INTUITIONNISME 84

Jacques HARTHONG et Georges REEB

Note pour la remise en forme de cette article par David ALGIS

Après plusieurs lectures de ce fabuleux article, qui 33 ans après ça publication est encore très actuel, j'ai décidé de le remettre dans une forme plus convenable. En effet, je n'ai réussi à trouver l'article original que sur web archive à l'adresse suivante `https://web.archive.org/web/20071009030648/http://moire4.u-strasbg.fr/souv/Int84.htm` et c'est dans le souhait de le rendre plus accesible à tous que je me suis donné l'objectif de le réécrire en Latex. Aussi j'espère que cela facilitera la lecture de cet article qui mérite une bien plus grande popularité.

Avertissement ajouté en 1994 pour la publication par l'Ouvert

Dans le texte qui suit (aux sections 10 - 12), sera exposée brièvement, pour les besoins argumentatifs des auteurs, la critique faite par le mathématicien L. E. J. Brouwer au programme de Hilbert de formalisation des mathématiques. Dans la formulation de sa critique, Brouwer a très souvent utilisé le «théorème» de Fermat comme argument, en tant que prototype de conjecture arithmétique indécidable. Afin de conserver la fraicheur du style original et de mieux marquer son caractère historique, nous avons conservé cette manière imagée de se faire comprendre, là où le spécialiste moderne de logique aurait tout simplement fait référence aux théorèmes d'incomplétude. Aujourd'hui, en 1994, une lecture superficielle associée à un battage médiatique récent, pourrait produire le sentiment que tous ces arguments seraient périmés, puisque le théorème de Fermat est depuis peu démontré. Je me sens donc obligé de formuler l'avertissement suivant.

(a) Le théorème (la conjecture) de Fermat n'était chez Brouwer qu'un prototype possible de conjecture indécidable, choisi pour sa célébrité, afin d'illustrer plus concrètement ou plus nommément l'argumentation.

(b) L'existence d'une démonstration de ce théorème n'enlève absolument rien aux arguments avancés et peut même, au contraire, leur donner un relief

> supplémentaire, comme le montrera aisément toute lecture non superficielle.

Le texte d'Intuitionnisme 84 est reproduit ici dans sa version de 1987 sans la moindre modification.

1

Cet article répond à un autre, écrit par Abraham Robinson, et dont le titre était Formalism 64 [1].

On présente habituellement le formalisme et l'intuitionnisme comme des ennemis irréductibles, le formalisme comme le vainqueur, l'intuitionnisme comme le vaincu. Nous pensons que ce débat, déjà ancien, est complètement faussé par bien des malentendus et beaucoup de mauvaise foi, et surtout par l'extrême confusion dans laquelle ont baigné toutes ces discussions.
Pour nous, l'essentiel du travail dont nous rendons compte ici aura consisté à clarifier les termes de ce débat. Ainsi, il nous a paru remarquable que Robinson, dans l'article cité, ait de certains problèmes une approche très voisine de la nôtre, alors qu'il se présente comme formaliste; nous serions tentés d'en déduire que toutes ces étiquettes ne signifient pas grand chose et la vraie question est de savoir ce qui, derrière les étiquettes, a motivé cette guerre idéologique. Quoi que vous puissiez penser de cette expression certes un peu brutale, elle exprime néanmoins une des difficultés du débat; car le mot « formalisme », qui a été traité à toutes les sauces, est maintenant trop ambigu pour être employé seul, sans épithète. Aussi sommes nous amenés, et même contraints, à distinguer la simple méthode formaliste, qui est une pratique, et l'idéologie formaliste; en effet, s'il y a une idéologie intuitionniste et une idéologie formaliste qui s'affrontent, l'intuitionnisme bien compris (le nôtre par exemple), ne peut rien trouver à redire à l'emploi, également bien compris, de la méthode formaliste.

Le but de cet article est donc justement d'expliquer ce que sont « l'intuitionnisme bien compris » et « le formalisme bien compris ». Nous ferons aussi volontiers la distinction entre le formalisme historique, c'est à dire les positions exprimées après mûre réflexion par les créateurs du formalisme tels que Hilbert ou Fraenkel, et la vulgate formaliste d'aujourd'hui. Nous vous prévenons tout de suite que nous n'avons aucun souci de fidélité doctrinale à aucune école constituée, et notre position résulte surtout d'une certaine lecture (que vous pourrez juger toute personnelle, nous n'y voyons aucun inconvénient) des textes classiques de l'intuitionnisme, notamment de Brouwer.
Ainsi, comme Robinson qui se demandait en quoi peut consister le formalisme de 1964, nous nous demandons ce que pourrait être l'intuitionnisme de 1984. Il nous est apparu que, loin d'être une doctrine depuis longtemps dépassée, comme le veut un préjugé répandu, l'intuitionnisme est plus actuel que jamais; au fond, c'est simplement la position philosophique de ceux qui ne croient pas qu'on puisse une fois pour toutes enfermer la mathématique dans un dogme figé, que par exemple l'invention de l'ordinateur, qui est un phénomène technologique et historique, peut modifier la mathématique comme l'usage (par) de la lunette a transformé la mécanique.

2

Voici donc - autant annoncer la couleur tout de suite - nos principales thèses: nous considérons

(a) que la mathématique formelle (la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel, qu'on nous a toujours présentée, lorsque nous étions étudiants et naïfs, comme le fondement absolu et éternel de la mathématique) n'est qu'une théorie scientifique éventuellement sujette à la réfutation (nous dirons plus loin comment), une simple interprétation d'une réalité qui lui est extérieure, et non la réalité mathématique elle-même;

(b) que ce qu'il y a de scientifique dans la mathématique, c'est l'articulation entre la théorie (quelle qu'elle soit) et cette réalité, et non le caractère formel et abstrait de la théorie qui n'est qu'un instrument;

(c) que cette articulation entre la théorie et la réalité repose sur la méthode expérimentale dans les sciences de la nature, mais sur la méthode constructive dans la mathématique;

(d) que, l'idéologie formaliste ayant nié cette réalité extérieure à la théorie en prétendant que la seule réalité mathématique est la théorie formelle elle-même, sa domination écrasante pendant un demi-siècle a eu pour conséquence de prendre cette théorie beaucoup trop au sérieux, d'en oublier toute la relativité historique et sémantique, d'en faire un dogme pesant et tyrannique, une langue de bois qui interdit toute expression personnelle, qui change le travail du mathématicien en publications standardisées et insipides, et les chercheurs en robots.

Le lecteur habitué aux classiques de l'intuitionnisme ne reconnaîtra peut-être pas dans ce qui précède ses thèmes favoris. Nous pourrions lui répondre que c'est justement pour cela que nous avons intitulé cet article Intuitionnisme 84; mais cela effacerait le plus intéressant de cette histoire: en effet, nous entendons prouver ici-même que tout cela figure déjà chez Brouwer, implicitement, mais irréfutablement.

3

A vrai dire, les idées de Brouwer, telles qu'il les a exprimées, se cristallisent autour du principe du tiers exclu; à notre avis, il faut avant tout, si on veut pénétrer la pensée de Brouwer, chercher le sens que ce principe avait pour lui.
Si au contraire, comme certaines traditions l'ont fait par la suite, on donne un sens étranger au principe du tiers exclu, et qu'on traduit la pensée de Brouwer avec ce faux sens, on obtient des idées qui sont très faciles à tourner en dérision, mais ce procédé n'est guère honnête. Nous montrerons que les critiques qu'il a faites à l'encontre de ce principe correspondent bel et bien aux thèses a), b), c) que nous avons présentées ci-dessus (tout ce que nous avons ajouté, ce sont des conséquences inéluctables que Brouwer n'a pas tirées explicitement).
A cause de ce malentendu, de cette incompréhension, on a retenu de Brouwer le refus de toute logique bivalente, un refus non motivé et qui par conséquent paraît gratuit, comme le caprice d'un fou. Or Brouwer n'a jamais interdit que l'on construise des théories à partir d'une logique bivalente, il a seulement dit que cette logique bivalente n'est pas déjà inscrite dans la réalité, qu'elle est une création de l'esprit humain, qui aime la simplicité, et qu'à ce titre les mathématiciens peuvent l'introduire dans leurs créations, mais non prétendre que la nature lui obéit. Voyons cela de plus près.

4

Le principe du tiers exclu est généralement énoncé sous la forme simple mais ambiguë que voici:

> *Pour toute proposition P, ou bien P est vraie, ou bien non P est vraie, et il n'y a pas d'autre possibilité.*

Mais faute de s'être entendu sur le sens des mots vrai ou faux, cela peut s'interpréter n'importe comment. On trouve le même défaut dans la formulation équivalente et tout aussi classique:

> *Si une proposition P est contradictoire, (c'est à dire si ses conséquences logiques conduisent à une absurdité) alors non P est vraie.*

Si maintenant nous exprimons ce même principe sous une forme plus soignée et plus précise, qui élimine toute l'ambiguïté, on obtient suivant les cas des énoncés justes ou absurdes, mais sans la moindre discussion possible. L'intuitionnisme (mais certainement aussi le formalisme bien compris) ne consiste donc pas à refuser le principe du tiers exclu, mais à en exiger un énoncé sans présupposé implicite ou inavoué. Voici une version que Brouwer aurait admise sans hésitation:

> *Si à l'intérieur d'une théorie formelle basée sur une logique bivalente, une proposition P est contradictoire, alors non P est une proposition vraie de cette théorie.*

Toutefois, en perdant son ambiguïté, cet énoncé est devenu une simple tautologie, puisque dans une théorie formelle le vrai et le faux sont de pure convention, et que la logique bivalente consiste justement à convenir du vrai et du faux de manière à satisfaire cet énoncé. Le problème apparaît lorsqu'on ne veut pas (ou ne peut pas) se contenter d'une vérité de pure convention, et qu'on veut lui conférer une pertinence, une quelconque adéquation à une réalité extérieure.

N'oublions pas que l'idée qui est à la base du formalisme est de réduire la déduction à un procédé mécanique et aveugle qui fait totalement abstraction du sens. C'était à l'origine une ruse de Hilbert pour échapper aux objections contre les transfinis de Cantor, dont il s'était épris, mais que par la suite on a feint de prendre au sérieux. Pour Hilbert, cette idée (qui est géniale, nous tenons à le proclamer) devait permettre de récupérer une théorie douteuse, celle de Cantor, pour rendre compte de toutes sortes de choses fort utiles, comme les nombres, les fonctions, etc. Pour un formaliste vraiment conséquent, qui ne triche pas avec les principes affichés, rien n'empêcherait que l'on choisisse, à la place des

axiomes de Peano, un autre système où $2+2=5$, du moment que ce nouveau système n'est pas contradictoire. Or, on ne le fait pas; on trouverait même scandaleux de s'amuser ainsi avec l'argent des contribuables, et ce qu'on demande à une théorie formelle, c'est de «coller» à quelque chose qui lui est extérieur, mais dont les formalistes évitent systématiquement de parler. C'est cette chose extérieure qui fournit le critère de validité, et qui préside au bon choix de ce qui devrait être vrai ou faux dans une théorie pertinente. Sur cette chose extérieure les mathématiciens n'ont guère de pouvoir, en particulier ils ne peuvent lui imposer de se soumettre à une logique bivalente; cette réalité, pour l'appeler par son nom, est ce qu'elle est, et lorsque les mathématiciens (par exemple Zermelo et Fraenkel) construisent une théorie formelle, ils la choisissent en sorte qu'elle coïncide le mieux possible avec cette réalité. La critique de Brouwer à l'encontre du formalisme consiste alors essentiellement en ceci:
les formalistes ont tort de croire que, une fois la théorie formelle construite (par exemple la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel) elle devient ipso facto la réalité mathématique, en supplantant l'autre qu'on s'empresse d'oublier.
Cinquante ans après les critiques de Brouwer, nous ajouterons que les formalistes ont réalisé au sein de la communauté mathématique ce que George Orwell avait décrit dans son roman 1984 (encore une justification pour notre titre) et qu'heureusement aucun régime politique n'a encore réussi aussi parfaitement: faire croire à l'écrasante majorité du peuple que la réalité est ce qu'on lui raconte et non ce qui se passe réellement. Le symptôme caractéristique de ce genre de situation est que dans la conscience collective, «la réalité est perçue comme de la métaphysique». Il existe un test infaillible pour mettre en évidence les efforts permanents déployés par les mathématiciens d'aujourd'hui pour oublier cette chose extérieure qui avait présidé aux choix de Hilbert, Zermelo, Fraenkel: leur faire lire le début de cet article et constater leur agacement à propos du mot réalité que machiavéliquement nous avons répété avec tant d'insistance; s'il n'y avait pas anguille sous roche, ce mot serait tout à fait innocent, puisque nous ne l'avions pas encore défini.

5

Dès lors, tout le problème pour Brouwer revient à mettre au point une méthode sûre pour appréhender cette fameuse «réalité» extérieure au formalisme. Une méthode sûre, cela signifie au premier chef une méthode qui soit, de manière absolument certaine, susceptible de donner des résultats indépendants de tout présupposé théorique; quelque chose comme la méthode expérimentale mise au point dans d'autres secteurs par de grands ancêtres comme Galilée, Lavoisier, ou Claude Bernard. Cette méthode, c'est tout simplement la méthode **constructive**.

Entendons-nous bien: nous ne prétendons pas que Brouwer a dit tout cela de manière explicite, ni qu'il avait vu les choses comme nous vous les présentons ici. Ce que nous disons, c'est que, lus en 1984, les textes de Brouwer même les plus sibyllins deviennent absolument clairs et logiques lorsqu'on les interprète ainsi (voir par exemple annexe 1).

La mathématique intuitionniste n'est donc pas une autre théorie mathématique à mettre en concurrence avec, disons, la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel (devenue entretemps dogme officiel). C'est une entreprise complémentaire, dont le but est d'établir des faits mathématiques indépendants de tout formalisme, afin de les comparer aux vérités établies par la théorie, et de contester éventuellement celle-ci si par exemple elle mène à trop de résultats purement idéaux (en principe, la mathématique intuitionniste a aussi un rôle plus immédiat: écarter d'office les théories formelles en contradiction avec la mathématique intuitionniste, mais les intuitionnistes n'ont nullement besoin de s'en préoccuper, puisque les formalistes, qui en secret sont bien plus intuitionnistes qu'ils ne veulent bien le dire, se sont toujours très bien débrouillés tous seuls à cet égard).

Mieux qu'un discours général et abstrait, voici un exemple qui montre bien le rôle de garde-fou, en tous point comparable à l'expérimentation dans les sciences de la nature, que joue la mathématique intuitionniste: on sait depuis longtemps que sur «la droite» (c'est à dire sur $\mathbb{R}$) il n'y a pas d'ensemble à la fois non mesurable (pour la théorie de Lebesgue) et constructif. La théorie prévoit, en conséquence de l'axiome du choix, qu'il existe des ensembles non mesurables, mais ces ensembles font partie des objets idéaux de la théorie, ils n'ont pas d'existence objective, c'est à dire qu'assurément il est à jamais impossible de les voir constructivement, et leur existence ou la forme qu'ils prennent dépend de la théorie formelle.
Récemment il a été prouvé [7] qu'une autre théorie formelle était possible, tout aussi acceptable que l'actuelle car relativement consistante, mais dans laquelle les ensembles non mesurables n'existent pas. Ce serait donc une théorie qui, dans le cas précis des ensembles mesurables, «collerait» mieux à la réalité.

Bien sûr, on ne peut exclure *a priori* qu'elle colle moins bien ailleurs, mais elle fait peur pour une autre raison: elle priverait les mathématiciens des facilités de l'axiome du choix. Il n'est pas question ici de prendre parti sur ce point. Nous voulions seulement en venir à ceci: susciter un tel débat est un acte typiquement intuitionniste, d'ailleurs tout à fait compatible avec le formalisme bien compris; un acte qui ne peut qu'enrichir la mathématique, mais qui n'a pas de sens pour quiconque croit dur comme fer que les ensembles non mesurables existent sous prétexte qu'un théorème le dit.

En somme, ce débat revient à choisir entre une théorie plus juste (plus proche de la réalité constructive) mais moins facile, et une théorie postulant des choses en trop mais plus facile. L'expérience épistémologique acquise dans d'autres sciences que la mathématique (la physique, par exemple) montre que ce type de débat est tout à fait classique; voyez à ce sujet par exemple les problèmes de l'électrodynamique quantique.

En fin de compte, il apparaît que, en vertu de son rôle de garde-fou que nous venons de souligner, c'est la mathématique intuitionniste qui confère à la mathématique son statut scientifique (dans le sens de l'épistémologie classique); le refus de la conception intuitionniste équivaut à l'affirmation que la mathématique est un jeu gratuit; cette façon de voir est bien sûr respectable et nous ne désirons nullement envoyer ses partisans dans un camp de concentration: le problème, c'est que ce sont les partisans de cette idéologie eux-mêmes qui, après avoir proclamé bien haut leurs convictions il y a vingt ans, s'en mordent les doigts aujourd'hui en constatant le très mauvais effet de leurs vantardises sur l'image de marque de la mathématique auprès du reste de la communauté scientifique. Nul ne trouverait à redire si la conviction des formalistes purs et durs n'était qu'une conviction intime, proclamée peut-être, mais sans les abus de pouvoir susceptibles de provoquer les dégâts matériels que nous déplorons maintenant. Nous sommes bien forcés de constater aujourd'hui que la domination sans partage pendant quarante ans de l'idéologie que nous critiquons ici a fait de ce qu'on appelle très restrictivement la communauté mathématique une petite secte dont l'importance au sein de la communauté scientifique diminue à vue d'oeil; et il est vain d'objecter à ce propos que les autres sciences ne peuvent, elles, se passer de la mathématique: car les autres sciences ne s'en passent pas, elles se passent seulement de la petite secte. Il suffit de feuilleter des revues de physique mathématique, d'informatique, ou de mathématiques appliquées pour voir que ce n'est pas la mathématique qui meurt. L'héritage de Newton, Laplace, Euler, n'est bien sûr pas perdu.

Peut-être nous objectera-t-on (il faut tout prévoir) que la Science efficace n'est pas tout dans la vie, ni dans la mathématique, et qu'on peut faire de très belles choses sans qu'obligatoirement elles satisfassent aux critères de pertinence ou d'adéquation à la réalité que nous avons laborieusement exposés ci-dessus; et aussi que l'épistémologie classique, avec ce qu'elle entend par «scientifique», n'est pas la Thora. A cela nous répondons: O.K., nous reconnaissons que l'esprit ludique vaut bien l'utilitarisme des technocrates (il a surtout l'avantage d'être infiniment moins dangereux), et nous serons parmi les premiers à tirer notre chapeau à l'artiste de génie qui prouverait un théorème totalement dépourvu du moindre contenu sémantique, mais si beau qu'il arracherait des larmes à Bourbaki.

Le problème qui nous préoccupe n'est pas celui de l'utilitaire; les partisans de l'esprit ludique ont en général un humour dont les doctrinaires du jeu formaliste gratuit sont dépourvus; d'ailleurs la doctrine de ces derniers est totalement étrangère à l'esprit ludique et à l'amateurisme en général; il s'agirait plutôt d'une sorte de perversion du professionnalisme. Ce qui est en tous cas certain, c'est que c'est l'intuitionnisme, proclamé ou surtout clandestin (il est généralement de meilleure qualité sous cette seconde forme), qui non seulement donne à la mathématique le statut épistémologique de Science, mais aussi lui apporte le sens de la relativité qui manque toujours dans les dogmes systématiques.

6

Maintenant que le rôle joué dans la mathématique par la méthode constructive est clarifié (mais tout n'est pas encore dit), il serait bon de clarifier également les idées et les projets formulés par Hilbert et les formalistes historiques. Nous verrons que la clé du malentendu est le sens donné par chacun des protagonistes de ce drame à la vérité mathématique. Pour Hilbert, tout semble limpide:

> *Si les axiomes choisis arbitrairement ne se contredisent pas -dans toutes leurs conséquences- alors ils sont vrais, les objets définis par eux existent. Ceci est pour moi critère de vérité et d'existence. (Hilbert, lettre à Frege)*

Ce qui rend Hilbert si assuré dans cette affirmation est l'expérience historique que constitue la découverte des géométries non-euclidiennes.
Comme chacun sait, la mathématique a mis longtemps à accepter celles-ci, conservant longtemps le préjugé selon lequel la géométrie euclidienne était la seule vraiment réelle. Le raisonnement suivi par Hilbert est bien simple: une fois admis que la géométrie hyperbolique est tout aussi réelle que l'euclidienne, il n'y a plus aucune raison de dénier les mêmes droits à tout autre système logiquement consistant.
C'est là un raisonnement typique de formaliste: il ne paraît juste que coupé de la pratique. Dans les présupposés de son raisonnement, Hilbert a omis les raisons réelles, pratiques, historiques, qui ont donné aux géométries non-euclidiennes tout leur sens. En effet, si le préjugé selon lequel l'espace hyperbolique n'existe pas, ou est moins réel que l'euclidien, a fini par tomber, ce n'est pas par la conviction qu'il est logiquement consistant (cette conviction, tout le monde l'avait), mais parce qu'il s'intégrait dans la culture mathématique; il correspondait à quelque chose de représentable, de compréhensible (par exemple, on pouvait en donner des modèles comme le demi-plan de Poincaré). Et si personne n'avait jamais trouvé aucune signification, aucun contenu sémantique, à la géométrie hyperbolique, si celle-ci n'avait été qu'un langage formel intraduisible ou inintelligible, non seulement elle serait restée une simple curiosité peu connue, mais jamais Hilbert n'aurait pu affirmer ce qu'il a affirmé dans cette lettre à Frege avec autant de certitude. Le **contenu sémantique**, voilà le concept-clé de l'intuitionnisme, qui sous-tend toute la pensée de Brouwer.
Mais nous demandons au lecteur de bien noter que, quoiqu'il mette l'accent ailleurs, et pour cause, Hilbert recourt à ce concept, et cela dans l'exposé même de la méthode formaliste: en effet, il compare celle-ci à la méthode algébrique (voir l'annexe 2).
Il explique qu'une formule algébrique quelconque, comme par exemple $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ peut se concevoir de deux manières. Ou bien elle exprime une propriété des nombres: en remplaçant x et y par deux nombres quelconques, les deux membres de l'égalité seront identiques (ce sera le même nombre). Ou bien, on fait abstraction de ce sens, et on obtient la formule en appliquant mécanique-

ment et aveuglément les règles formelles du calcul algébrique (on «développe» $(x + y)^2$). Dans la première conception, la formule n'est qu'un langage qui exprime une propriété d'observation, une vérité scientifique sur des objets, les nombres; cette vérité est alors le **contenu sémantique** de la formule. Dans la deuxième conception, la formule n'est plus un langage, mais un objet, et on exprimera dans un autre langage des propriétés de cet objet, telles que par exemple les règles formelles du calcul algébrique.

Diophante d'Alexandrie ou François Viète ne sont jamais sortis de la première, mais il est naturel, et même sain, que la seconde prédomine une fois que le calcul algébrique est à ce point entré dans les moeurs qu'il en devient une routine qu'on accomplit avec le plus parfait automatisme. Il ne viendrait à l'esprit d'aucun algébriste de prétendre que le contenu sémantique d'une formule n'existe pas (le principal avantage de la méthode algébrique est même qu'il peut y en avoir plusieurs), mais il est vrai aussi qu'à force de pratiquer le calcul formel on peut oublier non seulement que ce contenu existe, mais surtout que c'est son observation qui apporte la connaissance de la vérité et qui est le véritable fondement des règles du calcul algébrique.

Oublier le contenu sémantique d'une théorie formelle aussitôt celle-ci construite, alors que celui-là a tant servi à sa génèse est donc non seulement une attitude hypocrite et illogique, mais peut mener à des excès assez détestables. Bien entendu vous n'aurez aucun mal à trouver bien pire dans le domaine des excès, mais ce ne serait qu'une argutie pour faire diversion.

7

Pourtant, ce qui a fait naître les controverses dont nous parlons ici, ce sont les difficultés logiques liées à l'infini (c'est d'ailleurs pour cette raison que l'article de Hilbert que nous citons s'intitule «sur l'infini»), en particulier à la théorie de Cantor. Le problème est que les cardinaux transfinis n'ont justement pas de contenu sémantique (voyez à ce sujet les remarques pénétrantes de Poincaré à propos de Cantor: «La logique de l'infini», dans Dernières pensées, notamment pages 132 à 139 de l'édition Flammarion; les extraits les plus significatifs sont donnés dans l'annexe 3).
Si on développe toutes les conséquences d'une axiomatique non euclidienne, on obtient toutes sortes de théorèmes relatifs au plan ou à l'espace non euclidiens, mais tous ces théorèmes sont directement interprétables dans un modèle tel que le demi-plan de Poincaré, car tous les concepts de base (point, droite, ...) y ont leur objet. Il en va différemment pour une théorie formelle qui prétend intégrer un concept sans objet (sans contenu sémantique) tel que la puissance du continu. N'oublions pas qu'au départ, pour Hilbert, il y avait le problème suivant: la théorie de Cantor inclut des concepts sans objet. (Signalons que Cantor lui-même n'était pas du tout de cet avis. Pour lui, l'existence des cardinaux transfinis était aussi sûre et objective que l'existence des pyramides d'Egypte; les hommes ne pouvaient pas les concevoir car leurs sens étaient trop rudimentaires, mais Dieu, lui, les voyait. Il n'a pas été suivi dans cette métaphysique, sauf par l'intermédiaire de la caution proposée par Hilbert). Mais pourtant elle rend merveilleusement compte de ce que les mathématiciens rêvent de théoriser depuis vingt-cinq siècles: le continu. Y renoncer eût fait trop mal, mais il fallait trouver d'urgence une casuistique pour faire accepter la métaphysique qu'elle contenait aux vilains rationalistes du siècle. D'où la ruse que voici:

> *De même que $i = \sqrt{-1}$ a été introduit pour obtenir une formulation aussi simple que possible des lois de l'algèbre, de même nous devons ajouter aux propositions finitaires des propositions idéales, afin de pouvoir conserver les règles formelles simples de la logique aristotélicienne usuelle. (Ueber das Unendliche)*

Cette phrase est toujours extraite de *Ueber das Unendliche*; nous la reproduisons ici toute seule pour ne pas disperser le fil de notre argumentation, mais nous avons mis dans l'annexe 2 une traduction du contexte tout entier; nous vous invitons à lire tout à l'heure ce texte lumineux.

L'idée était donc la suivante: ou bien on prend la réalité mathématique des nombres, des fonctions, etc. telle qu'elle est; des nombres, des fonctions, etc., qui existent vraiment, qu'on peut définir explicitement et finitairement, ceux qu'on peut calculer, tabuler (au moins en principe), c'est à dire ceux qui sont donnés par un algorithme constructif; mais sur cette réalité, la seule vraiment objective, c'est à dire indépendante de la théorie, nous n'avons aucun pouvoir, nous ne pouvons que l'observer (soit directement, avec un ordinateur par exemple, soit par des raisonnements strictement constructifs); il n'y a en elle aucun ordre logique préalable à celui que l'esprit humain peut y mettre. Ou bien on laisse cette réalité provisoirement de côté, et on construit de toutes pièces un discours basé sur une logique agréable pour l'esprit (par exemple la logique bivalente que Hilbert qualifiait d'aristotélicienne - ce qui est impropre mais peu importe) et pouvant comporter des concepts même sans objet dans cette réalité mathématique, mais que Hilbert aimait bien, comme les cardinaux transfinis: on est alors obligé, afin que cet édifice intellectuel ne soit pas purement gratuit, de le construire de manière à en tirer des propositions vérifiables dans la réalité (on ne retiendra pas par exemple un système dans lequel $2 + 2 = 5$).

Or, ce que Hilbert ne dit pas, c'est que cette situation, où une réalité brute ne peut être qu'observée, tandis que notre esprit construit des édifices logiques qui se vérifient ou se réfutent, existe dans toutes les sciences, et on avait déjà coutume, bien avant Hilbert, d'appeler objet (*Gegenstand*) la réalité brute, le plus souvent inaccessible dans son essence, et théorie l'édifice logique construit par l'esprit. Mais il est vrai que dans les autres sciences on est moins orgueilleux que chez les mathématiciens, on n'y a pas honte d'être soumis à l'épreuve de la réalité, et on ne cherche donc pas avec tant d'énergie à se persuader que la réalité extérieure n'existe pas, que la théorie est la réalité, et que c'est l'homme qui l'a créée. Sur ce point, et paradoxalement, Cantor avait peut-être l'esprit plus scientifique que Hilbert ou Dedekind. (Vous pourrez d'ailleurs trouver à ce sujet un texte célèbre de Dedekind dans l'annexe 4.)

Il y a donc chez Hilbert une certaine contradiction entre les deux citations que nous avons présentées ici. D'une part (dans sa *lettre à Frege*) Hilbert affirme sans ambiguïté qu'un objet existe dès lors qu'on en a donné une définition non contradictoire; et d'autre part, (dans *Ueber das Unendliche*) il distingue, parmi les propositions établies selon la méthode axiomatique, les propositions finitaires, qui ont un contenu sémantique, et les propositions idéales, qui n'en ont pas; par là même, Hilbert admet que ce qui n'existe qu'en vertu d'une proposition idéale, existe moins que ce qui est finitairement et constructivement établi. Bien sûr cette contradiction ne démolit nullement les idées de Hilbert; elle montre tout au plus qu'il y avait un certain décalage entre ses désirs et les réalités: en quelque sorte, *la lettre à Frege* est un cri du coeur, tandis que *Ueber das Unendliche* est l'oeuvre du cerveau. A notre avis, on ne peut sortir de cette contradiction qu'en suivant Brouwer, c'est à dire en reconnaissant honnêtement que toute mathématique formelle est forcément une théorie, distincte de son objet.

8

C'est donc bien ce fameux concept de contenu sémantique qui est au centre du débat; il revient d'ailleurs fréquemment aussi bien sous la plume de Brouwer que sous celle de Hilbert. Contenu sémantique est notre traduction du mot allemand *Inhalt*, qui signifie normalement contenu sans autre spécification; mais dans le présent contexte, contenu serait bien trop vague; de même, nous avons traduit *inhaltlich* par la périphrase relatif au contenu sémantique, ou, sous la forme adverbe, par sémantiquement.

Conformément à ce que nous avons expliqué longuement, le contenu sémantique d'une proposition ou d'une théorie mathématique, c'est son rapport à une réalité extérieure (et antérieure) à toute théorie, formalisée ou pas. Nous ne discuterons pas ici de la nature de cette réalité extérieure car cela ne nous semble pas le plus important; elle est bien sûr liée à notre perception du monde qui nous entoure. Brouwer a essayé, lui, d'en discuter, et ce qu'il a écrit à ce sujet paraît aujourd'hui bien vieillot (ce qui ne prouve pas que c'est faux). Peut-être y a-t-il là une des causes du mépris qui entoure son oeuvre, mais même si Brouwer a été maladroit ou superficiel dans son analyse de la nature de la réalité mathématique extérieure, il n'en demeure pas moins que son analyse des rapports que les théories et les pratiques mathématiques entretiennent avec cette réalité est, elle, extrêmement profonde, actuelle, et, nous allons le voir, féconde.

Reconnaissons que des discussions philosophiques comme celle-ci ne sont pas faciles à mener, principalement à cause de l'extrême confusion qui entoure ces questions; il y aurait certes beaucoup moins de confusion si tout cela était fréquemment débattu; au lieu de cela, on n'en parle jamais, sauf dans quelques cercles où d'ailleurs les querelles d'école prennent souvent le pas sur une véritable réflexion, et le résultat, c'est que si à brûle-pourpoint vous interrogez un mathématicien de base, il y a toutes les chances pour que, pris au dépourvu, il ait juste le temps, pour faire bonne figure, de se raccrocher à quelque préjugé ou quelque cliché vaguement répandu. La correspondance des mathématiciens du début du siècle, Borel, Hadamard, Lebesgue, Zermelo, et tant d'autres montre qu'il fut une époque où l'on discutait volontiers des fondements des mathématiques.
De nos jours, de telles activités contemplatives sont plutôt mal vues; toute interrogation se voit aussitôt recouverte pudiquement d'un voile épais essentiellement cousu d'une phraséologie technique ultra-formalisée.

Aujourd'hui un scientifique, en particulier un mathématicien, n'a plus rien d'un humaniste: c'est un fonctionnaire chargé d'exécuter une tâche extrêmement parcellaire. Dans ces conditions nouvelles dominent des idéologies appelées positivisme logique ou idéologie de l'expert selon lesquelles il n'y a plus de problème philosophique ou politique: tous les choix peuvent être décidés par le calcul, et en particulier le problème des fondements des mathématiques doit être décidé uniquement par du calcul logique formel; ces idées, que nous jugeons fort malsaines, reposent sur le présupposé grossièrement faux que l'activité du mathématicien est identique à la déduction entièrement codifiée que postule toujours la logique mathématique; au contraire selon l'intuitionnisme la logique mathématique est une théorie et l'activité mathématique humaine est une réalité qui n'a aucune raison de coïncider avec le modèle d'une machine de Turing pratiquant la déduction mécanique chère à Peano. Dans une conception intuitionniste la question suivante (par exemple) a un sens, et même un sens très profond:

> *Quel est le contenu sémantique du théorème d'incomplétude de Gödel ou du théorème de Löwenheim ?*

Insistons sur le point suivant: la conception intuitionniste (aussi bien la nôtre que celle de Brouwer) ne nie en aucune façon la valeur de la logique mathématique; dire que c'est une théorie n'est pas dévalorisant. Mais ce que nous mettons en avant contrairement aux formalistes, c'est que ce qui fait la richesse d'une science est la confrontation entre la théorie et l'expérience; dans le cas de la mathématique (conformément à nos thèses exposées au début) c'est la confrontation entre la mathématique formelle et la mathématique constructive qui serait la véritable source de progrès et d'enrichissement pour la mathématique en tant que science. La clé de l'intuitionnisme est donc la prise en compte de l'écart irréductible entre un modèle théorique quel qu'il soit et «la réalité», entre un concept de la théorie et son référent objectal ou contenu sémantique. Par exemple, puisque nous parlions de la logique mathématique, l'intuitionnisme tient pour essentiel le fait que l'activité des mathématiciens n'est pas identique à celle des machines de Turing qui pratiqueraient la déduction automatique (c'est sans doute là qu'il faut voir l'origine du terme «intuitionnisme»). Mais l'affirmation de cette distinction n'est pas une profession de foi en une idéologie: il n'est pas difficile de prouver, même dans les canons de la rigueur formaliste, que les théorèmes démontrés par les mathématiciens, si on les traduisait dans le langage formel postulé par Peano ou Hilbert (ce n'est pas possible matériellement, mais nous faisons ici une supposition) formeraient une partie incroyablement rare de l'ensemble de tous les «théorèmes» au sens formaliste de ce mot: «proposition du langage formel pouvant être obtenue en appliquant mécaniquement les critères déductifs aux axiomes de la théorie»; il est bien clair que presque tous les «théorèmes» au sens formel seraient totalement dépourvus du moindre sens et ne pourraient être mis en correspondance avec aucune représentation de la culture mathématique.

Or tout mathématicien cherche à démontrer des théorèmes «véritables», c'est à dire correspondant à une représentation forgée par les deux mille ans de culture mathématique; ceci est un fait dont tout le monde conviendra aisément; le tort du formaliste n'est pas de nier ce fait, ni de le négliger dans la théorie (la logique mathématique), mais d'éviter la question même; cette attitude est comparable à celle d'un physicien qui, à force de négliger le frottement dans le mouvement des corps, finirait non pas vraiment par croire que le frottement n'existe pas, mais par croire que la thermodynamique est une idéologie et les thermodynamiciens (que dans notre métaphore nous supposerons peu nombreux) des illuminés. La question du contenu sémantique du théorème d'incomplétude de Gödel et du théorème de Löwenheim, nous espérons vous en avoir convaincus, est donc loin d'être creuse!

9

Avant d'aborder le coeur de notre sujet, dans la section suivante, nous avons encore un point à discuter: quelle est au juste la raison de la domination écrasante du formalisme, alors que si peu de mathématiciens ont foi en lui ? Nous avions déjà suggéré plus haut un lien entre le formalisme et le positivisme logique, luimême étroitement lié à l'idéologie de l'expert. Ce lien n'est pas difficile à établir historiquement: le courant philosophique appelé positivisme logique (incarné par «l'école de Vienne») s'est réclamé ouvertement du formalisme mathématique et la parenté est de toute fa con évidente; moins évidente est la parenté avec ce que nous appelons l'idéologie de l'expert. L'idéologie de l'expert est l'idéologie qui vise à justifier le système de valeurs suivant:

(a) valeurs négatives: la philosophie, la religion, l'humanisme, l'idéologie, et généralement tout ce qui relève du spirituel; la gratuité (sauf s'il s'agit de cadeaux publicitaires); la culture (sauf comme produit sur le marché de l'édition);

(b) valeurs positives: les décisions techniques (celles qui sont prises par des experts compétents en fonction des impératifs purement techniques, contrairement aux décisions «politiques» prises par des idéologues), la compétence, l'objectivité, la compétitivité.

Quel rapport entre ce système de valeurs et le formalisme ? Aucun ou presque, bien sûr, si on en juge d'après les intentions des pères du formalisme; mais les intentions des prophètes sont une chose, les actes des prêtres une toute autre. Et si on y réfléchit vraiment bien, on se rend compte que les experts ont une bonne raison de préférer la forme d'esprit qui prédispose au formalisme plutôt que celle qui prédispose à l'intuitionnisme: la première se prête particulièrement bien au jugement purement technique, qui peut se décider complètement par application d'un algorithme bien défini; tandis que la seconde recherche le jugement sur le sens et exige donc une pensée proprement philosophique, c'est à dire justement le genre de chose que l'expert vomit.

Avouons que nous ne croyons guère aux pseudo-causes sur lesquelles nous avions ironisé plus haut (l'orgueil des mathématiciens, etc.). La vraie raison à notre avis du triomphe du formalisme (pardonne-nous, David, de te faire de la peine, mais nous sommes bien obligés de vivre avec notre temps) est tout simplement sa commodité juridique, qui en fait un paradis pour les experts. Les canons du style Bourbaki constituent une sorte de code civil en miniature pour mathématiciens, qui paraît absurde ou ridicule si on le juge comme l'auraient fait les persans de Montesquieu, mais qui, si on tient compte de la nature humaine, est peut-être le seul système capable d'entraîner un consensus.

Il y a beaucoup d'esprits ingénus qui trouvent grotesque l'acharnement avec lequel le Droit protège la propriété privée, et qui ne comprennent pas pourquoi la somme de toutes les lois et jurisprudences doit occuper un volume aussi fantastique, et prévoir des centaines de milliers de cas tous plus mesquins les uns que les autres; c'est malheureusement le seul moyen d'éviter que les citoyens ne s'entretuent continuellement pour le pré du voisin ou le passage des vaches. En mathématique c'est pareil: dans une société où la science est professionnalisée et peut fournir des sinécures, comment peut-on distinguer le chercheur honnête du petit escroc, si ce n'est par la mise en place d'un véritable code civil permettant de décider même dans les cas les plus mesquins de ce qui est licite et de ce qui ne l'est pas ? Il y a même une expression idiomatique bien connue chez les mathématiciens: «avoir le droit de...» qui est tout à fait significative.
Ainsi, suivant les cas, on a le droit ou pas le droit de dériver une fonction, d'appliquer tel théorème, de développer en série. On mesurera mieux tout ce que cette conception juridique peut avoir de sclérosant en songeant que l'essentiel de la création mathématique consiste justement à inventer des formes nouvelles de calcul qui autorisent soudain ce qui jusque là était interdit. Une certaine clairvoyance est donc nécessaire, que semble-t-il seul l'intuitionnisme peut apporter (du moins tant qu'il ne sera pas à son tour devenu un dogme prétentieux et dominant). Ainsi, de même que la monarchie de père en fils aurait eu pour seule justification d'éviter les luttes fratricides que le choix du meilleur roi eût inévitablement provoqué, de même la rigidité du formalisme trouverait pour seule justification d'éviter les luttes fratricides entre les différents réseaux de clientèle que tout jugement relatif au contenu des travaux mathématiques ne manquerait pas de provoquer. Comme tout magistrat peut le vivre quotidiennement, il est bien plus facile d'obtenir un consensus sur la forme que sur le fond. Pour juger de la forme il suffit d'un professionnel ayant reçu une formation adéquate; pour le reste, il n'y a aucune recette, vous ne pouvez que juger «en votre âme et conscience». Mais qu'arrivera-t-il après plusieurs générations éduquées à n'opérer que des jugements techniques, et que de ce fait on aura systématiquement préservées de tout jugement philosophique, y compris en philosophie ?

10

Maintenant, revenons-en à Brouwer et au sens véritable de sa critique du principe du tiers exclu. A la section 4, nous avons montré qu'il fallait distinguer deux sens possibles de ce principe: ou bien l'expression d'une volonté (on souhaite travailler avec une logique bivalente), ou bien un constat de fait (ce qu'on peut déduire de ce principe est un fait mathématique). Au premier sens, nul ne peut trouver à redire, et au second, tout le monde s'accordera soit pour en reconnaître la fausseté, soit du moins pour reconnaître que les faits dont il est question sont d'une nature très différente des faits constructifs: leur objectivité est bien moindre puisque leur existence dépend du choix de la théorie. S'il y a eu - ou s'il y a encore - problème, ou désaccord, c'est uniquement à cause d'une confusion entre ces différents sens. Cela, c'est ce que nous avons dit. Or, voici ce que dit Brouwer:

> *Le principe du tiers exclu est équivalent au postulat selon lequel tout problème mathématique est résoluble.*

> *La justification sémantique de la mathématique formelle par la preuve de sa non contradiction repose sur un cercle vicieux, parce que cette justification présuppose la justesse sémantique du postulat suivant: un théorème est sémantiquement vrai dès lors qu'il est non contradictoire. Autrement dit, cela présuppose le principe du tiers exclu.*

(Le lecteur qui croit que nous avons forcé la traduction pour faire dire à Brouwer plus que ce qu'il aurait vraiment dit pourra trouver dans l'annexe 1 le texte original de la main de Brouwer, en allemand.)

Ainsi, le principe du tiers exclu dont il est question dans ces phrases doit être compris dans le second sens, le sens sémantique (ainsi d'ailleurs que tous les autres termes). Notre discussion sera sans doute plus claire si nous examinons un exemple précis, mais significatif, tel que le «théorème» de Fermat (mais n'importe quelle conjecture de l'arithmétique convient pour cette discussion. Le choix du théorème de Fermat ne se justifie que par sa célébrité, ou par hommage à Brouwer, dont c'était visiblement l'exemple favori).

Pour Brouwer, le problème soulevé par cette conjecture peut être résolu (constructivement) de deux manières, exclusives l'une de l'autre: ou bien on en trouve une démonstration constructive, ou bien on parvient à construire explicitement un contre-exemple. Dans le premier cas, on aura prouvé constructivement que le théorème de Fermat est vrai; dans le second cas on aura prouvé constructivement qu'il est faux. Mais les nombres entiers «naïf», ceux qui existent constructivement et indépendamment du choix de la théorie (autrement dit, ceux qui constituent le contenu sémantique de toute arithmétique) pourraient fort bien avoir la propriété suivante: le théorème de Fermat serait vrai, c'est à dire qu'on ne pourra jamais trouver, aussi loin qu'on explore, quatre entiers vérifiant la fatidique égalité, et qu'il soit pourtant impossible d'en fournir une démonstration. De façon plus précise, dans cette hypothèse il se passerait ceci: il n'y aurait pas une démonstration unique valable pour des entiers arbitraires, mais des démonstrations différentes valables chacune pour des séries non exhaustives d'entiers, c'est à dire qu'il resterait toujours des cas non démontrés, et plus on voudrait couvrir de cas, plus les démonstrations deviendraient complexes et inaccessibles (une telle possibilité résulte évidemment du fait qu'il y a une infinité d'entiers: c'est une propriété de la «logique de l'infini»); une démonstration complète serait en quelque sorte infiniment longue. Dans une telle éventualité, le théorème de Fermat serait sémantiquement vrai, mais nous ne pourrions jamais le prouver. Tout au plus pourrions-nous, au fur et à mesure que nos ordinateurs deviendraient plus puissants, constater que le théorème de Fermat se confirme sur un domaine de plus en plus vaste. Le problème de Fermat serait alors intrinsèquement et essentiellement insoluble, il serait à jamais impossible de connaître la clé du mystère, quelle qu'elle soit. Notez bien que ces remarques pénétrantes de Brouwer sont antérieures au théorème d'incomplétude de Gödel: pour l'intuitionniste le théorème d'incomplétude n'est pas paradoxal ou inattendu, il est «intuitivement évident». A la lumière de cette discussion aujourd'hui classique, vous pouvez relire la première des deux phrases citées ci-dessus; elle vous donnera le sens que le principe du tiers exclu avait pour Brouwer et que nous pouvons dès lors énoncer ainsi:

> *Pour toute proposition mathématique P, ou bien il existe une démonstration constructive de P, ou bien il existe une démonstration constructive de non$P$, et il n'y a pas de troisième possibilité, à savoir qu'il n'existe de démonstration constructive ni pour P, ni pour non$P$.*

Tout le monde, y compris les formalistes les plus obstinés, sera unanime pour reconnaître la fausseté d'une telle affirmation. Bien entendu, ce qui fonde l'intuitionnisme, ce n'est pas de reconnaître la fausseté de cet énoncé (ce serait enfoncer une porte ouverte), mais de reconnaître l'existence d'une vérité sémantique au-delà de toute théorie. L'insistance de Brouwer à propos du tiers exclu provient uniquement du fait que, historiquement, le débat s'était cristallisé là-dessus. Tous les désaccords, ainsi que la confusion du débat, avaient pour cause que, obstinément, les formalistes refusaient de distinguer entre la vérité sémantique et la vérité théorique (comportement à rapprocher de la contradiction que nous avions relevée au numéro 7 entre les deux citations de Hilbert). Un prétexte souvent avancé pour justifier ce refus: «cette distinction, c'est de la métaphysique» (là on voit pointer l'idéologie de l'expert).

11

La seconde phrase citée de Brouwer nous parle des rapports entre une théorie formelle et son objet, c'est à dire de son contenu sémantique. Commentons-la comme l'autre, à partir du même exemple. Tout revient encore une fois à la distance qui sépare la théorie de son objet. Faisons à nouveau la supposition de tout à l'heure: que le théorème de Fermat se vérifie sur tous les cas explicites, quoiqu'il n'en existe pas de démonstration constructive. Il pourra alors arriver plusieurs choses aux arithméticiens formalistes: ou bien ils n'arrivent à démontrer, ni le fameux théorème, ni sa négation (en ce cas, il n'y a rien à dire); ou bien, ils parviennent à démontrer le théorème; ou bien, dernière possibilité, ils parviennent à prouver sa négation. Il est bien entendu dans cette supposition qu'il s'agit de démonstrations formelles, c'est à dire conformes aux règles en vigueur chez les mathématiciens formalistes (Ce que nous appelons ici démonstrations formelles sont les démonstrations du type pratiqué communément par les mathématiciens formalistes. Le mot est ambigu, il pourrait aussi désigner des démonstrations formalisées, c'est à dire effectuées mécaniquement par des machines de Turing: mais de telles démonstrations sont un concept de la logique mathématique et non une réalité; or ici nous voulons parler de ce que feraient les arithméticiens formalistes dans le cas considéré, non de ce que feraient les machines de Turing). Le cas intéressant à discuter est évidemment celui où les démonstrations formelles sont non constructives, par exemple celles qui utilisent l'axiome du choix.

Notre supposition signifie donc que sémantiquement, c'est à dire «dans la réalité», le théorème de Fermat serait vrai; mais ce fait supposé n'exclurait pas que le théorème de Fermat puisse être faux dans la théorie formelle, c'est à dire qu'il existerait une démonstration formelle de la négation du théorème (alors que dans nos hypothèses il n'existait pas de démonstration constructive de cette négation). Or, dire que le théorème de Fermat est faux revient dans la théorie formelle à dire que :

$$\textit{il existe quatre entiers } x, y, z, \textit{ et } n \ (n > 2) \text{ tels que } x^n + y^n = z^n$$

Si donc on peut démontrer formellement mais non constructivement l'existence de ces quatre entiers, c'est que ces quatre entiers constituent un objet idéal de la théorie: on a démontré qu'ils existent, mais il est impossible de les désigner explicitement. Par exemple il est impossible d'écrire un programme qui les calcule. On peut interpréter cela épistémologiquement en disant que si on rencontrait une telle situation, ce serait une réfutation de la théorie, en ce sens qu'on aurait mis en évidence un fait mathématique (l'impossibilité de trouver ces quatre entiers) qui contredirait une «prévision» de la théorie.
Bien sûr une telle situation ne s'est pas présentée d'une manière historiquement pertinente et il est peu probable que cela arrive un jour car les conjectures de l'arithmétique (susceptibles d'être sémantiquement vraies mais formellement

fausses) ne sont finalement que des curiosités logiques qui n'ont guère d'influence sur la technologie et la science en général. Mais on pourrait en dire autant de l'hypothèse du continu ou de l'axiome du choix. En fait, s'il est difficile de rencontrer de telles conjectures de l'arithmétique sous une forme pertinente, il est par contre possible de prouver par des arguments «à la Gödel» qu'il doit en exister. Car le problème que nous sommes en train de discuter est le problème de l'incomplétude: quelle que soit la théorie axiomatique que vous prendrez, pourvu qu'elle contienne les entiers (c'est à dire l'infini), vous aurez dans cette théorie des énoncés (peut-être le théorème de Fermat) sémantiquement vrais, mais non déductibles des axiomes de base.

Une conjecture de l'arithmétique est de la forme $n \quad P(n)$ et sa négation de la forme $n \quad nonP(n)$. L'incomplétude est une propriété qui résulte du fait que le champ des quantificateurs (ici les entiers) est infini. Vous pouvez constater vous-même après cette sorte de lecture de Brouwer que nous faisons devant vous, le lien étroit entre l'incomplétude et le théorème de Löwenheim: si $n \quad P(n)$ est une conjecture de l'arithmétique sémantiquement vraie et que $n \quad nonP(n)$ est formellement vrai, il est bien clair que l'entier w prévu par la théorie formelle, et qui rend formellement vrai $nonP(w)$, est un entier non standard.

Ici vous aurez peut-être envie de faire une objection: le théorème de Fermat serait vrai dans la réalité, c'est entendu; mais Dieu seul le saurait. Cette objection nous conduit exactement au coeur de notre sujet car, dans le cas hypothétique que nous discutons ici, plus rien ne vient occulter le noyau dur de la pensée brouwérienne. Certes, on ne peut pas prouver dans l'absolu que la théorie est réfutée; mais

1. des situations analogues se présentent fréquemment aussi dans les sciences de la nature, mais dans ces disciplines où l'expérience est reine on ne fait pas grand cas de ces inadéquations entre la théorie et la réalité (on est bien trop conscient de leur caractère inévitable, normal, et naturel, contrairement à la mathématique, cas très spécial, de telle sorte qu'il est rarissime qu'une inadéquation entraîne une révolution scientifique, c'est à dire un changement de paradigme; n'importe quelle théorie de la physique vit constamment avec des inadéquations qui ne gènent personne car elles n'ont pas une importance stratégique);

2. on se heurterait à la difficulté suivante: la théorie dirait que le contre-exemple du théorème de Fermat (*c'est à dire les quatre entiers* $x, y, z,$ *et* $n > 2$ *tels que* $x^n + y^n = z^n$) existe, alors que, aussi loin que nos ordinateurs explorent les nombres, sa trace serait indécelable;

3. la métamathématique formelle, enrichie de considérations intuitionnistes,

> pourrait apporter une preuve (qui ne serait pas une démonstration au sens actuellement en vigueur, mais qui apporterait le même degré de certitude) de la «fausseté» de la théorie.

On peut donc avoir toutes les raisons de penser qu'une conjecture de l'arithmétique donnée est sémantiquement vraie bien qu'on ne puisse pas la démontrer, sans que soit exclue pour autant la possibilité d'une démonstration (au sens usuel, formaliste) de la fausseté de cette même conjecture. Autrement dit: dans une théorie formelle non contradictoire il ne peut y avoir à la fois démonstration d'une proposition et de sa négation, mais il est parfaitement possible sans contradiction qu'une conjecture de la forme $\forall n,\ P(n)$ soit sémantiquement vraie et que pourtant $n,\ nonP(n)$ soit un théorème de la théorie. Voilà ce que Brouwer voulait dire en écrivant que la justification sémantique de la mathématique formelle ne peut pas être obtenue par la preuve de sa non contradiction.

12

En supposant que le théorème de Fermat soit sémantiquement vrai sans qu'on puisse le démontrer, nous avons évidemment choisi l'hypothèse la plus perverse, celle d'un tiers justement non exclu: on ne peut démontrer constructivement ni sa vérité, ni sa fausseté.

La discussion serait sans doute plus complète si nous envisagions aussi le cas complémentaire, qui pose moins de problèmes: le cas où le théorème de Fermat serait sémantiquement faux. En ce cas, il existerait sémantiquement, c'est à dire concrètement, constructivement, explicitement, *quatre entiers* x, y, z, *et* $n > 2$ *tels que* $x^n + y^n = z^n$; que ces entiers existent constructivement, cela veut évidemment dire que chacun est explicitement défini par un algorithme constructif, pouvant être traduit en un programme en *PASCAL* ou en BASIC.

Signalons ici qu'il n'y a pas de meilleure définition du mot constructif que celle-ci: un algorithme constructif est un algorithme pouvant être traduit en programme. Les ordinateurs n'existaient pas du temps de Brouwer, et cela explique peut-être pourquoi il a eu du mal à expliquer ce qu'il entendait par «constructif»; mais aujourd'hui ce mot a un sens absolument univoque. Dans ce cas le contre-exemple n'est pas un objet idéal, alors que dans le cas discuté à la section 11 (le tiers cas), la théorie prévoyait l'existence d'un contre-exemple, mais non constructible, non sémantique, c'est à dire idéal. Dans le présent cas on peut démontrer finitairement $n, nonP(n)$, car il suffit de démontrer $P(n_0)$, n_0 étant le contre-exemple nommément désigné, du moins en principe, car si n_0 est trop fantastiquement grand la preuve de $P(n_0)$ est humainement inaccessible. Les deux situations ne sont pas symétriques, puisque pour prouver que la conjecture est sémantiquement vraie on devait, dans le tiers cas, procéder par exhaustion sur une infinité de nombres, ce qui est impossible; alors que si le contre-exemple existe constructivement, il suffit de faire la vérification sur ce seul contre-exemple. Cette dissymétrie est un caractère typique de la «logique de l'infini» et constitue la raison profonde des théorèmes de Gödel et Löwenheim.

Albert Einstein évoquait exactement le même problème en disant un jour:«aucune expérience ne prouvera jamais définitivement que mon équation est juste; une seule suffira à prouver qu'elle est fausse». On sent très bien cette dissymétrie même dans la mathématique formaliste, car cette fois, contrairement au tiers cas, la théorie formelle ne peut plus, sous peine de contradiction, donner un résultat différent de la vérité sémantique. Si la mathématique formelle se ressent ainsi de cette dissymétrie, c'est évidemment parce que, par construction, elle tient pour vrai ce qui est établi constructivement. En effet, ses pères fondateurs, qui furent des hommes sages et avisés, avaient bien compris qu'une théorie formelle n'est intéressante que si elle est conforme à la réalité constatable. La seule chose qui manqua à leur sagesse fut de prévoir qu'en léguant à la postérité un dogme même parfait, mais soigneusement nettoyé du souvenir de sa fabrication, dont ils avaient honte, leur oeuvre allait courir le risque de sombrer dans le psittacisme et la stérilité.

13

attitude les mathématiciens pourraient-ils adopter s'ils étaient confrontés à la première des deux situations envisagées ci-dessus ? Notons bien qu'elle est à rapprocher de celle que nous avons déjà discutée à la section 5(au sujet des ensembles non mesurables). On saurait qu'aucune démonstration constructive ne sera jamais possible, ni du théorème de Fermat, ni de sa négation, et nous avons vu à la section 11 que cela signifiait que le théorème de Fermat serait sémantiquement vrai (de façon plus précise: le théorème de Fermat se vérifierait toujours sur tous les entiers explicitement définis par un algorithme constructif; autrement dit il se vérifierait toujours dans tous les cas que nous pourrions jamais rencontrer dans les siècles des siècles).

Dans ces conditions, pour l'idéologie formaliste, il n'y a aucun problème: si par exemple un mathématicien démontre formellement que le théorème de Fermat est faux, alors le contre-exemple existe (voyez ce que Hilbert écrivait dans sa lettre à Frege).

On n'affirmera jamais que ce contre-exemple pourrait un jour se rencontrer sur l'écran d'un ordinateur; on se contentera de ne pas s'intéresser à cette question ou, si on y est acculé par un intuitionniste militant, on usera du sophisme «aucun objet mathématique n'existe, celui-là pas plus qu'un autre».

Si (autre possibilité) les logiciens démontrent par la métamathématique formelle que le théorème de Fermat est indécidable, il n'y a pas de problème non plus: il suffira de choisir, selon des critères arbitraires, si on ajoute le théorème de Fermat aux autres axiomes de l'arithmétique ou si au contraire on ajoute sa négation.

En pratique, les choses se passeront probablement ainsi: quelques mathématiciens particulièrement couronnés décideront en fonction de leurs goûts quelle devra être la vérité pour les générations futures, et à partir de cet instant le contre-exemple existera ou n'existera pas.

Sans aucun doute, c'est ici que nous mettons le doigt sur la vraie nature de la divergence entre Brouwer et Hilbert. Pour le premier, il existe en mathématique, comme dans les autres sciences, une vérité objective; pour le second, elle n'existe pas ou du moins il décrète que la mathématique ne doit pas s'y intéresser.

14

Pour l'intuitionniste, donc, le but de l'arithmétique est d'en savoir plus sur les nombres naïfs, en s'aidant de théories, tandis que pour le formaliste, le but est d'en savoir plus sur une théorie particulière léguée une fois pour toutes. Et aussi: pour l'intuitionniste, la rigueur consiste à appréhender la réalité arithmétique de la façon la plus objective possible, c'est à dire en séparant rigoureusement ce qui dépend de la théorie de ce qui n'en dépend pas (selon le bon vieil esprit scientifique, la théorie ne doit servir à préjuger que de ce qu'on s'attend à observer), tandis que pour le formaliste la rigueur consiste uniquement dans la rigidité des règles logiques.

Ces deux visions qui s'opposent ainsi chez les mathématiciens de notre siècle peuvent se retrouver un peu partout dans l'histoire, comme s'il s'agissait de caractères humains éternels; par exemple, le débat qui eut lieu entre Galilée et la scolastique est en tous points semblable: pour Galilée, comme pour les intuitionnistes, la vérité était ce qu'on observe; pour les philosophes scolastiques, comme pour les formalistes d'aujourd'hui, la vérité était ce qu'on peut déduire de la Bible par des règles logiques formalisées.

Rappelons que l'une des principales critiques que les scolastiques firent à l'encontre de l'esprit scientifique naissant fut la suivante: Galilée, pour chercher la vérité, fait tout dépendre de l'observation, c'est à dire de l'usage des sens; or ceux-ci ne sont pas fiables, car ce qu'ils nous montrent n'est qu'illusion, alors qu'au contraire, ce qu'on déduit des saintes écritures par la voie de syllogismes parfaits apporte une certitude absolue.

Terminons cette section par une remarque importante. Nous avons dit et redit que la vérité, c'est ce qui est sémantiquement vrai, et que sur cela, les mathématiciens n'ont aucun pouvoir: ils peuvent choisir, comme axiome à ajouter à ceux de Peano, une conjecture de l'arithmétique sémantiquement fausse; mais cela n'a aucun effet sur la possibilité de calculer effectivement l'entier qui fait fonction de contre-exemple. Cela ne veut pas dire que les mathématiciens n'ont aucune liberté dans le choix des axiomes d'une théorie.

Pour illustrer cela, imaginons une conjecture $\forall n,\ P(n)$ dans le tiers cas, et que la mathématique formelle actuellement en vigueur fournisse une démonstration de la négation $n,\ nonP(n)$ de la conjecture. Comme nous avions dit précédemment, cela voudrait donc dire que la théorie est «fausse» ou «réfutée». Mais le fait qu'une théorie soit fausse n'est pas une raison suffisante pour la rejeter, et cela pour au moins trois raisons (valables dans toutes les sciences et pas seulement dans la mathématique):

1. la théorie peut être fausse uniquement sur un point peu important et juste

par ailleurs (dans les sciences de la nature ceci est la situation normale);

2. pour changer une théorie, il ne suffit pas d'avoir trouvé une inadéquation même stratégique, il faut avoir sous la main une théorie de rechange (il suffit pour se convaincre de cela de voir ce qu'ont dit les physiciens entre la date de l'expérience de Michelson-Morley, 1881, et la date de la Relativité Restreinte, 1905; Lorentz et Poincaré, entre autres, ont dit beaucoup de choses passionnantes et, du moins nous l'espérons, il n'y a pas de raison que les mathématiciens d'aujourd'hui aient moins d'imagination);

3. comme nous l'avons déjà dit à la section 5 à propos des ensembles non mesurables, on peut préférer garder une théorie un peu fausse, mais relativement facile, plutôt que de recourir à une autre moins fausse, mais aussi plus difficile (privée par exemple des commodités de l'infini); c'est d'ailleurs un argument avancé par Hilbert dans le texte de l'annexe 2.

Naturellement il y a une quatrième raison possible de ne rien changer à une théorie qui viendrait d'être réfutée par la voie que nous avons décrite; cette quatrième raison, suscitée par l'idéologie formaliste, serait de nier la valeur de la réfutation sous le prétexte que ce que dit un théorème est par nature plus vrai que ce qui est observable (en oubliant habilement que si le théorème est démontré, les axiomes sont choisis: la victime de cette escroquerie, généralement jeune, est savamment mise en condition d'oublier l'origine des axiomes par la longueur et la difficulté des démonstrations desdits théorèmes). Ceci est très conservateur et par conséquent très vilain.
Mais il ne faut pas dramatiser. Depuis toujours, notamment en théorie mathématique des nombres où ce problème est particulièrement fréquent, les mathématiciens ont pris garde de distinguer les résultats obtenus par la méthode constructive de ceux obtenus par l'axiome du choix ou autres procédés essentiellement formels, ce qui montre que l'intuitionnisme latent est bien plus répandu que ne le prétend la propagande officielle.

En disant que c'est la confrontation avec une réalité objective qui rend la science vivante, nous pouvons toutefois rencontrer l'objection suivante: rien ne prouve que la seule réalité susceptible de nourrir la mathématique soit précisément la réalité constructive des nombres.
La société humaine est riche de bien des activités pouvant jouer ce rôle. Nous n'avons rien à répondre à cette objection, si ce n'est que nous sommes d'accord. Mais si le lecteur qui a songé à cette objection avait en vue le changement radical que l'apparition de l'ordinateur apporte avec la possibilité d'une véritable expérimentation numérique, nous pouvons lui répondre que justement l'informatique ne travaille qu'avec la réalité constructive, et que son développement ne peut que renforcer la thèse épistémologique que nous soutenons ici.

15

Nous pensons avoir suffisamment montré l'importance qu'avait à nos yeux cette dialectique de la théorie et de la réalité; nous prétendons que ce constat, extrêmement banal dans les sciences de la nature, s'applique également à la mathématique. Mais pour que cet exposé soit satisfaisant, il faudrait analyser aussi ce que cette dialectique a de spécifique dans le domaine mathématique. Jusqu'à présent nous avons surtout insisté sur ce qui rapprochait la mathématique des autres sciences, juste pour le plaisir d'une sorte d'unification épistémologique, mais peu de ce qui fait son originalité. C'est pourquoi nous allons en parler dans cette section et les deux suivantes. En même temps nous pourrons illustrer notre conception en discutant l'exemple le plus simple possible, celui des nombres entiers naturels, de façon plus approfondie, notamment en poussant plus avant la discussion à propos des conjectures de l'arithmétique.

L'arithmétique formelle ou arithmétique de Peano est une théorie particulièrement simple du point de vue conceptuel. Son concept de base est l'ensemble $\mathbb{N}$, et ce concept est décrit et entièrement défini par les axiomes de Peano. Son objet est la suite, jamais achevée, des nombres entiers concrets qui peuvent être obtenus (au moins en principe) comme résultat d'un algorithme constructif ou d'un programme. Précisons tout de suite pour le lecteur très empiriste que ces nombres vont très au-delà de la cardinalité des ensembles matériellement réalisables: on peut écrire en trois lignes un programme qui calcule un nombre entier bien supérieur à 10100, qui est lui-même déjà supérieur au nombre de toutes les particules élémentaires qui composent l'univers. Nous appellerons entiers naïfs ces entiers concrets; nous avons déjà parlé de ces nombres aux section 10 à 13: ce sont ceux qui existent réellement, c'est à dire indépendamment de la théorie qu'on prend pour les décrire, et qu'on a une chance de rencontrer un jour sur l'écran d'un ordinateur, si on fait abstraction de toutes les limitations inhérentes à la condition humaine.

Parmi ces entiers naïfs, certains sont immédiats, connus de tous, et très simples: 0, 1, 2, 3, par exemple; d'autres, tels que 10100, sont plus compliqués et il faut pour les désigner quelques phrases d'explications (ce qu'on appelle un algorithme); il n'y a aucune limite supérieure à la complexité des entiers naïfs, et on peut dire que, en gros, plus un entier naïf est grand, plus il est compliqué (c'est à dire plus l'algorithme qui est nécessaire pour le définir est long). Mais une chose est sûre: les algorithmes qui servent à définir les nombres naïfs sont toujours traduisibles dans le langage de l'arithmétique de Peano, et d'ailleurs celle-ci a été agencée exprès pour avoir, entre autres, cette propriété. Donc chaque entier naïf a son reflet, sous forme de concept, dans la théorie. (Notre lecteur trouvera peut-être que la distinction que nous faisons ici entre les entiers-objets et les entiers-concepts est une sophistication de trop, puisque - pour une fois - la correspondance entre l'objet et le concept frise l'identité; disons que cette précaution servira à nous protéger contre les attaques des philosophes, dont certains ne le cèdent en rien aux mathématiciens formalistes pour couper les cheveux en quatre.)

16

Revenons encore à notre discussion à propos du théorème de Fermat ou de n'importe quelle conjecture de la forme $\forall n,\ P(n)$. Nous avons dit que rien ne permet d'exclure que la mathématique formelle prévoie l'existence d'un contre-exemple, même si ce contre-exemple n'existe pas en réalité; cela pourrait arriver sans que cette mathématique formelle soit pour autant contradictoire.
Ainsi donc, étant donné le prédicat $P(n)$, il y a toujours a priori les trois possibilités suivantes: ou bien il y a une démonstration constructive (finitaire, c'est à dire non infiniment longue), déjà connue ou non, que $P(n)$ est vrai pour tout entier n; ou bien il existe une démonstration constructive du contraire, c'est à dire qu'on dispose d'un programme calculant un entier n_0 et d'une démonstration constructive du fait que $nonP(n_0)$ soit vrai (l'entier n_0 est donc naïf), ou bien, tiers cas non exclu, on pourrait constater (soit directement, soit par une démonstration constructive spécifique) la vérité de $P(n)$ pour chaque entier naïf particulier, mais cette vérification par exhaustion deviendrait de plus en plus difficile et malaisée, au fur et à mesure que l'entier naïf n serait plus grand et donc aussi plus complexe. La complexité d'un entier naïf est la longueur du plus court programme qui le calcule, mesurée (par exemple) en bits. Cette longueur dépend quelque peu du langage de programmation, mais pas essentiellement; et on peut de toute façon choisir un langage de référence. Ainsi une vérification globale ne pourrait être finitaire. Dans le tiers cas on ne peut pas démontrer $\forall n,\ P(n)$, mais on est assuré que pour tout entier naïf n, $P(n)$ sera vrai: nous exprimons cela sous forme condensée par la phrase: «$\forall n,\ P(n)$ est sémantiquement vrai quoique non démontrable».

Que peut-on dire avec le tiers cas ? Plusieurs attitudes sont possibles:

(a) croire que le tiers cas n'existe pas, c'est à dire croire qu'il est exclu pour toutes les conjectures de l'arithmétique possibles et imaginables; mais ceci est équivoque: en effet, on peut

(b) croire vraiment et s'engager, prendre un risque parce qu'on en est convaincu (attitude rarissime qui semble avoir été celle de Cantor, mais ce n'est pas sûr et il n'est plus là pour faire de telles confidences); c'est un authentique acte de foi;

(c) croire par ignorance, parce qu'on n'a jamais songé à distinguer la vérité dans Z.F.C. et la vérité sémantique (attitude de la grande majorité des mathématiciens de base, parce que l'éducation formaliste a censuré ces questions «métaphysiques»)

(d) étant donné qu'on peut démontrer l'incomplétude par la logique formelle, on peut considérer que l'existence du tiers cas est établie; mais elle ne l'est que formellement, c'est à dire que la proposition indécidable du type $\forall n,\ P(n)$ construite «à la Gödel» n'est pas sémantique, elle ne peut pas être interprétée comme ayant un sens dans la culture mathématique (elle n'existe que si on présuppose que la mathématique est l'activité idéale de machines de Turing travaillant hors du temps: nous y reviendrons à la section 18); croire que le tiers cas est exclu peut donc encore consister à croire que le tiers cas ne peut pas se produire pour les conjectures ayant une pertinence historique (mais cela renvoie à (b)).

(e) penser qu'à moins d'un miracle comme l'harmonie préétablie invoquée parfois par Hilbert, le tiers cas existe certainement, peut-être même pour des conjectures connues comme celle de Fermat.

La position (a) est équivalente à celle-ci: croire que l'arithmétique formelle (= l'ensemble de toutes les propositions déductibles des axiomes de Peano) coïncide exactement avec la réalité des entiers naïfs (= l'ensemble des propriétés de ces entiers, ou propositions sémantiquement vraies), c'est à dire en fin de compte nier l'incomplétude sémantique. Vous pouvez maintenant relire le troisième constat de Brouwer (annexe 1) à la lumière de ce commentaire.

Et quelles conséquences tirer de la position (e) ? Puisqu'on admet qu'il doit y avoir une inadéquation entre la mathématique formelle et la réalité arithmétique (c'est à dire qu'il doit y avoir une conjecture $\forall n,\ P(n)$ sémantiquement vraie, mais formellement fausse), c'est donc que la théorie, la mathématique formelle, affirme l'existence d'un entier w pour lequel $P(w)$ est faux, alors que $P(n)$ est vrai pour tous les naïfs (voir la section 11). Conclusion: le postulat «les entiers naïfs remplissent $\mathbb{N}$» ou «la mathématique formelle n'introduit pas d'objet idéal» est équivalent au postulat «tout ce qui est sémantiquement vrai est déductible des axiomes de Peano».
On peut aussi formuler cette conclusion ainsi: le constat «les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$» est équivalent au troisième constat de Brouwer (annexe 1), à condition évidemment d'avoir bien compris ce dernier. Nous espérons que notre commentaire y aura aidé.

17

L'inadéquation entre la théorie arithmétique et la réalité arithmétique se traduit donc par la présence au sein de la théorie d'entiers idéaux, c'est à dire d'entiers «introuvables» (ontologiquement) dans la réalité. Si on veut rapprocher la théorie de la réalité, la rendre plus adéquate, la solution est de rajouter la conjecture responsable de l'inadéquation comme axiome supplémentaire aux axiomes de Peano, mais alors il faut supprimer ailleurs l'axiome non strictement arithmétique (par exemple l'axiome du choix) qui a permis de démontrer formellement la négation de la conjecture.

Si on isole l'arithmétique de Peano du reste de la mathématique formelle (de Z.F.C. par exemple) la conjecture apparaîtra comme indécidable: l'existence d'entiers idéaux ne sera pas un théorème de l'arithmétique, à moins que pour des raisons quelconques on n'ajoute la négation de la conjecture aux axiomes de Peano. Mais on peut aussi «diminuer» l'incomplétude en ajoutant $n,\ P(n)$ aux axiomes de Peano, ce qui nous met dans la même situation que ci-dessus, sauf que nous n'avons pas le souci d'une mathématique formelle englobant l'arithmétique.

En quelque sorte, nous distinguons ici l'inadéquation (quand on peut démontrer par une mathématique formelle englobant l'arithmétique de Peano que $w,\ P(w)$ est vrai quoique sémantiquement faux) et la simple incomplétude (quand on isole l'arithmétique de Peano et que $\forall n,\ P(n)$ aussi bien que $w,\ nonP(w)$ sont indécidables). En fait on ne diminue rien du tout, bien sûr, en vertu de l'équation célèbre $\infty - 1 = \infty$ puisque ajouter la conjecture $n,\ P(n)$ aux axiomes de Peano ne fait que nous ramener au problème de l'incomplétude avec huit axiomes au lieu des sept de Peano. En outre, le théorème d'incomplétude nous dit que formellement l'incomplétude demeure quel que soit le nombre des axiomes ajoutés: exprimé dans un autre langage, le théorème d'incomplétude affirme que la théorie formelle ne peut pas être rendue complète finitairement.

En quelque sorte l'arithmétique de Peano est une théorie très pauvre puisqu'il y a beaucoup de propriétés des entiers naïfs qui ne sont pas prévues par cette théorie; mais il se trouve que cette pauvreté est peu visible car les propriétés en question sont en dehors de notre champ de vision (le théorème de Fermat est peut-être une de ces propriétés, ou la conjecture de Goldbach, ou celle de Syracuse; allez donc savoir !).

En adjoignant aux axiomes de Peano un nombre quelconque (mais fini) d'axiomes puisés dans une liste inépuisable de conjectures du tiers cas, on enrichirait progressivement l'arithmétique en «diminuant» son incomplétude. On peut dire cela autrement: la réalité arithmétique (=les propriétés sémantiquement vraies des entiers naïfs) est inépuisable par rapport au programme formaliste lancé par Hilbert. Si par contre on enrichit la théorie arithmétique non en lui adjoignant des conjectures indécidables comme axiomes supplémentaires, mais en l'englobant dans une théorie plus vaste, alors on rencontre le problème de l'inadéquation; mais on créerait aussi de l'inadéquation (de façon quelque peu plus artificielle cependant) en ajoutant comme axiome supplémentaire non pas une conjecture du tiers cas, mais sa négation (nous avons vu que cela était possible sans entraîner de contradiction). Chaque conjecture du tiers cas ainsi niée ferait apparaître dans la théorie un nouveau contingent d'entiers idéaux, dont l'existence ne serait postulée par la théorie formelle que pour rendre fausses, parce qu'on l'aurait souhaité ainsi, des conjectures qui sont sémantiquement vraies.

Bien sûr chaque axiome supplémentaire modifie le concept $\mathbb{N}$ (l'objet qu'est la suite jamais achevée des entiers naïfs ne change évidemment pas): en le rapprochant de l'objet si l'axiome ajouté est une conjecture du tiers cas $\forall n,\ P(n)$; en posant l'existence d'entiers idéaux si l'axiome ajouté est la négation $w,\ P(w)$ d'une telle conjecture. Pour chaque famille ainsi donnée d'axiomes supplémentaires on aura un $\mathbb{N}$ différent, mais ces $\mathbb{N}$ ne différeront que par les conséquences des axiomes supplémentaires. En revanche les propriétés déductibles des axiomes de Peano seront, elles, communes à tous ces $\mathbb{N}$.
Ainsi on voit très clairement apparaître comme conséquence de l'incomplétude une multiplicité d'ensembles $\mathbb{N}$ obéissant tous aux axiomes de Peano, mais différant entre eux par le fait que telle ou telle conjecture de l'arithmétique y est vraie ou pas. Le lecteur reconnaîtra bien sûr la propriété de non catégoricité des axiomes de Peano, prédite par le théorème de Löwenheim-Skolem.

Ainsi, d'un point de vue intuitionniste, l'incomplétude et la non catégoricité des axiomes de Peano semblent bien naturelles, si ce n'est évidentes, et étroitement liées. On comparera avec l'opacité des versions formalistes.

18

A vrai dire, les versions formalistes ne sont opaques que si on ignore que le formalisme n'est qu'une théorie; en quelque sorte si on prend les théorèmes formels d'incomplétude et de non catégoricité à la lettre. Pour mieux discuter du mécanisme de cette opacification, nous allons présenter ici une démonstration de l'incomplétude, qui est inhabituelle (quoique légitime), mais qui a l'avantage d'être simple et claire; nous aurions pu avoir la même discussion à partir de la démonstration de Gödel, mais il nous aurait fallu auparavant exposer celle-ci, ce qui eût été trop long. Bien sûr cette démonstration est formaliste; il ne peut en être autrement. La voici.

Rappelons que la complexité $l(n)$ d'un nombre entier n est la longueur (comptée en bits) du plus court programme qui le calcule. Pour la plupart des nombres $l(n)$ est le logarithme en base 2 de n (= le nombre de chiffres binaires), mais pour quelques nombres, très rares, $l(n)$ est plus petit.

Considérons un prédicat $P(n)$; celui-ci peut toujours être interprété comme une fonction à valeurs dans $\{-1, +1\}$, égale à $+1$ si $P(n)$ est vrai et à -1 si $P(n)$ est faux. On peut dénombrer les entiers de complexité inférieure à un entier donné N: les programmes étant codés selon un code binaire, le nombre total de programmes de longueur inférieure à N est assurément inférieur à $2N$, car on peut remplir N bits de $2N$ manières différentes, dont quelques unes seulement respecteront la syntaxe d'un programme exécutable. Donc en particulier il y aura moins de $2N$ entiers de complexité inférieure à N. Sur l'ensemble de tous les entiers de 0 à $w-1$, il y aura donc a £ $2N$ entiers de complexité inférieure à N et par conséquent il y en aura $w - a^3 w - 2N$ de complexité supérieure à N.

Considérons maintenant les fonctions $P(n)$ sur l'ensemble $\{0, \frac{1}{4}, w-1\}$, égales à $+1$ pour tous les n de complexité inférieure à N, et à -1 pour au moins un n de complexité supérieure à N. Leur nombre total est $2w - a - 1$, qui est supérieur à $2w - 2N$. Pour $w > 2N$ il y en a beaucoup! Alors prenons $N = 10^1 000$. Un entier n0 de complexité supérieure à $10^1 000$ est impossible à définir. Nous regrettons beaucoup que Poincaré ne soit plus parmi nous; il nous dirait si un tel n_0 est un pur néant ou pas (voir annexe 3). Ecrire une définition (prédicative, c'est à dire un programme) de cet entier est en effet impossible, radicalement: Poincaré dit:«même s'il faut cent générations pour l'écrire, il existe»; mais cent générations, cela permet d'atteindre une complexité de l'ordre de $10^1 2$, mettons $10^2 0$ en admettant des progrès fantastiques dans la technologie des ordinateurs et le génie logiciel; nous sommes fort loin de l'horizon des $10^1 000$. Un tel entier est-il naïf, est-il sémantique, est-il réel? Brouwer aurait répondu sans hésiter: OUI. Nous répondrons: NON, parce que cela nous arrange bien pour le moment (mais rassurez-vous, nous avons un doute).

Il existe donc des prédicats $P(n)$ vrais pour tous les entiers que nous rencontrerons jamais, et faux pour des entiers totalement inaccessibles; si n_0 est un tel entier, il est hors de question que nous puissions démontrer $nonP(n_0)$, ne serait-ce que parce qu'une telle démonstration exigerait la mention explicite de n_0; mais il est impossible également de démontrer $n,\ P(n)$, car s'il y avait une telle démonstration, $P(n_0)$ serait vrai. Nous sommes donc bel et bien dans le tiers cas, et n0 serait un entier idéal.

Cette démonstration est-elle rigoureuse?

On peut la critiquer sur deux aspects.

1. Elle fait intervenir un élément non purement logique: les limites humaines; comme l'aurait dit Cantor, en mathématique la vérité est indépendante de l'observateur; ce qui est vrai doit être vrai même pour Dieu.

2. On a démontré l'existence d'un prédicat P dans le tiers cas; mais la démonstration ne dit rien de ce P; rien ne prouve que la complexité de P est assez petite pour que P «existe»; si la complexité de P est aussi de l'ordre de $10^{1}000$, la conjecture $n,\ P(n)$ n'est pas plus sémantique que n_0.

La critique 1 est inessentielle: d'abord, comme nous l'avons annoncé avant de présenter cette démonstration, on peut avoir la même discussion à propos des démonstrations «à la Gödel» ou «à la Cantor» qui elles, échappent à la critique 1.
Ensuite, on peut en modifiant à peine la démonstration ci-dessus (il suffit de remplacer entier inaccessible par entier non-standard) la rendre «rigoureuse» selon les canons formalistes les plus orthodoxes; mais bien sûr on ne démontrera pas que le prédicat P est standard, et pour cause.
Par contre la critique 2 est incontournable. D'ailleurs elle n'est que l'illustration, sur un cas particulier que nous avons voulu pédagogique et qui est, il est vrai, quelque peu simpliste, de la critique générale de Brouwer contre le formalisme. En ce sens notre illustration est une bonne caricature: elle montre ce qu'il y a de faux dans le formalisme en exagérant le degré de la fausseté, mais non sa nature. Elle nous fait voir, en grossissant à peine, la distance entre la logique (théorie formelle) et l'arithmétique sémantique (intuitionniste). Mais le théorème d'incomplétude de la logique formaliste (dont la valeur scientifique est bien sûr de tout premier ordre) est tout aussi faux: il affirme l'existence d'une proposition indémontrable ainsi que sa négation, mais ne dit rien, et pour cause, de son contenu sémantique.

En négligeant la critique inessentielle 1, la démonstration ci-dessus est formellement rigoureuse; son argument - le dénombrement - est sans faille. Mais cette rigueur fond comme la neige au soleil dès lors qu'on tient compte du contenu sémantique du prédicat P. Et ce qui fait qu'une proposition arithmétique a un contenu sémantique, un sens si vous préférez, c'est que la mathématique est une culture, qu'elle parle de choses qu'on se représente mentalement, même si elles sont abstraites ou idéales. La logique, ou plus généralement la mathématique, peut être parfaitement rigoureuse lorsqu'elle parle de langages formalisés simples et idéaux (car il faut idéaliser pour raisonner); elle ne peut plus l'être quand elle veut parler de l'arithmétique sémantique (*die inhaltliche Arithmetik*, comme disaient Brouwer et Hilbert).

Elle ne peut donc apporter qu'une connaissance approchée. Très précieuse, comme d'ailleurs toutes les connaissances approchées. La mystification apparaît, lorsque pour éviter la honte d'une science approchée et conserver l'apparence de la rigueur, on dénie toute pertinence à la réalité sémantique. En faisant cela, le formalisme a formé des générations d'experts qui ne conçoivent plus la mathématique comme une culture.

19 Conclusion.

Dans les pages que vous venez de lire, nous avons voulu vous montrer la logique de l'infini en adoptant un point de vue peu habituel; ou plus exactement, un point de vue oublié. Car nous sommes convaincus qu'il n'y a rien ci-dessus qui n'ait déjà été dit au début de ce siècle, sous une forme peut-être différente (la lecture des annexes devrait vous le prouver).

Mais ce que par-dessus tout nous avons voulu dire, c'est que cette façon oubliée de voir la logique de l'infini est plus qu'une façon parmi d'autres de la présenter: c'est par l'intuitionnisme qu'on comprend la vraie nature de cette logique, car l'intuitionnisme consiste à la voir de l'extérieur. Lorsqu'au contraire on aborde la logique de l'infini par le formalisme on ne voit plus sa vraie nature; celle-ci est masquée par des détails purement anecdotiques que la théorie formelle met en avant pour des raisons techniques et non fondamentales. Par exemple, dans la démonstration de la section 18, le nombre $N = 10^1000$ est anecdotique. Autre exemple: nous avons vu à la section 17 pourquoi une infinité de concepts N tous différents peuvent répondre aux axiomes de Peano; c'est parce que ces derniers ne résument qu'une faible partie des propriétés des entiers naïfs. Dans la présentation formaliste habituelle, ce fait est exprimé sous la forme du théorème de Skolem, dont la démonstration fait appel à la notion d'ultraproduit, c'est à dire à l'axiome du choix. Cette présentation formaliste fait croire ainsi que la propriété dite de non-catégoricité est une conséquence de l'axiome du choix, alors que cette propriété existe indépendamment de cet axiome: le fait que les axiomes de Peano soient loin d'épuiser la vérité sur les entiers naïfs n'a rien à voir avec l'axiome du choix.

Tout au plus on peut dire: «l'axiome du choix est juste parce que ses conséquences logiques - telles que cette non-catégoricité - sont justes»; le jour où l'une de ses conséquences sera fausse, il faudra l'abandonner! Le rôle joué par l'ultraproduit est purement anecdotique, il provient de la théorie choisie et non de la nature des choses; il n'est qu'une astuce théorique imaginée par Skolem pour formaliser la non-catégoricité, qui est une propriété objective des axiomes de Peano.

Il y a une sorte de perversion par le formalisme, qui fait apparaître comme cause fondamentale ce qui n'est qu'une contingence technique. Une situation épistémologiquement comparable est celle de l'ancien système de Ptolémée, qui permettait de calculer, avec exactitude pour l'époque, les trajectoires apparentes des planètes, mais en postulant des sphères rigides en rotation. Ces sphères étaient anecdotiques comme les artifices du formalisme: en effet, lorsqu'on a commencé à utiliser le système de Copernic, on ne voyait (ou on faisait semblant pour ne pas avoir d'ennuis) dans ce dernier qu'un autre artifice, aussi anecdotique que le premier mais techniquement plus simple. La conception contemporaine du système solaire est au contraire réaliste (ce que les sondes spatiales nous font voir est une réalité), comme l'est l'intuitionnisme face à la réalité arithmétique.

On peut objecter à cela que la réalité ultime du système solaire reste toujours énigmatique (ou transcendentale pour parler comme Kant), les sondes spatiales ne montrant que des apparences. Certes! Mais nous n'avons jamais dit que la réalité ultime des nombres naïfs était moins énigmatique.

Annexe 1

Die Richtigkeitsdifferenzen zwischen der formalistischen Neubegründung und dem intuitionistischen Neubau der Mathematik werden beseitigt sein, und die Wahl zwischen beiden Beschäftigungen sich auf eine gelegenheit reduzieren, sobald die folgenden in erster Linie auf den Formalismus bezüglichen, aber in der intuitionistischen Literatur zuerst formulierten Einsichten allgemein durchgedrungen sein werden. (…)

Erste Einsicht. Die Einteilung der formalistischen Bemühungen in einen Aufbau des "mathematischen Formelbestandes" (formalistischen Bildes der Mathematik) und eine intuitive (inhaltliche) Theorie der Gesetze dieses Aufbaues, sowie die Erkenntnis, dass für die letztere Theorie die intuitionistische Mathematik der Menge der natürlichen Zahlen unentbehrlich ist.

Zweite Einsicht. Die Verwerfung der gedankenlosen Anwendung des logischen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, sowie die Erkenntnis, erstens dass die Erforschung des Berechtigungsgrundes und der Gültigkeitsbereichs des genannten Satzes einen wesentlichen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung ausmacht, zweitens dass dieser Gültigkeitsbereich in der intuitiven (inhaltlichen) Mathematik nur die endlichen Systeme umfasst.

Dritte Einsicht. Die Identifizierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems.

Vierte Einsicht. Die Erkenntnis dass die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen circulus vitiosus enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, dass aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge, d.h. auf der (inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht.

Voici notre traduction:

Les différences de validité entre la refonte formaliste et la reconstruction intuitionniste de la mathématique seront aplanies, et le choix entre ces deux activités se réduira à une simple question de goût, dès lors que tout le monde aura pris conscience des quatre constatations ci-dessous, qui concernent au premier chef le formalisme, mais furent formulées d'abord dans la littérature intuitionniste. (...)

Première constatation. La distinction entre

(a) les efforts des formalistes pour une construction du «corpus des formules mathématiques» (conception formaliste de la mathématique);

(b) une théorie intuitive (sémantique) des lois de cette reconstruction;

et la conviction que la mathématique intuitionniste des entiers naturels est indispensable à la théorie intuitive mentionnée plus haut.

Deuxième constatation. Le rejet de l'usage irréfléchi du principe du tiers exclu ainsi que la reconnaissance du fait que premièrement l'étude du domaine de légitimité et de validité du principe du tiers exclu représente un objectif essentiel pour la recherche sur les fondements de la mathématique et deuxièmement ce domaine de validité n'englobe dans la mathématique intuitive (sémantique) que les systèmes finis.

Troisième constatation. L'identification du principe du tiers exclu avec le principe de la possibilité de résolution de tout problème mathématique.

Quatrième constatation. La reconnaissance de ce fait: la justification (sémantique) de la mathématique formalisée par la preuve de sa non contradiction renferme un cercle vicieux, car cette justification repose sur la validité (sémantique) de l'assertion suivante:«le fait qu'une affirmation n'entraîne pas de contradiction implique la validité de cette affirmation»; c'est à dire que cette justification repose sur la validité (sémantique) du principe du tiers exclu.

Annexe 2

> *Quoi qu'il en soit, nous constatons ceci: si nous nous cantonnons dans le domaine finitaire [i.e. des propositions, termes, et formules exprimables en un nombre fini de mots], comme nous y sommes bien obligés, nous pouvons nous heurter à des problèmes de logique difficiles à dénouer, et ces problèmes deviennent bien vite inextricables quand les «quel que soit» et les «il existe» apparaissent combinés, et dans des formules emboîtées. En tous cas, les lois logiques que les hommes ont toujours utilisées depuis qu'ils pensent, et qu'Aristote a enseignées, ne sont plus valables. On pourrait à première vue s'en sortir en établissant les lois de la logique qui régissent le domaine*

finitaire, mais par là nous ne serions pas aidés, puisque justement nous ne voulons pas abandonner l'usage des lois simples de la logique aristotélicienne. De plus, nul, quand bien même il parlerait avec la langue des anges, ne pourrait empêcher les hommes de nier des jugements universels, de particulariser, d'appliquer le principe du tiers exclu. Alors, que faire ?

Souvenons-nous que nous sommes mathématiciens et qu'en tant que tels nous nous sommes trouvés souvent déjà dans une telle situation délicate, et comment, alors, la méthode géniale des éléments idéaux nous a sauvés. (...) De même que $i = \sqrt{-1}$ a été introduit pour obtenir une formulation aussi simple que possible des lois de l'algèbre, par exemple celle sur l'existence et le nombre des racines d'un polynôme; de même que l'introduction de facteurs idéaux est apparue afin de conserver pour les nombres algébriques les lois simples de la division, comme par exemple l'introduction d'un diviseur commun idéal pour 2 et $1 + \sqrt{-5}$, alors qu'il est impossible d'en trouver un réel, de même nous devons cette fois ajouter aux propositions finitaires des propositions idéales, afin de pouvoir conserver les règles formelles simples de la logique aristotélicienne usuelle. Et c'est un fait curieux, que les formes de raisonnement condamnées avec tant de passion par Kronecker sont exactement le pendant de ce que ce même Kronecker admire avec tant d'enthousiasme dans cette arithmétique qui nous préoccupe ici et qu'il célébrait comme le plus grand exploit de la mathématique.

Et maintenant, comment réussir avec nos «propositions idéales» ? Il est remarquable, et c'est en tout cas une circonstance heureuse et favorable, qu'il nous suffise pour les atteindre de poursuivre, de façon naturelle et conséquente, le développement que la science des fondements de la mathématique a eu jusqu'ici. En fait nous savons bien que déjà la mathématique la plus élémentaire va au-delà du simple point de vue de la théorie naïve des nombres. La méthode du calcul algébrique, à l'aide des symboles formels que sont les lettres, est en effet autonome par rapport au sens numérique des expressions algébriques.

Ici il faudrait signaler au lecteur que notre traduction de cette phrase ne respecte pas du tout la construction allemande, car c'était le seul moyen de ne pas en trahir le sens. Voici la phrase allemande:«...ist nämlich in der inhaltlich-anschaulichen Zahlentheorie, wie wir sie bisher auffaß ten, nicht mit inbegriffen», c'est à dire littéralement:«...n'est en effet pas du ressort de la théorie sémantique-naïve des nombres, comme nous l'avons conçue jusqu'à présent». Comme on le voit, *la difficulté ne provient pas de la langue française, mais du fait que les mots employés par Hilbert, même en allemand, ne seraient plus compris aujourd'hui comme ils pouvaient l'être alors. Vous remarquerez le mot inhaltlich (sémantique), qui signifie ici «relatif à la valeur numérique sous-jacente». L'algèbre consiste à passer des lois du calcul numérique à un calcul purement formel; on passe donc d'un calcul «sémantique» à un calcul formel.*

Pour revenir à l'argument de Hilbert, les formules du calcul algébrique ne servent jamais qu'à la simple communication; les lettres représentaient des chiffres, et par une équation on exprime l'identité de deux nombres. Au contraire dans l'algèbre, nous considérons les expressions algébriques en elles-mêmes, comme des structures autonomes, et les théorèmes relatifs au contenu numérique sont formalisés par elles. A la place de propositions sur les chiffres apparaissent des formules qui de leur côté deviennent maintenant des objets concrets aisément observables; et à la place de démonstrations numériques nous déduisons une formule à partir d'une autre selon des règles définies».

David HILBERT Ueber das Unendliche Mathematische Annalen vol. 95, 1926, pages 161 - 190

Après ce passage, Hilbert explique comment, aux propositions écrites dans un langage formalisé, mais ayant un sens concret, c'est à dire un contenu sémantique, on peut ajouter des propositions qui n'en ont aucun (qui par exemple expriment des propriétés de cardinaux transfinis) de façon à engendrer un corpus de propositions dans lequel on peut pratiquer la déduction aveugle par application de règles définies.

Annexe 3

Qu'on me permette de reprendre un exemple cité par M. Russell. C'était contre moi d'ailleurs qu'il l'invoquait. (...)

Quel est le plus petit nombre entier qui ne peut pas être défini par une phrase de moins de cent mots français ? Et d'abord ce nombre existe-t-il ?

Oui, car avec cent mots français, on ne peut construire qu'un nombre fini de phrases, puisque le nombre des mots du dictionnaire français est limité. Parmi ces phrases, il y en aura qui n'auront aucun sens ou qui ne définiront aucun nombre entier. Mais chacune d'elles *pourra définir au plus un seul nombre entier. Le nombre des entiers susceptibles d'être définis de la sorte est donc limité; par conséquent il y a certainement des entiers qui ne peuvent l'être; et parmi ces entiers, il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres.*

Non, car si cet entier existait, son existence impliquerait contradiction, puisqu'il se trouverait défini par une phrase de moins de cent mots français, à savoir par la phrase même qui affirme qu'il ne peut pas l'être.

Ce raisonnement repose sur une classification des nombres entiers en deux catégories, ceux qui peuvent être définis par une phrase de moins de cent mots français et ceux qui ne peuvent pas l'être. En posant la question, nous proclamons implicitement que cette classification est immuable et que nous ne commençons à raisonner qu'après l'avoir établie définitivement. Mais cela n'est pas possible. La classification ne pourra être définitive que lorsque nous aurons passé en revue toutes les phrases de moins de cent mots, que nous aurons rejeté celles qui n'ont pas de sens, et que nous aurons fixé définitivement le sens de celles qui en ont un. Mais parmi ces phrases, il y en a qui ne peuvent avoir de sens qu'après que la classification est arrêtée, ce sont celles où il est question de cette classification elle-même. En résumé la classification des nombres ne peut être arrêtée qu'après que le triage des phrases est achevé, et ce triage ne peut être achevé qu'après que la classification est arrêtée, de sorte que ni la classification, ni le triage ne pourront jamais être terminés.

Ces difficultés se rencontreront beaucoup plus souvent encore quand il s'agira de collections infinies. (...)

De là une distinction entre deux espèces de classifications, applicables aux éléments des collections infinies; les classifications prédicatives, qui ne peuvent être bouleversées par l'introduction de nouveaux éléments; les classifications non prédicatives que l'introduction des éléments nouveaux oblige à remanier sans cesse.

Est-il possible de raisonner sur des objets qui ne peuvent pas être définis en un nombre fini de mots ? Est-il possible même d'en parler en sachant de quoi l'on parle, et en prononçant autre chose que des paroles vides ? Ou au contraire doit-on les regarder comme impensables ? Quant à moi, je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants.

Tous les objets que nous aurons jamais à envisager, ou bien seront définis en un nombre fini de mots, ou bien ne seront qu'imparfaitement déterminés et demeureront indiscernables d'une foule d'autres objets; et nous ne pourrons raisonner congrument à leur endroit, que quand nous les aurons distingués de ces autres objets avec lesquels ils demeurent confondus, c'est à dire quand nous serons arrivés à les définir en un nombre fini de mots.

(...)

Les phrases d'un nombre fini de mots pourront toujours être numérotées, puisqu'on peut par exemple les classer par ordre alphabétique. Si tous les objets pensables doivent être définis par de semblables phrases, on pourra aussi leur donner un numéro. Il n'y aurait donc pas plus d'objets pensables que de nombres entiers; et si l'on considère l'espace, par exemple, si l'on en exclut les points qui ne peuvent être définis en un nombre fini de mots et qui sont de purs néants, il n'y restera pas plus de points qu'il n'y a de nombres entiers. Et Cantor a démontré le contraire.

Ce n'est là qu'un trompe-l'oeil; représenter les points de l'espace par la phrase qui sert à les définir; classer ces phrases et les points correspondants d'après les lettres qui forment ces phrases, c'est construire une classification qui n'est pas prédicative, qui entraîne tous les inconvénients, tous les paralogismes, toutes les antinomies dont j'ai parlé au début de ce chapitre. Qu'a voulu dire Cantor et qu'a-t-il réellement démontré? On ne peut trouver, entre les nombres entiers et les points de l'espace définissables en un nombre fini de mots, une loi de correspondance satisfaisant aux conditions suivantes:

1. *Cette loi peut s'énoncer en un nombre fini de mots.*

2. *Étant donné un entier quelconque, on peut trouver le point de l'espace correspondant, et ce point sera entièrement défini sans ambiguïté; la définition de ce point qui se compose de deux parties, la définition de l'entier et l'énoncé de la loi de correspondance, se réduira à un nombre fini de mots, puisque notre entier peut se définir et notre loi s'énoncer en un nombre fini de mots.*

3. *Étant donné un point P de l'espace que je suppose défini en un nombre fini de mots (sans m'interdire de faire figurer dans cette définition des allusions à la loi de correspondance elle-même, ce qui est essentiel dans la démonstration de Cantor) il y aura*

un entier qui sera déterminé sans ambiguïté par l'énoncé de la loi de correspondance et par la définition du point P.

4. *La loi de correspondance doit être prédicative, c'est-à-dire que si elle fait correspondre un point P à un entier, elle ne devra pas cesser de faire correspondre ce point P à ce même entier, quand on aura introduit de nouveaux points de l'espace.*

Voilà ce que Cantor a démontré et cela reste toujours vrai; on voit quel est le sens compliqué enfermé dans cette brève proposition: le nombre cardinal des points de l'espace est plus grand que celui des entiers.

Et alors que devons-nous en conclure ? Tout théorème de mathématiques doit pouvoir être vérifié. Quand j'énonce ce théorème, j'affirme que toutes les vérifications que j'en tenterai réussiront; et même si l'une de ces vérifications exige un travail qui excéderait les forces d'un homme, j'affirme que, si plusieurs générations, cent, s'il le faut, jugent à propos de s'atteler à cette vérification, elle réussira encore. Le théorème n'a pas d'autre sens, et cela est encore vrai si dans son énoncé on parle de nombres infinis; mais comme les vérifications ne peuvent porter que sur des nombres finis, il s'ensuit que tout théorème sur les nombres infinis ou surtout sur ce qu'on appelle ensembles infinis, ou cardinaux transfinis, ou ordinaux transfinis, etc., etc., ne peut être qu'une façon abrégée d'énoncer des propositions sur les nombres finis. S'il en est autrement, ce théorème ne sera pas vérifiable, et s'il n'est pas vérifiable, il n'aura pas de sens.

Et il s'ensuit qu'il ne saurait y avoir d'axiome évident concernant les nombres infinis; toute propriété des nombres infinis n'est que la traduction d'une propriété des nombres finis; c'est cette dernière qui pourra être évidente, tandis qu'il faudra démontrer la première en la comparant à la dernière et en montrant que la traduction est exacte.

Henri POINCARE La logique de l'infini dans Dernières pensées Ernest Flammarion, éditeur 1920 pages 101 - 139

Annexe 4

Dans son ouvrage *Die Zahlen, was sind sie und was sollen sie ?*, Dedekind présente sa conception de l'arithmétique, que nous allons résumer avant de donner un extrait significatif.

Le livre commence ainsi: «Dans la suite, j'entends par «chose» tout objet de notre pensée. Pour pouvoir parler commodément des choses, on les désigne par des signes, par exemple des lettres».

Peu après, Dedekind définit les «systèmes» où chacun reconnaîtra ce qu'on appelle aujourd'hui des ensembles: «il arrive très souvent que des choses différentes $a, b, c, \frac{1}{4}$ soient pour un motif quelconque réunies sous un point de vue commun, mises ensemble dans la pensée, et on dit alors qu'elles forment un système S; on nomme les choses $a, b, c, \frac{1}{4}$, les éléments du système S ». Il est inutile de vous citer sa définition d'une application, puisqu'elle est en tous points identique à celle que vous avez apprise à l'école. De même ce qu'il appelle application semblable est simplement ce que nous avons appris sous le nom d'application injective. Nous retrouvons encore du connu dans la définition suivante: «un système S est dit infini quand il est semblable à une de ses parties propres; dans le cas opposé, S est dit système fini.» La théorie devient intéressante à partir de maintenant: Dedekind démontre le

Theorem 1 *Il existe des systèmes infinis*

Pour Dedekind en effet, ceci est un théorème et non un axiome comme pour la seconde génération des formalistes. Voici sa démonstration:

> *Le domaine de mes pensées, c'est à dire l'ensemble S de toutes les choses qui peuvent être objets de ma pensée, est infini. Car si s désigne un élément de S, la pensée s', que s peut être objet de ma pensée, est elle-même un élément de S. Si l'on considère le même élément comme l'image $f(s)$ de l'élément s l'application f de S ainsi définie a la propriété que l'image S' est une partie propre de S; et en particulier, S' est une partie propre de S, car il y a dans S des éléments (par exemple mon moi) qui sont distincts de toute pensée s' de ce genre et pour cette raison ne sont pas contenus dans S'. Enfin, il est clair que si a, b sont des éléments différents de S, leurs images a', b' sont aussi différentes, donc que l'application est une application semblable. Par conséquent, S est infini, C.Q.F.D.*

Par ailleurs, Dedekind appelle chaîne (relative à une application f une partie K de S telle que $f(K)$ soit contenu dans K, et chaîne d'un élément s la plus petite chaîne qui contient s. Ce qui lui permet (entre autres) de poser la définition que voici:

> *un système N est dit simplement infini, quand il existe une application semblable f de N dans lui-même telle que N apparaît comme chaîne d'un élément qui n'est pas contenu dans $f(N)$.*

On dit alors que f ordonne N.

Enfin:

> *Si en considérant un système N simplement infini, ordonné par une application f, on fait totalement abstraction de la constitution particulière des éléments, que l'on ne retient que ce qui les différencie et que l'on saisit seulement les relations qu'établit entre eux l'application f qui définit l'ordre, on nommera ces éléments nombres naturels ou nombres ordinaux ou même absolument nombres.*

L'élément de base dont $\mathbb{N}$ est la chaîne est nommé 1 et est dit le nombre de base de la série. Dedekind ajoute immédiatement:

> *eu égard à cette libération des éléments de tout autre contenu (abstraction), on peut définir avec raison les nombres comme une création libre de l'esprit humain.*