(2) 逆 = $\begin{bmatrix} O & \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix} & O \end{bmatrix}$

(3) 逆 = $\begin{bmatrix} & O & & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & & & \\ & \frac{1}{a_3} & O & 0 \\ O & & \ddots \frac{1}{a_n} & \end{bmatrix}$

(4) 逆 = $\begin{bmatrix} O & \frac{1}{a_{n+1}} & \frac{1}{a_{n+2}} & \ddots & \frac{1}{a_{2n}} \\ & \frac{1}{a_n} & & & \\ \frac{1}{a_{n-1}} & & & & \\ \frac{1}{a_1} & & & O & \end{bmatrix}$

T45

(1) 交换A的i行和j行，

$$R_{i\leftrightarrow j}A = B \to B^{-1} = A^{-1}R_{i\leftrightarrow j}^{-1} = A^{-1}C_{i\leftrightarrow j}$$ 交换i列j列

(2) A i行乘k

$$R_{(k)i}A = B \to B^{-1} = A^{-1}R_{(k)i}^{-1} = A^{-1}C_{(\frac{1}{k})i}$$ i列乘$\frac{1}{k}$

(3) A j行+i行λ倍

$$R_{\lambda i+j}A = B \Rightarrow B^{-1} = A^{-1}R_{j+\lambda i}^{-1} = A^{-1}\cdot C_{i+(-\lambda)j}$$

j列乘(-λ)倍加i行

T46. $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})_{r\times n}$ $r(C)=r$

(1) 如果 $BC=O$ 则 $B=O$

证明. $r(C)=r$ 将C拆为$(C_{i1},\cdots C_{ir})$可逆（或言C可逆）

$$BC=O \to B(C_{i1},\cdots C_{ir})=O \to B=O\cdot(C_{i1}\cdots C_{ir})^{-1}$$
$$=O$$

(2) $BC=E$ 则 $B=E$

$$(B-E)C=0 \xrightarrow{By(1)} B-E=0 \rightarrow B=E$$

T47 (1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 10 & -5 \\ 0 & -4 & 10 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=2$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$

(5)

a_ib_j 不全为0时，设 $a_1\neq 0$, $b_1\neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r=1$$

其他情况都为0 → $r=0$

T48

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a(1-a) & a(1-a) \\ 0 & a(1-a) & 1-a^2 & a(1-a) \\ 0 & a(1-a) & a(1-a) & 1-a^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+3a & a & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

(1) 可逆 $|A|\neq 0$; 或 $r=4$ ⇒ $a\neq -\frac{1}{3}$ 且 $a\neq 1$

(2) A秩为3 ⇒ $a=-\frac{1}{3}$

(3) A秩为1 ⇒ $a=1$

T49 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}a&1&1\\2&1&a\\1&1&a\end{pmatrix}$ AB秩为2.

$$AB=\begin{pmatrix}a+2&2&a+1\\a+1&2&a+1\\3&2&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+1&2&a+1\\3&2&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a-2&0&1-a\\3&2&2a\end{pmatrix}$$

只有 $a=1$ 有可能 //

$\rightarrow |B|=1-a=0$

或用 $|A|=-2$; $r(AB)=r(B)=2$, $a=1$ ✓

T50

$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ BA^*

$A^*=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $BA^*=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&2\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $r=1$

T51 (1)

$$\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=5\\2x_1-x_2+4x_3=11\\-x_2+x_3=3\end{cases}\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}1&3&3&5\\2&-1&4&11\\0&-1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2/3\\0&1&0&-7/9\\0&0&1&20/9\end{pmatrix}$$

$x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-7/9$ $x_3=\frac{20}{9}$ ✓

(2)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&3&4&0\\2&2&7&11&14&0\\3&3&6&10&15&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&-3&0\\0&0&0&1&3&0\end{pmatrix}\quad\begin{cases}x_1=-x_2-x_5\\x_2=x_2\\x_3=3x_5\\x_4=-3x_5\\x_5=x_5\end{cases}$$

/

T(4)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -5 \\ x_4 = 11 \end{cases}$$

T(5)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{无解.}$$

T53

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} \text{ 非零解 } = \begin{vmatrix} 0 & 1-ab & 1-a \\ 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix} = (a-1)b = 0$$

则 $a=1$ 或 $b=0$

T54. 唯一解，无解．　　无穷解

$r(\tilde{A})=r(A)=3$　　$r(A)\neq r(\tilde{A})$　　$r(A)=r(\tilde{A})<3$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -(b+2) & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

唯一解：$x_1=1-\frac{1}{a}$；$x_2=\frac{1}{a}$；$x_3=0$　$(a\neq 0;\ a\neq b)$

无解：　$a=0$

无穷：　$a=b\neq 0$；　$x_1=0,\ x_2=x_3+1,\ x_3=x_3$