第三章作业:

T1 $5(\alpha-\beta)+4(\beta-\gamma)=2(\alpha+\gamma)$

$$\gamma=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{6}\beta=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

T2 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1\\ \quad k_2+k_3=2\\ k_1+\quad k_3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-1\\k_2=-2\\k_3=4\end{cases}\quad \beta=-\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3$$

T4 β是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合,

(1) 需要 $r(\alpha)=r(\alpha,\beta)$

$$r(\alpha)\beta)\Rightarrow\begin{pmatrix}1&3&1&1\\0&-1&a&2\\1&2&b&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=r(A,\beta)\quad\begin{matrix}1&0&1&-2\\0&1&0&1\\0&0&a&3\\0&0&b-1&-2\end{matrix}$$

得: $a\neq0$, $b\neq1$ 时 是线性组合

且 $a=-\frac{3}{2}(b-1)$

$a=1$, $b=\frac{1}{3}$时, $\beta=-5\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$;

(2)

不能线性表示

$a=0$ 或 $b-1=0$时

或 ($a\neq0$, $b\neq1$ 且 $a\neq-\frac{3}{2}(1-b)$)时

T5(1) 不能线性表示

$r(A)\neq r(\tilde{A})$

$$(a,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

结果 $(a+1)=0$ 且 $b\neq0$时

(2) 线性表示+表达式唯一

$r(A)=r(\tilde{A})=m$ $\underline{(a+1)\neq 0}$

(3) 不唯一

$r(A)=r(\tilde{A})\neq m$

$<m$ $\underline{(a+1)=0 \text{ 且 } b=0}$

T6. (1) 3个向量>维→相关

(2) 3×3 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $|A|=0$ 线性相关

(3) 3×3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $|A|=-9\neq 0$ 线性无关

(4) 3个4维 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=3$ 线性无关

T7

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & k+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$

无论k取什么值,都线性无关

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ k & -3 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 如果 $k+6=0$,则线性相关

如果 $k+6\neq 0$ 线性无关

T15

$(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ 可由 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 线性表示

证明：$(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)$ 线性无关的，

$$\varepsilon_i = k_{i1}\alpha_1 + \cdots + k_{in}\alpha_n$$

$|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ \vdots \\ \varepsilon_n^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{vmatrix} \neq 0$$ (即 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 秩为 n)

则 线性无关

T10 $(l\beta-\alpha)$ $(m\gamma-\beta)$ $(\alpha-\gamma)$ 线性无关 l, m

$$k_1 l\beta - k_1\alpha + k_2 m\gamma - k_2\beta + k_3\alpha - k_3\gamma = 0$$

$$(k_3-k_1)\alpha + (k_1 l - k_2)\beta + (k_2 m - k_3)\gamma = 0$$

因为 α, β, γ 线无关

$$\begin{cases} k_1 = k_3 \\ k_1 l = k_2 \\ k_2 m = k_3 \end{cases}$$

即 $k_1 lm = k_1$

$lm=1$ 时 $(k_1 k_2 k_3)$ 有非0解

故 $lm \neq 1$，方程解全为0，线性无关.

T16 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 线性表示任意一个

$\Leftarrow$ $(e_1 \cdots e_n)$ 可被 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 线性表示

$(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 又可被 $(e_1 \cdots e_n)$ 线性表示

则 $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 同 $(e_1 \cdots e_n)$，线性无关

$\Rightarrow$ 任取 β，有 $k_1\alpha_1 + \cdots k_n\alpha_n + k\beta = 0$，$\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 线性无关

必有 $k \neq 0$，$\beta = -\frac{k_1}{k}\alpha_1 - \cdots\cdots - \frac{k_n}{k}\alpha_n$ ✓

T19 极大线性无关组

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $r(A)=4$ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 极大线性无关组

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 14 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $r(A)=4$ 极大组为 $\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_5$

T20

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=2$ 极大无关组 α_1,α_2

$\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$

$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$

(2) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=3$ 无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

T21 $\alpha = 2\xi - \eta$ $\beta = \xi + \eta$ $\gamma = -\xi + 3\eta$

① $k_1(2\xi-\eta) + k_2(\xi+\eta) + k_3(-\xi+3\eta) = 0$

$\begin{cases} 2k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$ ⇒ 有非零解 ✓

② 且已知 $4\alpha - 5\beta + 3\gamma = 0$ ✓

③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $2<3$ 线相关 ✓

T24 (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_3, x_4, x_5 自由、令 $x_3, x_4, x_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$$

(4) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r_A = 3} \quad r_{\tilde{A}} = 4$$

无解

—

T26

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ x_3, x_4 自由。令 $x_3, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2$$

(2) $a\eta_1 + b\eta_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ 代入 (II)

得 $\begin{pmatrix} -b \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1+2c_2 \\ c_1+2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases} c_1 = -b \\ c_2 = b \\ a = b \end{cases}$ 得 $c_2 = -c_1$

得：$\eta = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 无穷多

T27 (1)

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1-k & k-1 & k^2-k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

$k\neq 1$ 时

$$B=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 & -k \\ 0 & 0 & 2+k & (1+k)^2 \end{pmatrix}$$

若 $k=-2$ 且 $k+2=0$，$(1+k)^2\neq 0$ 无解

若 $k\neq -2$ 原方程有唯一解

当 $k=1$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 无穷多解

令 $y=z=0$，得 $\gamma_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

取 $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$X=\gamma_0+C_1\eta_1+C_2\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & k \\ 1 & 1 & -2 & k^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & k^2 \\ 0 & -3 & 3 & k-k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{pmatrix}$$

$k=1$ $\begin{cases} x_1=1+x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$

$k=-2$ $\begin{cases} x_1=4+x_3 \\ x_2=2+x_3 \end{cases}$

唯一解 $r(A)=r(\bar{A})=n$，不可能

无解 $r(A)\neq r(\bar{A})$ $\quad k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时

无穷解 $r(A)=r(\bar{A})<n$ $\quad k-k^2=2-2k^2$，$k=1$ 或 $k=-2$

Δ

T29 $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & a_2^3-a_1^3 \\ 0 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 & a_3^3-a_1^3 \\ 0 & a_4-a_1 & a_4^2-a_1^2 & a_4^3-a_1^3 \end{pmatrix}$

$|\tilde{A}| = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j - a_i) \neq 0$

$r(\tilde{A}) = 4$

无解

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) $a_1=a_3=a$, $a_2=a_4=-a$, $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

代入特解 $a^2=1$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

T31

$Ax=0$, 对于n维向量 $x=(x_1,\cdots x_n)^T$, 则 $A=0$

证: 由于 X 的任意性, 可知 $AX=0$ 基础解系有n个解

$r(A)=n-n=0$, $A=0$

T32 $|A|=0$ 证明 $(A_{i1}, A_{i2}\cdots A_{in})^T$ 是基础解系

因为 $A_{ij}\neq 0$ $\underline{r(A)=n-1}$, 又因为方程组有n个未知数

则 $1=n-(n-1)$ 基解系只有1个非零解向量

也就是任何非零向量即可

而 $A_{ij}\neq 0$, $(A_{i1},\cdots A_{in})^T$ 是基解系

T34 $\eta_1\cdots\eta_r$ 是 $AX=0$ 基础解系，ξ 是解（非齐次线性）

(1) $\eta_1\cdots\eta_r$ ξ 线性无关

证：反证：设线性相关，因为 $\eta_1\cdots\eta_r$ 线性无关

则 ξ 可唯一用 $\eta_1\cdots\eta_r$ 表示.

ξ 也是齐次线性方程的解. 矛盾

(2) $\xi, \eta_1+\xi, \cdots \eta_r+\xi$ 和 $\eta_1, \eta_2, \eta_r, \xi$ 可以互相表示 → 等价

→ 线性无关

(3) $AX=\beta$ 的解：γ 可表示为

$$\gamma = \xi + c_1\eta_1 + \cdots + c_r\eta_r$$

对应 $c_0+c_1+\cdots+c_r=1$