cualquier tipo de etiquetas
  - no solo indices sino strings u otros

traduccion = mapa<string, int>
grafo = vector<int> adyacentes
adyacentes = grafo[traduccion[“madrid”]]
existeArista = adyacentes.contiene(“murcia”)

Grafos - Lista Aristas

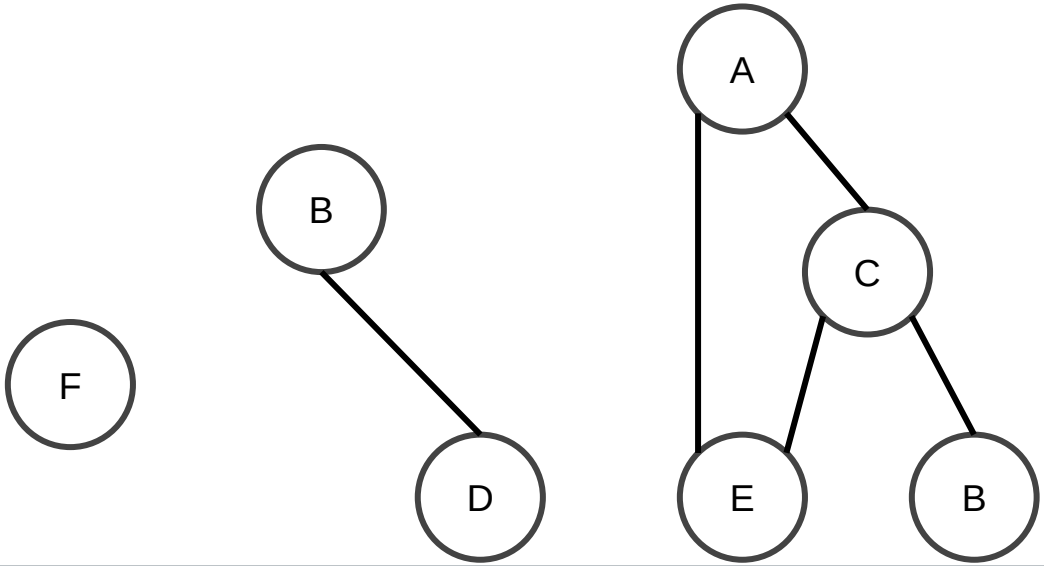
- Existe otra implementación para representar un grafo
- Más utilizada para algoritmos específicos
- Guardar en una lista las conexiones de A a B
- vector<arista> aristas
- aristas.insertar(arista(a, b))

Grafos - Recorridos

- Recorrer los los vértices de un grafo
  - Recorrido en anchura (BFS - Breadth First Search)
  - Recorrido en profundidad (DFS - Depth First Search)

Grafos - Recorridos

- Recorrer los vértices de un grafo
  - Seleccionamos un vértice al azar
  - Recorrido BFS o DFS



Grafos - Recorridos

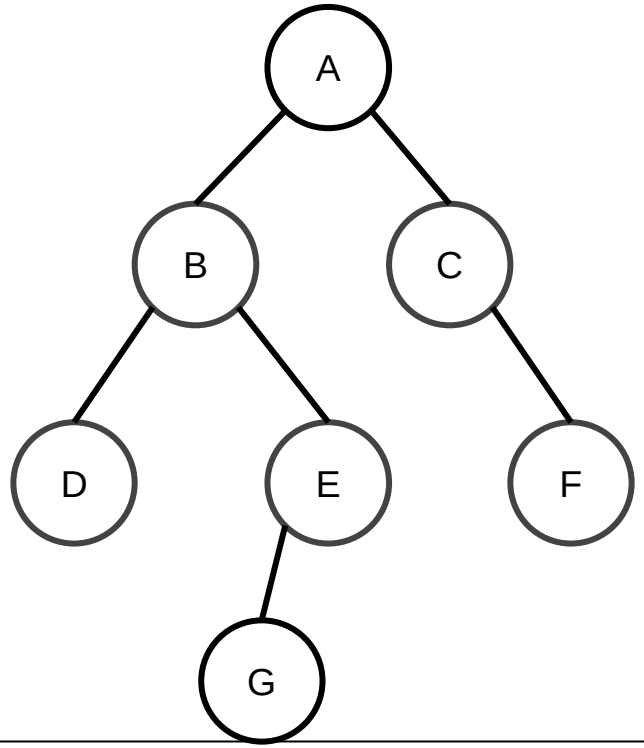
- Recorrer los vértices de un grafo
  - Necesitamos llevar cuenta de en qué nodos hemos estado ya
  - Ventajas: Si llegamos a un nodo destino, está garantizado que habremos llegado en la menor cantidad de pasos (solo BFS)
  - Cada arista recorrida cuenta como 1 paso

Grafos - Recorridos

- Recorrer los vértices de un grafo
  - No siempre se puede recorrer todo desde un vértice inicial
- Soluciones:
  - Elegir un vértice nuevo (no visitado)
  - Ignorar vértices desconectados
  - etc (depende del problema)

Grafos - BFS

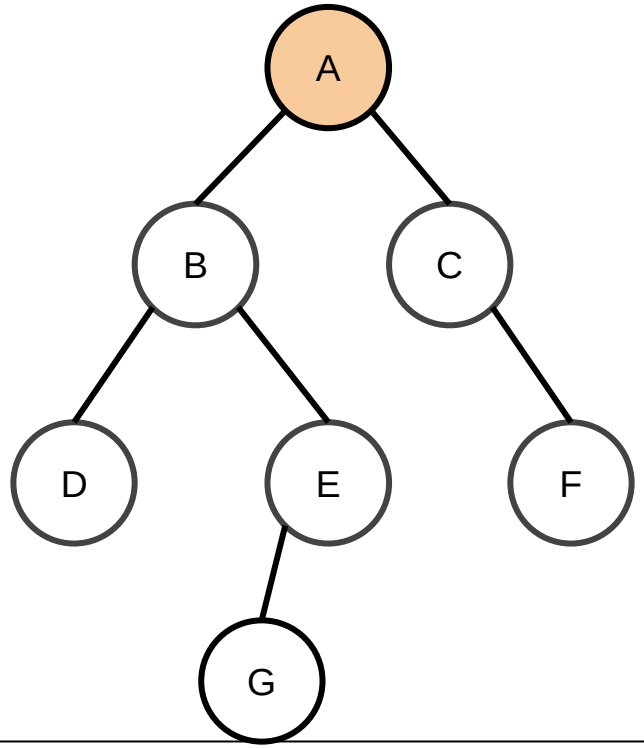
- Recorrido en anchura



Grafos - BFS

- Si empezamos desde A
- Recorrido por niveles

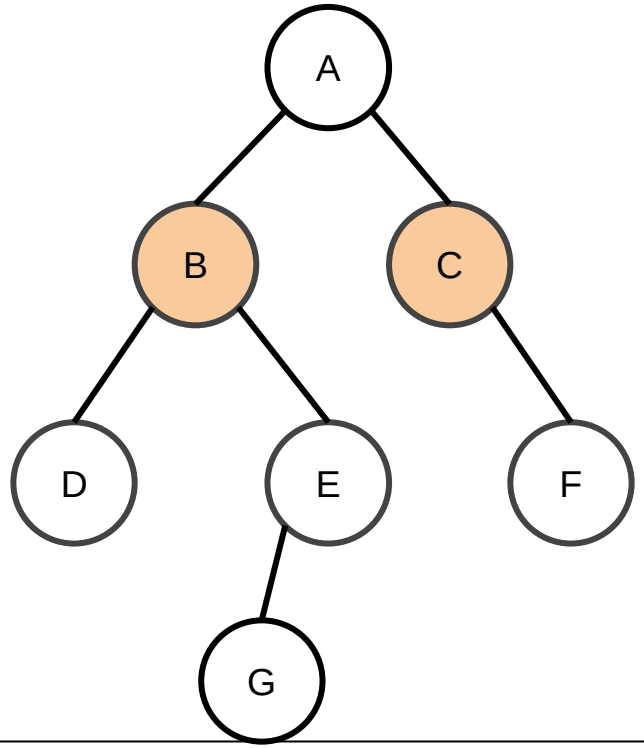
A



Grafos - BFS

- Si empezamos desde A
- Recorrido por niveles

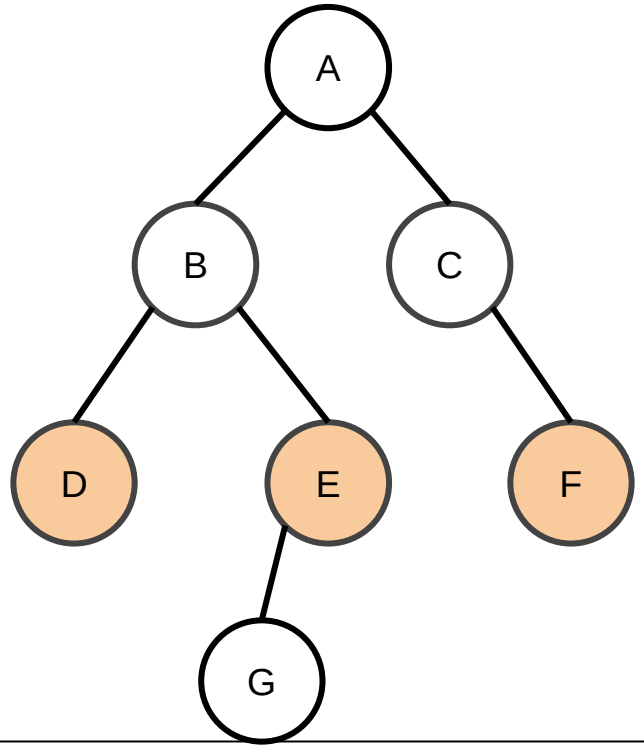
A ⇒ B ⇒ C



Grafos - BFS

- Si empezamos desde A
- Recorrido por niveles

A ⇒ B ⇒ C ⇒ D ⇒ E ⇒ F ⇒ G

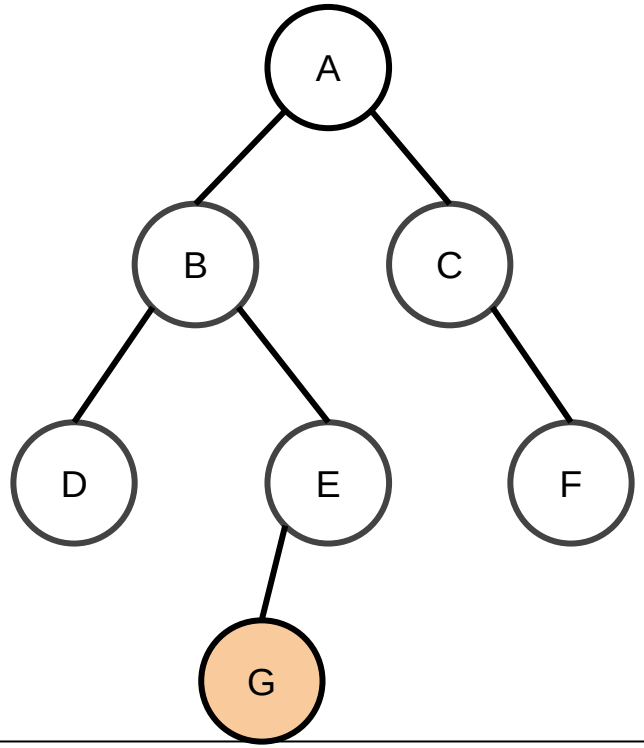


Grafos - BFS

- Si empezamos desde A
- Recorrido por niveles

A ⇒ B ⇒ C ⇒ D ⇒ E

⇒ F ⇒ G



Grafos - BFS

- Implementación
  - Array de valores booleanos (visitados)
  - Cola de vértices a explorar
    - Se procesan en orden de llegada

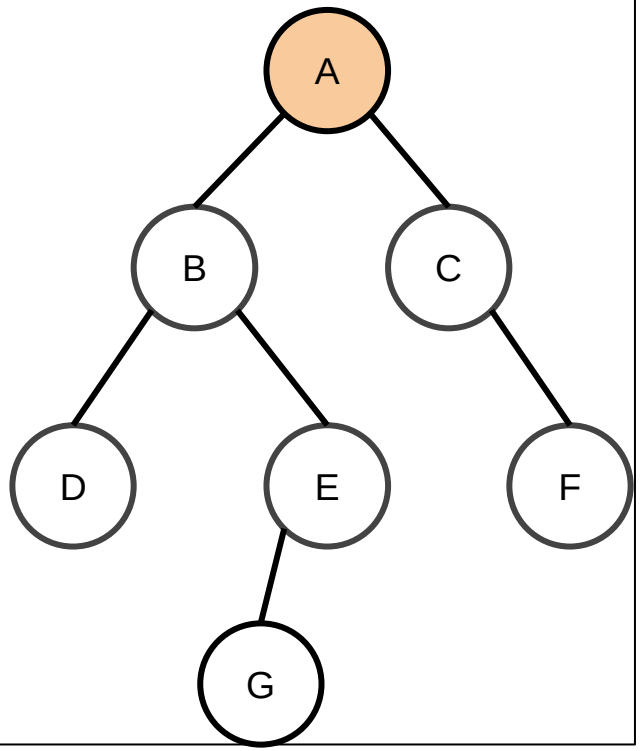
Grafos - BFS

- Inicialización: Elegimos un vértice inicial

inicial = 0

visitado[inicial]=true

cola.add(inicial)



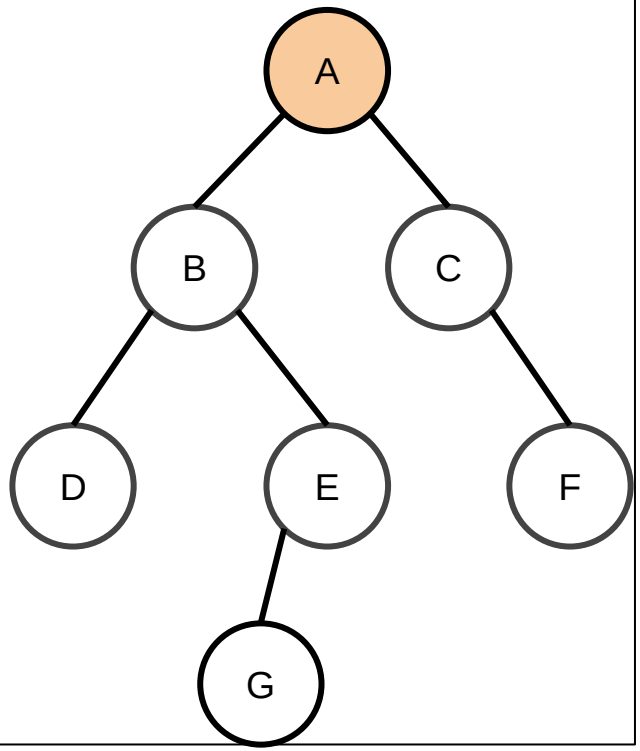
Grafos - BFS

- Cola = {A}

inicial = A

visitado[inicial]=true

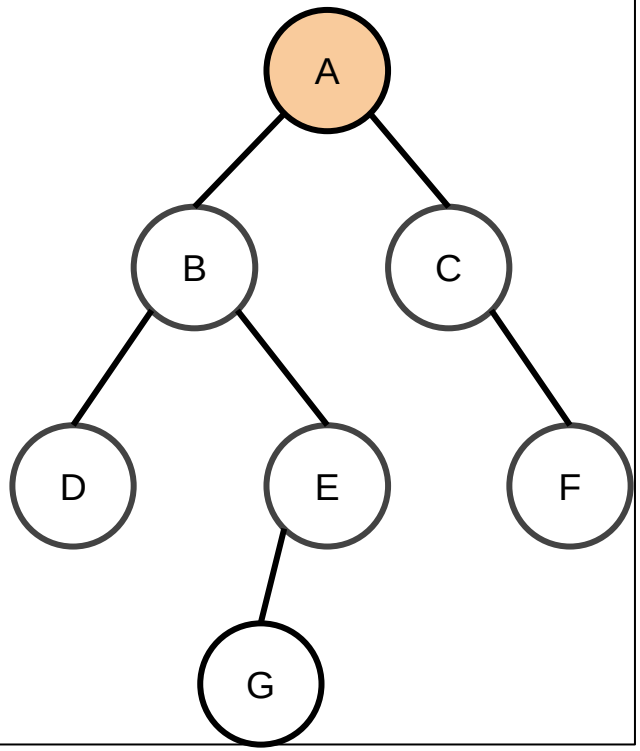
cola.add(inicial)



Grafos - BFS

- Recorremos los vértices

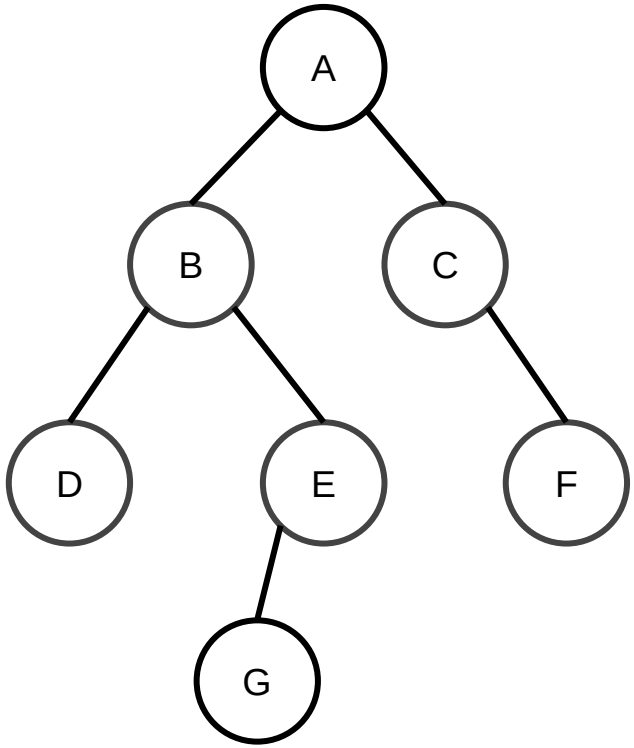
```
mientras(cola.size() > 0)
        v = cola.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                cola.add(ady)
```



Grafos - BFS

- Cola = {}
- Sacamos A

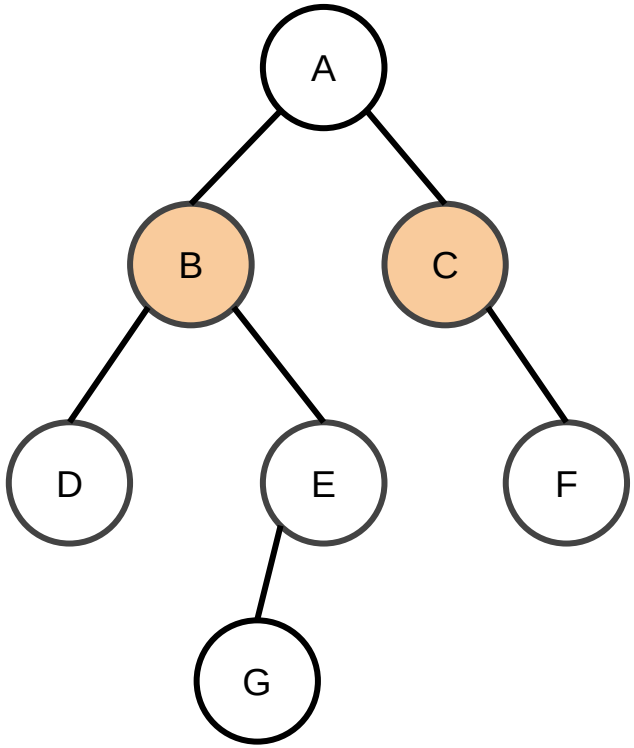
```
mientras(cola.size() > 0)
        v = cola.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                cola.add(ady)
```



Grafos - BFS

- Cola = {B,C}

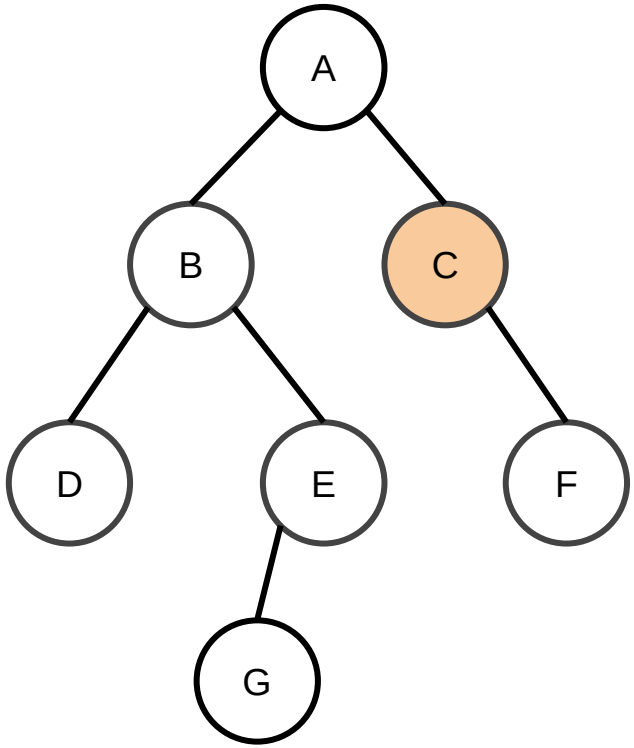
```
mientras(cola.size() > 0)
        v = cola.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                cola.add(ady)
```



Grafos - BFS

- Cola = {C}
- Sacamos B

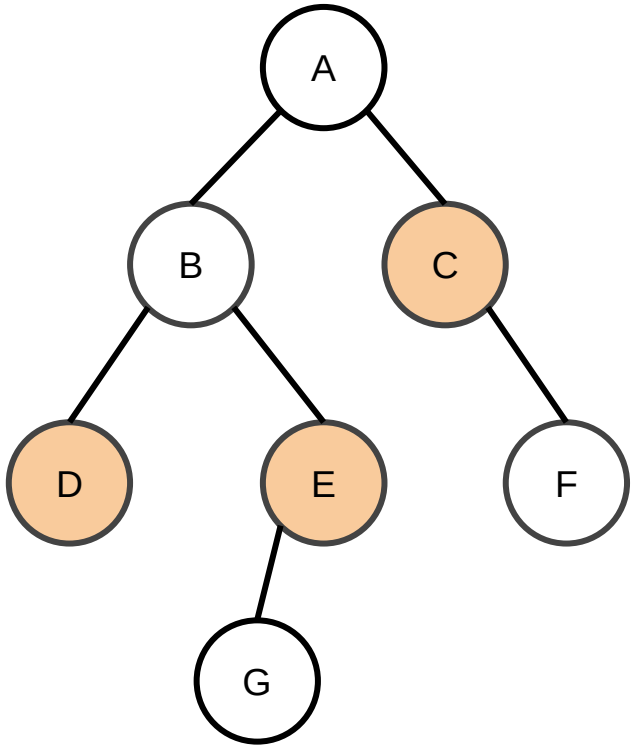
```
mientras(cola.size() > 0)
        v = cola.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                cola.add(ady)
```



Grafos - BFS

- Cola = {C, D, E}

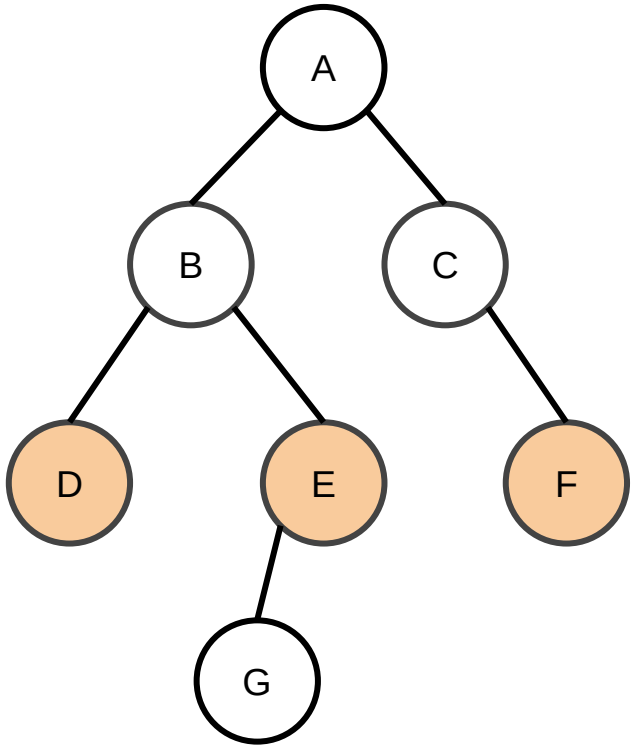
```
mientras(cola.size() > 0)
        v = cola.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                cola.add(ady)
```



Grafos - BFS

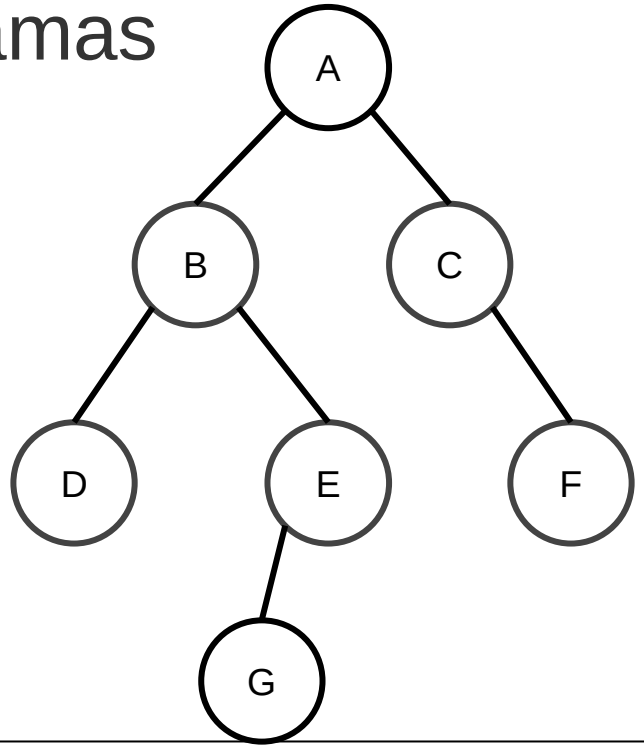
- Cola = {D, E, F}
- Sacamos C, Metemos F

```
mientras(cola.size() > 0)
        v = cola.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                cola.add(ady)
```



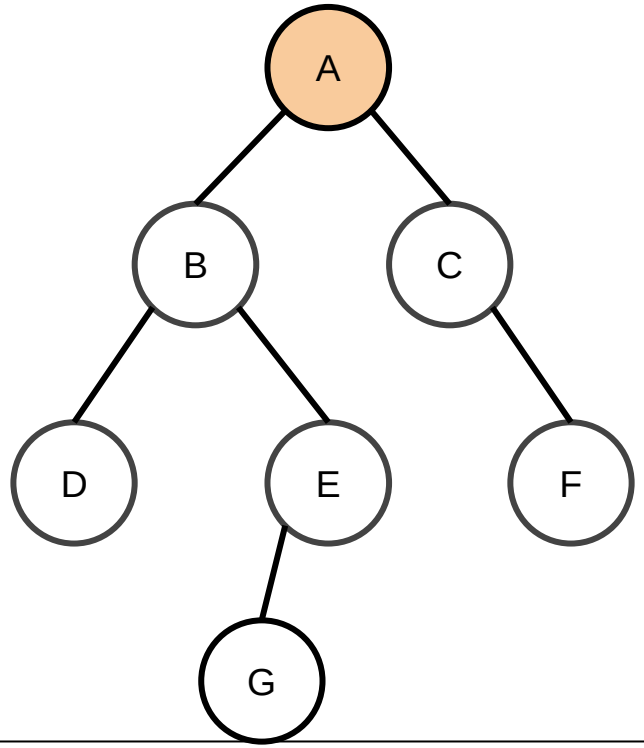
Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- Equivalente a recorrer ramas



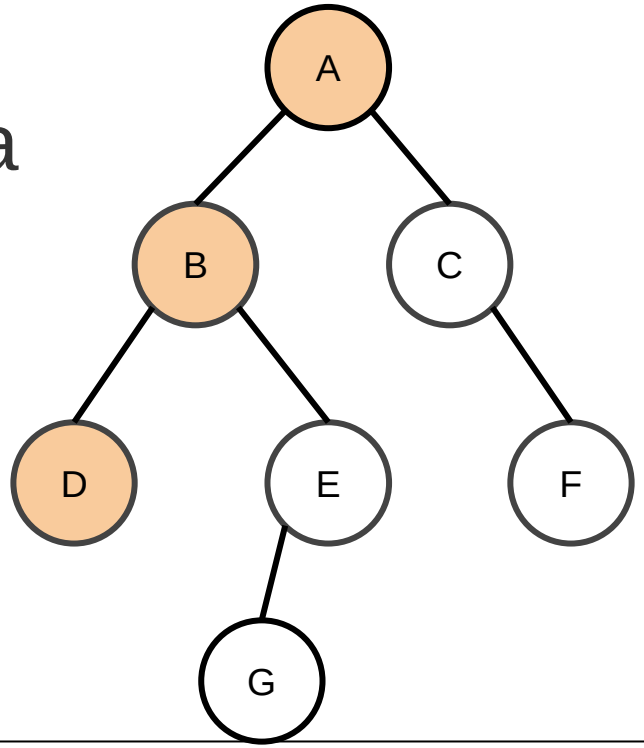
Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- Seleccionamos A



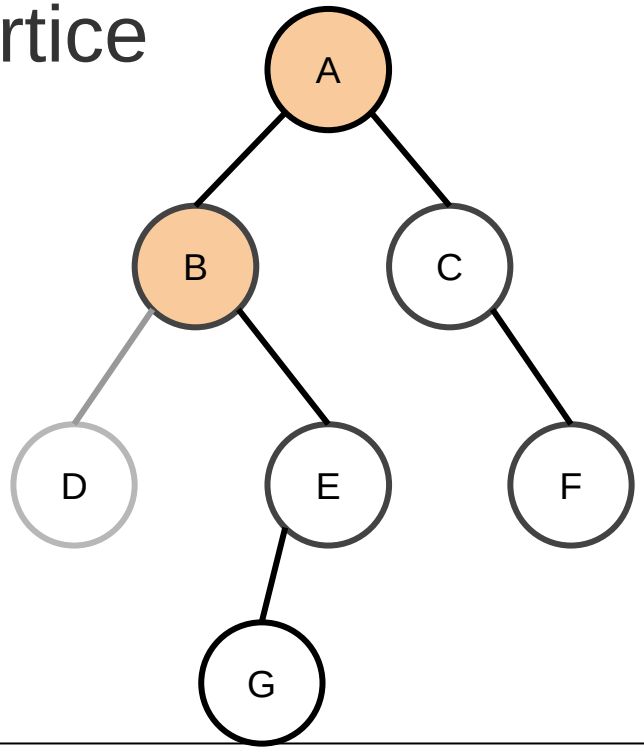
Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- Seleccionamos A
  - Recorremos una rama hasta el final



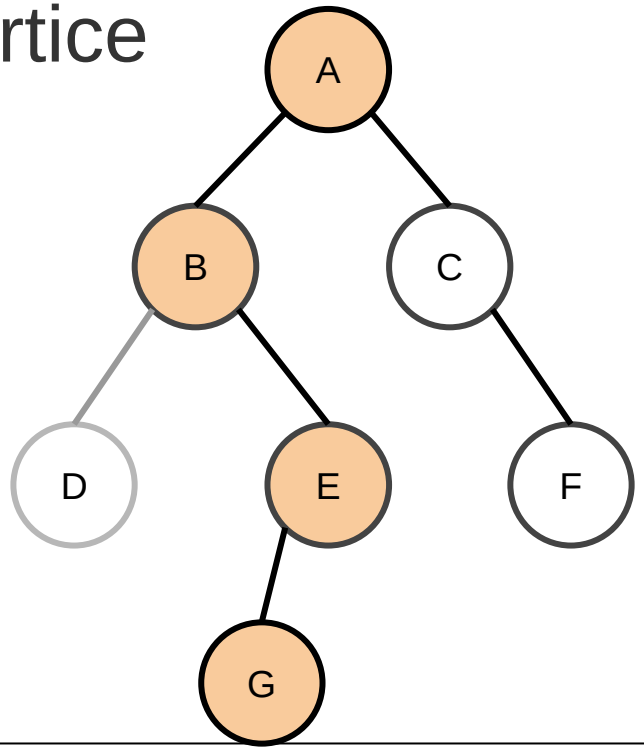
Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- volvemos al siguiente vértice con adyacentes (B)



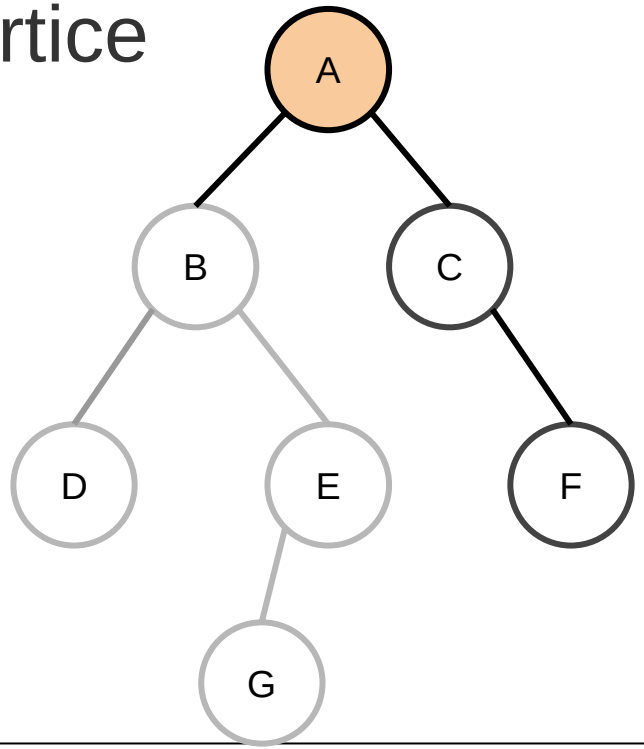
Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- volvemos al siguiente vértice con adyacentes (B)
  - recorremos la nueva rama hasta el final



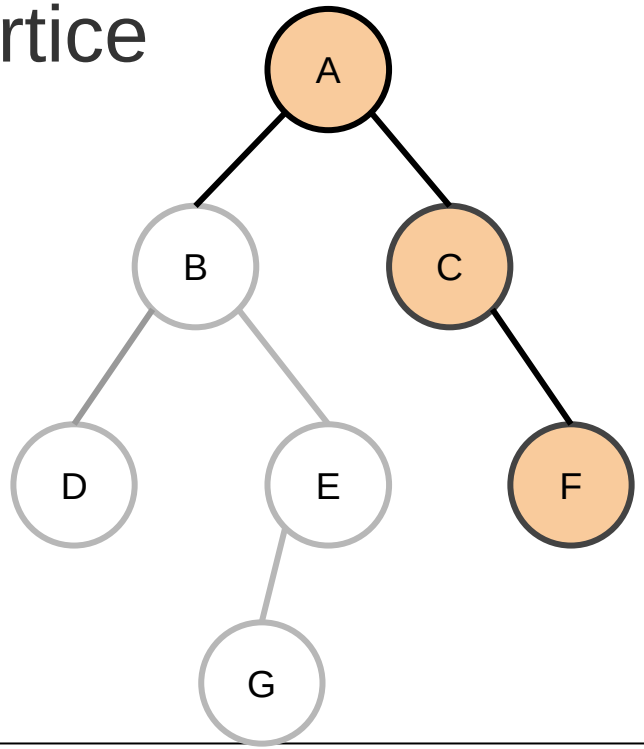
Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- volvemos al siguiente vértice con adyacentes (A)



Grafos - DFS

- Recorrido en profundidad
- volvemos al siguiente vértice con adyacentes (A)



Grafos - DFS

- Implementación
  - Array de valores booleanos (visitados)
  - Pila de vértices a explorar
    - Se procesa el más reciente primero
    - Acumulamos los más antiguos para el final

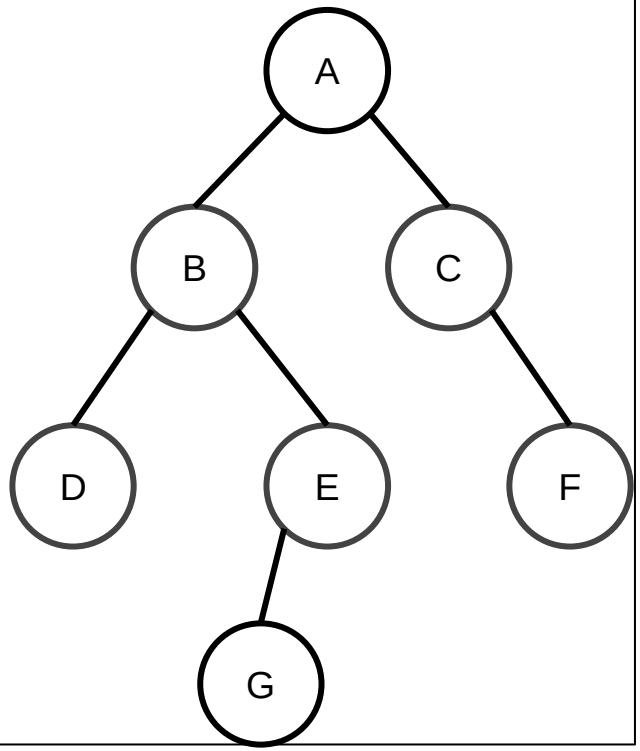
Grafos - DFS

- Inicialización: Elegimos un vértice inicial

inicial = A

visitado[inicial]=true

pila.add(inicial)



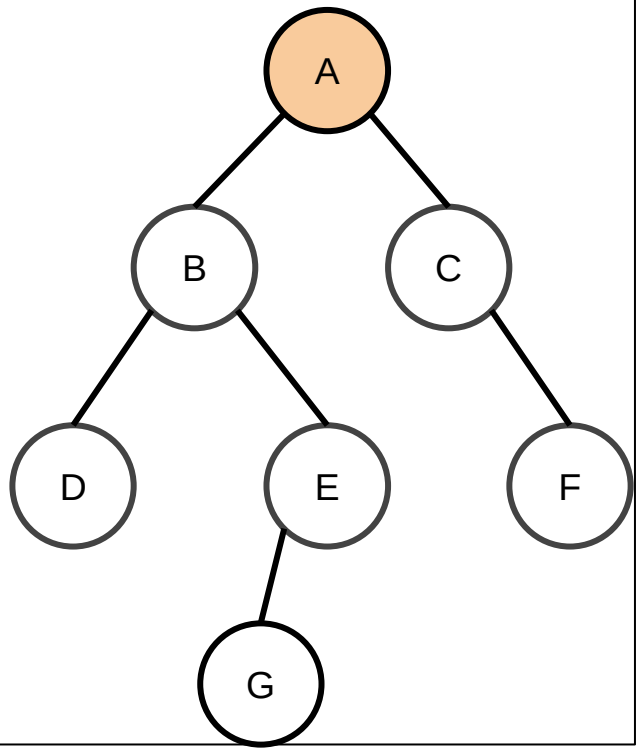
Grafos - DFS

- Pila = {A} ⇐ cima de la pila por la derecha

inicial = A

visitado[inicial]=true

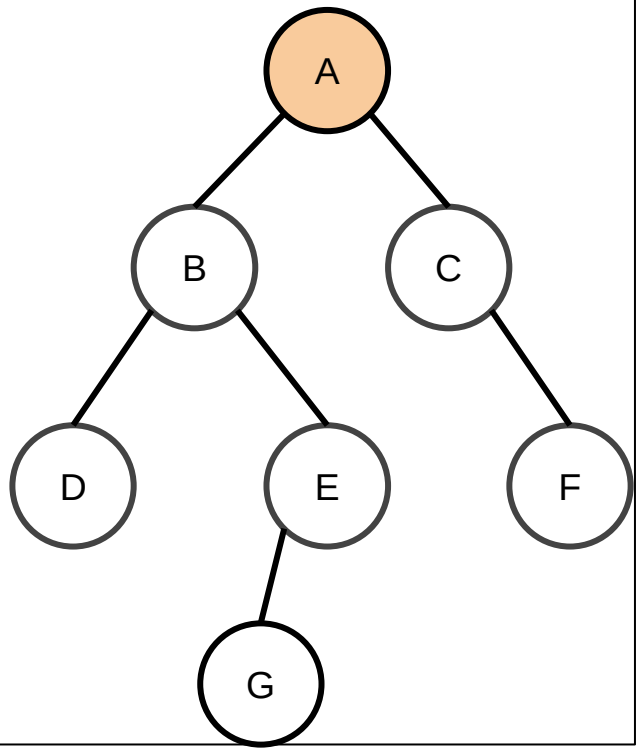
pila.add(inicial)



Grafos - DFS

- Recorremos los vértices

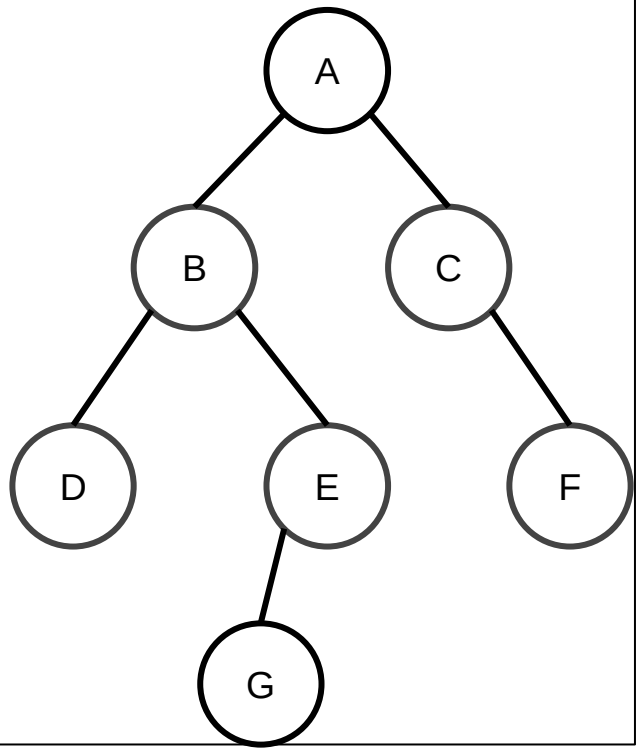
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {}
- Sacamos A

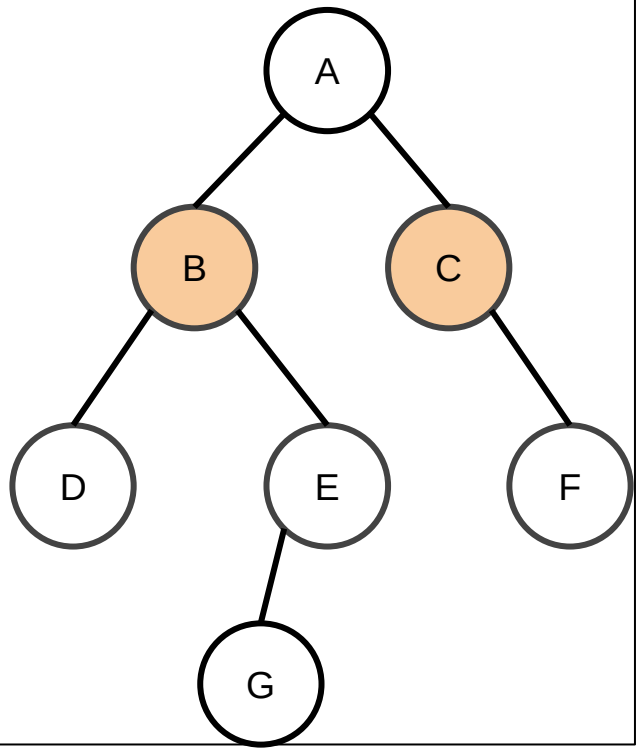
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {B,C}

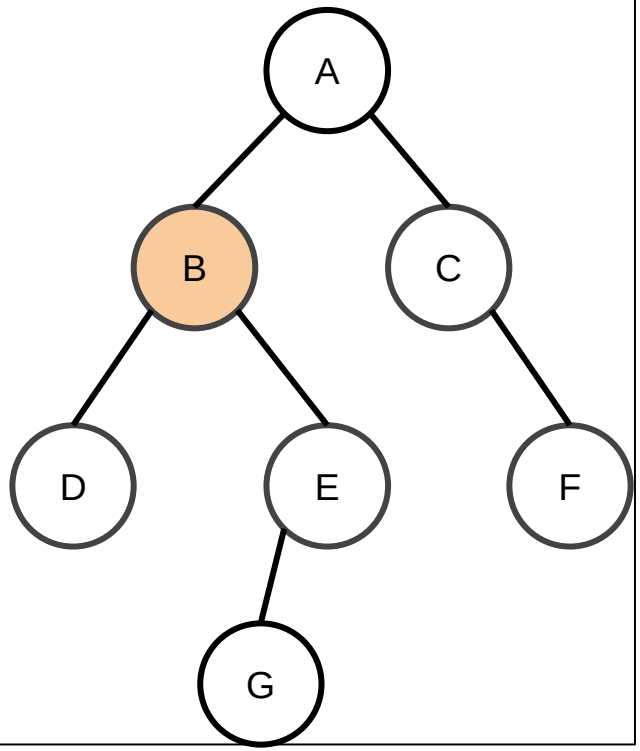
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {B}
- Sacar C

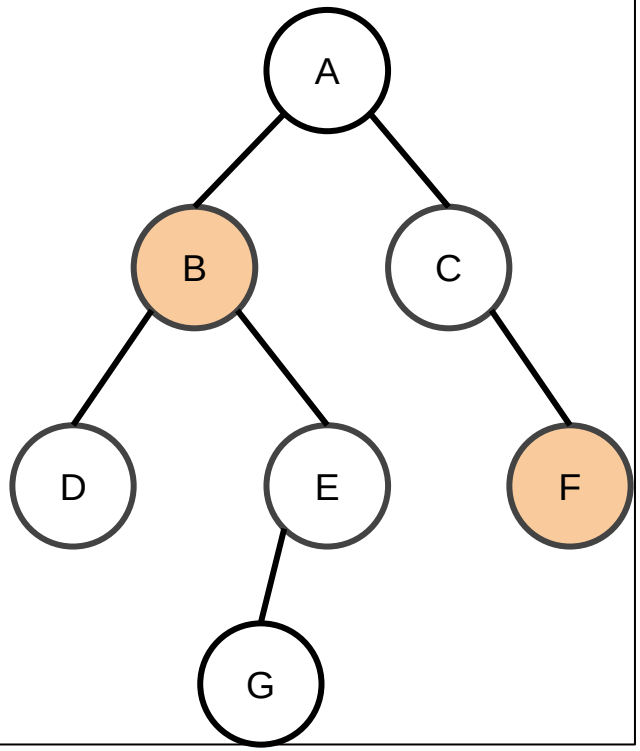
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {B,F}

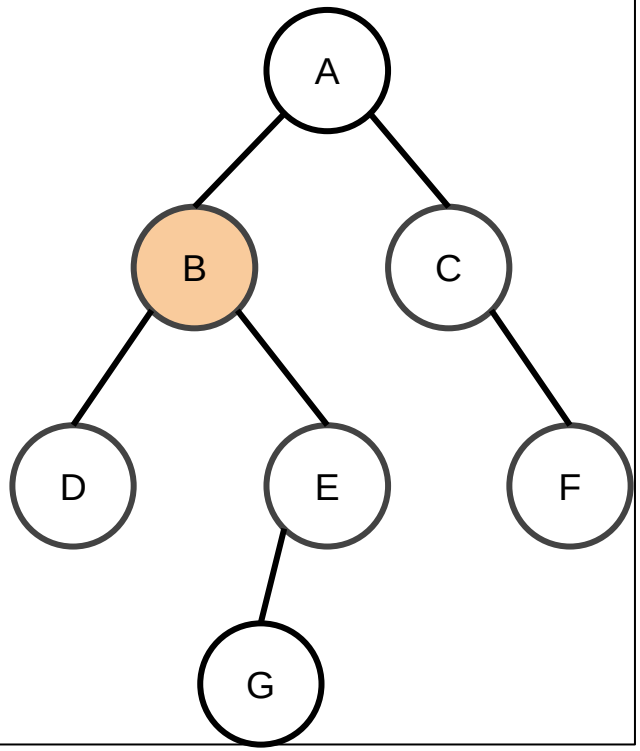
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {B}
- Sacar F

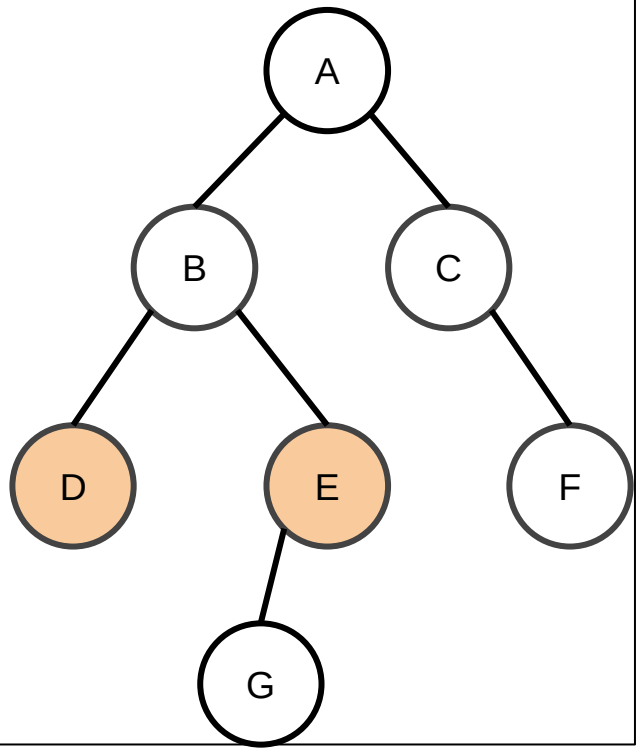
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {D,E}
- Sacar B, Meter D,E

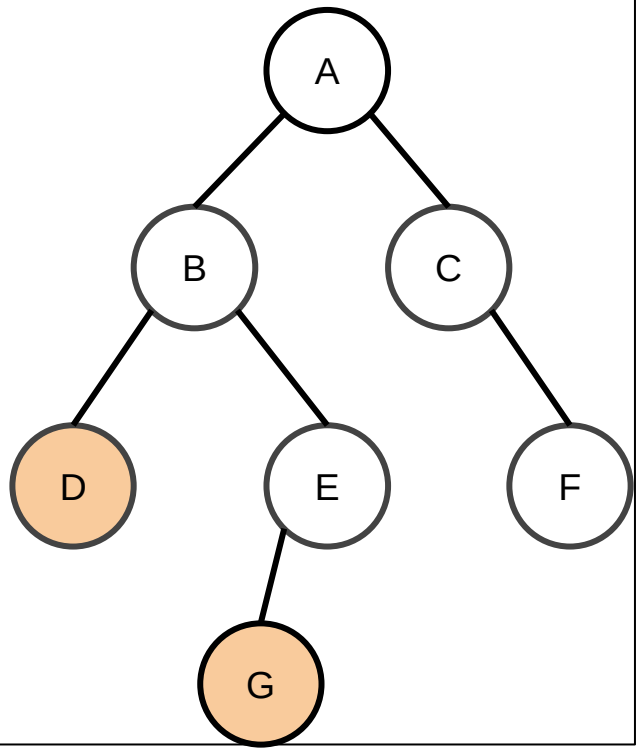
```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



Grafos - DFS

- Pila = {D, G}
- Sacar E, Meter G

```
mientras(pila.size() > 0)
        v = pila.extraer()
        para cada ady de v:
        if(no visitado[ady])
                visitado[ady]=true
                pila.add(ady)
```



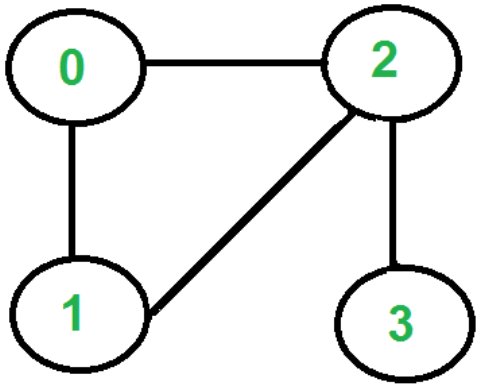
Grafos - DFS

- También se puede utilizar la pila de sistema (recursión) para recorrer el grafo

```
DFS(v)
  visitado[v] = true
  para cada ady de v:
    si (no visitado[ady])
      DFS(ady)
```

Grafos - Eulerianos

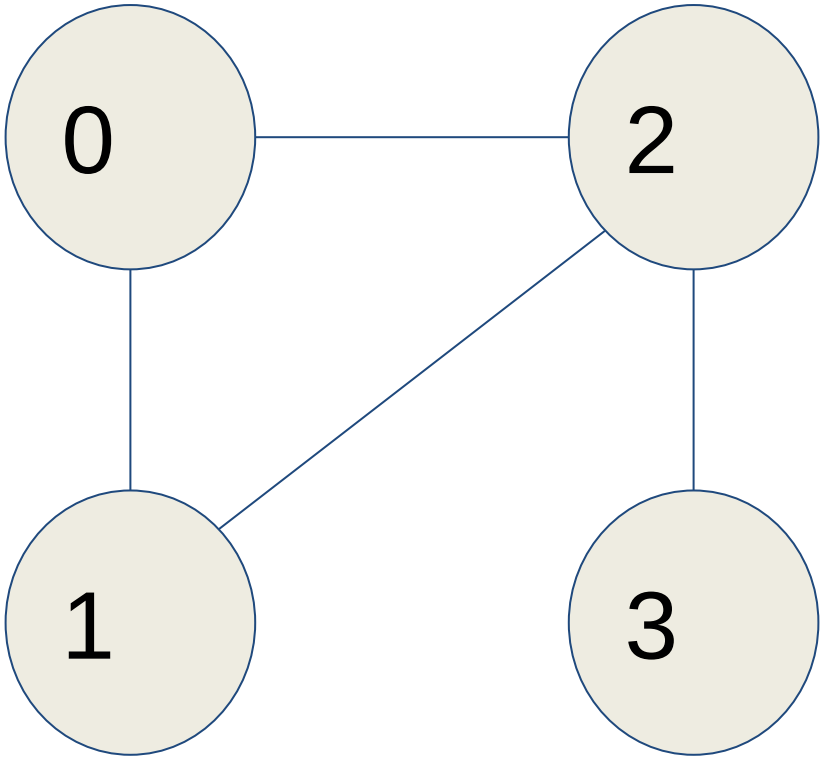
- Camino euleriano
  - ¿Se puede recorrer un grafo de manera que solo se recorra cada una de sus aristas solo **una** vez?



Grafos - Eulerianos

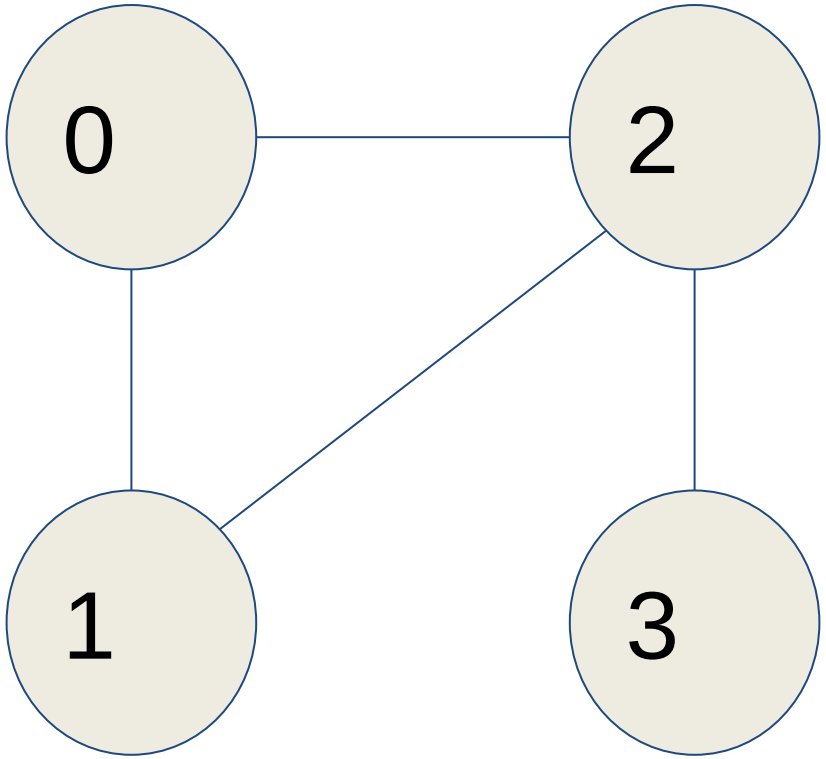
- Camino euleriano
  - Sea C(v) el número de aristas que tiene el vértice v
  - Es camino euleriano si todos los vértices cumplen que C(v) es par
  - Ó si C(v) es impar en solo 2 vértices

Grafos - Eulerianos



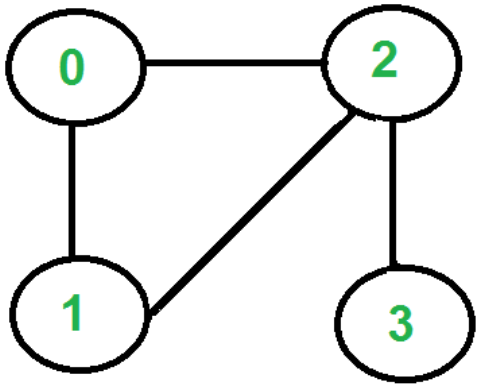
Grafos - Eulerianos

3 -> 2
2 -> 1
1 -> 0
0 -> 2



Grafos - Eulerianos

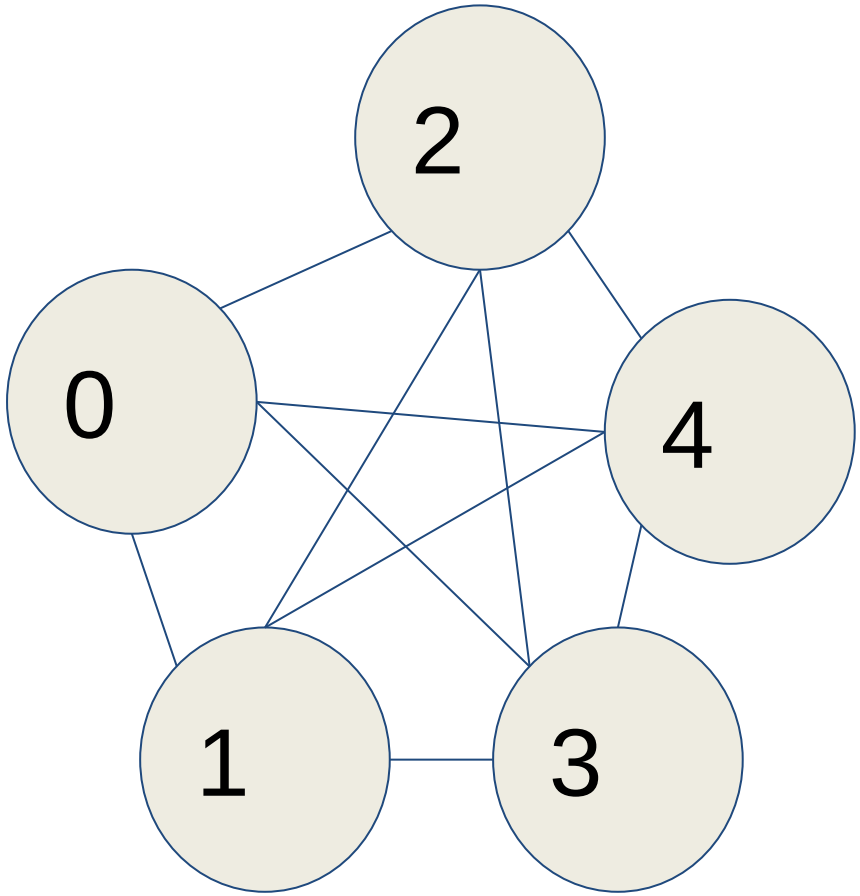
- Ciclo euleriano
  - ¿Se puede recorrer un grafo de manera que solo se recorra cada una de sus aristas solo **una** vez y llegar al mismo punto de inicio?



Grafos - Eulerianos

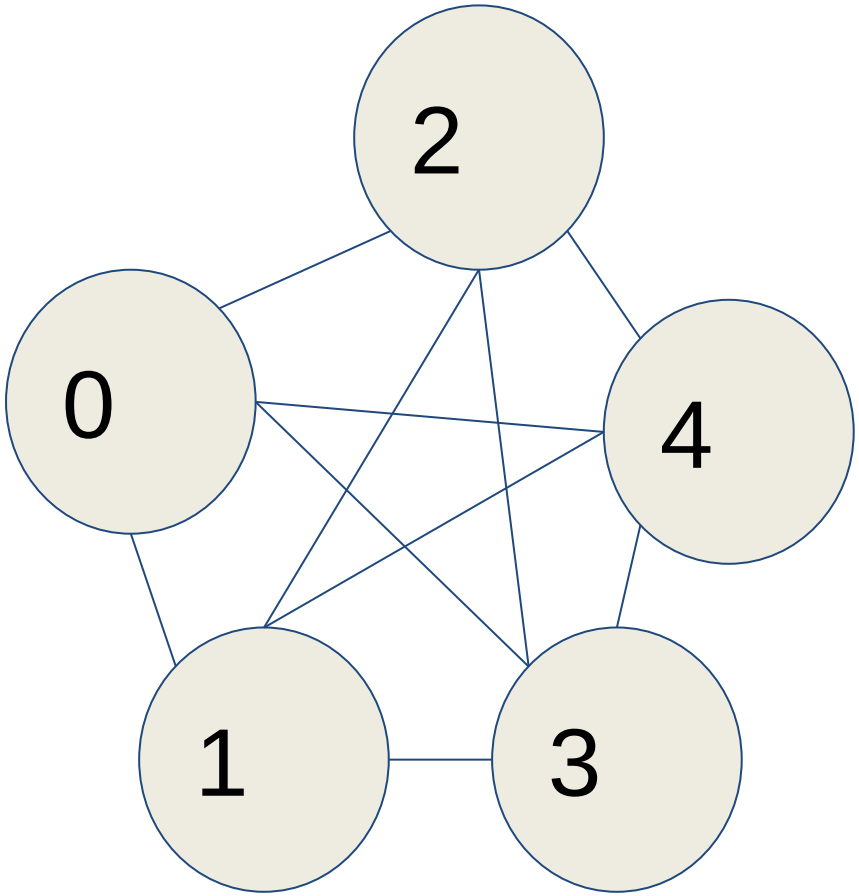
- Camino euleriano
  - Sea C(v) el número de aristas que tiene el vértice v
  - Es camino euleriano si todos los vértices cumplen que C(v) es par

Grafos - Eulerianos



Grafos - Eulerianos

0 -> 1
1 -> 2
2 -> 3
3 -> 4
4 -> 1
1 -> 3
3 -> 0
0 -> 2
2 -> 4
4 -> 0



Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- Recorriendo solo una vez todos los nodos del grafo
  - (Camino) Recorrer todos los nodos del grafo
  - (Ciclo) Recorrer todos los nodos del grafo y llegar al mismo punto de inicio

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- Camino/Ciclo euleriano es trivial
- Hamiltoniano es un algoritmo NP-Completo
- Noción de máscara de bits
  - Un entero puede ser representado por hasta 32 bits
  - Utilizar el mismo principio para saber qué nodo hemos visitado

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- Si tuviésemos 3 nodos y estuviésemos interesados en chequear un ciclo hamiltoniano tendríamos que usar el entero 7 (2^3-1), cuya representación de bits es 111
- Por cada nodo que visitemos lo marcamos a 0
  - mask = 7 // 111
  - mask ^ (1<<i) donde i es el nodo

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- Recordemos la tabla de verdad de XOR
  - 1 XOR 1 = 0
  - 0 XOR 1 = 1
  - 1 XOR 0 = 1
  - 0 XOR 0 = 0

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- Si queremos saber si el i-ésimo bit está encendido:
  - mask & (1<<i)
    i. Desplazamos 1 i veces a la izquierda
    ii. Para i=2; 100 (4)
    iii. 7 & 4 = 111 & 100 => (4)
    iv. Mientras que mask & (1<<i) no tome un valor de 0, el i-ésimo bit está encendido

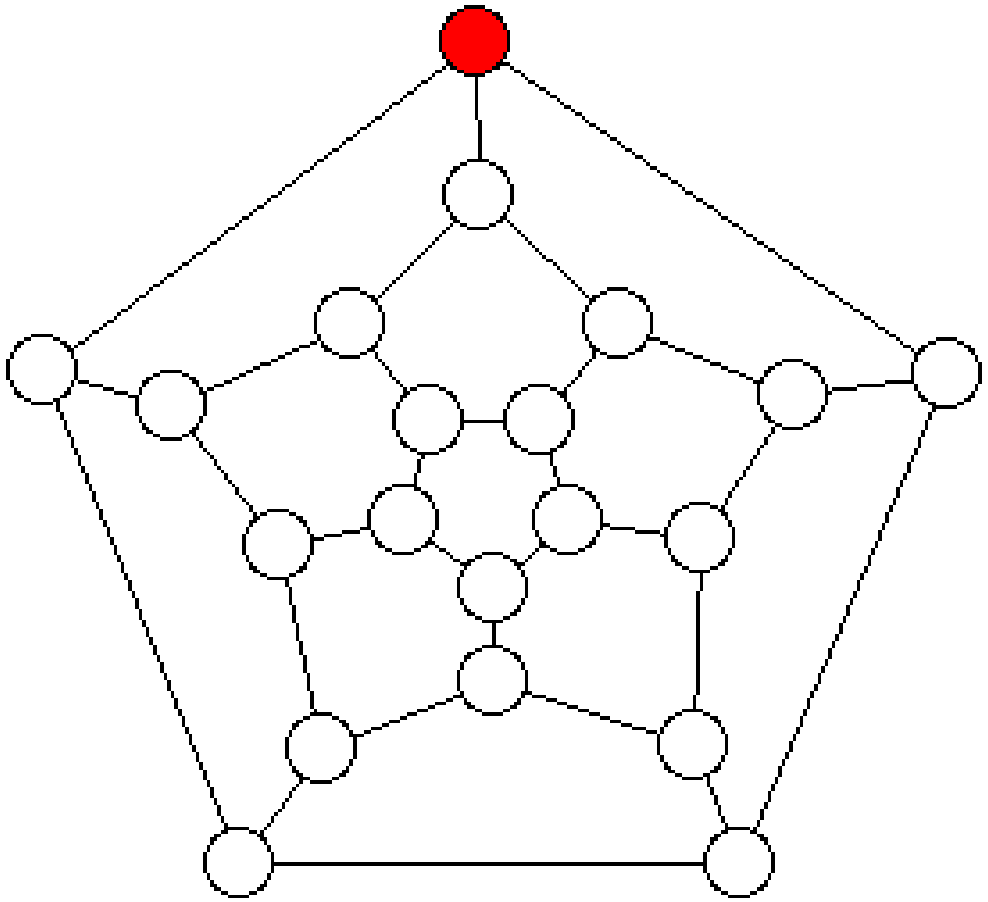
Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- Si queremos convertir el i-ésimo bit a 0 (sabiendo que está encendido de antes):
  - mask ^ (1<<i)
    i. Desplazamos 1 i veces a la izquierda
    ii. Para i=2; 100 (4)
    iii. 7 ^ 4 = 111 ^ 100 => (011)

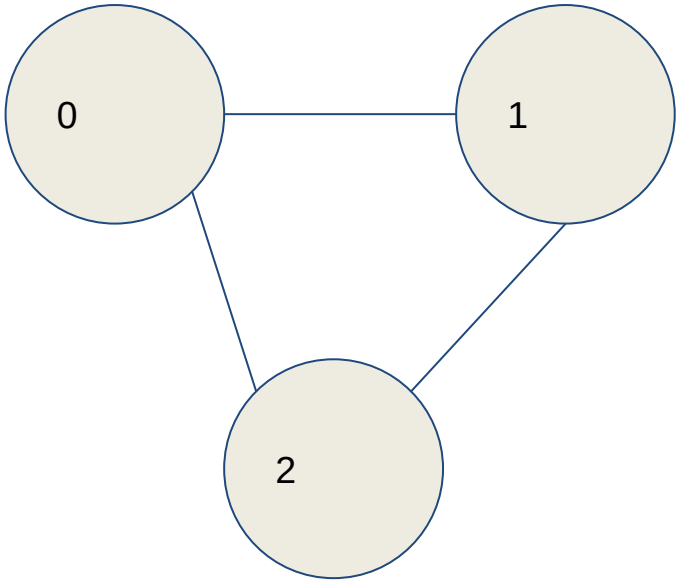
Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

- En caso del camino hamiltoniano si mask=0 hemos terminado
- En caso de ciclo si mask=0 tenemos que comprobar que el nodo actual es igual al nodo de inicio

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano

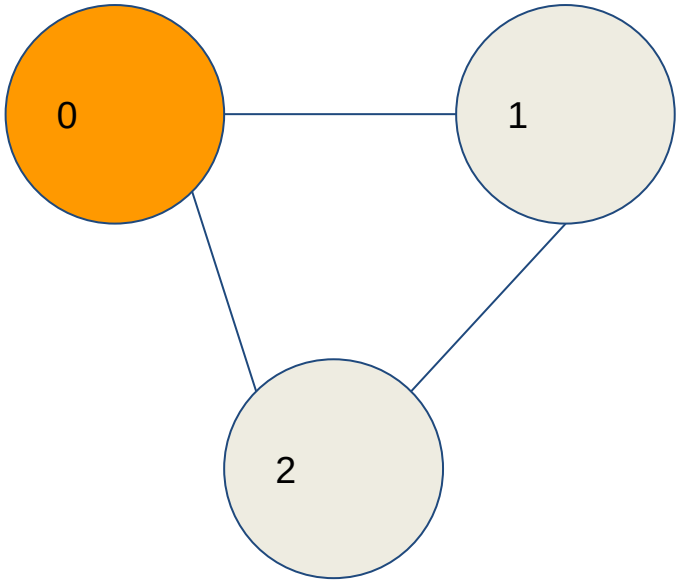


Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano



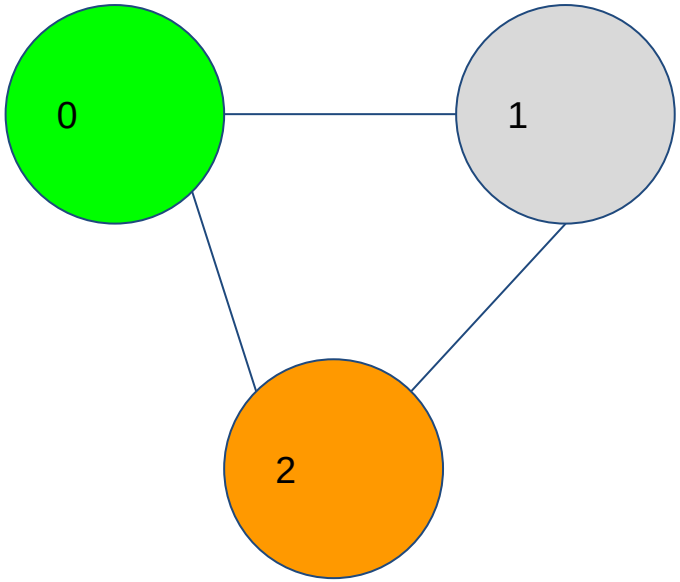
NODO=0,
MASK=111_2

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano



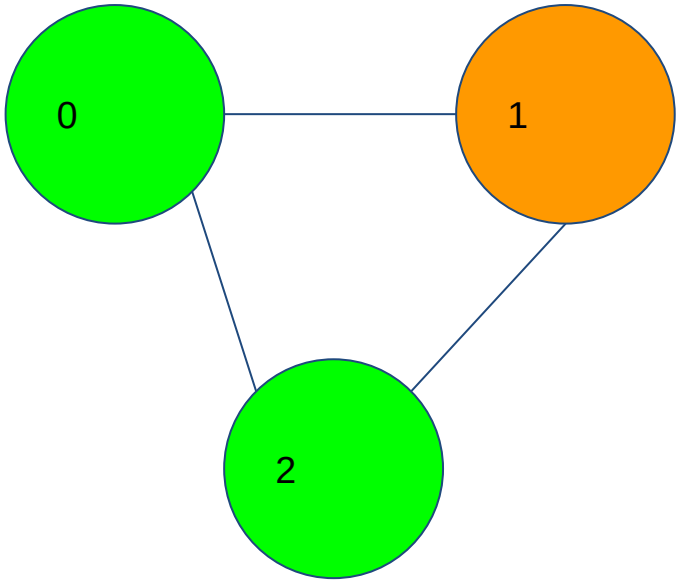
NODO=0,
MASK=111_2
$2^0 = 1$
111 & 001 > 0?

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano



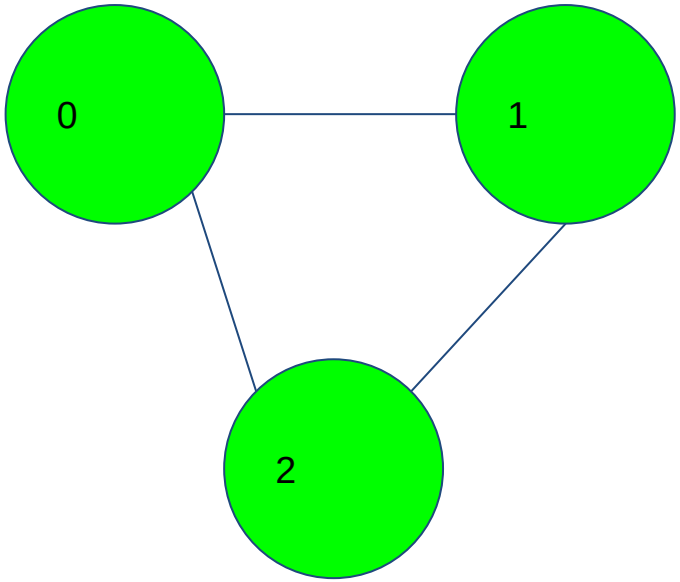
NODO=2,
MASK=110_2
2^2 = 4 (100)
110 & 100 > 0?

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano



NODO=1,
MASK=010_2
2^1 = 2 (010)
010 & 010 > 0?

Grafos | Camino y ciclo Hamiltoniano



NODO=X,
MASK=000_2
Es camino Hamiltoniano

¿Es también ciclo?

Grafos | Bipartito

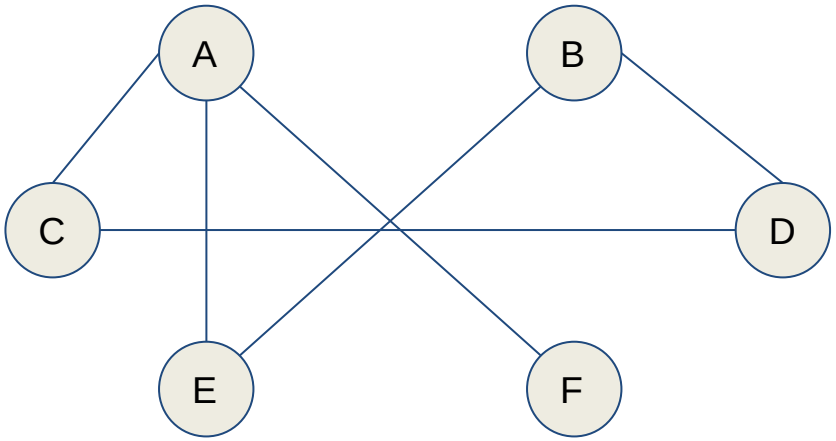
- Es un grafo G que se puede separar en dos conjuntos U y V tal que la unión de U y V son todos los nodos y la intersección de los mismos es vacío
  - ¿Un árbol es bipartito?

Grafos | Bipartito

- Para probar que un grafo es bipartito solo falta hacer un recorrido dentro del grafo y “pintarlo” con uno de los dos colores, llevando siempre en cuenta que debes cambiar el color por nodo vecino
- Si encuentras un nodo vecino que tenga el mismo color que el actual, ¡no puede ser un grafo bipartito!

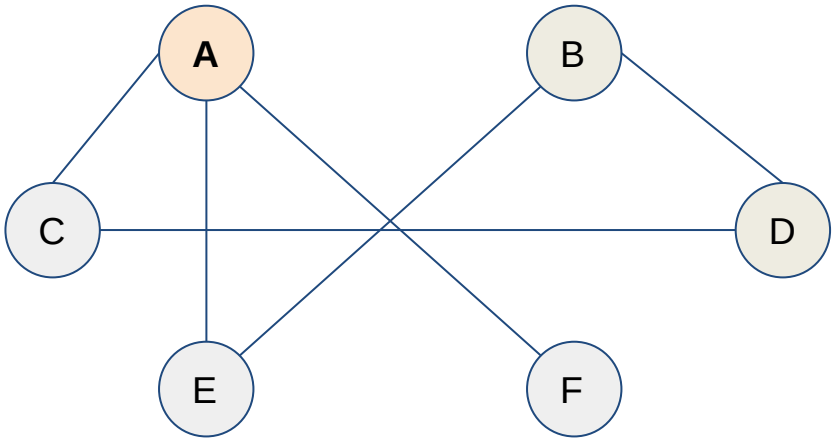
Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [0, 0, 0, 0, 0, 0]
C = [0, 0, 0, 0, 0, 0]
Q = [A]



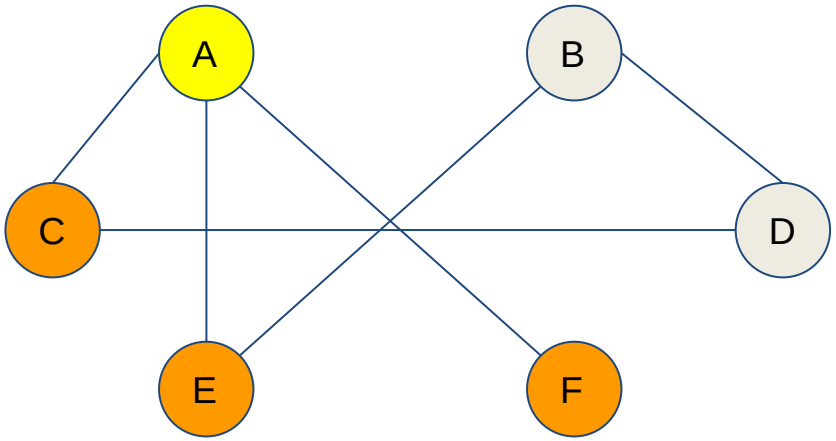
Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [1, 0, 0, 0, 0, 0]
C = [1, 0, 0, 0, 0, 0]
Q = [A]



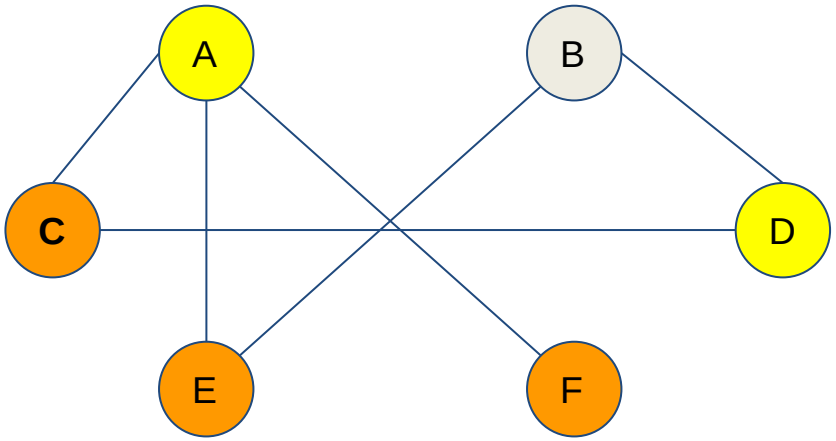
Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [1, 0, 0, 0, 0, 0]
C = [1, 0, 2, 0, 2, 2]
Q = [C, E, F]



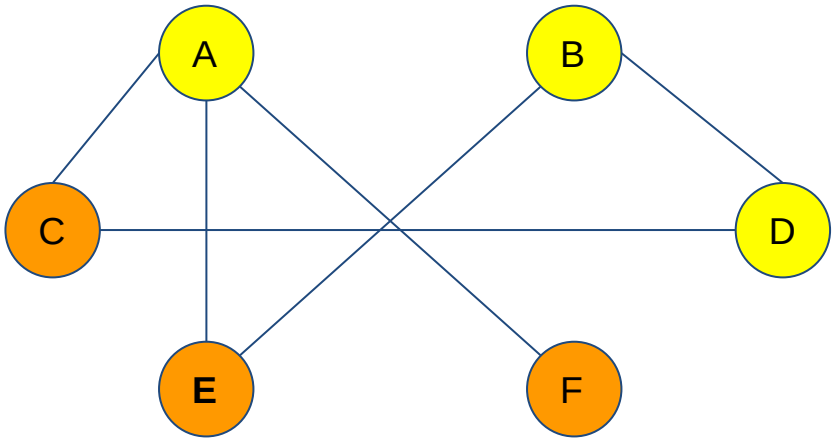
Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [1, 0, 1, 0, 0, 0]
C = [1, 0, 2, 1, 2, 2]
Q = [E, F, D]



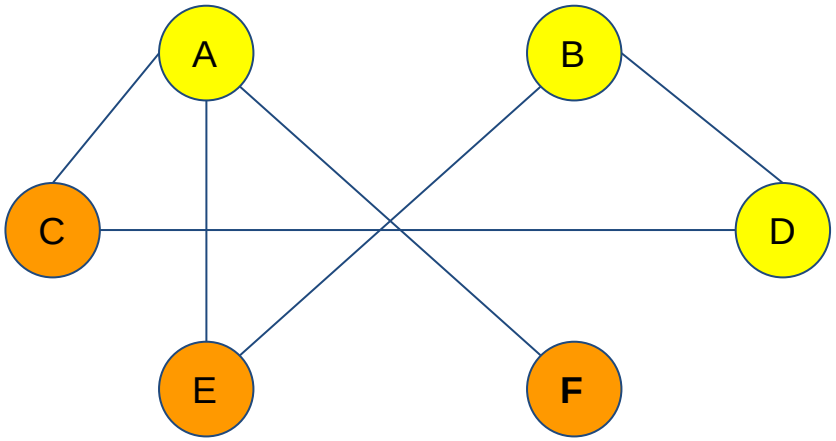
Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [1, 0, 1, 0, 1, 0]
C = [1, 1, 2, 1, 2, 2]
Q = [F, D, B]



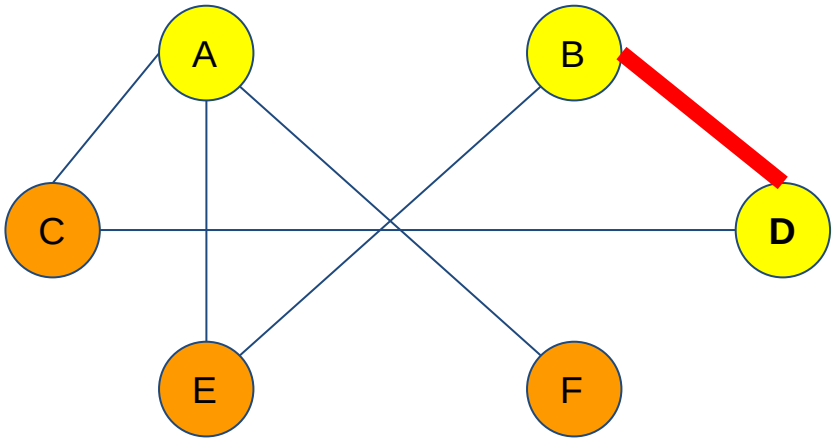
Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [1, 0, 1, 0, 1, 1]
C = [1, 1, 2, 1, 2, 2]
Q = [D, B]



Grafos | Bipartito

Con BFS
iniciando en A
V = [1, 0, 1, 1, 1, 1]
C = [1, 1, 2, 1, 2, 2]
Q = [B]
No es bipartito!



Grafos | Bipartito

- Pseudocódigo

```
isBipartite(init):
  q = [(init, 1)]
  v[init] = t, c[init] = 1
  while !q.empty():
                current = q.top(), q.pop()
                for edge in edges(current):
                        neighbor_color = current.c == 1 ? 2 : 1
                        if c[edge.dest] == current.c:
                                return f
                        if !v[edge.dest]:
                                v[edge.dest] = t
                                c[edge.dest] = neighbor_color
                                q.push((edge.dest, neighbor_color))
  return t
```

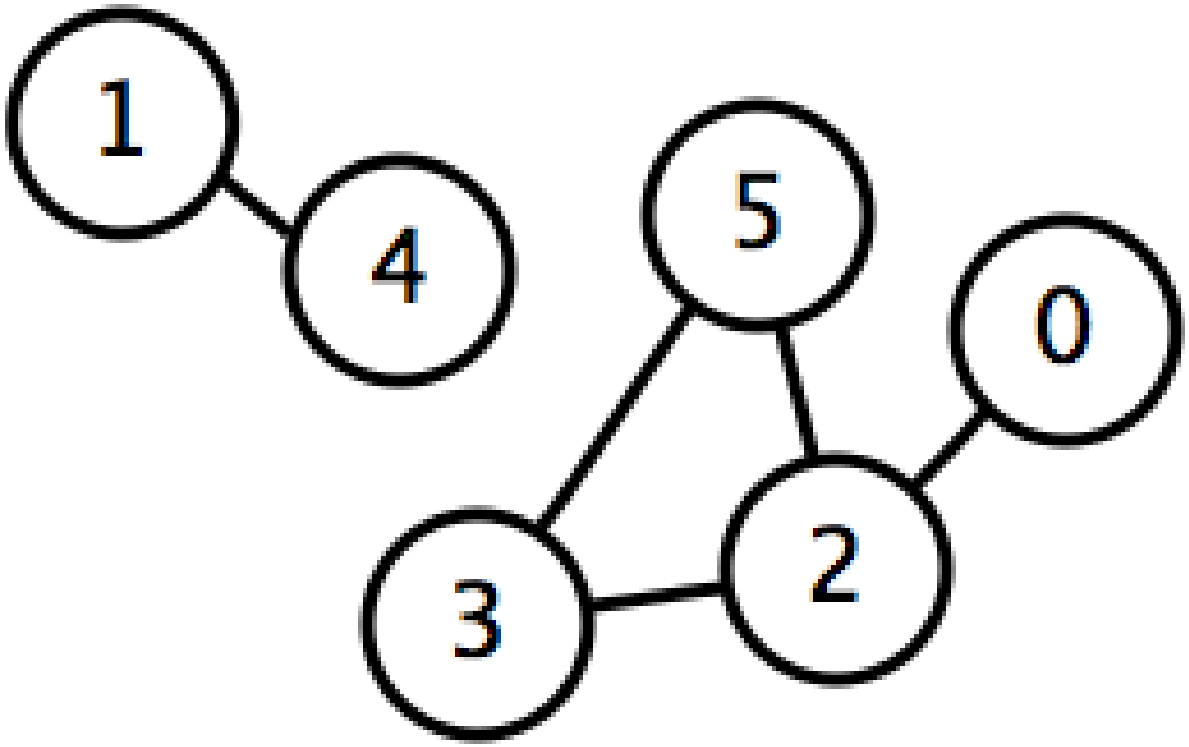
Grafos | Componentes Conexas

- Es un subgrafo donde dos vértices cualesquiera están conectados a través de uno o más caminos
- Se parte de un grafo no dirigido

Grafos | Componentes Conexas

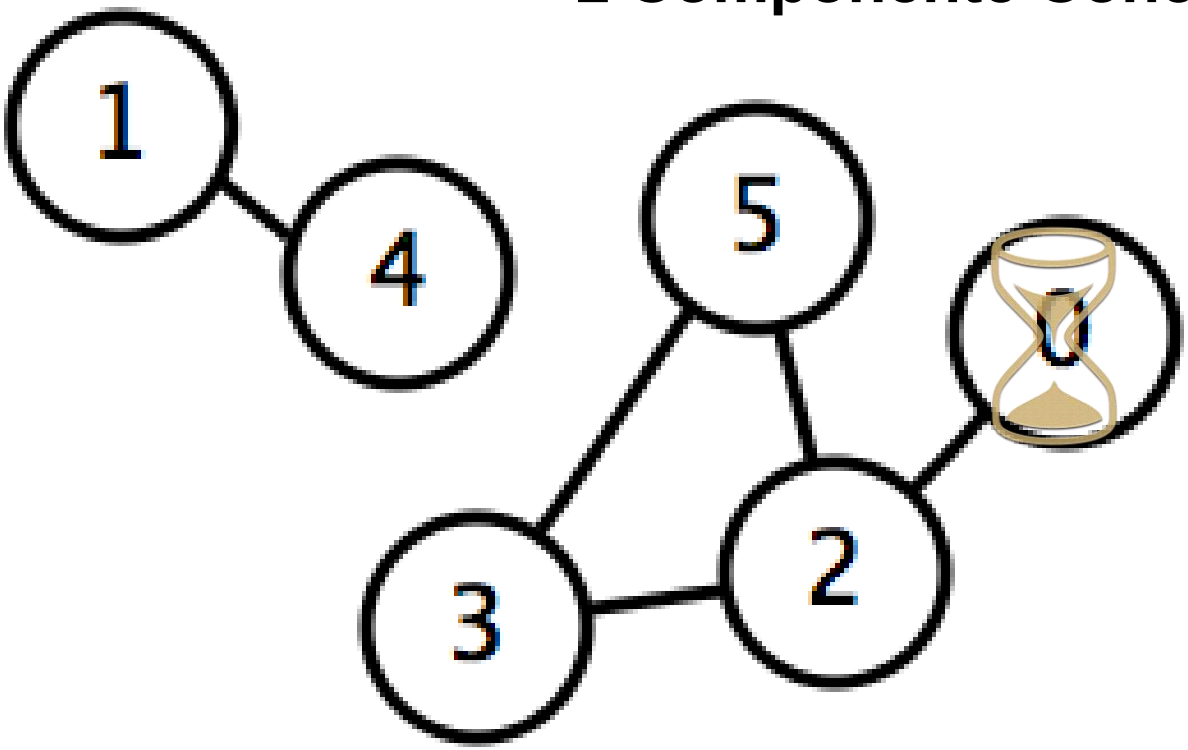
- La idea básica es hacer un BFS/DFS por cada vértice i desde 0..N siempre y cuando i no haya sido recorrido por un algoritmo anterior
- Se cuenta 1 y se recorre i

Grafos | Componentes Conexas

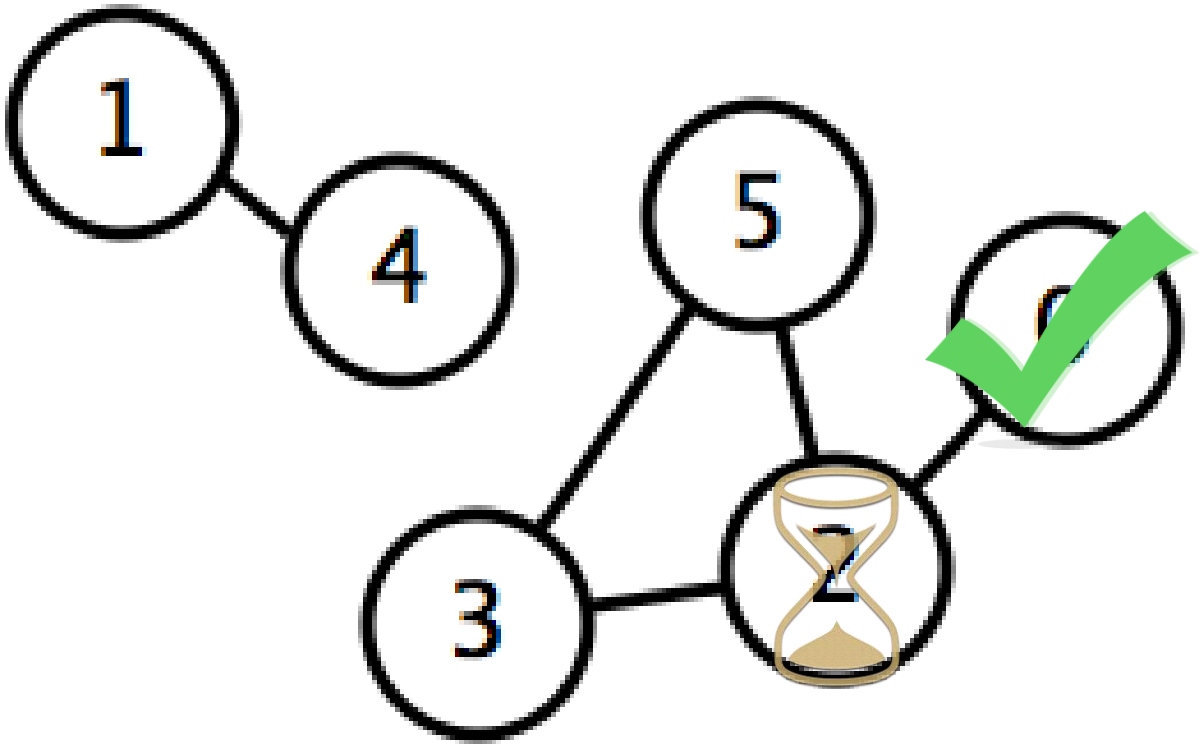


Grafos | Componentes Conexas

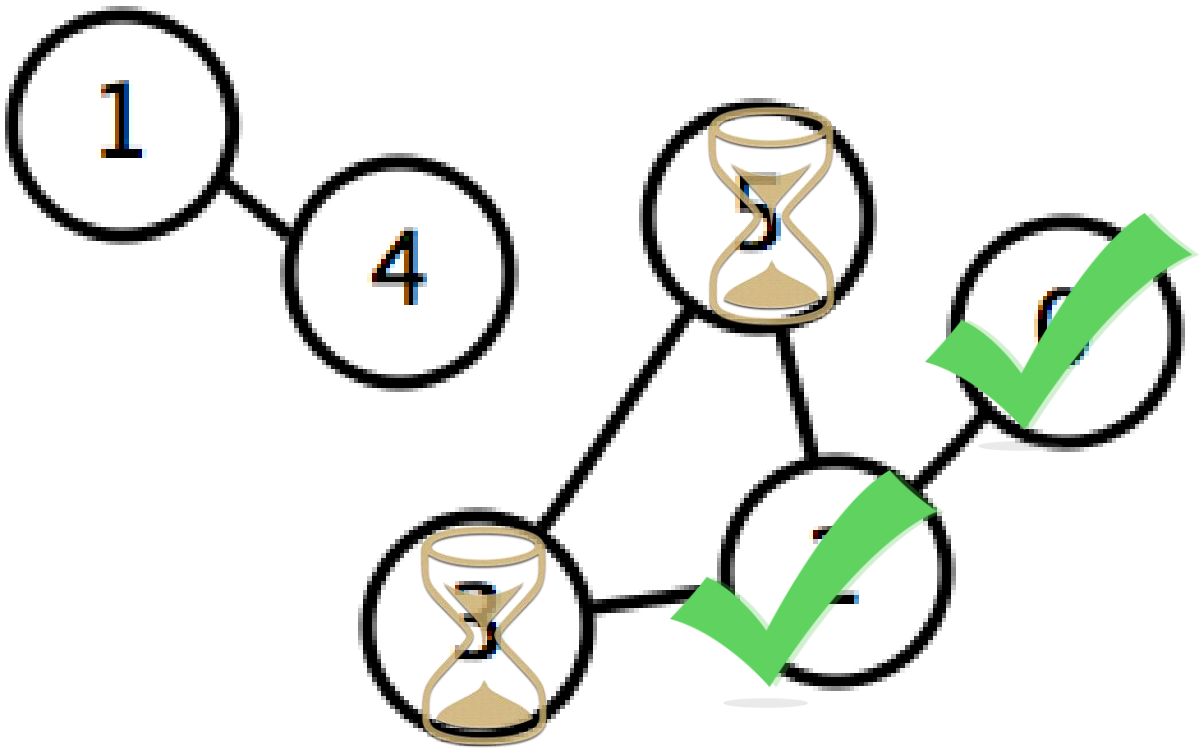
+1 Componente Conexa (1)



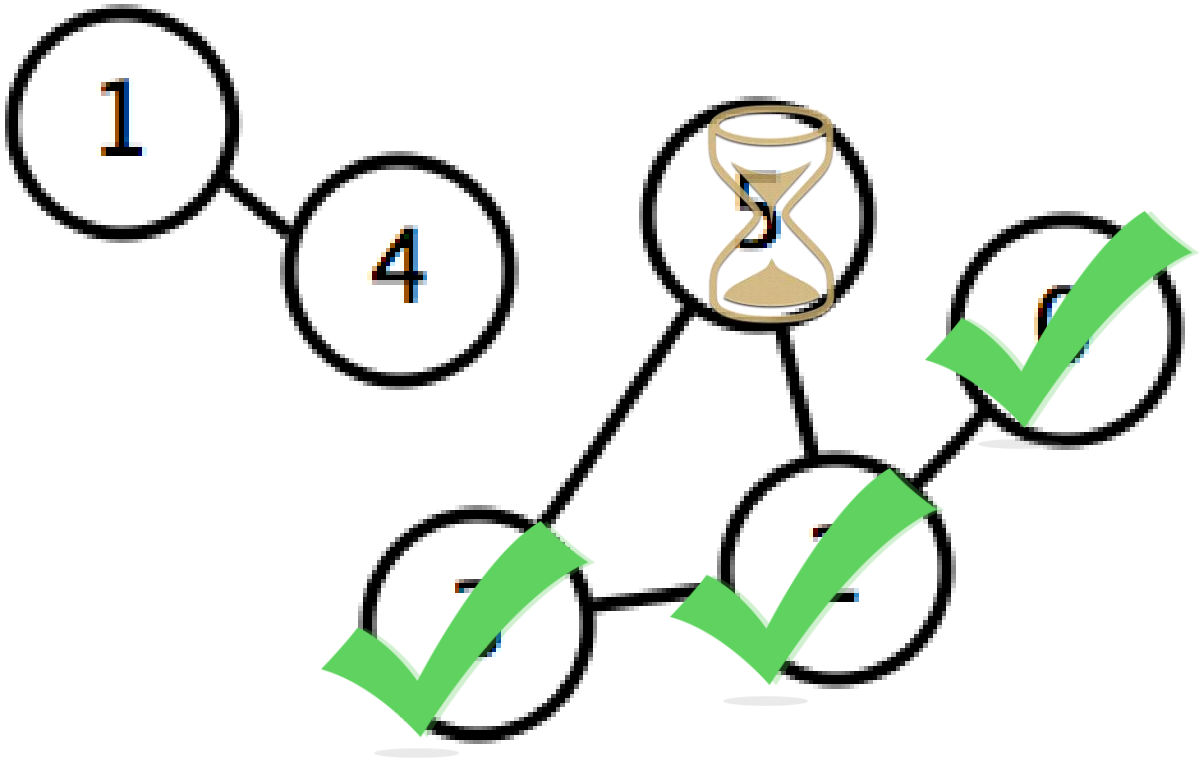
Grafos | Componentes Conexas



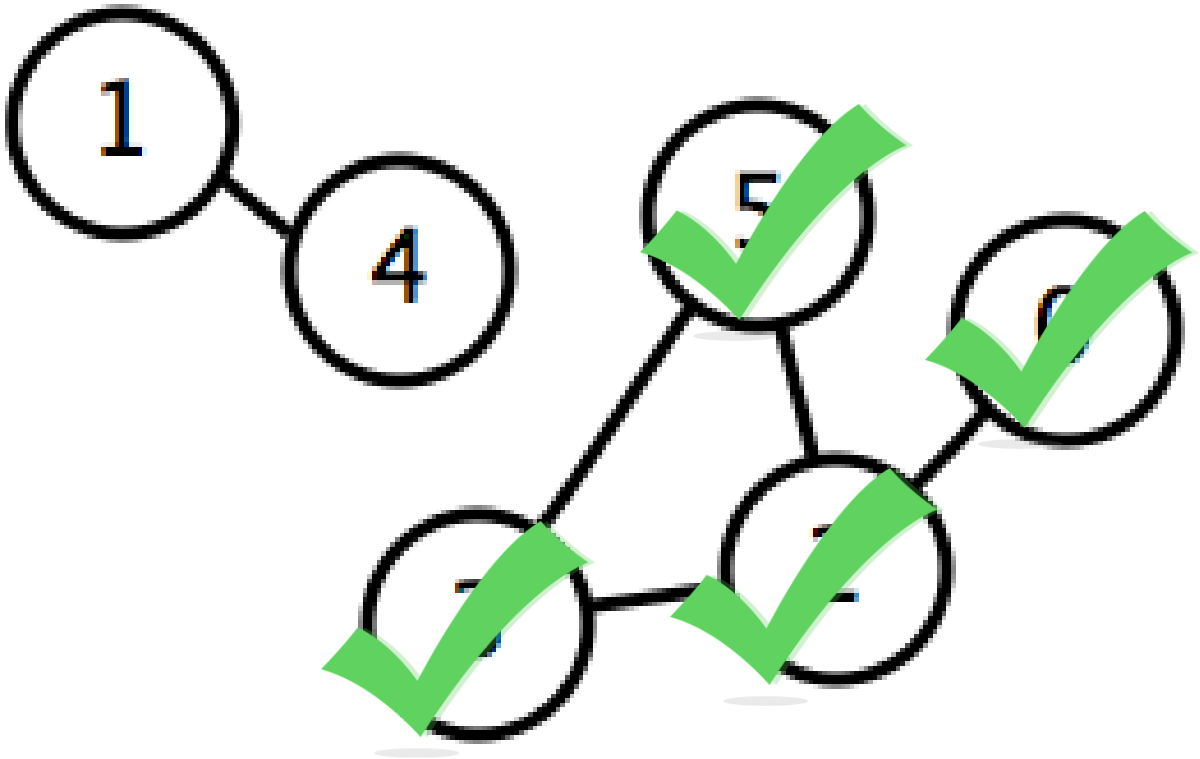
Grafos | Componentes Conexas



Grafos | Componentes Conexas

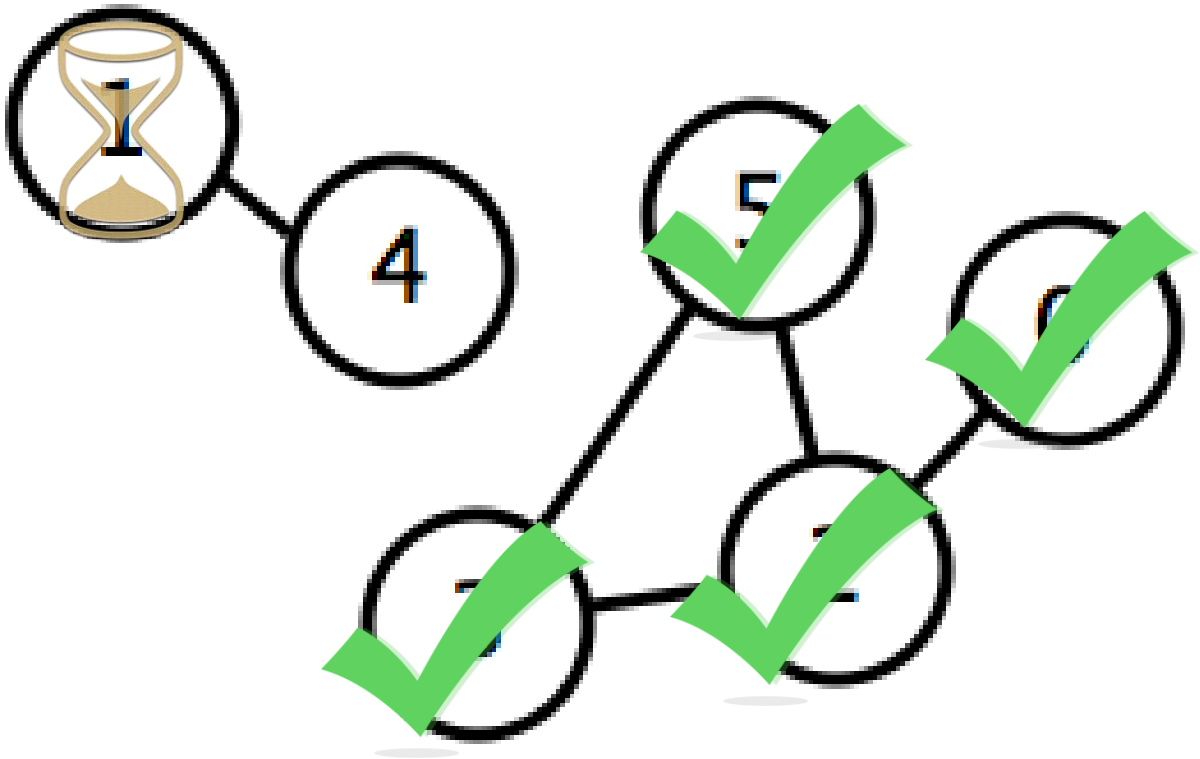


Grafos | Componentes Conexas

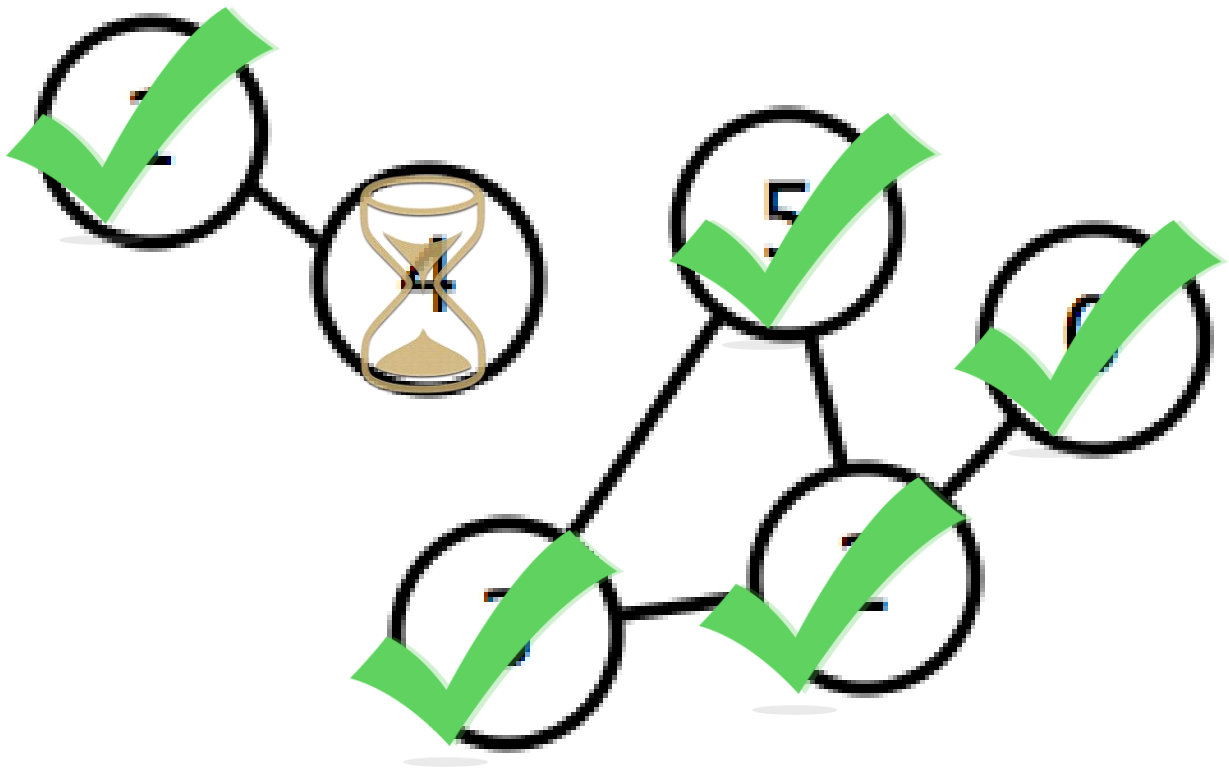


Grafos | Componentes Conexas

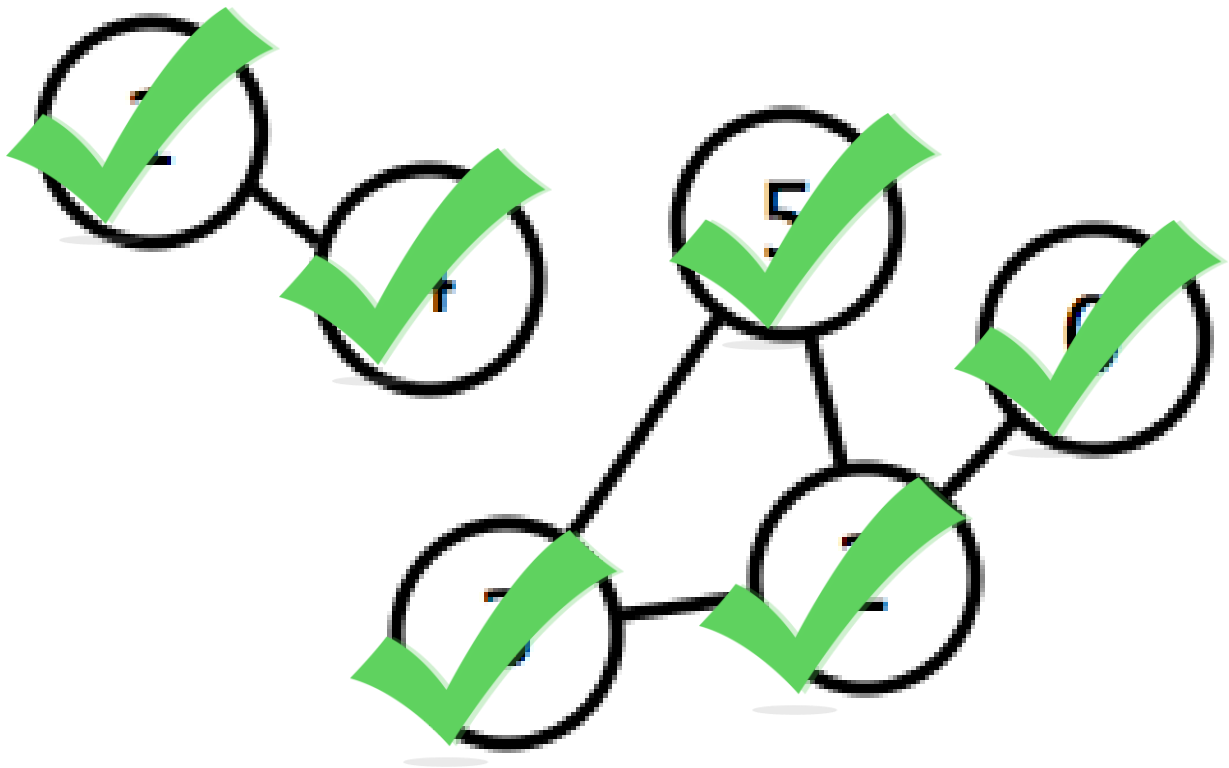
+1 Componente Conexa (2)



Grafos | Componentes Conexas



Grafos | Componentes Conexas



Grafos | Componentes Conexas

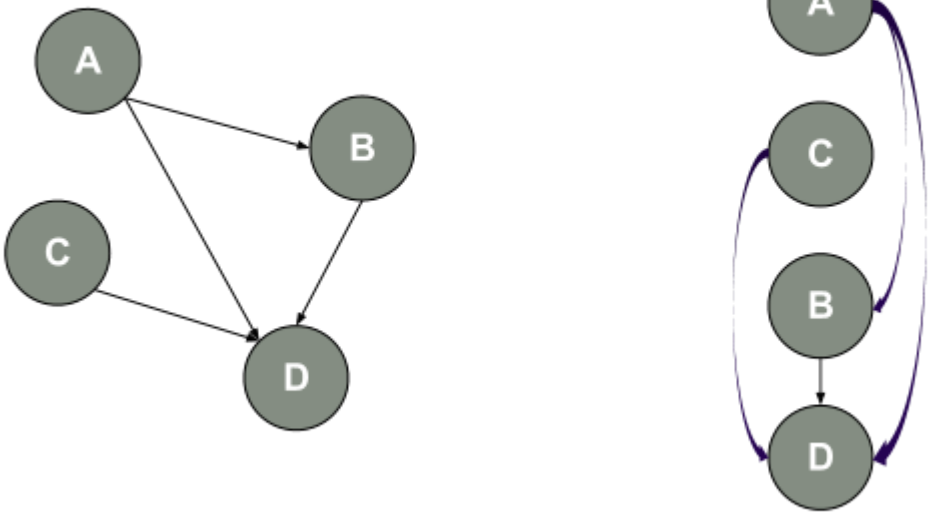
- Se empieza desde 0 y se recorre:
  - 0-2-5-3
- Al estar 1 no visitado se recorre los adyacentes de 1
  - 1-4
- Al estar 2,3,4,5 no visitado se ignoran
- Hay dos componentes conexas

Grafos | Ordenamiento Topológico

- Sobre un grafo acíclico dirigido (DAG)
- Ordenar nodos tal que para cualquier nodo u,v; al momento de eliminar u, v no contenga aristas hacia ella
- Utilizar el algoritmo de DFS

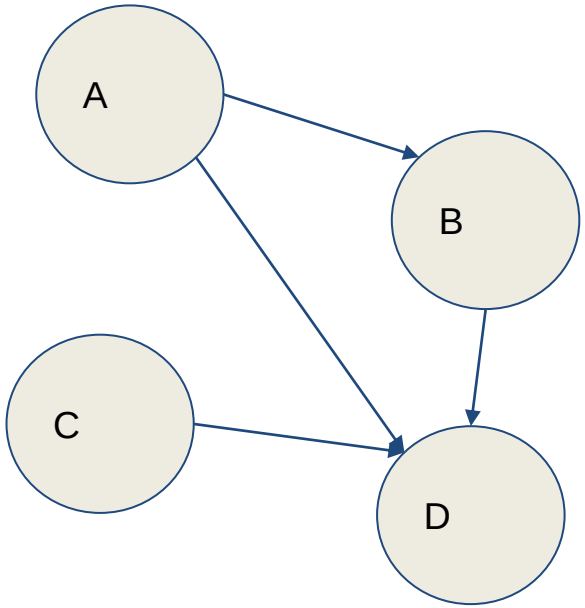
Grafos | Ordenamiento Topológico

DAG AND ITS TOPOLOGICAL SORT



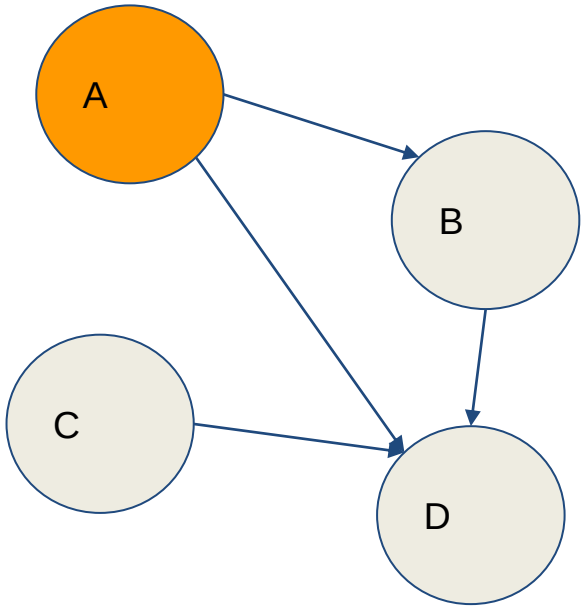
The above graph can be "sorted" as follows: [A, C, B, D]. That means that if the edge (A, B) exists, A must precede B in the final order!

Grafos | Ordenamiento Topológico



A y C no les incide ningún otro nodo

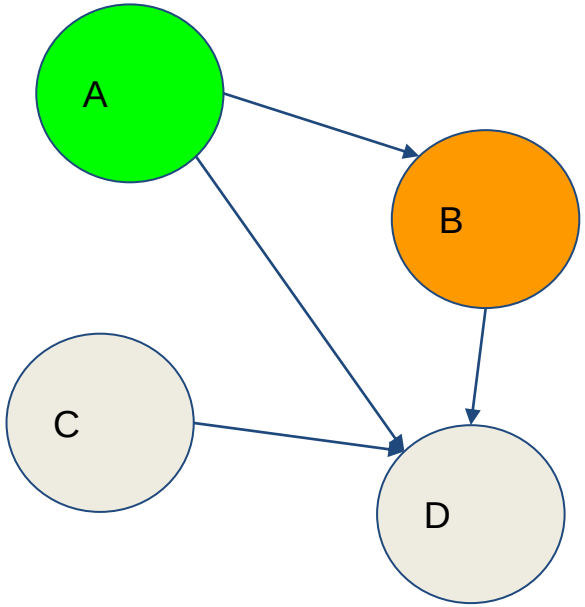
Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = { }

DFS(A) = DFS(B), DFS(D)

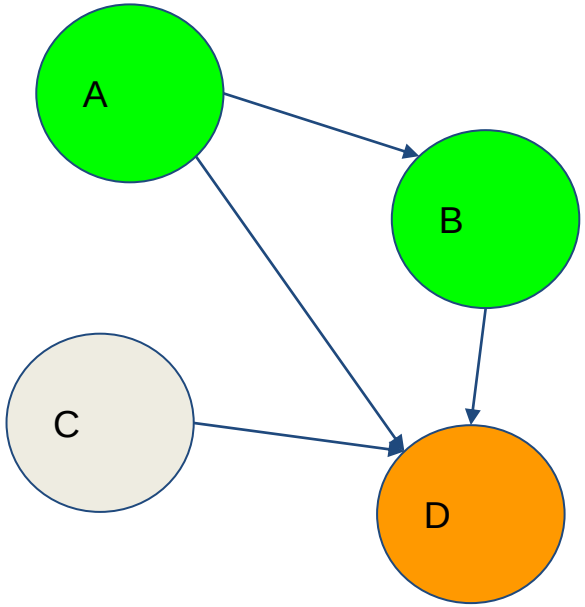
Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = { }

DFS(B) = DFS(D)

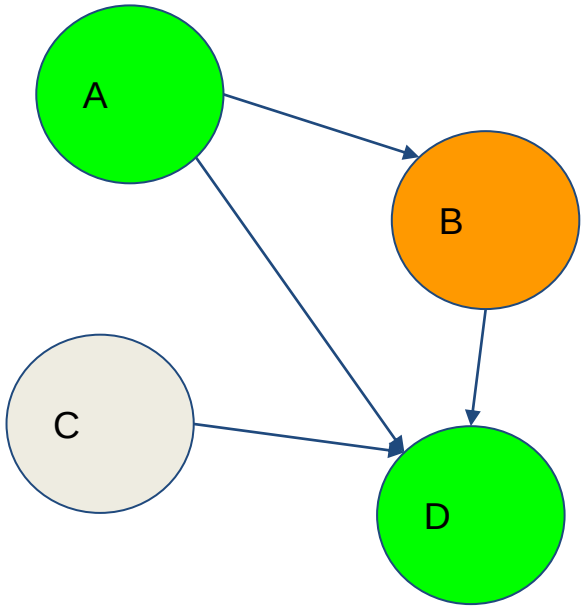
Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = {D}

DFS(D) = ø, TS.push(D)

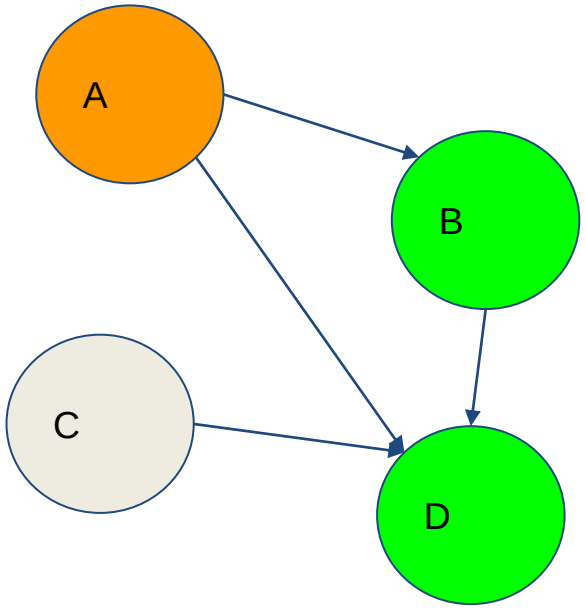
Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = { B, D}

DFS(B) = DFS(D), TS.push(B)

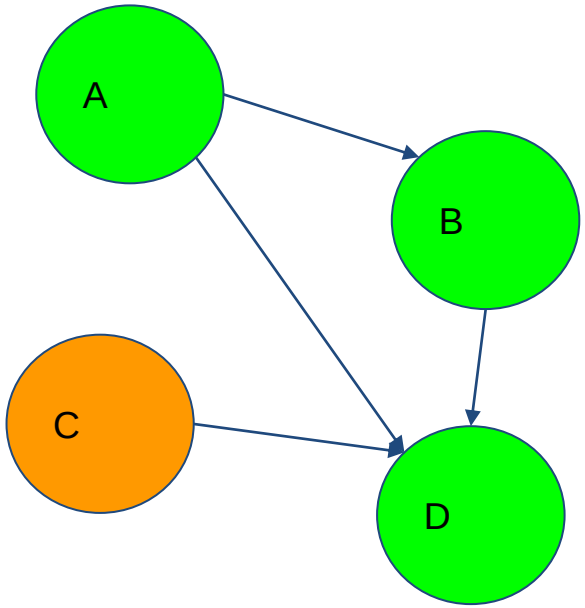
Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = { A, B, D}

DFS(A) = DFS(B), DFS(D), TS.push(A)

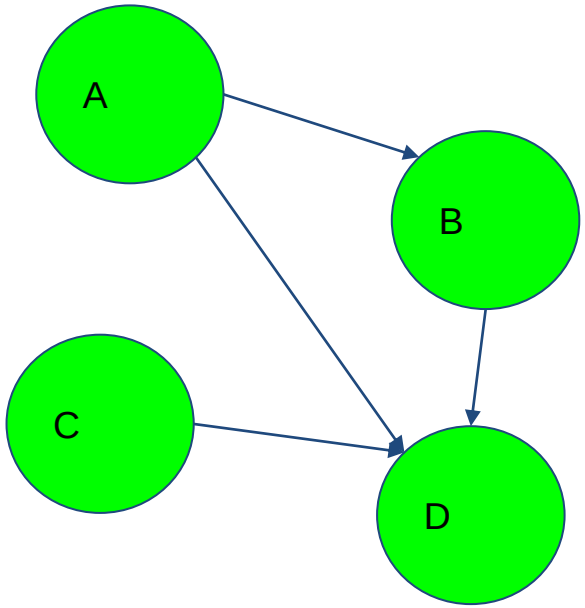
Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = { C, A, B, D}

DFS(C) = DFS(D), TS.push(C)

Grafos | Ordenamiento Topológico



TS = { C, A, B, D}

A y C pueden ir en cualquier orden, por lo que los toposort son => {C,A,B,D} ó {A,C,B,D}

Grafos | Ordenamiento Topológico

- Pseudocódigo

```
TopoSort(n):
   si v(n) ret ø
   v(n) = 1
   for edge in edges(n):
      TopoSort(edge)
   TS.push(n)
   ret ø
```

Grafos | Ordenamiento Topológico

- Pseudocódigo
- Siendo TS una pila
- Siendo edges(N) una lista de vértices que inciden en el nodo N
- Siendo V(N) un array de booleanos donde se entiende que si V(N) = 1 ya ha pasado un recorrido en profundidad por el nodo N

Grafos | Puntos de Articulación

- Dado un grafo, nos interesa saber que nodos, de ser removidos, hacen que el número de componentes conexas del grafo se incremente
- Idea ingenua: Contar componentes conexas “haciendo como si no existe” cualquier vértice u del grafo G={V,E}

Grafos | Puntos de Articulación

- Esta idea es $O(N^2)$ con N = nodos del grafo

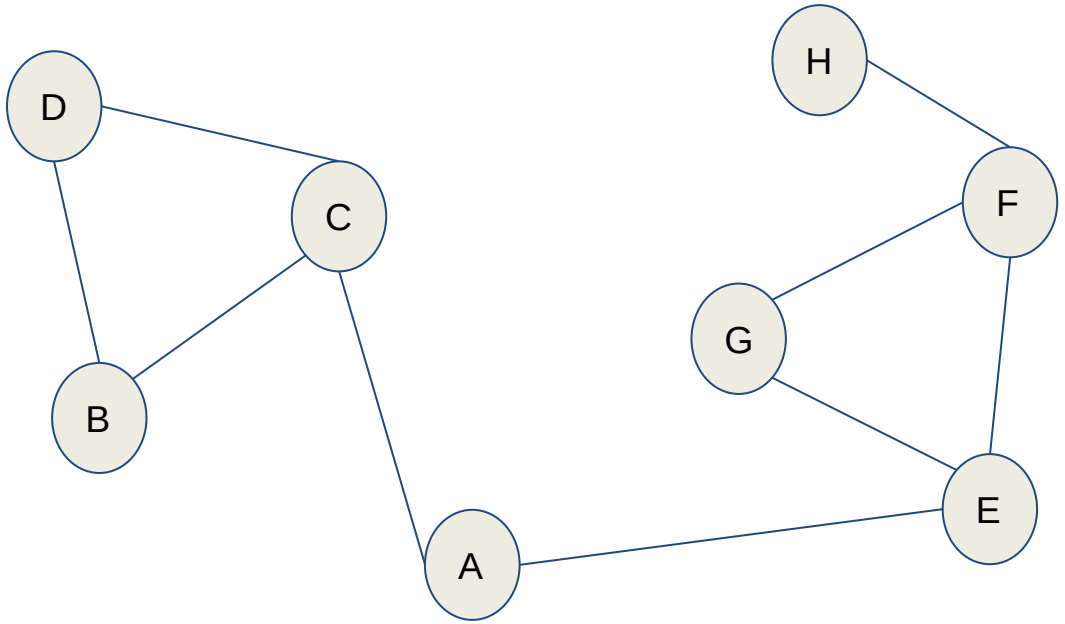
Grafos | Puntos de Articulación

- Algoritmo de Tarjan
  - Tomamos un nodo cualquiera y recorremos a través de DFS ese nodo
  - Llevamos cuenta de la unidad de tiempo en el que llegamos a cualquier nodo “v” (visitar 1 nodo suma 1 al tiempo)
  - Con esta misma idea podemos observar si se puede llegar a cualquier nodo por otro “camino”

Grafos | Puntos de Articulación

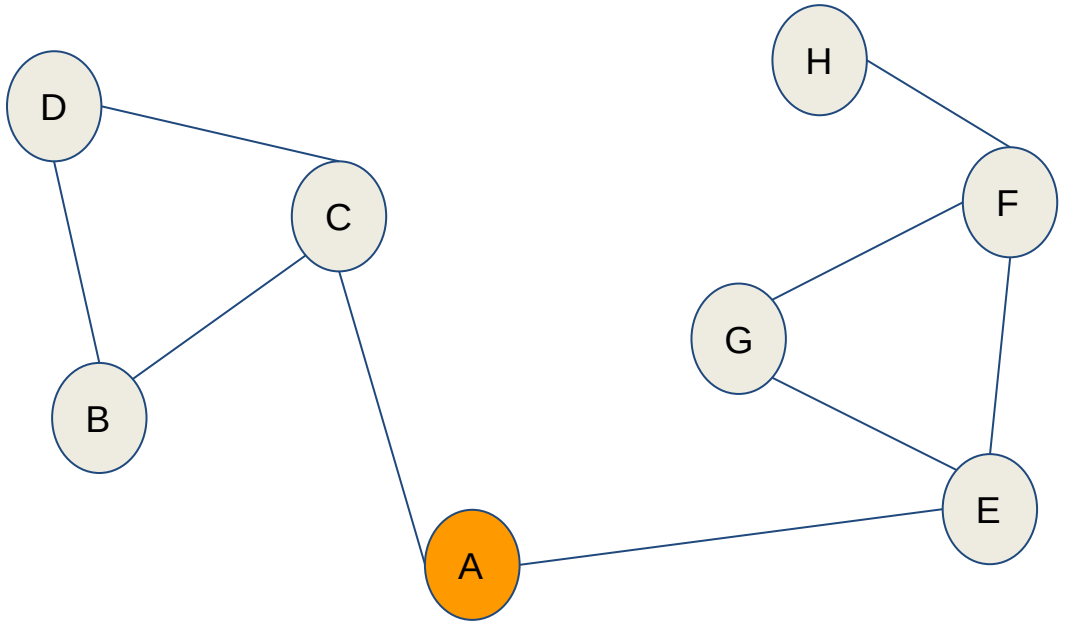
- Algoritmo de Tarjan
  - Condiciones para punto de articulación en u:
    i. El nodo raíz u (inicio) hizo más de un DFS hacia sus vecinos
    ii. Cualquier nodo no-raíz v conectado a u tiene un mínimo de tiempo mayor o igual al tiempo que se descubrió un nodo u

Grafos | Puntos de Articulación



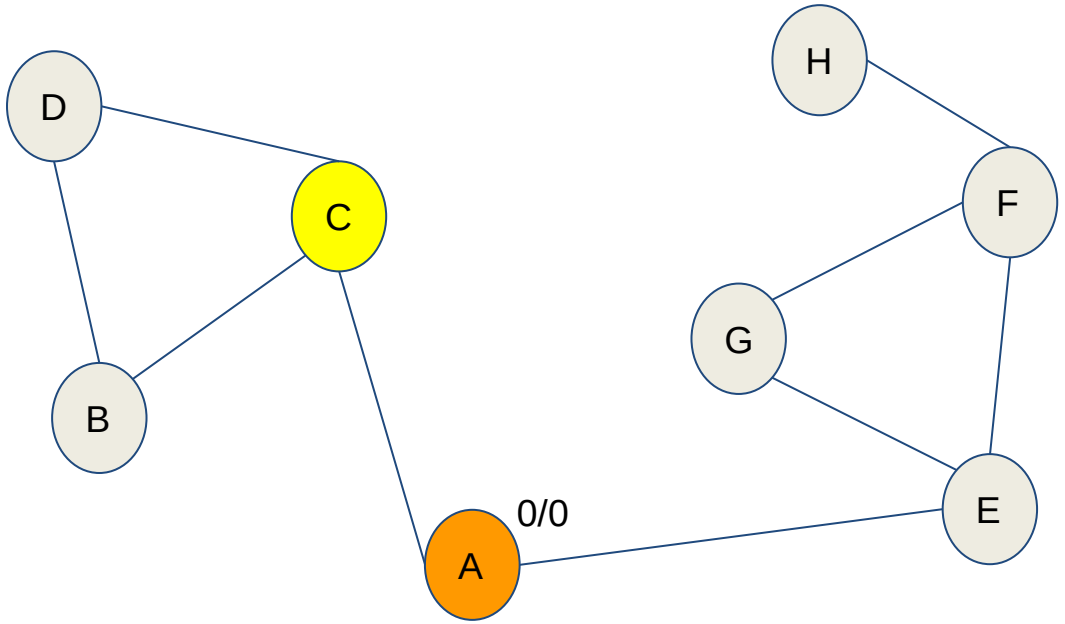
DFS

Grafos | Puntos de Articulación



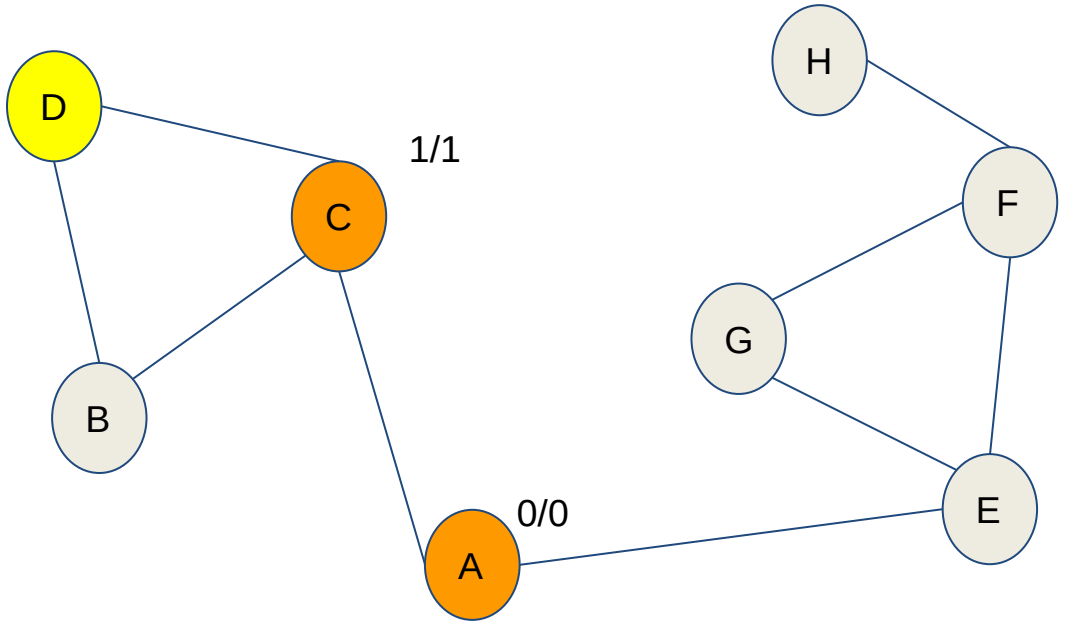
DFS_STACK = (A, 1)
LOWEST = { 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



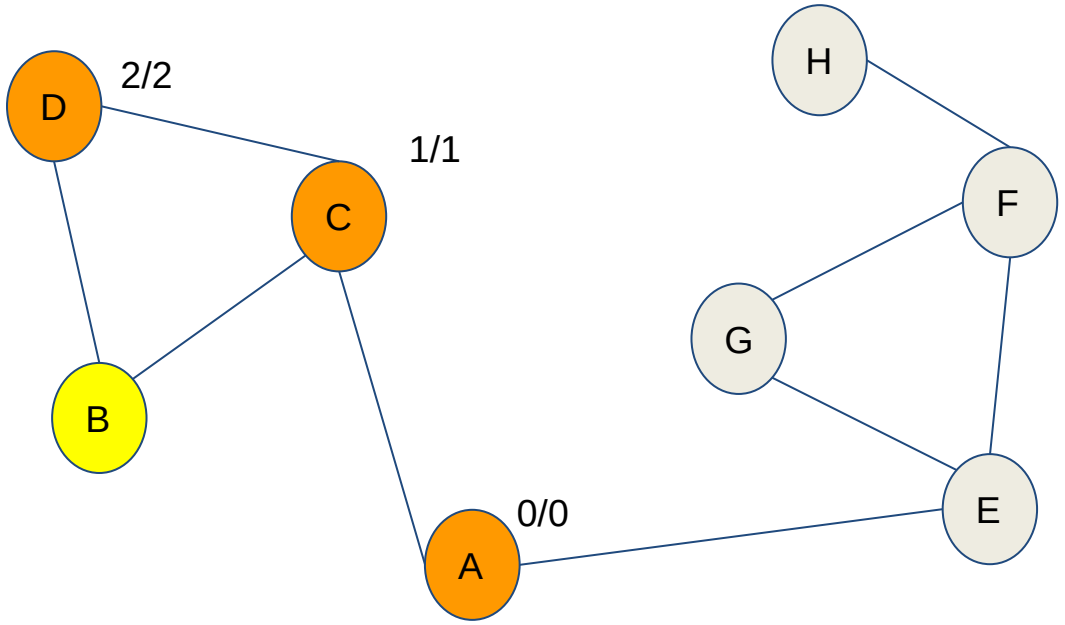
DFS_STACK = (C, 2)
LOWEST = { 0, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, -1, 0, -1, -1, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



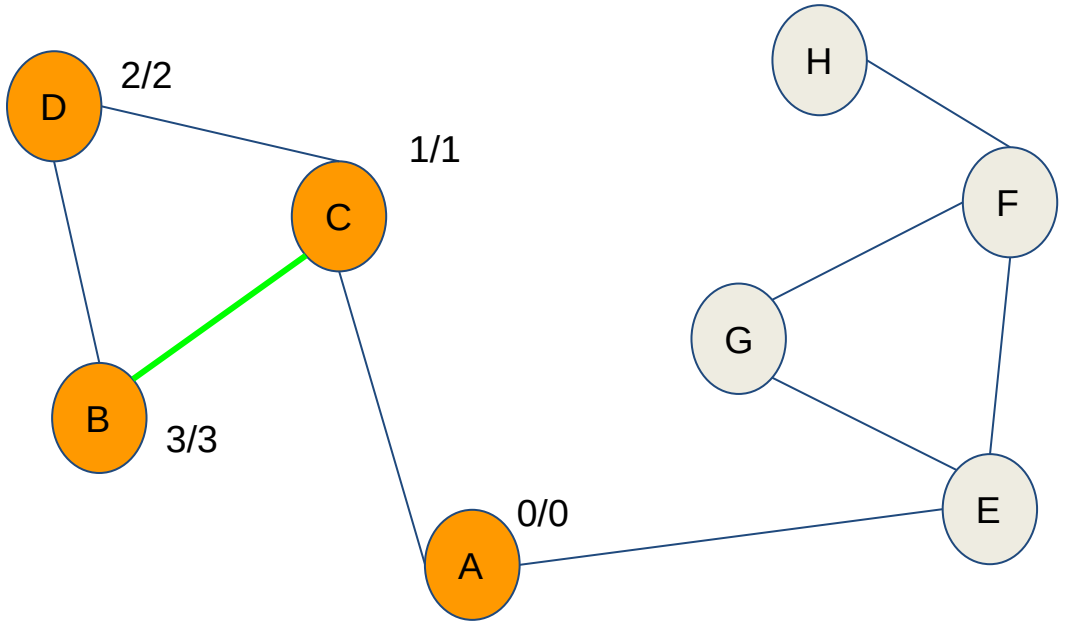
DFS_STACK = (D, 3)
LOWEST = { 0, -1, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 1, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, -1, 0, 2, -1, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



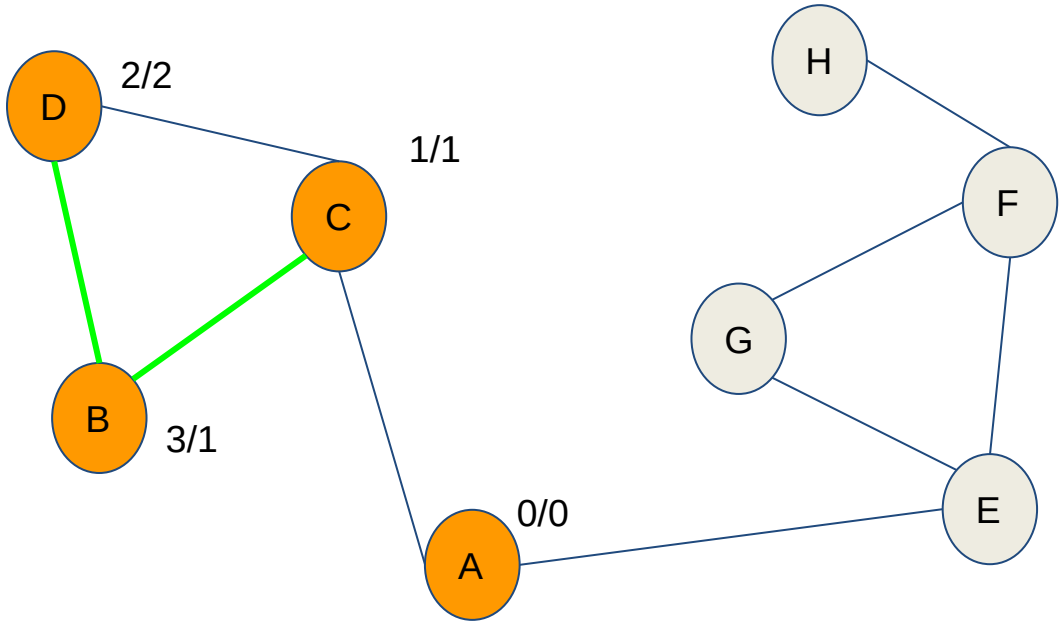
DFS_STACK = (B, 4)
LOWEST = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, -1, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



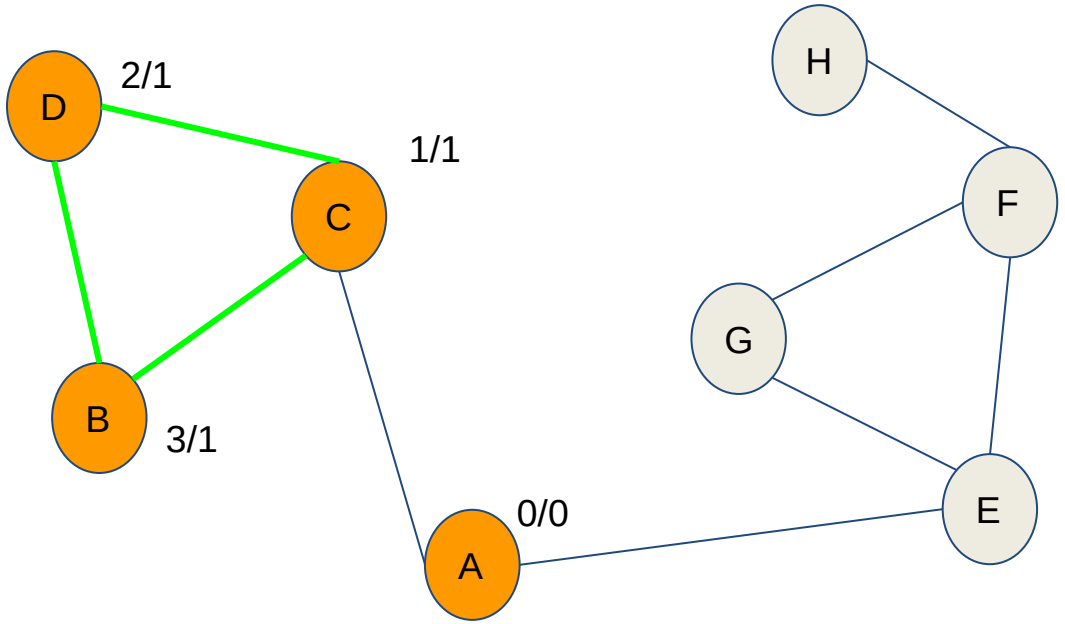
DFS_STACK = (B, 4)
LOWEST = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, -1, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (B, 4)
LOWEST = { 0, 1, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, -1, -1, -1, -1 }

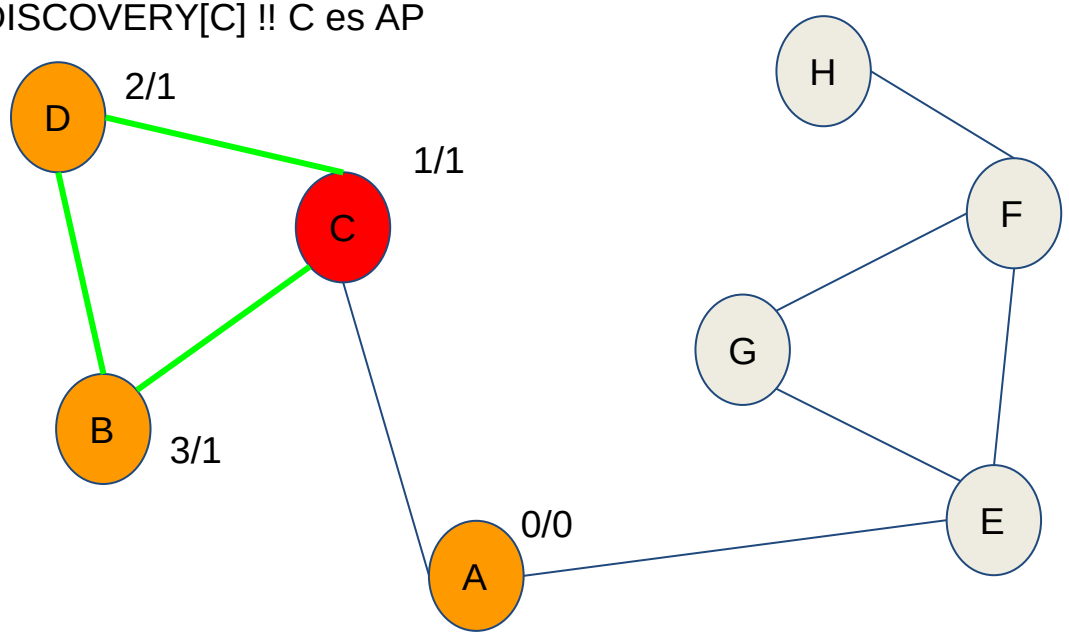
Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (B, 4)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, -1, -1, -1, -1 }

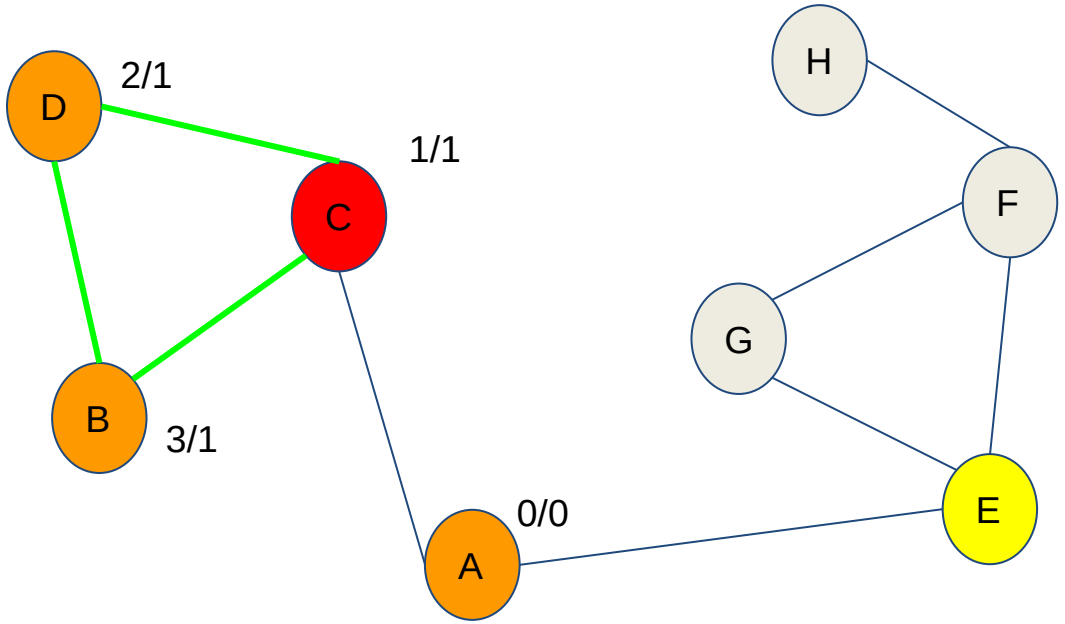
Grafos | Puntos de Articulación

LOWEST[D] >= DISCOVERY[C] !! C es AP



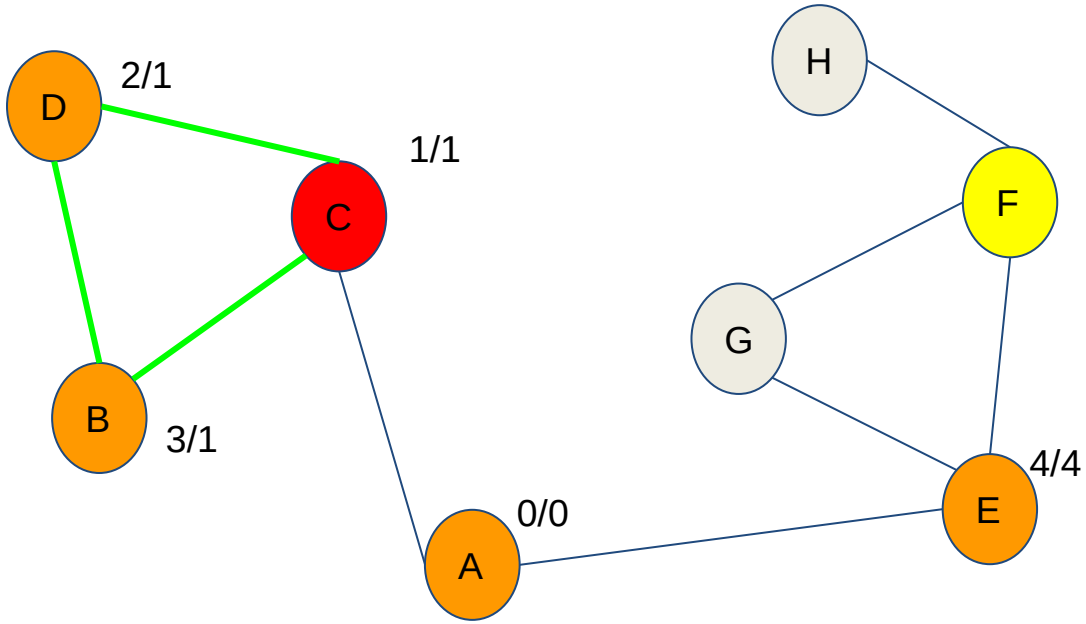
DFS_STACK = (B, 4)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, -1, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, -1, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



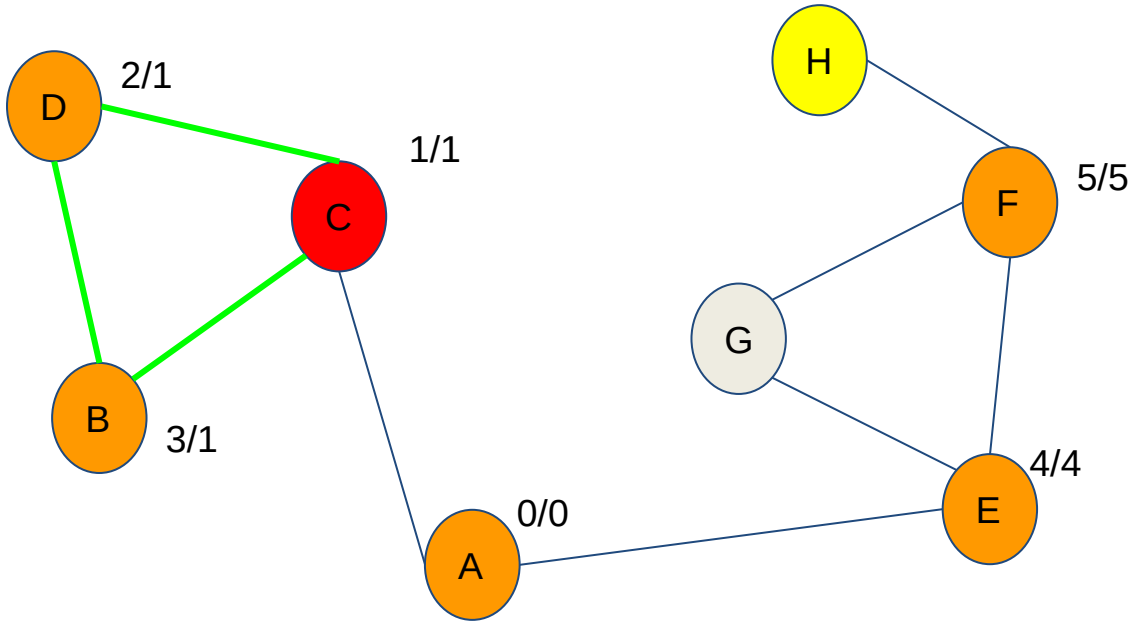
DFS_STACK = (E, 5)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, -1, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, -1, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, -1, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



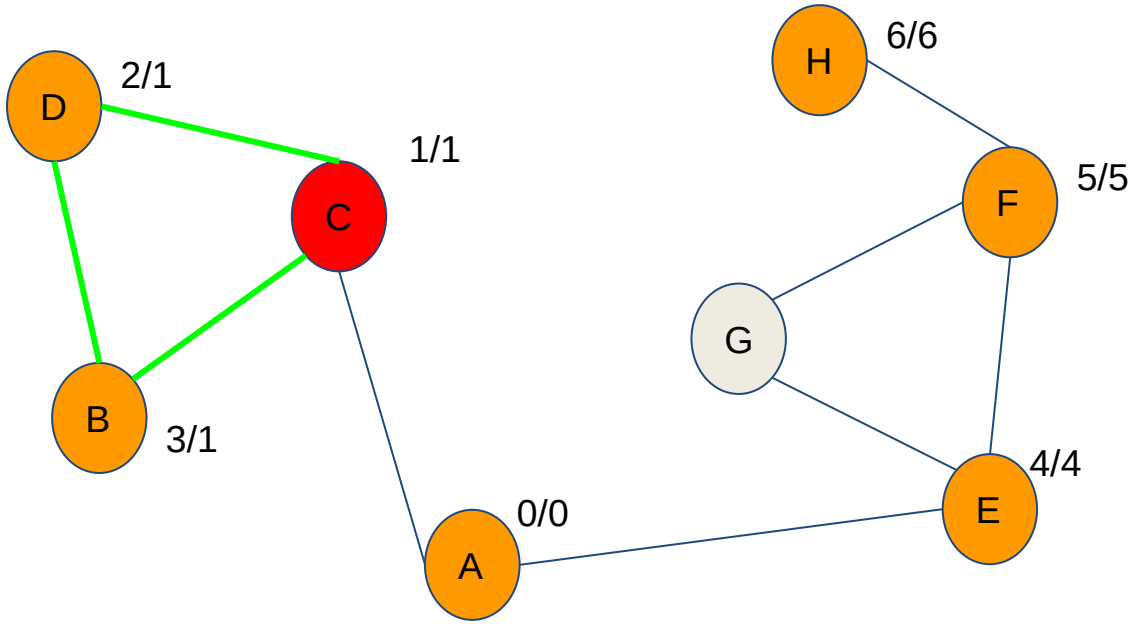
DFS_STACK = (F, 6)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 5, -1, -1 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, -1, -1 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, -1, -1 }

Grafos | Puntos de Articulación



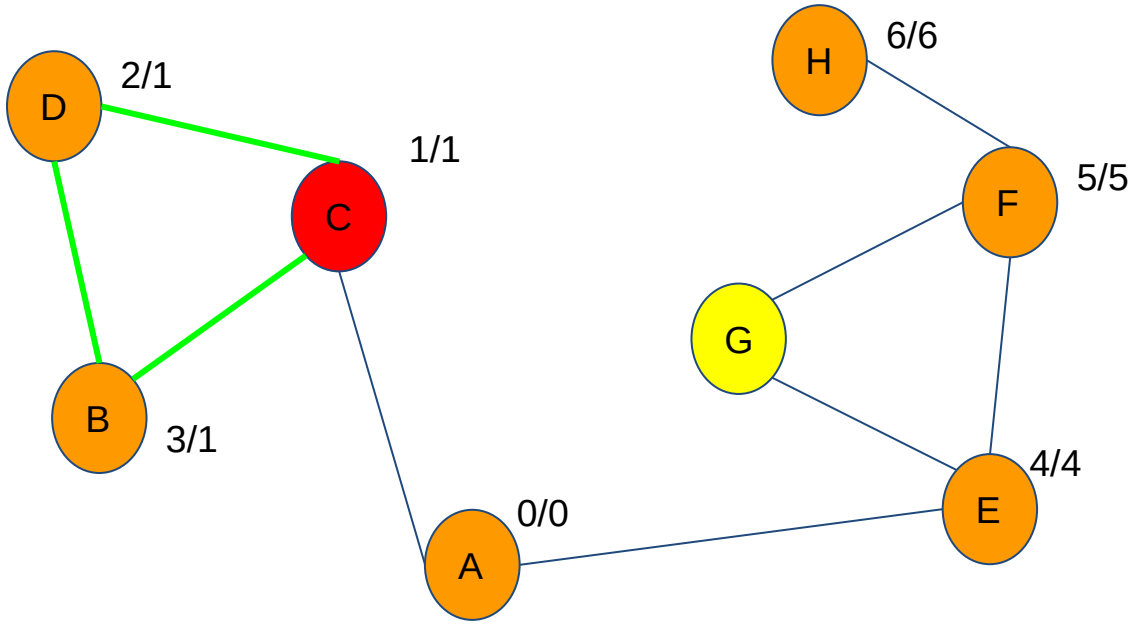
DFS_STACK = (H, 7)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 5, -1, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, -1, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, -1, 5 }

Grafos | Puntos de Articulación



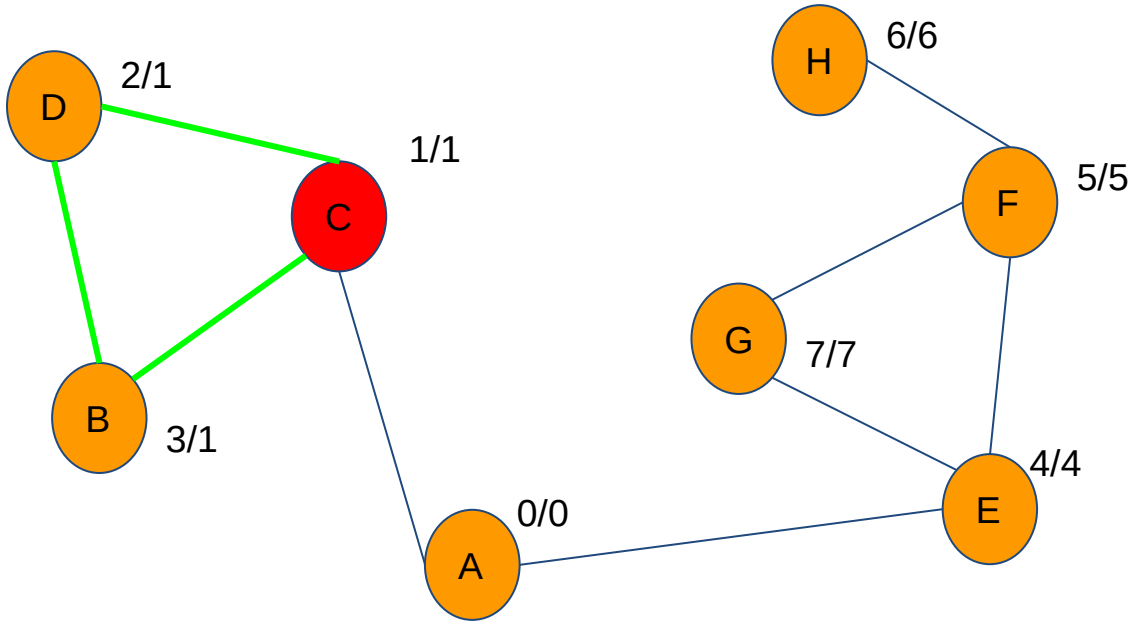
DFS_STACK = (H, 7)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 5, -1, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, -1, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, -1, 5 }

Grafos | Puntos de Articulación



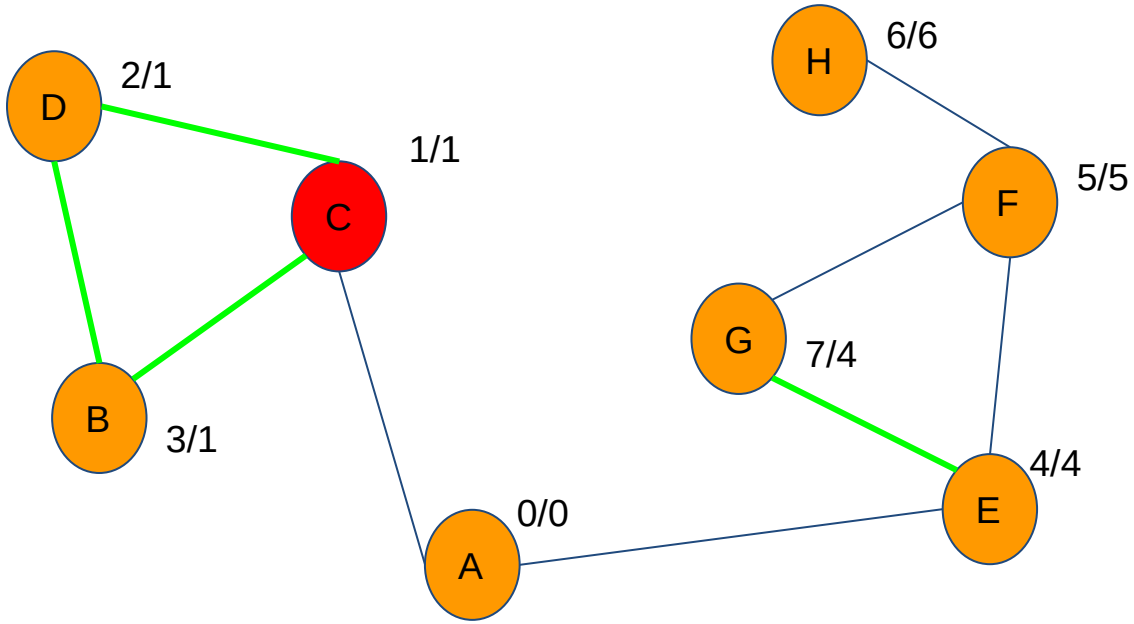
DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 5, 7, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

Grafos | Puntos de Articulación



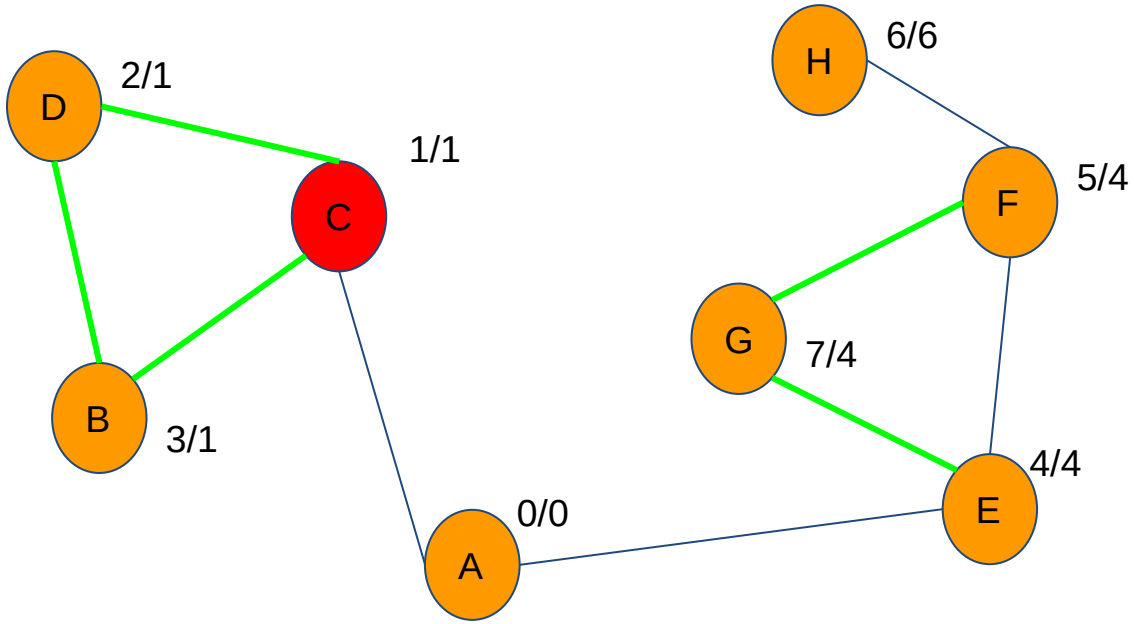
DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 5, 7, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 5, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

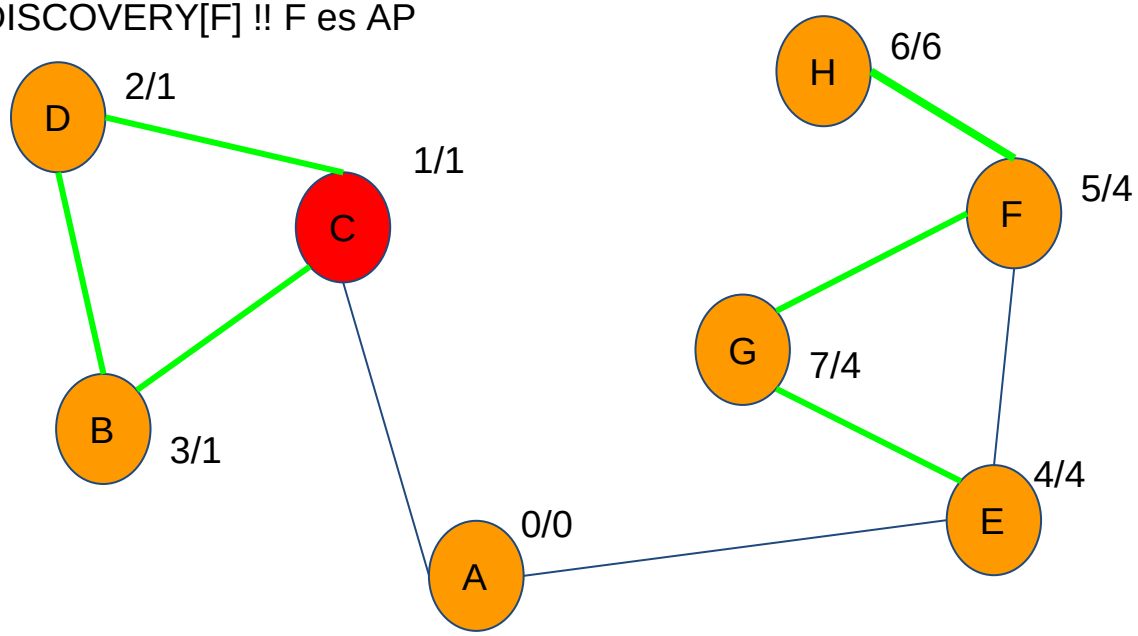
Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

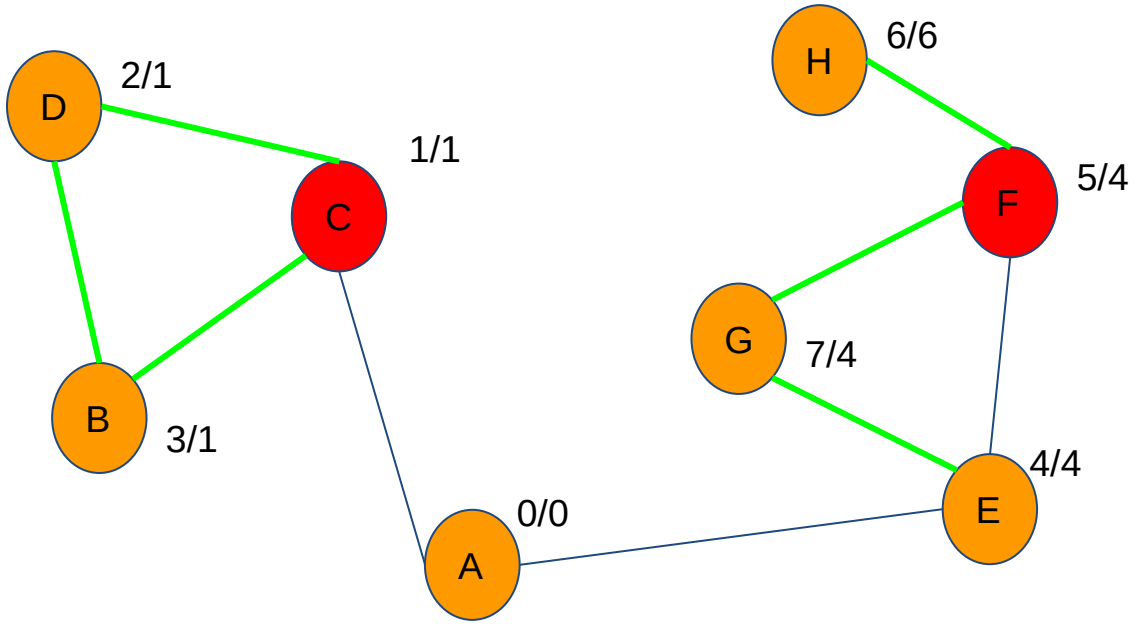
Grafos | Puntos de Articulación

LOWEST[H] >= DISCOVERY[F] !! F es AP



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

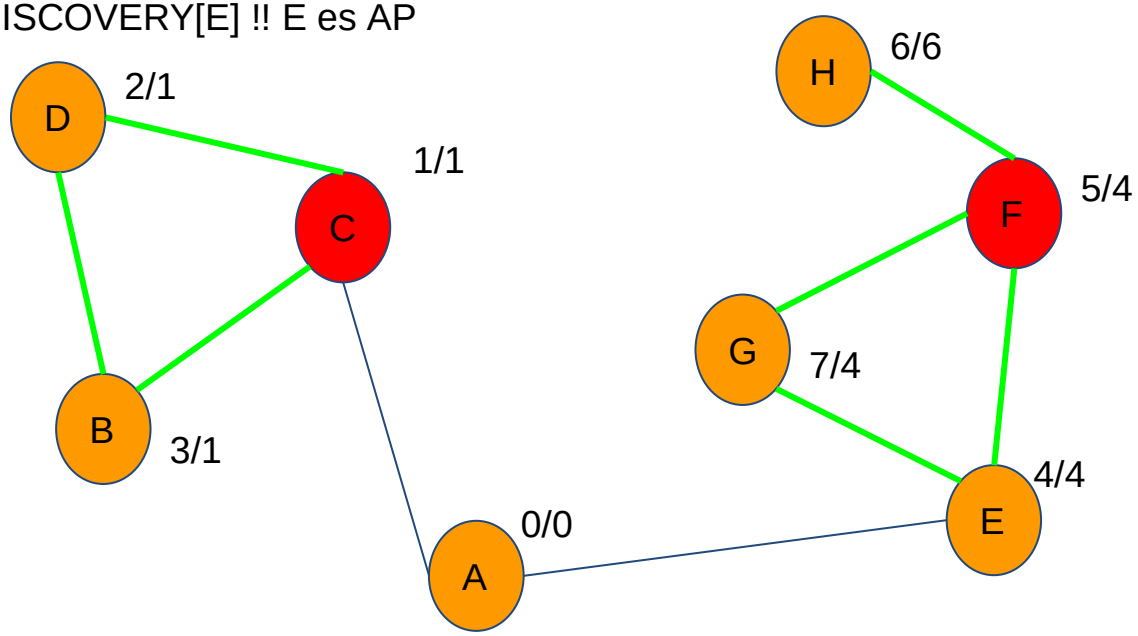
Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

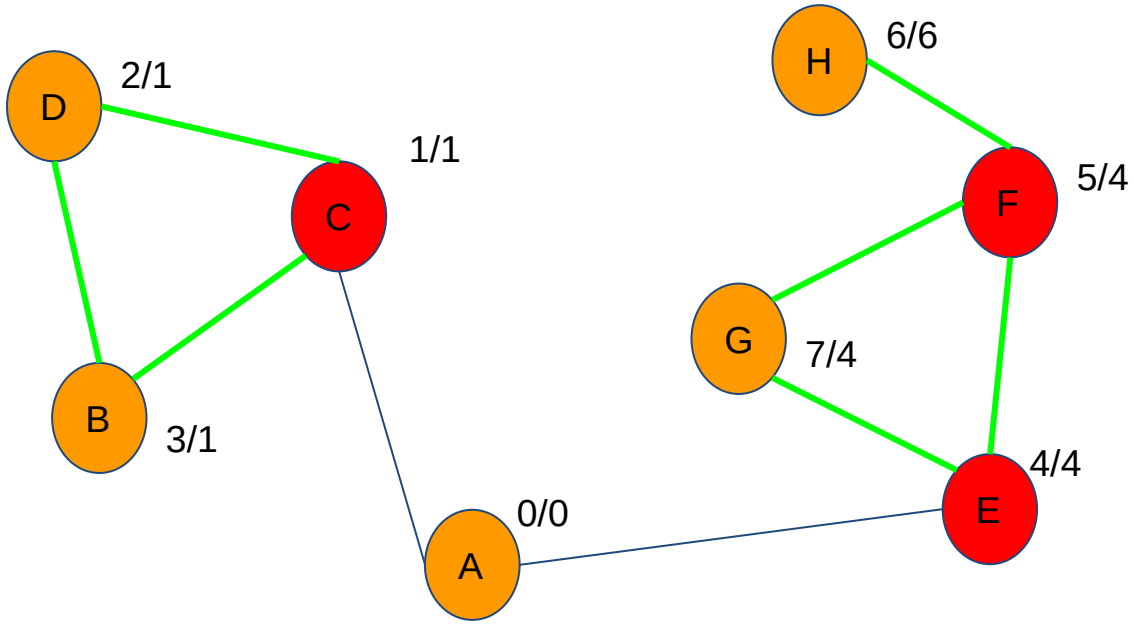
Grafos | Puntos de Articulación

LOWEST[F] >= DISCOVERY[E] !! E es AP



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

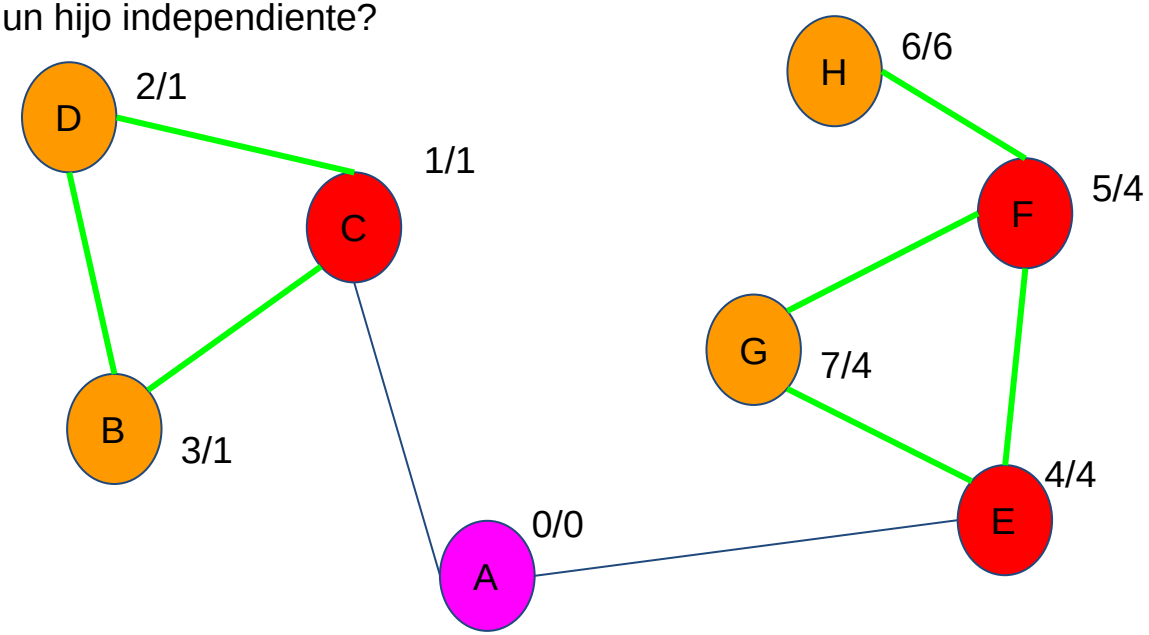
Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

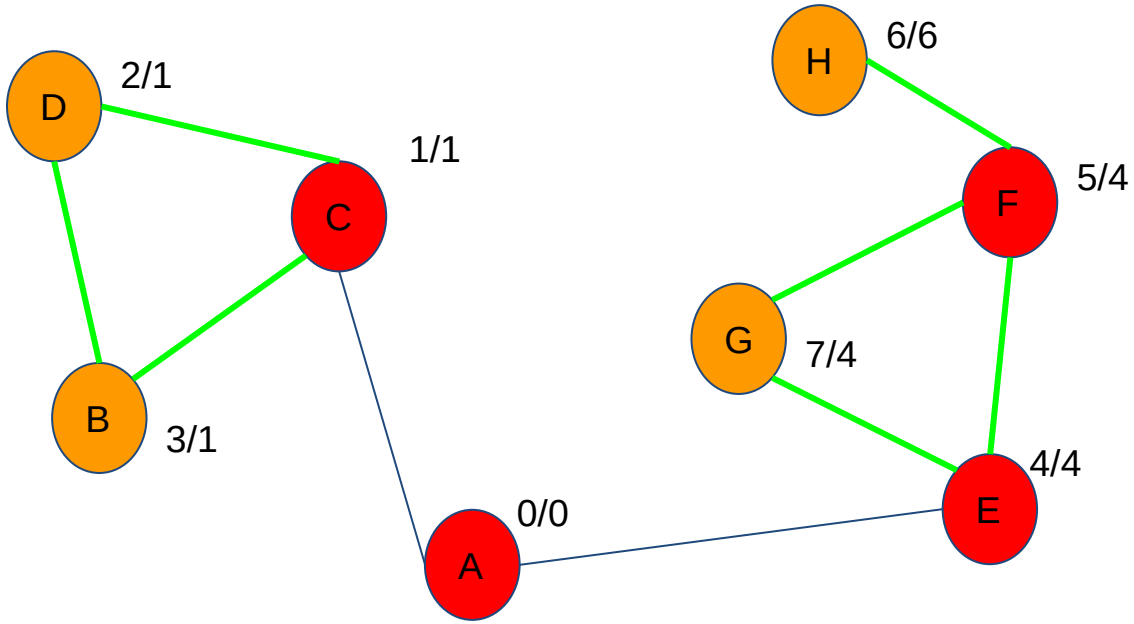
Grafos | Puntos de Articulación

¿A tiene mas de un hijo independiente?



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

Grafos | Puntos de Articulación



DFS_STACK = (G, 8)
LOWEST = { 0, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 6 }
DISCOVERY = { 0, 3, 1, 2, 4, 5, 7, 6 }
VISITED = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
PARENTS = { -1, 3, 0, 2, 0, 4, 5, 5 }

Grafos | Puntos de Articulación

- Pseudocódigo

```
AP(u, t):
        V(u) = 1
        d[u] = low[u] = t++
        children = 0
        for v in edges[u]:
                if(!V(v)):
                        children++, p[v] = u
                        AP(v, t)
                        low[u] = min(low[u], low[v])
                        checkAP(u, v, children)
                else if(v != p[u])
                        low[u] = min(low[u], d[v])
```

Grafos | Puntos de Articulación

- Pseudocódigo

```
checkAP(u, v, children):
        if p[u] == -1 && children > 1:
                ap[u] = t
        if p[u] != -1 && low[v] >= disc[u]:
                ap[u] = t
```

Semana que viene...

- Grafos (parte II)
  - Ponderamiento en grafos
  - Colas de prioridad
  - Algoritmos de distancia mínima (floyd warshall, dijkstra)
  - Estructura Union-Find
  - Árboles de recubrimiento (Prim, Kruskal)

¡Hasta la próxima semana!

Ante cualquier duda sobre el curso o sobre los problemas podéis escribirnos (preferiblemente copia a todos)

David Morán (david.moran@urjc.es)
Juan Quintana (juandavid.quintana@urjc.es)
Sergio Pérez (sergio.perez.pelo@urjc.es)
Jesús Sánchez-Oro (jesus.sanchezoro@urjc.es)
Isaac Lozano (isaac.lozano@urjc.es)
Raúl Martín (raul.martin@urjc.es)