T21

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} \end{pmatrix}$

$A_{11} = d$

$A_{12} = -c$

$A_{21} = -b$

$A_{22} = a$

$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow |A| = 1 \quad \frac{1}{|A|}A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 2 & 1 & 3 & \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}^{-1} \Rightarrow |A| = 0$ 无逆

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \Rightarrow (A, E) \to (E, A^{-1}) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T22 (1)

$X\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -10 \\ -1 & -23 & 33 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}, & 0, & 0 \\ 0 & \frac{1}{b}, & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) $XP = PB$

$$X = PBP^{-1}$$

$$X^5 = \underbrace{PBP^{-1}}\ \underbrace{PBP^{-1}}\ \underbrace{PBP^{-1}}\ \underbrace{PBP^{-1}}\ \underbrace{PBP^{-1}}$$

$$= P \cdot B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1}$$

$$= PB^5P^{-1}$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

T2) $(A+2E)^{-1}(\underbrace{A^2+A-2E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

也可 $(A+2E)(A-E)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

T25

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$$

$$|A^{-1}|=|A|^{-1},\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \Rightarrow A^*=|A|A^{-1}=\frac{A^{-1}}{|A^{-1}|}$$

$$=\frac{1}{3}A^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&1&1\\-1&-5&4\end{bmatrix}$$

$$(A^*)^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\-1&-5&4\end{bmatrix}$$

T26

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sum A_{ij}=1+1+1+1-2-2-2+1+1+0=0$$

T27

$|A|=2$，$-A$是(A^*+kA^{-1})的逆

$$(-A)\cdot(|A|A^{-1}+kA^{-1})=E$$

$$-1(2+k)=1$$

$$k=-3$$

T28 (2)

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E$$

$$(A-B)X(A-B)=E$$

$$X=(A-B)^{-1}(A-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

T28 (3)

$|A|>0 \quad A^* = \mathrm{diag}(1,-1,-4) \qquad |A^*| = |A|^{n-1} = |A|^2 \quad |A| = 2.$

$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A-E)BA^{-1} = 3E$

$B = 3(A-E)^{-1}\cdot E\cdot A$

$= 3(A-E)^{-1}\cdot A$

$= 3\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

T32 $A^2 - A + E = 0$

$\Rightarrow A(E-A) = E$

A 有逆 → 非奇异

T33 $A^2 + AB + B^2 = 0$

因为 B 可逆，$|B| \neq 0 \quad |B^2| = |B||B| \neq 0$

$A^2 + AB = -B^2 \Rightarrow |A^2 + AB| = |A||A+B| \neq 0$

$\Rightarrow |A| \neq 0,\ |A+B| \neq 0$

✓

T35 $E + BA^{-1}$ 可逆

$\Rightarrow |E + BA^{-1}| = |AA^{-1} + BA^{-1}| = |A+B||A^{-1}| \neq 0$

A+B 可逆

$\Rightarrow E + A^{-1}B = A^{-1}(A+B)$ 可逆

逆阵为 $(A+B)^{-1}A$

T38 $|A|=\frac{1}{2}$ 求$|A^*|$ $|(\frac{1}{3}A)^{-1}-2A^*|$

$$|A^*|=|A|^{n-1}=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$$

$$|(\frac{1}{3}A)^{-1}-2A^*|=|3A^{-1}-2A^*|=|3\frac{A^*}{|A|}-2A^*|=|4A^*|=4^5\cdot\frac{1}{16}=64$$

T41 (1)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_1+A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1+A_{22}B_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 5 \\ -4 & 9 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

不抄题目了

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

T43.

(1) $\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AB_3 & AB_4 \\ CB_1 & CB_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} AB_3=E \\ AB_4=O \\ CB_1=O \\ CB_2=E \end{cases}$$

$B_1=O$, $B_2=C^{-1}E$, $B_3=A^{-1}E$, $B_4=O$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & & O & \\ -2 & 1 & & & \\ & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ O & & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(2) 逆 $= \begin{bmatrix} O & & 1 & -1 & 1 \\ & & 0 & 1 & -1 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & & & \\ 2 & -1 & & O & \end{bmatrix}$

(3) 逆 $= \begin{bmatrix} & O & & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & & O & 0 \\ & \frac{1}{a_3} & \ddots & \\ O & & \frac{1}{a_n} & \end{bmatrix}$

(4) 逆 $= \begin{bmatrix} O & \frac{1}{a_{n+1}} & \frac{1}{a_{n+2}} & \cdots & \frac{1}{a_{2n}} \\ & \frac{1}{a_n} & & & \\ \frac{1}{a_{n-1}} & & & & \\ \frac{1}{a_1} & & & O & \end{bmatrix}$