Chapter 6

T1(1) $f(x,y,z)=x^2+4xy+4y^2+2xz+4z^2+4yz$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 秩为1

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_1x_3+x_3^2+2x_2x_3$

$$(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 秩为2

T2(2) 三平行矩阵

$\Rightarrow$ 中对角 $\Rightarrow x_1^2+\cdots x_n^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$\Rightarrow$ 上斜, 下斜 $\Rightarrow \begin{cases}-x_1x_3-x_2x_4\cdots-x_{n-2}x_n\\-x_3x_1-x_4x_2\cdots x_nx_{n-2}\end{cases}$

$=-2\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_{i+2}$

总和 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_{i+2}$

T3(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1x_2x_3x_4)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

令 $|\lambda E-A|=0$ 得 $(\lambda^2-1)^2=0$

$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=\lambda_4=-1$

$$(\lambda_1E-A)=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{阶}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\alpha_1=(0,-1,0,1)^T$

$\alpha_2=(1,0,1,0)^T$

$(\lambda_3E-A)\Rightarrow \alpha_3=(-1,0,1,0)^T$

$\alpha_4=(0,1,0,1)^T$

得标准型 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} = y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$

正交代换 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$

(4) $f(x_1x_2x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

可由 $|\lambda E-A|=0$ 得 $\lambda_1=-4,\ \lambda_2,\lambda_3=5$.

相似过程计算出

$(\lambda_1E-A)\to\alpha_1=(2,1,2)^T$, .

$(\lambda_2E-A)\to\alpha_2=(-1,2,0)^T\ \ \alpha_3=(-1,0,1)^T$

$\varepsilon_1=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$

$\varepsilon_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0)^T$

$\varepsilon_3=\frac{-\sqrt{5}}{15}(4,2,-5)^T$

可得 标准型 $\begin{pmatrix}-4&&\\&5&\\&&5\end{pmatrix}=-4y_1^2+5y_2^2+5y_2^2$

$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{4\sqrt{5}}{15}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}\\\frac{2}{3}&0&-\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

T4配方法在后,做成了T9

T9(2) $\Rightarrow f(x)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=X^T\begin{pmatrix}3&1&1&0\\1&3&1&0\\1&1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}X$

$\text{rank}=3>0\quad \begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}=3^2-1^2=8>0\quad |A|>0$

是正定二次型.

T4 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(\cancel{x_3^2})+2x_1x_2+2x_2x_3$

$=(x_1+x_2)^2+(-x_2^2)+(-x_3^2)+2x_2x_3$

$=(x_1+x_2)^2-(x_2-x_3)^2$

$=y_1^2-y_2^2.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-(y_2+y_3) \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$

$$\begin{cases} y_1+y_2=x_1 \\ y_1-y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases} \longrightarrow =(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)y_3$$

$=y_1^2-y_2^2+y_1y_3-y_2y_3+y_1y_3+y_2y_3$

$=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3$

$=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 可得 $z_1^2-z_2^2-z_3^2$

得 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2-z_3 \\ x_2=z_1-z_2-z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$

T9 (1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$

$x^T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}x$ 不是正定二次型

$|A|=-7$

(2) 上页

(3) $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 配方

$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(x_2+\cdots x_3)^2+\cdots+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_n^2.$

$\Rightarrow$ 正定二次型

T11 $f(x)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4-2t^2>0 \text{ 得 } |t|<\sqrt{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = t^2-4>0$$

(2) $f(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$

$$=x^T\begin{pmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}x$$ ① $1>0$ ② $-t^2+4>0$ ③ $-t^2+30t-105>0$

①②③无解 $f(x)$ 无法正定

(3) $f(x)=tx_1^2+x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-2tx_1x_3+4x_2x_3$

$$=x^T\begin{pmatrix} t & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}x$$

相似求得 $t>13$ 正定

T13 (1) $Ax=\lambda x \Rightarrow A^m x=\lambda^m x$

A 正定 $\to \lambda>0 \to \lambda^m>0$ A^m 正定

(2) $g(A)x=g(\lambda)x$

$g(\lambda)>0$ $g(A)$ 正定

T14 $\left.\begin{matrix} x^TAx>0 \\ x^TBx>0 \end{matrix}\right\} x^T(A+B)x>0$ 正定

$\because$ ∃ 正交矩阵 P $P^TAP=E$

且 ∃ $Q^TB=P^T$

得 $Q^TBAB\cdot Q=E$

即 BAB 也正定

P15

$A=\begin{pmatrix} Q_{n\times n} \\ P_{m-n\times n} \end{pmatrix}_{m\times n}$ $r(A)=n$, 则对于n维向量 X 当 $X\neq 0$, $AX\neq 0$.

设 $AX=b$, 则 $(AX)^TAX=b^Tb=\sum_{i=1}^{n} b_i^2>0$

则 $x^TA^TAX>0$, 则 A^TA 正定.

P16 A 正定

P 是可逆实距阵

ana $\rightarrow$ 构造 $Q^T(P^TAP)Q$ 合同正定阵 $W^TAW=E$

解: 令 $W=PQ$ 得 $Q=WP^{-1}$

得: $(P^{-1})^TW^TAWP^{-1}=E$ 可得 P^TAP 合同 E

P^TAP 正定

P17 $A^2-3A+2E=0$

$(A-E)(A-2E)=0$ $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$. A正定

P18 $B_t=\begin{vmatrix} a_{11}b_1b_1 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1t}b_1b_t \\ \vdots & & & \\ a_{t1}b_tb_1 & a_{t2}b_tb_2 & \cdots & a_{tt}b_tb_t \end{vmatrix}=b_1^2\cdots b_t^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ \vdots & & & \\ a_{t1} & & \cdots & a_{tt} \end{vmatrix}>0.$

B $\Rightarrow$ 正定

P19 A正定 $\Rightarrow$ $P^TAP=E$

得 $A=(P^T)^{-1}E\,P^{-1}=(P^{-1})^T(P^{-1})=M^TM$

$A=M^TM \Rightarrow A=M^TEM \Rightarrow (M^T)^{-1}AM^{-1}=E$

$(M^{-1})^TA(M^{-1})=E$

合同单位阵 $\Rightarrow$ 正定

T20 设 $Ax=\lambda x$

$(A+tE)x=(\lambda+t)x$ 当 t 很大，$\lambda+t>0$ 时，正定