UFR Mathématique-Informatique
Strasbourg

20 Août, 2018

Introduction au langage de catégorie pour la théorie du Topos

Algis David
Sous la direction de Porta Mauro

Université de Strasbourg

Sommaire

Avant-Propos

Au cours de ma licence j'ai eu de nombreuses occasions de discuter avec mes enseignants de mathématiques et de physique. Cependant une discussion avec mon professeur de physique m'a profondément marquée. Je l'interrogeais sur la théorie des ensembles et sur toute la beauté que m'évoquais cette théorie aux fondements de la mathématique. Il me répondit qu'il avait entendu parler d'un langage/théorie capable de donner un fondement à la mathématique : **la théorie des catégories**.

C'est pourquoi au milieu de la dernière année de licence, quand on nous a demandé de choisir nos sujets, je n'ai pas hésité une seconde et j'ai tout de suite chercher un tuteur; M. Porta pouvant m'aider à comprendre la théorie des catégories.

Dans la théorie des catégories, j'ai découvert une façon de raisonner différente de celle que nous utilisons classiquement.

Un nouveau langage pour appréhender les mathématiques dans une généralité fascinante. Un langage construit sur des morphismes et des diagrammes, la seule opération que l'on utilise est celle de la composition.

Dans le chapitre 1 et 2, nous donnerons des bases pour appréhender ce langage.

Vulgairement au lieu d'étudier des ensembles munis de propriété(s) particulière(s) comme des groupes, des espaces topologiques, etc... Nous étudions par exemple l'ensemble des groupes avec les morphismes de groupes qui les lient, appelés catégories des groupes, l'ensemble des espaces topologiques avec les applications continues entre elles, appelé catégorie des espaces topologiques, etc... Une catégorie très importante est celle de tous les ensembles et des applications ensemblistes, on la note **Set**.

Une fois la notion de catégorie établie, dans une démarche similaire à l'algèbre, nous allons définir les morphismes entre deux catégories qu'on appelle foncteur. Puis définir le concept propriété universelle ainsi que de nombreux cas particuliers de propriété universelle, comme les produits par exemple qui correspondent dans **Set** au produit cartésien usuel.

L'ensemble de ces concepts nous donnera une boite à outils pour le chapitre 3 et 4.

Dans le chapitre 3, nous allons donner dans un langage catégorique, les bases de **la théorie des faisceaux**. Rapidement un faisceau correspond à un ensemble de classes de fonctions, qu'il est possible de "recoller" à une échelle locale pour obtenir une fonction globale munie des mêmes propriétés. Par exemple les fonctions C^0, C^∞, etc...

De ce fait, le concept de faisceau est étroitement lié au concept de topologie. Ainsi, pour mieux étudier les faisceaux nous allons grâce au langage des catégories généraliser la notion de topologie, qu'on appellera topologie de Grothendieck.

Dans le chapitre 4, nous allons nous servir des outils développés dans le chapitre précédent pour énoncer et démontrer en partie **le théorème de Giraud** qui donne une caractérisation d'un topos de Grothendieck. Un topos de Grothendieck est une catégorie similaire à la catégorie des faisceaux.

Et enfin, nous allons définir la notion de **Topos élémentaire** qui correspond à une catégorie munie de propriétés semblable à la catégorie **Set**.

Je ne peux bien entendu pas commencer sans adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de mémoire, M. Porta, qui m'a guidé et aidé tout au long de ce mémoire. Ainsi qu'à ma mère pour avoir eu la patience de relire l'intégrale de se mémoire.

Chapitre I

Éléments de la théorie des Catégories

Chapitre 1

Fondations de la Mathématique

1.1 Remise en Contexte Historique et Motivation

La question d'une théorie formelle comme fondement de toutes les mathématiques s'est posée tout au long de son histoire. On peut voir une première tentative de cette formalisation avec l'axiomatisation de la géométrie par Euclide vers 300 ans avant notre ère, même si les axiomes et les définitions de bases restent très ambiguës.[1]

Cependant, il faut attendre les années 1860 pour que la nécessité d'une telle théorie se fasse sentir. En effet, la construction de $\mathbb{R}$ dans le but d'asseoir l'analyse sur des fondements plus rigoureux peut être considérée comme un des éléments déclencheurs de la construction d'une formalisation des mathématiques.

Dés le début du 19ème siècle on cherche à montrer que le concept d'entier naturel est primitif à toutes les mathématiques. De ce fait, on vise à dégager des constructions de $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$ à l'aide de $\mathbb{N}$. Les premiers résultats sont dus à Martin Ohm en 1820, puis Grassmann, Hankel et Weierstrass vers 1860. En se basant sur les résultats de Martin Ohm, ils construisent les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{N}$. La construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ (et donc de $\mathbb{N}$) se fait dans les années 1870.

Cette construction a été découverte plus ou moins simultanément par Cantor, Dedekind, Weierstrass, et Méray, en suivant des méthodes différentes. De ce fait, les entiers naturels deviennent le fondement de toutes les mathématiques.

Comprendre les opérations qui régissent les entiers naturels et donc à axiomatiser l'arithmétique, devient un enjeu de recherche. À part Leibniz, personne n'aurait cherché à définir la multiplication et l'addition sur les entiers, ni à expliciter le principe de récurrence avant le 19ème siècle.

Le premier pas a été fait par Grassmann en 1861, mais la première axiomatisation est due à Dedekind en 1888. Elle fut reproduite cinq ans plus tard par Peano dans le système d'axiome qui porte aujourd'hui son nom.

À cette époque, la majorité de mathématiciens considèrent avoir atteint le fondement définitif des mathématiques, mais pendant cette période, une autre théorie est découverte, la théorie des ensembles :

La notion d'ensemble au sens actuel du terme était inconnue des Grecs, notamment car l'infini provoquait de grosses difficultés conceptuelles.

On remarque cette difficulté dans l'un des axiomes présent dans les éléments d'Euclide "le tout est plus grand que la partie". En effet, l'expression "plus grand que" est d'autant plus ambiguë qu'elle implique de nombreux

[1] Pour plus de détails cf. [Bou69] et [Bel09]

paradoxes. Comme par exemple "le paradoxe de l'infini" de Galilée en 1638, qui fait remarquer qu'il existe une bijection entre les nombres entiers et leurs carrés.

Pour résoudre ce paradoxe jusqu'au 19eme siècle, les mathématiciens rejettent tout simplement la conception "de comparer des infinis".

C'est à Cantor et à son génie que nous devons la découverte de la théorie des ensembles, même si Bolzano avait déjà beaucoup réfléchi sur la notion d'ensemble (à l'époque de collection) au début du 19ème siècle. Il s'intéresse aux problèmes d'équipotence entre différents ensemble et découvre à sa stupéfaction que $\mathbb{N} \not\simeq \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$. Il dégage avec une grande netteté de nombreux concepts fondamentaux comme celui de l'ordre, du continu, etc...

Dedekind suit de très près les travaux de Cantor, et il montre notamment que la notion d'entier naturel, sur lequel pour rappel se base toute les mathématiques à l'époque, pouvait elle-même dériver de la théorie des ensembles. Alors qu'on pense que la formalisation des mathématiques s'achève avec la théorie des ensembles, une grande crise survient au début du 20ème siècle, celle des ensembles paradoxaux.

L'ensemble de tous les ensembles ne pouvant se contenir lui-même reste un exemple connu de l'un de ces paradoxes. Cette crise divise en deux camps les mathématiciens "les formalistes" et les "idéalistes". Cependant les divergences étaient plus d'ordre philosophique donc nous ne rentrerons pas pas plus dans les détails. L'idée des formalistes étaient de donner une axiomatisation à la théorie des ensembles de façon analogue à la géométrie élémentaire. Dans cette axiomatisation on ne s'occupe pas de savoir ce que sont les "ensembles" ni ce que signifie la relation d'appartenance, mais on énumère les conditions imposées à cette dernière relation.

Le première exemple d'une telle axiomatisation fut donné par Zermolo en 1908. Il évite les ensembles "trop grands" en introduisant un axiome de sélection se basant sur la notion de propriété. Néanmoins, cette notion donnée par Zermolo était très ambiguë. C'est pourquoi, cette axiomatisation est précisée par Skolem et Frankel. Ce système d'axiomes est appelé ZF ou ZFC où le C correspond à l'axiome du choix.

Neumann, Bernay, et Godel (NBG) donne un 2ème exemple quelques années après. Ce système introduit la notion de classe qu'il différentie de la notion d'ensemble classique. En effet, un ensemble est une classe mais pas l'inverse. La notion de classe donne donc une autre façon de gérer les ensembles "trop grands".

Il a été démontré que ces deux systèmes sont équivalents.

Alors qu'on estime les fondations des mathématiques une fois de plus achevées, une théorie va faire parler d'elle à partir des années 1940. Elle est le sujet de cette première partie : "la théorie des catégories".

Cette théorie a été découverte par Mac Lane et Eilenberg, nous allons la retracer rapidement par le point de vue de Mac Lane.

Né en 1909, *Saunders Mac Lane* [2] se découvre une passion à Yale pour les fondations des mathématiques vers 1926, après la lecture du récent Principia Mathematica de Whitehead. Après 3 années en tant qu'assistant professeur à Harvard et un semestre de recherche à Chigago, il est invité en 1941 dans le Michigan pour faire une série de 6 lectures sur les extensions de groupes.

[Soit G un groupe est dit extension de Q par N deux autres groupes, si N est un sous-groupe normal de G et Q est le groupe quotient G/N, dans ce ce cas, ils forment la suite exacte suivante :

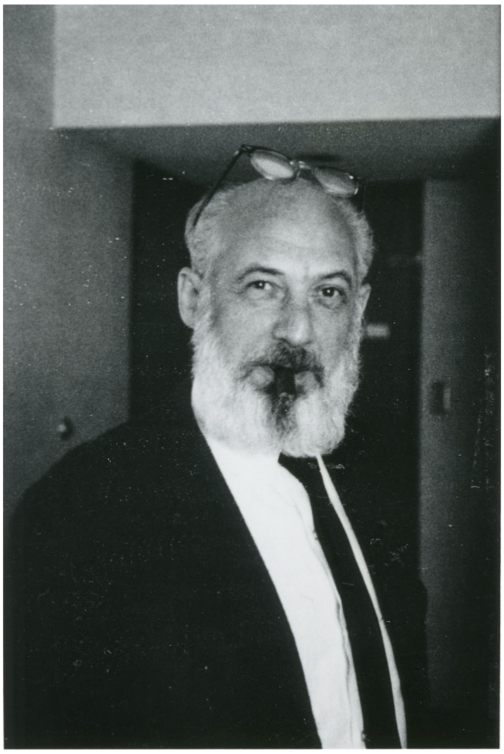
$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

où 1 désigne le groupe à un élément.[3]]

[2] [ML05]

[3] appendice .2

(a) Saunders Mac Lane



(b) Samuel Eilenberg

[La dernière lecture concerne en particulier l'ensemble Ext. On peut comprendre Ext par la relation suivante : Deux extensions de groupes représentées par:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & G \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

sont dites équivalentes s'il existe $g : G \to G'$ tel que le diagramme commute. (On a d'après le lemme des cinq, g est un isomorphisme). Cette relation d'équivalence forme l'ensemble noté Ext(N,Q). De plus, si on prend H le groupe dont les générateurs sont $g_1, g_2, ..., g_n, ...$ tel que pour p un nombre premier on ait :

$$pg_2 = g_1, ..., pg_{n+1} = pg_n, ...$$

et $Q = \mathbb{Z}$ on a l'égalité suivante

$$Ext(H, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$$

Dans l'audience se trouvait un mathématicien polonais du nom de *Samuel Eilenberg.* Cette égalité le surprendra et il fait remarquer à Mac Lane quelques jours après "C'est comme l'homologie de Steenrod sur le solénoide p-adique. Il y a quelque chose de mystérieux là-dessous."

Les deux mathématiciens se sont questionnés sur le fait qu'une homologie puisse être calculée à l'aide des extensions de groupes, et après avoir réfléchi une nuit entière, ils ont abouti la suite exacte suivante :

$$1 \to Ext(H_{n-1}(X), G) \to H^n(X, G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X), G) \to 1$$

L'homomorphisme α ci-dessus forme donc un lien de l'homologie sur la cohomologie. Ils publient donc le 21 mai 1942 le papier "Group Extensions and Homology" [MLE42]. Dans cet article la section 12 : "Natural Homomorphism" donne un premier exemple de transformation naturelle.(D'autres exemples avaient déjà été donnés auparavant, comme les relations entre un espace vectoriel et son bidual, mais Mac Lane et Eilenberg l'ont généralisé). C'est donc la première branche de l'arbre qui devait être la théorie des catégories.
De la notion de transformations naturelles Mac Lane et Eilenberg élaborent aussi celles de catégorie et de foncteur. Des notions simples mais d'une généralité remarquable, c'est pourquoi Mac Lane et Eilenberg n'ont pas tout de suite saisi l'importance de ces outils. Néanmoins ils remarquèrent rapidement le nombres d'exemples que pouvaient traiter la théorie des catégories.

Donc la théorie des catégories n'a pas été immédiatement pensée comme une théorie fondatrice de la mathématique, mais plutôt comme un langage facilitant l'expression de mathématique plutôt avancée. Cependant avec les années de nombreux mathématiciens ont commencé à l'utiliser dans bien d'autres domaines.

De ce fait, la théorie des catégories nécessite une axiomatisation digne de ce nom dans le prolongement de la théorie des ensembles. L'une de ces axiomatisation est donnée par l'extension de ZFC avec la notion d'univers par Grothendieck présentée dans le tome 1 du séminaire 4 de géométrie algébrique de Bois Marie [GAV63a].

1.2 Univers

Définition 1.2.1. On appelle **Univers** un ensemble non vide $\mathcal{U}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- Si $X \in \mathcal{U}$ et $Y \in X$, alors $Y \in \mathcal{U}$
- Si $X, Y \in \mathcal{U}$, alors $\{X, Y\} \in \mathcal{U}$
- Si $X \in \mathcal{U}$, alors $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{U}$
- Si $(X_i, i \in I)$ est une famille d'élément de $\mathcal{U}$ et $I \in \mathcal{U}$, alors $\cup_{i \in I} X_i \in \mathcal{U}$

Remarque 1.2.2. De cette définition on peut déduire que toutes les opérations usuelles de la théorie des ensembles (produit, intersection, etc...) appliquées à un (ou des) élément(s) d'un univers $\mathcal{U}$, appartiennent toujours à $\mathcal{U}$. Néanmoins nous sommes incapables de construire un univers autre que trivial (c'est à dire du type $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \varnothing\}\}$, etc...). De ce fait on rajoute l'axiome suivant à la théorie de ZFC[4].

Axiome 1.2.3. *Pour tout ensemble X, il existe un univers* $\mathcal{U}$ *tel que* $X \in \mathcal{U}$

Définition 1.2.4. Soit $\mathcal{U}$ un univers, on appelle:

- **Petit ensemble**, un élément $x \in \mathcal{U}$.
- **Petite fonction**, une fonction $f : u \to v$ tel que u et v sont des petits ensembles.
- **Classe** un sous ensemble de $\mathcal{U}$.

[4] [YBM10]

Remarque 1.2.5. On peut voir une petite fonction $f : u \to v$ comme un petit ensemble : le triplet (u, G_f, v), où $G_f = \{(x, y) \mid x \in u,\ \text{et}\ y = f(x)\}$.

De plus on peut construire l'ensemble de tous les ensembles qui sont des petites fonctions, car ces ensembles appartiennent à $\mathcal{U}$.

Chapitre 2

Introduction au langage de la théorie des catégories

Pour écrire ce chapitre nous nous sommes en grande partie inspiré du livre de Saunders Mac Lane lui-même [ML71].

La notion d'univers et l'axiome 1.2.3 nous permet donc de donner la définition d'une catégorie qui correspond vulgairement à deux classes qu'on appellera objets et flèches munis de plusieurs fonctions.

Cette notion de catégorie va nous permettre de développer de nombreuses autres notions comme celle de foncteur qui correspond vulgairement aux morphismes entre catégories, et bien d'autres.

De ce fait la théorie des catégories peut être vue comme un autre langage pour envisager les mathématiques. Un langage moins intuitif au première abord, mais qui s'avère être d'une puissance non négligeable.

De plus la théorie des catégories permet la généralisation de nombreux concepts ensemblistes.

2.1 Notion de Catégorie, Foncteur, et Transformations naturelle

2.1.1 Catégorie

Définition 2.1.1. On appelle **graphe dirigé** la donnée de :

- un ensemble O d'objets;
- un ensemble F de flèches;
- deux fonctions domaine dom : $F \to O$ et codomaine cod : $F \to O$ (on peut aussi les appeler s et t "source" et "but").

Dans un graphe dirigé on appelle **fonction composable** un élément de l'ensemble suivant :

$$F \times_O F = \{(g, f) \mid g, f \in F \text{ et dom g} = \text{cod f}\}$$

Définition 2.1.2. On appelle **catégorie** un graphe dirigé munis de:

- une fonction identité :

$$O \to F$$
$$c \mapsto \mathrm{id_c}$$

- une fonction composition :

$$F \times_O F \to F$$
$$(g, f) \mapsto g \circ f$$

tel qu'il vérifie les deux axiomes suivants :

1. Si $cod(f) = dom(g)$ et $cod(g) = dom(h)$ alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ **(Associativité)**
2. $f \circ \mathrm{id_X} = f$ et $id_Y \circ f = f$ **(Unité)**

Notation 2.1.3. On note pour une catégorie $\mathcal{C}$

- un objet c de $\mathcal{C}$ est noté $c \in \mathcal{C}$, et l'ensemble de ses objets est notés $ob(\mathcal{C})$.
- une flèche f de $\mathcal{C}$ tel que $dom(f) = a$ et $cod(f) = b$ est noté $a \xrightarrow{f} b$ ou $f : a \to b$, et l'ensemble de ses flèches est noté $fl(\mathcal{C})$.

Remarque 2.1.4. La notation $a \xrightarrow{f} b$ est très importante !

En effet elle résume à elle seule la façon de penser catégorique.

Au lieu, comme dans la théorie des ensembles, de traiter les ensembles à partir de leurs éléments, on raisonne sur les flèches (les morphismes) entres les ensembles et les catégories. Pour cela on utilise une représentation simple en diagramme. Donc la plupart des théorèmes reviennent donc à démontrer qu'un diagramme est commutatif (cf. appendice .1).

Définition 2.1.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on appelle **sous-catégorie** de $\mathcal{C}$ la donnée S d'une sous collection d'objets de $\mathcal{C}$, et une sous collection de flèches de $\mathcal{C}$ tels que :

- Pour tout $X \in S$, on a $\mathrm{id_X}$ est une flèche de S.
- Pour toutes flèches de S, le but et la source appartiennent à S.
- Pour tout f,g deux flèches de S, $f \circ g \in S$.

Définition 2.1.6. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **petite** (resp. **grande**) si $ob(\mathcal{C})$ est un ensemble (resp. une classe).

Exemple 2.1.7. Voici quelques exemples de catégorie d'abord des catégories petites :

- **0** la catégorie vide avec aucun objet et aucune flèche.
- **1** (aussi noté $\circlearrowleft$) la catégorie avec un objet et une unique flèche l'identité.
- $\downdownarrows$ qui a exactement deux objets et qui a deux flèches parallèles $f, g \colon \bullet \to \bullet$
- **Préordre** on rappelle qu'un préordre est ensemble P avec une relation réflexive et transitive qu'on notera "$\leq_P$". Pour tout préordre $(P, \leq_P)$ on peut associer une catégorie dont les objets sont les $x \in P$ et il existe une flèche entre x et y des éléments de P si et seulement si $x \leq_P y$. On remarque que la flèche est unique.

Néanmoins la théorie des catégorie aurait trop peu d'intérêt si les seules catégories étaient petites. C'est pourquoi à l'aide de l'axiome 1.2.3 nous pouvons définir des grandes catégories :

- **Set** les objets sont les petits ensembles, et les flèches les applications ensemblistes.
- **Grp** les objets sont les petits groupes, et les flèches les morphismes de groupes.
- **CRng** les objets sont les petits anneaux commutatif, et les flèches les morphismes d'anneaux commutatif.
- **Top** les objets sont les petits espaces topologique, et les flèches les applications continues.
- $\mathbf{Vect_K}$ les objets sont les petits espaces vectoriels, et les flèches les applications linéaires.
- Soit $X \in$ **Top** on définit $\mathcal{O}(X)$ les objets sont les ouverts de X, et les flèches $V \xrightarrow{f} U$ les $V \subseteq U$.

Définition 2.1.8.
- Une flèche $a \overset{m}{\hookrightarrow} b$ est un **mono** dans une catégorie $\mathcal{C}$ si pour toute paire de flèches $f_1, f_2 : d \to a$ on a:
$$m \circ f_1 = m \circ f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$$
- Une flèche $a \overset{n}{\mapsto} b$ est un **epi** dans une catégorie $\mathcal{C}$ si pour toute paire de flèches $f_1, f_2 : b \to c$ on a:
$$f_1 \circ n = f_2 \circ n \Rightarrow f_1 = f_2$$
- Une flèche $c \xrightarrow{f} c'$ est un **isomorphisme** dans une catégorie $\mathcal{C}$ s'il existe une flèche $c' \xrightarrow{g} c$ tel que $g \circ f = \mathrm{id_c}$ et $f \circ g = \mathrm{id_{c'}}$.
- Un objet t est dit **terminal** dans une catégorie $\mathcal{C}$ si pour tout $a \in \mathcal{C}$ il existe une unique flèche $a \xrightarrow{f} t$.
- Un objet i est dit **initial** dans une catégorie $\mathcal{C}$ si pour tout $a \in C$ il existe une unique flèche $i \xrightarrow{f} a$.

Définition 2.1.9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle catégorie au-dessus de $\mathcal{C}$ sur un objet $c \in \mathcal{C}$ la catégorie dont :

- Les objets sont les flèches f de $\mathcal{C}$ tel que $cod(f) = c$.
- Les flèches de $a \xrightarrow{f} c$ à $b \xrightarrow{f'} c$ sont les $g : a \to a'$ tel que $f' \circ g = f$.

Définition 2.1.10. On appelle **catégorie discrète** une catégorie dont les seuls morphismes sont les morphismes identité.

Définition 2.1.11. On appelle **catégorie finie** une catégorie muni d'un nombre fini d'objets et de flèches.

Définition 2.1.12. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $c \in \mathcal{C}$, on appelle **catégorie de $\mathcal{C}$ au dessus de c**, la catégorie dont :

- les objets sont les flèches de $\mathcal{C}$ de la forme $\bullet \xrightarrow{f} c$
- les flèches de $X \xrightarrow{f} c$ à $X' \xrightarrow{f'} c$ sont des flèches de $\mathcal{C}$ de la forme $X \xrightarrow{f} X'$, tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ & c \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

commute.

Définition 2.1.13. Un objet dans une catégorie $\mathcal{C}$ est dit **objet zéro** s'il est à la fois initial et final.

Définition 2.1.14. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie muni d'un objet zéro, alors pour tout $a, b \in \mathcal{C}$, l'unique flèche rendant ce diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "0_{ab}=0"] & 0 \arrow[dl] \\ b & \end{tikzcd} \tag{2.1.2}$$

est appelé la flèche nulle.

Définition 2.1.15. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
On dit qu'une catégorie a des **petits Hom-Set** si pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ on a $Hom(x, y) \in \mathbf{Set}$.

2.1.2 Foncteurs

Définition 2.1.16. On appelle **Foncteur** (covariant) entre les catégorie $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ un $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ qui :

- à tout objet c de $\mathcal{C}$ associe un objet de T_c de $\mathcal{B}$.
- à toute flèche de $\mathcal{C}$ associe une flèche T_f de $\mathcal{B}$.

tel que:

- $T(id_c) = \mathrm{id}_{\mathrm{T_c}}$
- $T(g \circ f) = T_g \circ T_f$

On peut résumer ces informations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & T_b \arrow[d, "T_f"] \\ c \arrow[r, mapsto] & T_c \end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

Lemme 2.1.17. *Pour un foncteur $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ on a équivalence entre :*

- *T est une bijection entre ses objets et ses flèches.*
- *Il existe $S : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un foncteur tel que $S \circ T$ et $T \circ S$ soit des foncteurs identité.*

*Deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sont dites **isomorphes** si elles vérifient l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessus.*

Démonstration. La démonstration est évidente. Il suffit de construire le foncteur S objet par objet et flèche par flèche. □

Définition 2.1.18. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit

- **fidèle** si pour toutes paire de flèches parallèles $X \overset{f,g}{\to} Y$, f=g ⇔ F(f)=F(g).
- **plein** Si pour toute flèche $F(X) \overset{g}{\to} F(Y)$,il existe f une flèche de $\mathcal{C}$ tel que $g = F(f)$.

- **pleinement fidèle** s'il vérifie les deux définitions ci-dessus.

Remarque 2.1.19. De façon évidente pour un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ si f une flèche de $\mathcal{C}$ est un isomorphisme, alors $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$. Pour ce qui est de la réciproque, on donne la définition suivante:

Définition 2.1.20. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit **conservatif** si pour f une flèche de $\mathcal{C}$, $F(f)$ est un isomorphisme entraine que f est un isomorphisme

Remarque 2.1.21. Tout au long de ce mémoire, nous donnerons des exemples de foncteurs et notamment quelques exemples très importants dans cette partie.

Définition 2.1.22. On pose le foncteur suivant Hom(A, −) : $C \to$ **Set** (noté aussi h^A)) qu'on appelle un **foncteur Hom** définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B & \longmapsto & Hom_{\mathbf{C}}(A,B) = Hom(A,-)(B) \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow g \mapsto f\circ g \\ C & \longmapsto & Hom_{\mathbf{C}}(A,C) = Hom(A,-)(C) \end{array} \tag{2.1.4}$$

où $g \in Hom_{\mathbf{C}}(A,B)$.

Définition 2.1.23. On appelle **foncteur d'oubli** un foncteur $F : \mathcal{C} \to$ **Set** fidèle et conservatif.

Remarque 2.1.24. On l'appelle foncteur d'oubli, car dans de nombreux cas il correspond au foncteur qui "oublie" la structure d'un ensemble et ne le voit plus que comme un objet de **Set**.
En général il est noté U.

Définition 2.1.25. Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{D}$ trois catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ est aussi appelés **bifoncteur** de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ à $\mathcal{D}$.

2.1.3 Transformation naturelle

Définition 2.1.26. Soient $F, G \colon C \to D$ deux foncteurs parallèle entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On appelle **Transformation Naturelle** (ou morphisme de foncteur) la donnée de :
Pour tout $c \in \mathcal{C}$, une flèche $\eta_c : F(c) \to G(c)$ de $\mathcal{D}$, tel que le diagramme :

$$\begin{array}{cccc} c & F(c) & \xrightarrow{\eta_c} & G(c) \\ \big\downarrow f & \big\downarrow F(f) & & \big\downarrow G(f) \\ c' & F(c') & \xrightarrow{\eta_{c'}} & G(c') \end{array} \tag{2.1.5}$$

commute. On notera une telle transformation naturelle $\eta : F \to G$.
Et les η_c sont appelés **composantes** de η.

Exemple 2.1.27. Soit S un ensemble fixé, et on note $X^S = hom(S,X)$. On cherche à montrer que $X \mapsto X^S$ est la fonction objet d'un foncteur **Set** $\mapsto$ **Set**, et que l'évaluation $e_X : X^S \times S \mapsto X$ définie par $e(h,s) = h(s)$, est une transformation naturelle.

Tout d'abord posons T : **Set** $\to$ **Set** qui a un objet $X \in$ **Set** associe $X^S \in$ **Set** et qui a une flèche $X \xrightarrow{f} Y$ $\in$ **Set** associe

$$\begin{aligned} X^S &\xrightarrow{f_*} Y^S \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

On peut résumer ces informations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & X^S \arrow[d, "f\circ g"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & Y^S \end{tikzcd} \tag{2.1.6}$$

T : **Set** $\to$ **Set** définie un foncteur, en effet : $T(\mathrm{id_X})$ est donné par :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\mathrm{id_X}"] & X^S \arrow[d, "\mathrm{id_X}\circ g = g"] \\ X \arrow[r, mapsto] & X^S \end{tikzcd} \tag{2.1.7}$$

Et donc $T(\mathrm{id_X}) = \mathrm{id_{T_X}}$. De plus soit $g \in hom(S, X)$ et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f'} Z$. Vérifions que $(f'^* \circ f^*)(g) = (f' \circ f)^*(g)$

$$\begin{aligned} (f'^* \circ f^*)(g) &= f'^*(f^*(g)) \\ &= f'^*(f \circ g) \\ &= f' \circ (f \circ g) \end{aligned}$$

Et $(f' \circ f)^*(g) = (f' \circ f) \circ g$. L'égalité est bien vérifiée par l'associativité des applications sur des ensembles quelconques. Les axiomes de définition d'un foncteur sont donc bien vérifiés.

Maintenant nous allons montrer de façon analogue que pour un S fixé $S \times -$: **Set** $\to$ **Set** définie par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & S \times X \arrow[d, "(s\, f(x))"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & S \times Y \end{tikzcd} \tag{2.1.8}$$

est un foncteur.

En effet, $S \times X(\mathrm{id_X})$ est donné par

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\mathrm{id_X}"] & S \times X \arrow[d, "\mathrm{(s,x)}"] \\ X \arrow[r, mapsto] & S \times X \end{tikzcd} \tag{2.1.9}$$

et donc $S \times X(\mathrm{id_X}) = id_{S\times X}$.

Si on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & S \times X \arrow[d, "\text{(s,f(x))}"] \\ Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f'"] & S \times Y \arrow[d, "\text{(s,f'(y))}"] \\ Z \arrow[r, mapsto] & S \times Z \end{tikzcd} \tag{2.1.10}$$

L'axiome de l'associativité est vérifié, car le diagramme ci-dessous est commutatif. (Si on prend y=f(x))

$$\begin{tikzcd} S \times X \arrow[r, "\text{(s,f(x))}"] \arrow[dr, "\text{(s,f'(f(x)))}"'] & S \times Y \arrow[d, "\text{(s,f'(y))}"] \\ & S \times Z \end{tikzcd} \tag{2.1.11}$$

$S \times -$ définie bien un foncteur.

Maintenant on peut définir $(S \times -) \circ T \xrightarrow{ev} id_{\mathbf{Set}}$ par composition de foncteur. On cherche à montrer que ev est une transformation naturelle.
Soit $X \in \mathbf{Set}$ définie par

$$\begin{aligned} ev_X : & S \times X^S \xrightarrow{f*} X \\ & (s, g) \mapsto g(s) \end{aligned}$$

$\forall X \xrightarrow{f} Y$ On va montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} S \times X^S \arrow[r, "ev_X"] \arrow[d, "id_S \circ f^*"] & X \arrow[d, "f"] \\ S \times Y^S \arrow[r, "ev_Y"] & Y \end{tikzcd} \tag{2.1.12}$$

Soit $(s, g) \in S \times X^S$, on a $(f \circ ev_X)(s, g) = f(g(s))$ et

$$\begin{aligned} ev_Y \circ (id_S \circ f^*))(s, g) &= ev_Y(s, f \circ g) \\ &= f(g(s)) \\ ev_Y \circ (id_S \circ f^*))(s, g) &= (f \circ ev_X)(s, g) \end{aligned}$$

Le diagramme est commutatif, ev définie bien une transformation naturelle.

Remarque 2.1.28. A l'aide des notions de Foncteur et de transformation naturelle, on peut définir deux nouvelles catégories :

- **Cat** les objets sont les petits catégories, et les flèches les foncteurs.
- **Func**$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, les objets sont les foncteurs de la forme $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, et les flèches les transformations naturelles entres deux foncteurs $T, S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Usuellement l'ensemble de ces flèches est noté $Nat(T, S)$

Définition 2.1.29. Soit $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. G est dit **sous-foncteur** de F si pour tout $c \in \mathcal{C}$ on a une transformation naturelle $F \xrightarrow{\theta} F$, telle que $\theta(c) : G(M) \to F(M)$ est un mono.

Exemple 2.1.30. Soit $(.)^* : Vect_K \to Vect_K$ le foncteur duale définie de la façon suivante:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & V^* \arrow[d, "\phi \mapsto \phi \circ f"] \\ W \arrow[r, mapsto] & W^* \end{tikzcd} \tag{2.1.13}$$

Il s'agit d'un sous-foncteur, du foncteur que nous verrons dans l'exemple 2.2.9.

Soit $((.)^*)^* : Vect_K \to Vect_K$ le foncteur biduale définie de la façon suivante:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & (V^*)^* \arrow[d, "\phi \mapsto \phi \circ f^*"] \\ W \arrow[r, mapsto] & (W^*)^* \end{tikzcd} \tag{2.1.14}$$

Maintenant nous allons montrer que $\eta : id \to ((.)^*)^*$ définie pour tout $V \in Vect_K$ par $\eta_V : V \to (V^*)^*$ tel que $\eta_V(x)(\phi) = \phi(x)$ pour $x \in V, \phi \in V^*$ est une transformation naturelle (où $id : Vect_K \to Vect_K$ est le foncteur identité définie de façon évidente).

On doit donc montrer que pour toute flèche $V \xrightarrow{f} W$ de $Vect_K$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "f"] & (V^*)^* \arrow[d, "(f^*)^*"] \\ W \arrow[r, "\eta_W"] & (W^*)^* \end{tikzcd} \tag{2.1.15}$$

commute.

Or

$$\begin{aligned} ((f^*)^* \circ \eta_V(x)(\phi) &= (\eta_V(x) \circ f^*)(\phi) \\ &= (\eta_V(x))(\phi \circ f) \\ &= (\phi \circ f)(x) \\ &= \eta_W \circ f(x)(\phi) \end{aligned}$$

D'où η est bien une transformation naturelle.

2.2 Dualité et Catégorie opposée

Introduisions maintenant la notion de duale qui nous donne un processus de "renversement" des flèches. Cette notion permet de construire un grand nombre de théorèmes en théorie des catégories.

Définition 2.2.1. Soit $\mathcal{P}$ une proposition, on appelle **proposition duale** et on note $\mathcal{P}^*$ la proposition $\mathcal{P}$ dans laquelle chaque flèche et composition est renversée.

Définition 2.2.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on appelle **catégorie opposée** (ou bien catégorie duale) et on note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie définie de cette façon:

- $ob(\mathcal{C}) = ob(\mathcal{C}^{op})$
- pour toute flèche $a \xrightarrow{f} b$ de $\mathcal{C}$, on asssocie une flèche dans $\mathcal{C}^{op}$ donné par $b \xrightarrow{f^{op}} a$
- la composition dans $\mathcal{C}^{op}$ est définie de la manière suivante : $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$

Remarque 2.2.3. On remarque que les mono dans $\mathcal{C}$ sont des epi dans $\mathcal{C}^{op}$, de même un objet terminal dans $\mathcal{C}$ est un objet initial dans $\mathcal{C}^{op}$ et inversement.

De plus on a le théorème évident suivant:

Théorème 2.2.4. *Supposons qu'une proposition $\mathcal{P}$ soit vraie dans $\mathcal{C}$, alors la proposition $\mathcal{P}^*$ est vraie dans $\mathcal{C}^{op}$.*

Démonstration. La démonstration est presque évidente. En effet si la proposition duale $\mathcal{P}^*$ correspond à la proposition $\mathcal{P}$ dans laquelle les flèches et la composition ont été renversées. Or la catégorie opposée est définie de la même façon par rapport à $\mathcal{C}$. Donc les seuls changements de $\mathcal{P}^*$ par rapport à $\mathcal{P}$ sont les flèches et la composition. Mais dans $\mathcal{P}^*$ elles vont "coïncider" avec celle de $\mathcal{C}^{op}$. Et donc par hypothèse $\mathcal{P}^*$ est vraie dans $\mathcal{C}^{op}$.

□

Théorème 2.2.5 (Principe de dualité)**.** *Soit $\mathcal{P}$ une proposition dans le langage de la théorie des catégories. Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie dans toute catégorie, alors $\mathcal{P}^*$ est aussi vraie dans toute catégorie.*

Démonstration. Pour prouver $\mathcal{P}^*$ dans toute catégorie $\mathcal{C}$, il suffit de prouver $\mathcal{P}$ dans toute catégorie $\mathcal{C}^{op}$. Mais, par hypothèse, $\mathcal{P}$ est censée être vraie dans toute catégorie.

□

Remarque 2.2.6. Considérons un foncteur $S : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. Par définition on peut définir ce foncteur avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] & S(c) \\ c', \arrow[r] \arrow[u, "f^{op}"] & S(c') \arrow[u, "S(f^{op})"'] \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

avec pour tout $c'' \xrightarrow{g^{op}} c'$ la composition définie comme ceci $S(f^{op} \circ g^{op}) = S(f^{op}) \circ S(g^{op})$. Mais le foncteur S peut être défini dans la catégorie $\mathcal{C}$ si on écrit $S^*(f) = S(f^{op})$. Ce qui nous mène à la définition de foncteur contravariant en opposition aux foncteurs covariant définition 2.1.16.

Définition 2.2.7. On appelle **foncteur contravariant** le foncteur $S^* : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qu'on peut définir grâce au diagramme ci dessous :

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] \arrow[d, "f"] & S^*(c) \\ c', \arrow[r] & S^*(c') \arrow[u, "S(f)"'] \end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

(la flèche produite est dans le sens opposé) telle que :

- Pour tout $c \in \mathcal{C}$ on a $S^*(\mathrm{id_c}) = \mathrm{id}_{\mathrm{S^*(c)}}$.
- Pour tout $c'' \xrightarrow{g} c' \xrightarrow{f} c$ on a $S^*(f \circ g) = S^*(g) \circ S^*(f)$.

(la composition est aussi dans le sens opposé).

Remarque 2.2.8. Plus simplement, on peut voir un foncteur contravariant comme un foncteur covariant de $\mathcal{C}^{op}$ vers $\mathcal{D}$

Exemple 2.2.9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A \in \mathcal{C}$. On peut définir le foncteur contravariant associé au hom-foncteur $Hom(A, -) : C \to \mathbf{Set}$. On le note $Hom(-, A) : C^{op} \to \mathbf{Set}$, et il est défini de cette façon :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, A) = Hom(-, A)(B) \\ C \arrow[r, mapsto] & Hom_{\mathcal{C}^{op}}(C, A) = Hom(-, A)(C) \arrow[u, "g \circ f = Hom(-A)(f)"'] \end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

où $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$.

Définition 2.2.10. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un foncteur covariant (resp. contravariant) F est dit **représentable** si et seulement si, il existe $A \in \mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe à $Hom(A, -)$ (resp. $Hom(-, A)$).

Remarque 2.2.11. Il existe beaucoup d'autre exemples de foncteurs contravariant. Néanmoins nous allons donner de nombreux exemples tout aux long du mémoire, comme les préfaisceaux et faisceaux que nous définirons dans la partie suivante.

2.3 Propriétés universelles et ses cas (pas si) particuliers

Dans cette partie, nous allons définir formellement la notion de propriétés universelles. Les exemples de propriétés universelles sont abondants dans toutes les mathématiques, que ce soit en algèbre, en topologie, etc...

Ce qui nous conduira à une des propositions les plus importantes de la théorie des catégories le lemme de Yoneda. Que nous utiliserons de façon récurrente tout au long du mémoire.

Ce lemme a était donné par Nobuo Yoneda dans [Yon54].

De plus, la théorie des catégories par la puissance de son langage va nous permettre de généraliser de nombreuses méthode de construction ensembliste comme le produit, la limite inverse, etc... Qui ne sont en fait que des cas particuliers de propriété universelle.

2.3.1 Propriétés universelles

Définition 2.3.1. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur et $d \in \mathcal{D}$. Une **flèche universelle** de d vers F est un couple $c \in \mathcal{C}$ et $d \xrightarrow{u} F(c)$ une flèche de $\mathcal{D}$. Telle que toute flèche de $\mathcal{D}$ de d vers le foncteur $F(e)$ se factorise de façon unique par u. C'est à dire qu'on a le diagramme commutant suivant :

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\exists! f'"'] & & d \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(c) \arrow[d, "F(f')"] \\ e & \text{tel que} & & F(e) \end{tikzcd} \tag{2.3.1}$$

2.3.2 Lemme de Yoneda

Définition 2.3.2. Pour tout catégorie $\mathcal{C}$. On appelle **prolongement de Yoneda** le foncteur suivant $Y : \mathcal{C} \to$ **Func**($\mathcal{C}^{\mathbf{op}}$, **Set**).

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & Hom_{\mathcal{C}}(-,B) \\ C \arrow[r, mapsto] & Hom_{\mathcal{C}}(-,C) \arrow[u, "Y(f)"'] \end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

Lemme 2.3.3 (Lemme de Yoneda (1954))**.** *Soit une catégorie* $\mathcal{C}$*,* $A \in \mathcal{C}$*, et* $T : \mathcal{C} \to$ ***Set*** *un foncteur quelconque, alors on*

$$\begin{aligned} Nat(h^A, T) &\overset{\delta}{\simeq} T(A) \\ \Psi &\mapsto \Psi(A)(id_A) \end{aligned}$$

Démonstration. injectivité: Si on prend une flèche $f \in h^A(B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, et $g \in h^A(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$, on a $h^A(f)(g) = f \circ g$, en particulier si on prend $g = id_A$, on a l'identité suivante :

$$h^A(f)(id_A) = f \circ id_A = f$$

Maintenant soit $\Psi \in Nat(h^A, T)$, c'est une transformation naturelle donc elle est définie pour un $B \in \mathcal{C}$, par $\Psi(B) : h^A(B) \to T(B)$
$\forall B \xrightarrow{g} B'$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} h^A(B) \arrow[r, mapsto, "\Psi(B)"] \arrow[d, "h^A(g)"'] & T(B) \arrow[d, "T(g)"] \\ C \arrow[r, mapsto, "\Psi(B')"] & T(B') \end{tikzcd}$$

c'est à dire $\forall \phi \in Hom_{\mathbf{C}}(A,A)$ on a :

$$\begin{aligned} \Psi(B')(h^A(g)(\phi)) &= \Psi(B')(g \circ \phi) \\ \Psi(B')(g \circ \phi) &= T(g)(\Psi(B)(\phi)) \end{aligned}$$

d'où si on prend f au lieu de g et $\phi = id_A$. On a :

$$\begin{aligned} \Psi(B)(f \circ id_A) &= T(f)(\Psi(A)(id_A)) \\ \Psi(B)(f) &= T(f)(\Psi(A)(id_A)) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Cette égalité est vraie $\forall \Psi \in Nat(h^A, T)$, d'où si $\eta \in Nat(h^A, T)$, il vérifie (0.1), c'est à dire

$$\eta(B)(f) = T(f)(\eta(A)(id_A)) \tag{2.3.4}$$

Supposons que $\delta(\Psi) = \delta(\eta)$, c'est à dire que $\Psi(A)(id_A) = \eta(A)(id_A)$. On applique $T(f)$ à cette égalité on a :

$$\begin{aligned} T(f)(\Psi(A)(id_A)) &= T(f)(\eta(A)(id_A)) \\ \Psi(B)(f) &= \eta(B)(f) \text{ d'après 0.1 et 0.2} \\ \Psi &= \eta \end{aligned}$$

On a bien $\delta(\Psi) = \delta(\eta) \implies \Psi = \eta$. Et donc δ est injectif.

surjectivité: Prenons un $v \in T(A)$, on va montrer que $\exists \Psi \in Nat(h^A, T)$ tel que $\delta(\Psi) = v$.
On construit ce Ψ.
$\forall B \in \mathbf{C}$, on pose :

$$\begin{aligned} \Psi_v(B) : & h^A(B) \to T(B) \\ & f \mapsto T(f)(v) \end{aligned}$$

On va montrer que $\Psi_v \in Nat(h^A, T)$.
$\forall B \xrightarrow{g} B'$ on veut montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} h^A(B) \arrow[r, mapsto, "\Psi_v(B)"] \arrow[d, "h^A(g)"'] & T(B) \arrow[d, "T(g)"] \\ C \arrow[r, mapsto, "\Psi_v(B')"] & T(B') \end{tikzcd}$$

On a $\forall f \in h^A(B)$:

$$\begin{aligned} (T(g) \circ \Psi_v(B))(f) &= T(g)(\Psi_v(B)(f)) \\ &= T(g)(T(f)(v)) \\ (T(g) \circ \Psi_v(B))(f) &= T(g \circ f)(v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\Psi_v(B') \circ h^A(g))(f) &= \Psi_v(B')(h^A(g)(f)) \\ &= \Psi_v(B')(g \circ f) \\ (\Psi_v(B') \circ h^A(g))(f) &= T(g \circ f)(v) \end{aligned}$$

Le diagramme est commutatif, d'où $\Psi_v \in Nat(h^A, T)$. Or

$$\begin{aligned} \delta(\Psi_v) &= \Psi_v(A)(id_A) \\ &= T(id_A)(v) \text{or T est un foncteur d'où} \\ &= (id_{T_A}(v) \\ \delta(\Psi_v) &= v \end{aligned}$$

δ est bien surjectif, et est donc un isomorphisme.

□

Le lemme de Yoneda entraine la proposition suivante.

Corollaire 2.3.4. *Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ le prolongement de Yoneda est pleinement fidèle.*

Démonstration. La fidélité du foncteur est évidente on se contentera de montrer qu'il est plein. Soit $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, et soit $Hom(-, c_1) \xrightarrow{\Phi} Hom(-, c_2)$ une flèche de $Func(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$. Alors d'après le lemme de Yoneda on sait que $Nat(Hom(-, c_1), Hom(-, c_2)) \simeq Hom(c_1, c_2)$. D'où il existe un unique f tel que $Y(f) = \Phi$

□

2.3.3 (Co)limites

Remarque 2.3.5. Nous allons maintenant étudier des cas particuliers de flèches universelles. Et la notion duale "équivalente" On introduit pour tout $\mathcal{C}$ une catégorie le foncteur $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ qui pour $c \in \mathcal{C}$, on a $\Delta(c) = (c, c)$ et pour f une flèche de $\mathcal{C}$ la donnée $\Delta(f) = (f, f)$.

(Co)produits

Définition 2.3.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $c, d \in \mathcal{C}$. On appelle **coproduit** de c et d et on note $c \coprod d$ un objet de $\mathcal{C}$, s'il existe deux flèches $c \overset{f_1}{\to} c \coprod d \overset{f_2}{\leftarrow} d$ de $\mathcal{C}$ vérifiant une propriété universelle.

C'est à dire si pour tout $e \in \mathcal{C}$ et pour toutes flèches $c \overset{g_1}{\to} e \overset{g_2}{\leftarrow} d$ de $\mathcal{C}$, il existe une unique flèche $c \coprod d \overset{f}{\to} e$ tel que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & c \coprod d \arrow[d, "\exists ! f"] & d \arrow[l, "f_1"'] \arrow[dl, "g_2"] \\ & e & \end{tikzcd} \tag{2.3.5}$$

Et la notion duale :

Définition 2.3.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $c, d \in \mathcal{C}$. On appelle **produit** de c et d et on note $c \prod d$ un objet de $\mathcal{C}$, s'il existe deux flèches $c \overset{\pi_1}{\leftarrow} c \prod d \overset{\pi_2}{\to} d$ de $\mathcal{C}$ vérifiant une propriété universelle.

C'est à dire si pour tout $e \in \mathcal{C}$ et pour toutes flèches $c \overset{g_1}{\leftarrow} e \overset{g_2}{\to} d$ de $\mathcal{C}$, il existe une unique flèche $c \prod d \overset{f}{\leftarrow} e$ tel que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} c & c \prod d \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"'] & d \\ & e \arrow[ul, "g_2"] \arrow[u, "\exists ! f"] \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd} \tag{2.3.6}$$

Exemple 2.3.8.
- Dans **Set**, de façon évidente le produit de $X, Y \in$ **Set** est défini comme le produit cartésien de X et Y. On va montrer que les flèches $X \overset{\pi_1}{\leftarrow} X \times Y \overset{\pi_2}{\to} Y$ possèdent une propriété universelle, où π_1, π_2 sont les applications projectives.

  En effet, pour tout $Z \in$ **Set** et pour toutes flèches $X \overset{g_1}{\leftarrow} Z \overset{g_2}{\to} Y$, il existe une unique application donnée par :

$$\begin{aligned} f : & Z \to X \times Y \\ & z \mapsto (g_1(z), g_2(z)) \end{aligned}$$

  tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X & X \prod Y \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"'] & Y \\ & Z \arrow[ul, "g_2"] \arrow[u, "\exists ! f"] \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd} \tag{2.3.7}$$

  commute.

$$g_1(x) = \pi_1 \circ f(x)$$
$$pi_1(g_1(x), g_2(x))$$
$$g_1(x) = g_1(x)$$

Le deuxième triangle commute par le même raisonnement.

(Co)égaliseur

Définition 2.3.9. On appelle **coégaliseur** d'un couple de flèches parallèles $f, g\colon a \to b$ une flèche $b \overset{eq}{\to} e$ tel que :

1. $eq \circ f = eq \circ g$

2. Pour toute flèche $b \overset{h}{\to} c$ telles que $h \circ f = h \circ g$, alors il existe un unique $b \overset{h'}{\to} c$ tel que $h = h' \circ eq$.

On peut résumer ces informations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "\text{eq}"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, "h'"] \\ & & c \end{tikzcd}$$

Et la notion duale :

Définition 2.3.10. On appelle **égaliseur** d'un couple de flèches parallèles $f, g\colon a \to b$ une flèche $e \overset{eq}{\to} b$ telles que :

1. $f \circ eq = g \circ eq$

2. Pour tout $c \overset{h}{\to} b$ tel que $f \circ h = g \circ h$, alors il existe un unique $c \overset{h'}{\to} b$ tel que $h = eq \circ h$.

On peut résumer ces informations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "\text{eq}"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \\ c \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.3.11. Un cas particulier d'égaliseur et de co-égaliseur est donné par la généralisation du noyau de morphisme en algèbre. Dans le cas d'une catégorie munie d'un objet nulle. (2.1.14).

- Soit $X \overset{f}{\to} Y$, on appelle noyau de f l'égaliseur du couple $(f, 0_{XY})$.

- La notion duale est appelée conoyau.

On le note ker(f) et coker(f).

Exemple 2.3.12. Dans **Set** l'égaliseur de deux fonctions f et g de domaine X est donné par l'ensemble suivant :

$$eq(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

Somme amalgamée et Produit fibré

Définition 2.3.13. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle **Somme amalgamée** d'un couple de flèches $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ de $\mathcal{C}$ un carré commutatif construit sur f et g :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & b \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, "h"] & \\
c \arrow[r, "v"] \arrow[drr, "k"'] & r \arrow[dr, "t"] & \\
& & s
\end{tikzcd} \tag{2.3.8}$$

tel que pour tout autre carré commutatif construit sur f et g , il existe une unique flèche $r \xrightarrow{t} s$ de $\mathcal{C}$. Tel que $t \circ u = h$ et $t \circ v = k$.

Et la notion duale:

Définition 2.3.14. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle **Produit fibré** d'un couple de flèches $b \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} c$ de $\mathcal{C}$ un carré commutatif construit sur f et g :

$$\begin{tikzcd}
q \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\
& p \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[d, "g"] \\
& b \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd} \tag{2.3.9}$$

tel que pour tout autre carré commutatif construit sur f et g, il existe une unique flèche $q \xrightarrow{t} p$ de $\mathcal{C}$. Tel que $v \circ t = h$ et $u \circ t = k$.

Notation 2.3.15. Le produit fibré d'un couple de flèches $b \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} c$ est noté $b \times_a c$.

Exemple 2.3.16. Dans **Set** le produit fibré de deux applications ensemblistes $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ existe toujours et est donné par le couplet de $\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$.

Définition 2.3.17. Le produit fibré d'une flèche f de $\mathcal{C}$ avec elle-même est appelée noyau pair.

(Co)limites

Définition 2.3.18. On appelle **co-cônes** d'un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$ est un $N \in \mathcal{C}$ et une famille $\psi_X : F(X) \to N$ où $X \in J$ tel que :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\forall f"] \\
Y
\end{tikzcd} \quad \text{on a} \quad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "\psi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\
& N
\end{tikzcd} \quad \text{commute.} \tag{2.3.10}$$

Et la notion duale :

Définition 2.3.19. On appelle **cônes** d'un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$ est un $N \in \mathcal{C}$ et une famille $\psi_X : N \to F(X)$ où $X \in J$ tel que :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\forall f"] \\ Y \end{tikzcd} \quad \text{on a} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[dr, "\psi_Y"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ & F(Y) \end{tikzcd} \quad \text{commute.} \tag{2.3.11}$$

Définition 2.3.20. On appelle **colimite** d'un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$ un co-cône de F (L,ϕ) avec une propriété universelle. C'est à dire pour tout co-cône de F (N, Ψ) on a :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\exists ! f"'] \\ N \end{tikzcd} \quad \text{tel que} \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & L \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd} \quad \text{commute.} \tag{2.3.12}$$

L est noté $L = \varinjlim F$.

On peut résumer ces informations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] \arrow[dr, "\psi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\phi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\psi_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "\phi_Y"] \\ & L \arrow[d, "f"] & \\ & N & \end{tikzcd} \tag{2.3.13}$$

Et la notion duale :

Définition 2.3.21. On appelle **limite** d'un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$ un cône de F (L,ϕ) avec une propriété universelle. C'est à dire pour tout cône de F (N, Ψ) on a :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "\exists ! f"'] \\ L \end{tikzcd} \quad \text{tel que} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi_X"'] & L \arrow[d, "\phi_X"] \\ & F(X) \end{tikzcd} \quad \text{commute.} \tag{2.3.14}$$

L est noté $L = \varprojlim F$.

On peut résumer ces informations dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "\phi_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\phi_Y"] & \\ & N \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd} \tag{2.3.15}$$

Exemple 2.3.22. Nous allons maintenant donner quelques exemples de limite:

1. On va caractériser les limites sur un foncteur $F : \emptyset \to \mathcal{C}$.

   La limite de F est par définition un cône de F, or un cône de F consiste en un objet $A \in \mathcal{C}$ et une famille de flèches de $\emptyset$, de ce fait le cône correspond uniquement à $A \in \mathcal{C}$, car il n'y a pas de flèches dans $\emptyset$ par définition.

   De plus pour être une limite A doit vérifier une propriété universelle. C'est à dire pour tout pour tout autre cône de F (ie. pour tout objet $B \in \mathcal{C}$) il doit exister une unique flèche ayant comme domaine B et comme codomaine A. On retombe exactement sur la définition d'objet terminal, donc A est la limite du foncteur F si il s'agit d'un objet terminal de $\mathcal{C}$. Par un raisonnement dual la colimite de F est un objet initial A de $\mathcal{C}$.

2. Dans la partie 2.5.1 nous verrons une construction de $\mathbb{Z}_p$ en tant que limite.

3. On cherche maintenant à montrer que la limite d'un foncteur $F : I \to \mathbf{Set}$ où I est une catégorie discrète correspond aux produits cartésien usuels. En effet I est déterminé par son ensemble d'objet, de ce fait le foncteur F correspond à une famille d'objets de **Set** qu'on notera $F_i \mid i \in I$. De même un cône de F avec une propriété universelle correspond à une famille de flèches $\pi_i : \varprojlim F \to F_i$ où $i \in I$ (qui correspond aux projections canoniques). On a pour un cône quelconque : S $\in$ **Set** et $\psi_i : S \to F_i$ une famille de flèches de **Set**. Il existe un unique $f : S \to \varprojlim F$ qui pour un $x \in S$ donne $f(x) = (\psi_i)_{i \in I}$ tel que $\pi_i \circ f = \psi_i$, en effet $\pi_i((\psi_i)_{i\in I}) = \psi_i$ par définition de la projection. D'où on note $\varprojlim F = \prod_{i \in I} F_i$.

Remarque 2.3.23. Cet exemple donne une autre façon définir le produit dans une catégorie $\mathcal{C}$. Cela correspond donc à la limite d'un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ où I est une catégorie discrète. On peut de façon analogue démontrer que les égaliseurs et produits fibrés peuvent être exprimés sous forme de limites.

2.3.4 Produit tensoriel

Dans cette section ainsi que la section 2.5.1 nous avons grandement utilisé les livres [Ser04] et [AM69].

Le produit tensoriel de module que nous allons étudier dans cette partie permet de calculer le coproduit d'anneaux commutatifs.

Pour le reste de cette section on pose A un anneau commutatif.

Théorème 2.3.24 (Produit Tensorielle)**.** *Soit M, N des A-Module, alors $\exists$! couple (T,g) à isomorphisme près, où T est un A-Module, et $g : M \times N \to T$ bilinéaire tel que : $\forall$ (P,f) où P est un A-Module, et $f : M \times N \to P$ bilinéaire tel que*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\exists ! f'"] \\ & P \end{tikzcd} \tag{2.3.16}$$

commute. On notera $T = M \otimes N$. (Il existe une généralisation sur les applications multilinéaires)

Démonstration. existence : On rappel que $A^{(M\times N)}$ est un A-Module libre si $x \in A^{(M\times N)}$ on a $x = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_j)$ (pour $x_i \in M, y_i \in N, a_i \in A$)

Soit D un sous-A-Module de $A^{(M\times N)}$ généré par les éléments :

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y)(x',y+y')-(x,y)-(x,y')(ax,y)-a(x,y)(x,ay)-a(x,y) \tag{2.3.17}$$

On pose $M\otimes N = A^{(M\times N)}/D$ et $\forall(x,y)\in A^{(M\times N)}$ on note $x\otimes y$ son image dans $A^{(M\times N)}/D$. Pour tout $f: M\times N\to P$ peut être étendue par linéarité vers un A-Module$f': M\otimes N\to P$,or f est supposé bilinéaire, d'où f' est nulle sur les générateurs de D et donc sur D. Ce qui induit un A-homomorphisme $\tilde{f}: T\to P$ tel que $\tilde{f}(x\otimes y)=f(x,y)$

<u>unicité :</u> Supposons qu'il existe (T,g) vérifiant l'énoncé suivant. Alors par l'absurde supposons qu'il existe (P,f) vérifiant la même propriété. On a $f'\circ g=f$ et $\tilde{f}'\circ f=g$ d'où $\tilde{f}'=f'$ d'où $g=f$ et $P=T$

□

Proposition 2.3.25. *Soit M, N et P des A-Module, alors on a les propriétés suivantes :*

1. $(M\otimes N)\otimes P\simeq M\otimes(N\otimes P)$
2. $M\otimes N\simeq N\otimes N$
3. $(M\oplus N)\otimes P\simeq(M\otimes P)\oplus(N\otimes P)$
4. $M\otimes A\simeq M$

Démonstration. On se contentera de démontrer le 1, car les autres démonstrations sont plus ou moins identiques.

On va commencer par exhiber un morphisme entre les $(M\otimes N)\otimes P$ et $M\otimes(N\otimes P)$. Pour ça nous allons utiliser le théorème ci dessus. On sait que pour tout A-Module $M\otimes N$ et P $\exists!$ une application bilinéaire vers son produit tensoriel $(M\otimes N)\otimes P$. On a aussi que $\forall f:(M\otimes N)\times P\to M\otimes(N\otimes P)$, bilinéaire $\exists! g:(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes(N\otimes P)$ linéaire. On peut résumé les différentes informations dans le diagramme commutant suivant:

$$\begin{tikzcd} (M\otimes N)\times P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M\otimes(N\otimes P) \\ (M\otimes N)\otimes P \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

On cherche donc une application bilinéaire entre $(M\otimes N)\times P$ et $M\otimes(N\otimes P)$. Pour cela nous allons procéder par étapes. D'abord fixer un ensemble, pour ce ramener un la définition du produit tensoriel sur deux A-Module, ce qui va nous donner "canoniquement" une application bilinéaire. On fixe $z\in P$ on a l'application suivante :

$$\begin{aligned} f_z : & M\times N\to M\otimes(N\otimes P) \\ & (x,y)\mapsto x\otimes(y\otimes z) \end{aligned}$$

Vérifions qu'elle vérifie les conditions de bilinéarité: $\forall x,x'\in M$ $\forall y\in N$, $\forall\lambda,\delta\in A$ on a :

$$\begin{aligned} f_z(\lambda x+\delta x',y) &= (\lambda x+\delta x')(\otimes y\otimes z) \\ &= \lambda(x\otimes(y\otimes z))+\delta(x'\otimes(y\otimes z)) \text{ par la bilinéarité du produit tensoriel} \\ f_z(\lambda x+\delta x',y) &= \lambda f_z(x,y)+\delta f_z(x',y) \end{aligned}$$

$\forall x \in M\ \forall y, y' \in N,\ \forall \lambda, \delta \in A$ on a :

$$\begin{aligned} f_z(x, \lambda y + \delta y') &= x \otimes ((\lambda y + \delta y')) \otimes z) \\ &= x \otimes \lambda(y \otimes z) + x' \otimes \delta(y \otimes z) \text{ par la bilinéarité du produit tensoriel} \\ f_z(\lambda x + \delta x', y) &= \lambda f_z(x, y) + \delta f_z(x, y') \end{aligned}$$

On en déduit que f_z est bien une application bilinéaire. D'après la propriété universelle du produit tensoriel. On sait qu'il existe un unique g_z linéaire tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f_z"] \arrow[d] & M \otimes (N \otimes P) \\ M \otimes N \arrow[ur, "g_z"'] & \end{tikzcd}$$

Maintenant, posons:

$$\begin{aligned} f :& (M \otimes N) \times P \to M \otimes (N \otimes P) \\ & (x, y) \mapsto g_y(x) \end{aligned}$$

On va montrer que c'est une application bilinéaire, et de ce fait par la propriété universelle du produit tensoriel on aura bien un morphisme g comme décrit ci-dessus.

$\forall x, x' \in M \otimes N\ \forall y \in P,\ \forall \lambda, \delta \in A$

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \delta x', y) &= g_y(\lambda x + \delta x') \text{ or par la linéarité de } g_y \\ f(\lambda x + \delta x', y) &= \lambda f(x, y) + \delta f(x', y) \end{aligned}$$

$\forall x \in M\ \forall y, y' \in N,\ \forall \lambda, \delta \in A$ on a :

$$f(x, \lambda y + \delta y') = g_{\lambda y + \delta y'}(x)$$

Or par définition $x \in M \otimes N$, d'où $\exists (u_i)_I \in M$ et $(v_i)_I \in N$ où I est un ensemble fini, tel que

$$x = \sum_{i \in I} u_i \otimes v_i$$

$\forall i \in I$,

$$\begin{aligned} g_{\lambda y + \delta y'}(u_i \otimes v_i) &= f_{\lambda y + \delta y'}(u_i, v_i) \text{ d'après le diagramme ci dessus} \\ &= u_i \otimes (v_i \otimes (\lambda y + \delta y')) \\ &= \lambda(u_i \otimes v_i \otimes y) + \delta(u_i \otimes v_i \otimes y') \\ g_{\lambda y + \delta y'}(u_i \otimes v_i) &= \lambda g_y(u_i \otimes v_i) + \delta g_{y'}(u_i \otimes v_i) \end{aligned}$$

De ce fait f est bilinéaire et induit un homomorphisme g entre $(M \otimes N) \otimes P$ et $M \otimes (N \otimes P)$. Pour montrer que cette homomorphisme est inversible, on fait le même raisonnement dans le sens inverse pour déterminer un autre homomorphisme. Puis la composition des deux.

Une deuxième méthode consisterait à utiliser le lemme de Yoneda, on aurait l'isomorphisme suivant

$$Nat(Hom((M \otimes N) \otimes P, -), Hom(M \otimes (N \otimes P), -)) \simeq Hom((M \otimes N) \otimes P, M \otimes (N \otimes P)$$

$\square$

Exemple 2.3.26. • $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = 0$, en effet pour tout $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on a:

$$\text{si } x = \bar{0} \Rightarrow x \otimes_{\mathbb{Z}} y = 0$$
$$\text{si } x = \bar{1} = \bar{3} \Rightarrow \bar{3} \otimes_{\mathbb{Z}} y = 3(x \otimes_{\mathbb{Z}} y) = x \otimes_{\mathbb{Z}} 3y = 0$$

• $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, en effet $\forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on a:

$$\text{si } x = \bar{0} \Rightarrow x \otimes_{\mathbb{Z}} y = 0$$

Ensuite si $x = \bar{1}$, le produit tensoriel $x \otimes_{\mathbb{Z}} y$ dépend de y.

- Si y est de classe paire $x \otimes_{\mathbb{Z}} y = 0$.
- Si y est de classe impaire $x \otimes_{\mathbb{Z}} y = 1$.

On a bien par disjonctions de cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Ce qui nous amène à la propriété suivante :

Proposition 2.3.27. *Si A est un anneau principal et $a, a \in A$, alors on a*

$$A/(a) \otimes_A A/(a') = \begin{cases} 0 \text{ si } a \wedge a' = 1 \\ A/(a \wedge a') \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Si $a \wedge a' = 1$ ça fonctionne de manière analogue à l'exemple.
Si $a \wedge a' \neq 1$, alors $a \wedge a' = (a, a')$ et comme nous sommes dans un anneaux principal on a $(d) = (a, a')$ d'où:

$$\begin{aligned} A/(a) \otimes_A A/(a') &= (A/(a))\diagup(a'A/(a)) \\ &= (A/(a))\diagup(a,a')A/(a)) \\ &= (A/(a))\diagup(d)A/(a) \\ A/(a) \otimes_A A/(a') &= A/(d) \end{aligned}$$

□

Exemple 2.3.28. On va montrer que $K[X] \otimes_K K[X] = K[X, Y]$ en tant que module.
En effet, en tant que module $K[X] = \bigoplus_{\mathbb{N}} K$.
Or nous verrons dans la section 2.5 sur les adjoints, que le foncteur $- \otimes_K K[X]$ est un adjoint à gauche 2.5.6 il commute à toutes les colimites 2.5.4. En particulier il commute avec les coproduits, de ce fait on l'isomorphisme de $K - Mod$ suivant :

$$- \otimes_K K[X](\bigoplus_{\mathbb{N}}(K)) \simeq \bigoplus_{\mathbb{N}}((- \otimes_K K[X])(K))$$

Et on déduis :

$$- \otimes_K K[X](\bigoplus_{\mathbb{N}}(K)) \simeq K[X] \otimes_K K[X]$$

Ainsi que

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\mathbb{N}}((-\otimes_K K[X])(K)) &\simeq \bigoplus_{\mathbb{N}}((K\otimes_K K[X])\\ &\simeq \bigoplus_{\mathbb{N}}(K[X]) \text{ d'après la proprosition 2.3.25 (4)}\\ \bigoplus_{\mathbb{N}}((-\otimes_K K[X])(K)) &\simeq K[X,Y]\end{aligned}$$

De ce fait on a l'isomorphisme :

$$f : K[X]\otimes_K K[X] \simeq \bigoplus_{\mathbb{N}} K[X] = K[X,Y]$$

.
La multiplication sur $K[X]\otimes_K K[X]$ est définie par :

$$p(X)\otimes_K q(X)) * (p'(X)\otimes_K q'(X)) := (p(X)p'(X))\otimes_K (q(X)q'(X))$$

En écrivant explicitement f, on voit que :

$$f(p(X)\otimes_K q(X)) = p(X)q(Y)$$

D'où

$$\begin{aligned}f((p(X)\otimes_K q(X)) * (p'(X)\otimes_K q'(X))) &= p(X)p'(X)q(Y)q'(Y)\\ &= f(p(X)\otimes_K q(X))f(p'(X)\otimes_K q'(X))\end{aligned}$$

Donc la loi de multiplication est bien respectée.

La catégorie des modules sur un anneau muni de son produit tensoriel, est un exemple particulier de catégories appelés monoidales, dont voici la définition :

Définition 2.3.29. On appelle catégorie **monoidale** le triplet $(\mathcal{C}, \square, e)$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie avec un bifoncteur $\square : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ qui vérifie :

- $\square(\square\times 1) = \square(1\times\square) : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$. (**L'associativité**)
- et avec un objet $e\in\mathcal{C}$ tel que $\square(e\times 1) = \square(1\times e) = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. (**L'unité**)

Exemple 2.3.30. D'après la proposition 2.3.25 on a que $(\mathbf{K\text{-}Mod}, \otimes_K, K)$ est une catégorie monoidale.

2.4 Catégorie Complète

La plus grande force de la théorie des catégories réside de façon analogue à la théorie des ensembles, à utiliser des catégories munies de propriété particulière. Nous allons voir un certain nombres d'exemples tout aux long de ce mémoire. Dans cette section, avec les catégories complètes, mais aussi les catégories cartésienne, les sites, les topos, etc...

Définition 2.4.1. On appelle **petite limite** (resp. limite fini), la limite d'un foncteur $F : J\to\mathcal{C}$ où J est une catégorie petite (resp. fini).

Définition 2.4.2. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **complète** (resp.**co-complète**) si elle a toutes limites (resp. colimites) petites dans $\mathcal{C}$.

Théorème 2.4.3. *La catégorie **Set** est complète.*

De plus si J est une petite catégorie, tout foncteur $F : J \to \mathbf{Set}$ a une limite donné par le cône $(Cone(*, F), v_j)$.

Où $Cone(*, F)$ est l'ensemble de tout les cônes $(*, \sigma_j : * \to F(j)$. Et où :

$$\begin{aligned} v_j :& Cone(*, F) \to F(j) \\ & \sigma \mapsto \sigma_j \end{aligned}$$

Démonstration. Comme J est une petite catégorie, on a que $Cone(*, F)$ est un petit ensemble, et donc $Cone(*, F) \in \mathbf{Set}$. Soit $j \overset{u}{\to} k$ une flèche de J, on a par définition d'un cône le diagramme commutant suivant :

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "\sigma_j"] \arrow[dr, "\sigma_k"] & F(i) \arrow[d, "F(u)"] \\ & F(j) \end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

Maintenant nous allons prouver l'universalité de v_j

Considérons un autre cône donné par le couplet $(X, \tau_i : X \to F(i))$, pour X un ensemble quelconque. Soit $x \in X$, alors $*, \tau(x)_i)$ est un cône. D'où il existe une unique fonction donnée par :

$$\begin{aligned} h :& Cone(*, F) \to X \\ & \tau_x \mapsto x \end{aligned}$$

et on a bien le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & Cone(*, F) \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "v_k"'] \arrow[ddr, bend left, "v_j"] & \\ & X \arrow[dl, "\tau_j"'] \arrow[dr, "\tau_k"] & \\ F(j) \arrow[rr, "F(u)"'] & & F(k) \end{tikzcd} \tag{2.4.2}$$

□

Remarque 2.4.4. On peut donner une démonstration similaire pour beaucoup de catégories usuelles.

Remarque 2.4.5. On rappelle que pour toutes catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, et pour tout $c \in \mathcal{C}$, il existe un foncteur $E_c : Func(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ qui " évalue en c ". Qu'on définie pour tout $H \in Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, par $E_c(H) = H(c)$. Et pour les flèches $H \overset{\sigma}{\to} H'$ par $E_c(\sigma) = \sigma_c$

Théorème 2.4.6. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories.*

Si $S : J \to Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est tel que pour tout $c \in \mathcal{C}$ on ait que la composition $E_c \circ S : J \to X$ est une limite (L_c, τ_c), où $L_c \overset{\tau_c}{\to} E_c(S)$.

Alors il existe une unique limite au foncteur S donnée par le couple (L, τ) où $(L \in Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ tel que $L(c) = L_c$, et $\tau : L \to S$ est une transformation naturelle dont les composantes sont les τ_c.

Démonstration. Soit $p \xrightarrow{h} q$ une flèche de $\mathcal{C}$, on écrit $E_p(S) = S_p$. Soit deux cônes (L_p, τ_p) et (L_q, τ_q) pour une flèche $j \xrightarrow{J} k$ de J, sont de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & & L_p \arrow[d, "\exists ! L_h"] \arrow[dddll, "\tau_p(j)"'] \arrow[dddrr, "\tau_p(k)"] & & \\
 & & L_q \arrow[dl, "\tau_q(j)"'] \arrow[dr, "\tau_q(k)"] & & \\
 & S_q(j) \arrow[rr, "S_q(u)"] & & S_q(k) & \\
S_p(j) \arrow[ur, "S_h(j)"'] \arrow[rrrr, "S_p(u)"] & & & & S_p(k) \arrow[ul, "S_h(j)"]
\end{tikzcd} \tag{2.4.3}$$

Les triangles commutent car τ_p et τ_q sont des cônes. De plus le parallélogramme en bas commute aussi car S est un foncteur. Comme (L_p, τ_p) est une limite, on a que $S_h(j) \circ \tau_q(j) = \tau_q(j) \circ L_h$ pour tout $j \in J$.

L définie pour les objets par $L(p) = L_p$ et pour les flèches par $L(h) = L_h$ est un foncteur, en effet on a évidemment $L(id_p) = id_{L_p}$, de plus si on prend $q \xrightarrow{h'} m$ on peut former un diagramme analogue à (2.4.3) en remplaçant les q par des m et les p par des q. Et on a que $L(h' \circ h) = L_{h'} \circ L_h$ par l'universalité des cônes.

De plus τ est évidement une transformation naturelle.

Donc (L, τ) est bien un cône muni d'une propriété universelle, car pour tout autres cônes (M, σ), il existe bien une flèche $M_p \to L_p$, car L_p est une limite pour tout $p \in \mathcal{C}$. En combinant les composantes on a bien l'existence d'une unique flèche (une transformation naturelle) $M \to L$. $\square$

Remarque 2.4.7. En conclura que dans la catégorie des foncteurs les limites peuvent être calculées **objet par objet** (en anglais **computed pointwise**), ce qui se résume par l'égalité suivante :

$$E_p(\varinjlim(S)) = \varinjlim(E_p(S))$$

Corollaire 2.4.8. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $\mathcal{D}$ une catégorie complète, alors $Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est une catégorie complète.*

Démonstration. La preuve est immédiate avec le théorème 2.4.6 $\square$

Proposition 2.4.9. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie des produits fibrés et des produits, alors $\mathcal{C}$ a tous les égaliseurs.*

Démonstration. A partir de $f, g \colon S \to T$ on peut former le produit fibrés suivant :

$$\begin{tikzcd}
S \times_{f,g} S \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f_1"] & S \arrow[d, "g"] \\
S \arrow[r, "f"] & T
\end{tikzcd} \tag{2.4.4}$$

Par l'existence des produits, on sait que cela induit une flèche entre $S \times_{f,g} S \xrightarrow{t} S \times S$. Donné dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
S & S \times S \arrow[l] \arrow[r] & S \\
 & S \times_{f,g} S \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, "\exists ! t"] \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.4.5}$$

On définit l'égaliseur de f et g qu'on note $eq(f,g)$ par le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} eq(f,g) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & S \times_{f,g} S \arrow[d] \\ S \arrow[r, "(id\, id)"] & S \times S \end{tikzcd} \tag{2.4.6}$$

On va montrer qu'il s'agit bien d'un égaliseur. On a bien que $f \circ e = g \circ e$, en effet en résumant les informations dans un diagramme :

$$\begin{tikzcd} eq(f,g) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"] & S \times_{f,g} S \arrow[dl] \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "f_1"] & eq(f,g) \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "e"] \\ S \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f"] & S \times S & S \arrow[l] \arrow[dl, "g"] \\ & T & \end{tikzcd} \tag{2.4.7}$$

On sait d'après les triangles commutatifs en haut à droite et à gauche que $e = f_1 \circ h$. De plus on a aussi $g \circ f_1 = f \circ f_1$. Donc on a bien que $f \circ e = g \circ e$. L'universalité de $eq(f,g)$ est donné par l'universalité des produits fibrés. $\square$

Définition 2.4.10. Soit $J : I \to \mathcal{C}$ et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Et soit (L, Φ) la limite du foncteur J.

On dit que **F préserve la limite** si la limite du foncteur $F \circ J$ est donné par le couple $(F(L), F \circ \Phi)$ (par raisonnement duale on a aussi F préserve la colimite).

Proposition 2.4.11. *Le foncteur covariant Hom préserve les limites.*

Démonstration. Soit $D : J \to \mathcal{C}$ un foncteur et soit (L, p_i) sa limite. De ce fait pour tout cône (A, c_i) de D on a le diagramme commutant suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\exists! u"'] \arrow[dr, "c_i"] & \\ L \arrow[r, "p_i"'] & D(i) \end{tikzcd} \tag{2.4.8}$$

Maintenant prenons un (S, f_i) un cône de $Hom_{\mathcal{C}}(c, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Pour tout $s \in S$ on a le cône suivant (car (L, p_i) est une limite) :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\exists! u_s"'] \arrow[dr, "f_i(s)"] & \\ L \arrow[r, "p_i"'] & D(i) \end{tikzcd} \tag{2.4.9}$$

la flèche u_s est unique par définition de la limite.

On peut définir $S \xrightarrow{g} Hom_{\mathcal{C}}(c, L)$ qui pour tout $s \in S$ associe u_s. De ce fait on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "f_i"] & \\ Hom_{\mathcal{C}}(c\, L) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{C}}(c\, p_i)"'] & Hom_{\mathcal{C}}(c\, D_i) \end{tikzcd} \tag{2.4.10}$$

L'unicité de g vient de celle de u_s. $\square$

Nous allons maintenant une façon de caractériser une catégorie complète.

Théorème 2.4.12. *Soit* $\mathcal{C}, J$ *deux catégories.*

Si $\mathcal{C}$ *a tout les égaliseur et tout les produits indexés par* $ob(J)$ *et* $fl(J)$*, alors tout foncteur* $F : J \to \mathcal{C}$ *a une limite dans* $\mathcal{C}$*.*

Démonstration. Soit $i \in J$.

Par hypothèse on a bien que les produits $\prod_i F(i), \prod_f F(cod(f))$ existent, ainsi que leurs projections respectives. Où $\prod_f F(cod(f))$ est le produit indexé sur toutes les flèches de J.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
F(cod(f)) \arrow[r, equal] & F(cod(f)) & & F(i) \\
\prod_f F(cod(f)) \arrow[u, "p_f"] \arrow[d, "p_f"] & \prod_i F(i) \arrow[l, shift left, "f"'] \arrow[l, shift right, "g"] \arrow[u] \arrow[urr, "p_i"] \arrow[d, "p_{dom(f)}"] & & d \arrow[ll, "e"] \arrow[u, "\mu(i)"'] \\
F(cod(f)) & F(dom(f)) \arrow[l, "F(f)"]
\end{tikzcd} \tag{2.4.11}$$

On sait par l'universalité du produit, qu'il existe un unique f, g tel que les diagrammes carrés commutent. Et par hypothèse il existe un égaliseur à f, g donné par e, tel que le triangle commute pour tout $i \in J$.

Comme e est un égaliseur et que les deux carrés commutent, on a pour tout $j \xrightarrow{u} k$ une flèche de J que $F(u) \circ \mu(j) = \mu(k)$. D'où le couple (μ, d) forme un cône de F. On va montrer qu'il vérifie une propriété universelle.

Soit (τ, c) un autre cône de F. Les $\tau(i)$ induisent une unique flèche $h : c \to \prod_i F(i)$. Par le fait que (τ, c) soit un cône on a que $f \circ h = g \circ h$. Donc par le fait que e soit un égalisateur on a bien qu'il existe une unique flèche $c \xrightarrow{t} d$ tel que le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & & F(i) \\
\prod_f F(cod(f)) & \prod_i F(i) \arrow[l, shift left, "f"'] \arrow[l, shift right, "g"] \arrow[urr, "p_i"] & d \arrow[l, "e"] \arrow[ur, "\mu(i)"] & \\
 & & c \arrow[ul, "h"] \arrow[u, "t"] \arrow[uur, "\tau(i)"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.4.12}$$

Et donc le cône (μ, d) nous donne une limite pour F. $\square$

En conséquence direct on a le corollaire suivant que nous utiliseront plus loin :

Corollaire 2.4.13. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie munie de tous les égaliseurs, et tous les petits coproduits, alors* $\mathcal{C}$ *est une catégorie complète.*

Remarque 2.4.14. Ce corollaire nous donne un autre preuve que **Set** est une catégorie complète, en effet on a défini les égaliseurs 2.3.12 et les produits 2.3.8 dans **Set**.

2.4.1 Limites filtrés

Dans cette section nous allons étudier la généralisation d'ensemble filtré, du point de vue catégorique. Qui nous donnera un théorème de commutation de limites et colimites sur **Set**, sous certaine condition.

D'abord définissons un ensemble filtré.

Définition 2.4.15. Soit $(P, \leq)$ un préordre est appelé **ensemble filtré** si pour tout $p, q \in P$, il existe $r \in P$ avec $p \leq r$ et $q \leq r$.

Voici la généralisation pour une catégorie J:

Définition 2.4.16. Soit J une catégorie non vide.

J est dit filtrée si elle vérifie :

- Pour tout $j, j' \in J$, on a qu'il existe $k \in J$ et deux flèches $j \to k$, $j' \to k$. C'est à dire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} j \arrow[dr] & \\ & k \\ j' \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{2.4.13}$$

- Pour toutes flèches parallèles $u, v : i \to j$ dans J, il existe $k \in J$ et une flèche $j \xrightarrow{w} k$ tel qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "w"] & \\ i \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & k \\ & j \arrow[ur, "w"'] & \end{tikzcd} \tag{2.4.14}$$

Définition 2.4.17. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

On appelle **limite cofiltrée** la colimite d'un foncteur $F : J \to \mathcal{C}$ où J est une catégorie filtrée.

Remarque 2.4.18. Soit P une catégorie fini, et soit J une catégorie petite et filtrée.

Pour tout bifoncteur $F : P \times J \to \mathbf{Set}$. Nous allons donner la construction d'une flèche canonique :

$$\varinjlim_j \varprojlim_p F(p, j) \xrightarrow{\kappa} \varprojlim_p \varinjlim_j F(p, j)$$

κ existe si toutes les limites et colimites ci-dessus existent et sont construites à partir du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F(p, j) \arrow[d, "\mu(p)(j)"] & \varprojlim_p (F(p, j)) \arrow[l, "\nu(p)(j)"'] \arrow[r, "\mu(j)"] \arrow[d, "\alpha(j)"] & \varinjlim_j \varprojlim_p F(p, j) \arrow[d, "\kappa"] \\ \varinjlim_j F(p, j) & \varprojlim_p \varinjlim_j F(p, j) \arrow[l, "\nu(p)"'] \arrow[r, equal] & \varprojlim_p \varinjlim_j F(p, j) \end{tikzcd} \tag{2.4.15}$$

Où les ν sont pour j les cônes de la limites et les μ sont pour p les cônes de la colimites (ce référait à la démonstration 2.4). De ce fait la composition $\mu(p)(j) \circ \nu(p,j)$ pour un j fixé est un cône en p. Par l'universalité de ν on a qu'il existe une unique flèche α_j qui rend le carré de gauche commutatif.

Et par l'univeralité de μ on a qu'il existe une unique flèche κ qui rends le carré de droite commutatif. Il s'agit de la flèche canonique recherché.

Théorème 2.4.19. *Soit P une catégorie fini, et soit J une catégorie petite et filtrée. Alors pour tout bifoncteur $F : P \times J \to \mathbf{Set}$ la flèche canonique :*

$$\varinjlim_j \varprojlim_p F(p,j) \xrightarrow{\kappa} \varprojlim_p \varinjlim_j F(p,j)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après du duale du théorème 2.4.12, on sait que les colimites peuvent s'exprimer uniquement en terme de coégaliseurs et de coproduits. Donc on a :

$$\varinjlim_j (F(p,j)) = \coprod_j F(p,j)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie pour $x \in F(p,j)$ et $x' \in F(p,j')$:

$$x \sim x' \Leftrightarrow \text{ il existe } j \xrightarrow{u} k, j' \xrightarrow{u'} \text{ tel que } F(p,j)(x) = F(p,u')(x')$$

On note (x,j) la classe d'équivalence pour $\sim$ de $x \in F(p,j)$.

Or d'après la première condition du fait que J soit filtré, on a que pour toutes suites finies de représentants $(x_1,j_1), (x_2,j_2)$, ...,(x_n,j_n).

$$\begin{tikzcd}
j_1 \arrow[dr] & & & \\
& k_1 \arrow[dr] & & \\
j_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k_{1_2} \arrow[dr] & \\
& k_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k_{12_{23}}\ldots \\
j_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & k_{2_3} \arrow[ur] & \\
& k_3 \arrow[ur] & & \\
j_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& \ldots & &
\end{tikzcd} \tag{2.4.16}$$

Donc peut être écrit comme (y_1,k), ...,(y_n,k).

Or pour tout foncteur $G : P \to \mathbf{Set}$, on a que $\varinjlim_j(G(p)) = C\hat{o}ne(*, G)$ où $C\hat{o}ne(*, G)$ est l'ensemble des cônes τ sur G à partir du point $*$. Si $G(p) = \varinjlim_j F(p, j)$ et P est fini, alors chaque cônes $C\hat{o}ne(*, G)$ consiste en un nombre fini d'élément de $\varinjlim_j F(p, j)$. Comme J est une catégorie filtrée, on a que tout cônes τ consiste en élément $\tau_p = (y_p, k')$ pour un certain k', où $y_p \in F(p, k')$ constitue déjà un cône $y : * \to F(-, k')$.
Ce cône $y \in \varprojlim_p(F(p, k'))$ et sa classe d'équivalence est un élément de $\varprojlim_p \varinjlim_j F(p, j)$. La flèche :

$$\tau \mapsto (y, k') \in \varprojlim_p \varinjlim_j F(p, j)$$

correspond bien à l'inverse de κ □

2.5 Adjoint

La notion de foncteur adjoint a été introduite par Daniel Kan en 1956 dans l'article [Kan56].

Elle étudie les relations du type

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(c), d) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(c, G(d))$$

entre deux foncteurs.
Des relations de ce type sont omniprésentes dans toutes les mathématiques.

Définition 2.5.1. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et deux foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

On appelle **Adjonction** de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$ le couplet (F, G) où on a l'isomorphisme pour tout $c \in \mathcal{C}$,$d \in \mathcal{D}$:

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(c), d) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(c, G(d))$$

qui est naturelle en c et d.
Si ces conditions sont vérifiées, on dit que F est **adjoint à gauche** et G est **adjoint à droite** de F.

Remarque 2.5.2. Soit une adjonction (F, G) définie comme ci-dessus.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd} \tag{2.5.2}$$

On peut poser dans l'isomorphisme suivant $\phi_{c,d} : Hom_{\mathcal{D}}(F(c), d) \simeq: Hom_{\mathcal{C}}(c, G(d))$ d=F(c). On a alors

$$\eta_c \coloneqq \phi_{c,F(c)}(\mathrm{id}_{F(c)})$$

Ce qui nous permet de donner la définition suivante:

Définition 2.5.3. • Soit une adjonction définie comme ci-dessus on appelle **unité** la transformation naturelle suivante $\eta : id_c \to G \circ F$

- De façon duale on appelle **co-unité**, la transformation naturelle $\epsilon : F \circ G \to id_d$

Théorème 2.5.4. *Soit une adjonction* (F, G)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd} \tag{2.5.3}$$

Alors l'adjoint à gauche F préserve les colimites et l'adjoint à droite G préserve les limites.

Démonstration. Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. Supposons que F est adjoint à droite de G. De plus pour simplifier on suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ aient toutes les petites limites.

Soit $A : I \to \mathcal{C}$ un foncteur et on note X un objet de $\mathcal{C}$ sa colimite. De plus on note Y un objet de $\mathcal{D}$ la colimite du foncteur $F \circ A$.

On cherche donc à montrer que $F(X) = Y$.

On sait par définition de Y et sa propriété universelle que pour tout objet Z de $\mathcal{D}$ il existe une unique flèche $Y \xrightarrow{f} Z$. En particulier si on prend $Z = F(X)$ on a bien une flèche $Y \xrightarrow{f} F(X)$.

On cherche donc à montrer que cette f est un isomorphisme. Si on applique le lemme de Yoneda. Il nous suffit de vérifier que pour tout $T \in \mathcal{D}$ la flèche entre

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(X), T) \to Hom_{\mathcal{D}}(Y, T)$$

est un isomorphisme.

Or

$$Hom_{\mathcal{D}}(Y, T) = Hom_{\mathcal{D}}(\underset{i \in I}{colim}(F(A(i))), T)$$
$$Hom_{\mathcal{D}}(Y, T) = \underset{i \in I}{lim}(Hom_{\mathcal{D}}(F(A(i)), T))$$

et par l'hypothèse de l'adjonction :

$$Hom_D(F(A(i)), T) = Hom_C(A(i), G(T))$$

d'où

$$\begin{aligned} \underset{i \in I}{lim}(Hom_D(F(A(i)), T)) &= \underset{i \in I}{lim}(Hom_C(A(i), G(T))) \\ &= Hom_C(\underset{i \in I}{colim}(A(i)), G(T)) \\ Hom_{\mathcal{D}}(Y, T) &= Hom_C(X, G(T)) \end{aligned}$$

A nouveau par l'hypothèse de l'adjonction :

$$Hom_D(F(X), T) = Hom_C(X, G(T))$$

d'où

$$Hom_{\mathcal{D}}(Y, T) = Hom_C(X, G(T))$$
$$Hom_{\mathcal{D}}(Y, T) = Hom_D(F(X), T)$$

Donc le lemme de Yoneda entraîne $F(X) = Y$. □

Remarque 2.5.5. On peut donner une définition d'un foncteur F entre deux préordes $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ est une application $F : P \to Q$ tel que si $x \leq_P y$, alors $F(x) \leq_Q F(y)$.

De ce fait on en déduit qu'une adjonction entre deux préordres n'est rien d'autre que deux foncteurs :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd} \tag{2.5.4}$$

telles que, $\forall x \in P$, $\forall y \in Q$ on a

$$x \leq_P G(y) \Leftrightarrow F(x) \leq_Q y$$

Exemple 2.5.6. •

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}) \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & (\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}) \arrow[l, bend left, "\lfloor . \rfloor"] \end{tikzcd} \tag{2.5.5}$$

où F est le foncteur inclusion d'une sous-catégorie à une catégorie, qui envoie un objet (resp. une flèche) de $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ sur ce même objet (resp. cette même flèche) dans $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$. Et où $\lfloor . \rfloor$ est le foncteur partie entière qui envoie un objet (resp. une flèche) de $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ sur sa partie entière inférieur (resp. sa flèche partie entière) dans $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$.

C'est bien une adjonction, en effet $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$n \leq_{\mathbb{N}} \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow F(n) \leq_{\mathbb{R}} x$$
$$n \leq \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow n \leq x \text{ ce qui est évidement vrai}$$

On a donc donné un adjoint à gauche au foncteur inclusion.

On peut démontrer par raisonnement analogue qu'il existe un adjoint à droite au foncteur inclusion donné par la partie entière supérieure.

• Soit R et S deux anneaux.

On peut donner un cas particulier de la proposition 2.4.11.

En effet on va montrer qu'on a l'adjonction suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}_R \arrow[r, bend left, "-\otimes_R X"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Mod}_S \arrow[l, bend left, "Hom_S(- X)"] \end{tikzcd} \tag{2.5.6}$$

C'est à dire qu'on a l'isomorphisme naturel pour tout $M \in \mathbf{Mod_R}$ et $N \in \mathbf{Mod_S}$ suivant :

$$Hom_R(M, Hom_S(N, X)) \simeq Hom_S(M \otimes_R X, N)$$

On considère les flèches :

$$f : Hom_R(M, Hom_S(N, X)) \to Hom_S(M \otimes_R X, N)$$
$$\phi \overset{\Delta}{\mapsto} (x \times y \overset{\alpha}{\mapsto} \phi(x)(y)) \text{ pour } x \in M \text{ et } y \in N$$

et

$$\begin{aligned} g : & Hom_S(M \otimes_R X, N) \to Hom_R(M, Hom_S(N, X)) \\ & \eta \overset{\Omega}{\mapsto} (x \overset{\beta}{\mapsto} (y \overset{\gamma}{\mapsto} \eta(x \times y))) \text{ pour } x \in M \text{ et } y \in N \end{aligned}$$

Ils sont tous les deux linéaires et inverse l'un de l'autre.

Maintenant on sait que l'adjoint à droite préserve les limites. D'où le foncteur $Hom_S(-, X) : \mathbf{Mod}_S \to \mathbf{Mod}_R$ préserve les limites.

- De façon similaire dans **Set**, on a l'adjonction suivante:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "- \times x"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Set} \arrow[l, bend left, "Hom(-x)"] \end{tikzcd} \tag{2.5.7}$$

Il arrive souvent que le foncteur d'oubli soit muni d'un adjoint à gauche. Cet adjoint est appelé **foncteur libre**. C'est le foncteur qui "génère" la structure qu'elle soit algébrique, topologique, etc... S'il est muni d'un adjoint à droite cette adjoint est appelé **foncteur co-libre**.

Exemple 2.5.7. 1. Soit le foncteur oubli $U : \mathbf{Vct}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$, et soit $V : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vct}_{\mathbb{K}}$ le foncteur libre. V défini ainsi :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "V(X)"] \arrow[d, "f"] & V(X) = \sum_i \lambda_i x_i \text{ où } x_i \in X \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{K} \arrow[d, "V(f)"] \\ Y \arrow[r, "V(Y)"] & V(Y) \end{tikzcd} \tag{2.5.8}$$

On a l'adjonction suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "V"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Vct}_{\mathbb{K}} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd} \tag{2.5.9}$$

En effet, on a pour tout $X \in \mathbf{Set}$ et $W \in \mathbf{Vct}_{\mathbb{K}}$:

$$\begin{aligned} \phi_{W,X} : Hom_{Set}(X, U(W)) &\to Hom_{Vct_{\mathbb{K}}}(V(X), W) \\ g &\mapsto f \end{aligned}$$

où f est définie

$$\begin{aligned} f : V(X) &\to W \\ \sum_i \lambda_i x_i &\mapsto \sum_i \lambda_i g(x_i) \end{aligned}$$

l'application possède un inverse donnée par :

$$\begin{aligned} \phi^{-1}_{W,X} : Hom_{Vct_{\mathbb{K}}}(V(X), W) &\to Hom_{Set}(X, U(W)) \\ f &\mapsto f_{|X} \end{aligned}$$

Maintenant il s'agit de vérifier que ϕ est naturelle en W et en X, d'abord en X:

$$\begin{array}{ccc} X & & Hom_{\mathbf{Vct}_{\mathbb{K}}}(V(X),W) \xrightarrow{\phi^{-1}} Hom_{\mathbf{Set}}(X,U(W)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \forall h} & \text{tel que} & \Big\downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathbf{Vct}_{\mathbb{K}}}(V(h)\,W)} \qquad\qquad \Big\downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathbf{Set}}(h\,U(W))} \\ X' & & Hom_{\mathbf{Vct}_{\mathbb{K}}}(V(X'),W) \xrightarrow{\phi^{-1}} Hom_{\mathbf{Set}}(X',U(W)) \end{array} \tag{2.5.10}$$

Or le diagramme commute évidement par les propriétés de ϕ^{-1}. Le raisonnement est le même pour la naturalité en W.

2. Maintenant donnons un exemple plus topologique:

   Soit le foncteur d'oubli U : **Top** $\to$ **Set**. Il est muni d'un adjoint à droite donné par T : **Set** $\to$ **Top** qui donne la topologie triviale (ie. les seules ouverts sont $\emptyset$ et l'ensemble tout entier) à un ensemble donné.

   En effet, on a bien l'isomorphisme naturel pour tout $A \in$ **Top** et $X \in$ **Set** :

$$Hom_{Set}(X, U(A)) \simeq Hom_{Top}(T(X), A)$$

   qui envoie une fonctions sur elle-même et réciproquement, car les deux foncteurs ne change pas la nature ensembliste de A et X.

   Cependant on doit montrer que la flèche de $Hom_{Top}(T(X), A)$ en est bien une, c'est à dire qu'elle est continue. Or soit $f \in Hom_{Top}(T(X), A)$ on cherche à montrer que pour tout ouvert $V \subset T(X)$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert. Procédons à une disjonctions de cas sur les différents ouverts de la topologie triviale.:

   - $V = X$, on a $f^{-1}(X) = X$ et est un ouvert par définition de la topologie triviale.
   - $V = \emptyset$, on a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et est un ouvert par définition de la topologie triviale.

   De plus le foncteur oubli est aussi muni d'un adjoint à gauche donné par D : **Set** $\to$ **Top** qui donne la topologie discrète (ie. tout les sous ensembles sont des ouverts) à un ensemble donné.

   En effet, on a bien l'isomorphisme naturel pour tout $T \in$ **Top** et $X \in$ **Set** :

$$Hom_{Set}(X, U(T)) \simeq Hom_{Top}(D(X), T)$$

   qui envoie une fonctions sur elle-même et réciproquement, car les deux foncteurs ne change pas la nature ensembliste de T et X.

   Cependant on doit montrer que la flèche de $Hom_{Top}(D(X), T)$ en est bien une, c'est à dire qu'elle est continue. Or soit $f \in Hom_{Top}(D(X), T)$ on cherche à montrer que pour tout ouvert $V \subset D(X)$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert. Or par définition il s'agit d'un sous ensemble de X donc par définition de la topologie discrète $f^{-1}(V)$ est un ouvert.

3. De plus on a les deux adjonctions suivantes qui se démontre de façon analogue au (1.):

   - L'oubli U : $\mathbf{Mod_R} \to$ **Set**, a comme adjoint gauche le foncteur qui envoie l'ensemble X sur le R-module libre de base X.

- L'oubli U : **CRing** $\to$ **Set**, a comme adjoint gauche le foncteur qui envoie l'ensemble X sur l'anneau polynômiale ayant comme variables les éléments de X, c'est à dire $A[X]$.

On énonce le théorème suivant qui nous serviras dans section catégories cartésienne, dont on ne donneras pas la démonstration, mais que l'on peut trouver page 102 dans [ML71].

Théorème 2.5.8 (Adjonction à paramètre)**.** *Soit $F : X \times P \to A$ un bifoncteur. Supposons que pour tout $p \in P$ on ait $F(-,p) : X \to A$ a un adjoint à droite $G(p,-) : A \to X$ par l'adjonction :*

$$Hom(F(x,p),a) \simeq Hom(x, G(p,a)) \tag{2.5.11}$$

Alors il existe une unique façon d'assigner à toute flèche $p \xrightarrow{h} p'$ de P et à tout $a \in A$ une flèche $G(p',a) \xrightarrow{G(h,a)} G(p,a)$ tel que G devienne un bifoncteur $P^{op} \times A \to X$ pour lequel l'adjonction 2.5.11 soit naturelle en x, p et a.

2.5.1 Complétion

La notion de complétion peut être abordée d'un point de vue catégorique. D'abord sur des espaces métriques comme un foncteur, puis sur des structures algébriques comme une limite.

Remarque 2.5.9.
- On note **Metr** la catégorie dont les objets sont les espaces métriques et les flèches les applications uniformément continus entre-eux. De plus on note **CMetr** la catégorie dont les objets sont les espaces métriques complets et les flèches les applications uniformément continues entre-eux.
- **CMetr** est une sous catégorie de **Metr**, de ce fait on peut définir un foncteur Inc : **CMetr** $\to$ **Metr** qui correspond au foncteur inclusion entre les deux catégories.
- Si on définit le complété de $X \in$ **Metr** à l'aide des suites de Cauchy. On sait que l'image d'une suite de Cauchy par une flèche de **Metr** est une suite de Cauchy. De ce fait une flèche f de **Metr** induit une flèche de **CMetr** qu'on note $\hat{f}$ et on remarque que $\widehat{g \circ f} = \hat{f} \circ \hat{g}$, et que pour $X \in$ **Metr** la flèche induite par id_X est exactement $id_{\hat{X}}$ où $\hat{X}$ est le le complété de X. De ce fait on a la définition suivante:

Définition 2.5.10. La complétion peut être définie comme un foncteur qu'on note Cpl : **Metr** $\to$ **CMetr** qui pour un $X \in$ **Metr** associe $\hat{X} \in$ **CMetr** l'unique espace complet associé à X. Et qui pour une flèche de **Metr** associe la flèche induite (cf. ci-dessus) qu'on note $\hat{f}$.

Proposition 2.5.11. *le foncteur Inc :* **CMetr** $\to$ **Metr** *admet un adjoint à gauche donné le foncteur Cpl :* **Metr** $\to$ **CMetr** *défini ci dessus.*

Démonstration. On rappelle le théorème de topologie suivant : Soit $E \in$ **Metr**, $E' \in$ **CMetr** et $f : E \to E'$ une application uniformément continue, alors il existe une unique $\hat{f} : \hat{E} \to E'$ telle que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & E' \\ \hat{E} \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.5.12}$$

commute. Où ϕ correspond à une isométrie tel que $\phi(E)$ est dense dans $\hat{E}$.

L'adjonction vient d'elle-même après ce théorème.

□

Remarque 2.5.12. La notion de complétion peut-être étendue à des structures d'algèbres commutatives. Ici nous allons nous restreindre à quelques structures algébriques basiques.

Soit G un objet de **Top** et de **Ab**, et soit

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset ...$$

une suite de sous groupes de G. Enfin, soit x_ν une suite de Cauchy de G. Alors l'image de x_ν dans G/G_n est constante, on la note ϵ_n. De plus si on a le morphisme de groupe suivante :

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} : &G/G_{n+1} \to G/G_n \\ &\epsilon_{n+1} \mapsto \epsilon_n \end{aligned}$$

Ainsi une suite de Cauchy x_ν dans G définie ce qu'on appelle **une suite cohérente** ϵ_n qui vérifie pour tout entier naturel :

$$\theta_{n+1}(\epsilon_{n+1}) = \epsilon_n$$

.

De ce fait si on pose une suite ϵ_n cohérente, on peut construire une suite de Cauchy x_n comme une élément du collatéral de ϵ_n, c'est à dire tel que $x_{n+1} - x_n \in G_n$. Ainsi on définis $\hat{G}$ comme l'ensemble des suites cohérentes ϵ_n avec la structure de groupe évidente.

Si on sort du cadre de la complétion on appelle **système projectif** la donnée d'une suite de groupe A_n et de morphismes de groupes $\theta_{n+1} : A_{n+1} \to A_n$. Et le groupe des suites cohérentes associées aux systèmes projectifs et appelés **limite projectives** du système. Il s'agit d'un cas particulier de la limite catégorique vu ci-dessus. On a donc une façon algébrique/catégorique de compléter G un groupe:

$$\hat{G} \cong \varprojlim G/G_n$$

.

Exemple 2.5.13.

- Ceci nous permet de donner une autre définition de $\mathbb{Z}_p$.

$$\varprojlim(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$$

- Et de donner une généralisation de la construction de $\mathbb{Z}_p$ et de prendre $G = A$ un anneau, et $G_n = I^n$ une suite d'idéaux de A. Alors : $\varprojlim(A/(I^n))$ est appelé **le complété I-adique**.

2.6 Catégorie Cartésienne fermée

Définition 2.6.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec tout les produits finis, soit $x \in \mathcal{C}$.

Si le foncteur,

$$\begin{aligned} - \times x : \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\ y &\mapsto y \times x \end{aligned}$$

a un adjoint à droite on dit que $\mathcal{C}$ a une **exponentiation** pour x.

Notation 2.6.2. Un tel adjoint est noté $z \mapsto z^x$ Si $\mathcal{C}$ a une exponentiation pour tout $x \in \mathcal{C}$, par le théorème d'adjoint à paramètre on a que le bifoncteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\ (x, z) &\mapsto z^x \end{aligned}$$

Ce bifoncteur est appelé **exponentiation** pour la catégorie $\mathcal{C}$

Définition 2.6.3. Une catégories $\mathcal{C}$ est dite **cartésienne fermée** si elle est munie de :

- Un objet terminale **1**.
- Pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ un produit binaire $X \times Y$.
- Pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ une exponentiation Y^X

Exemple 2.6.4. **Set** est une catégorie cartésienne fermée, en effet :

- Dans **Set** tout singleton est un objet terminal.
- Dans **Set** on a bien le produit cartesien usuel.
- Dans **Set** par l'adjonction donné dans l'exemple 2.5.6 on a bien une exponentiation pour tout $X, Y \in$ **Set** donnée par $Y^X = Hom(X, Y)$.

2.7 Récapitulatif

Pour résumer voici un tableau, avec les différentes notions catégoriques et un exemple plus "concret" dans différentes catégories. Nous nous sommes concentrés sur une seules des deux notions duales.

Notion de catégorique	Diagramme associé		
Une catégorie		**Set**	les objets sont les petits ensembles, et les flèches les applications ensemblist
Foncteur			
Transformation naturelle	$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\forall f"'] & F(c) \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "F(f)"] & G(c) \arrow[d, "G(f)"] \\ c' & F(c') \arrow[r, "\eta_{c'}"] & G(c') \end{tikzcd}$		$\eta : id \to ((.)^*)^*$ définie pour tout $V \in V$ par $\eta_V : V \to (V^*)^*$ tel que $\eta_V(x)(\phi) =$ pour $x \in V, \phi \in V^*$ est une transformati naturelle.
propriété universelle	$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "\exists ! f'"'] & d \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(c) \arrow[d, "F(f')"] \\ e & & F(e) \end{tikzcd}$		

Produit	$\begin{tikzcd} c & c\prod d \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & d \\ & e \arrow[ul, "g_2"] \arrow[u, "\exists! f"] \arrow[ur, "g_1"'] & \end{tikzcd}$	**Set**	le produit de $X_1, X_2 \in$ **Set** est donné par le produit cartésien usuel $\prod_i X_i$
		Ab	le produit de $X_1, X_2 \in$ **Ab** est donné par $X_1 \oplus X_2$
		CRing	le produit de $X_1, X_2 \in$ **CRing** est donn par $X_1 \otimes X_2$
Égaliseur	$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "eq"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \\ c \arrow[u, "h'"] \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$	**Set**	l'égaliseur de $X \overset{f,g}{\to} Y$ est donné par l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$
		A-Mod	l'égaliseur de $X \overset{f,g}{\to} Y$ est donné par l'ensemble $ker(f-g)$
Produit Fibré	$\begin{tikzcd} q \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\ & p \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"] & c \arrow[d, "g"] \\ & b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd}$	**Set**	le produit fibré de $X \overset{f}{\to} Z \overset{g}{\leftarrow} Y$ est donné par l'ensemble $\{(x,y) \in X \times Y \mid$.
Limite	$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "\phi_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\phi_Y"] & \\ & N \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$		$\varprojlim(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_p$ Pour $F : \emptyset \to \mathcal{C}$ on a $\varprojlim F$ est un objet terminale de $\mathcal{C}$.
Adjoint		$\mathbf{Mod}_R$ et $\mathbf{Mod}_S$	$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}_R \arrow[r, bend left, "-\otimes_R X"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Mod}_S \arrow[l, bend left, "Hom_S(-X)"] \end{tikzcd}$
		$(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ et $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$	$\begin{tikzcd} (\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}) \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & (\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}) \arrow[l, bend left, "\lfloor . \rfloor"] \end{tikzcd}$ où F est le foncteur inclusion et $\lfloor . \rfloor$ est le foncteur partie entière.

		Top et **Set**	$\begin{tikzcd} \mathbf{Top} \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathbf{Set} \arrow[l, bend left, "T"] \end{tikzcd}$ où T est le foncteur topologie grossière.

Chapitre II

Éléments de la théorie du topos

Dans cette partie, nous étudierons une application de la théorie des catégories : "La théorie du topos". Pour l'écrire je me suis en grande partie inspirer de [MLM92], [Joh77], [Joh02] et [LS94].

L'origine de la théorie du topos provient de deux différentes branches des mathématiques. La première que nous aborderons dans ce chapitre est la théorie des faisceaux.

A partir des années 1940 avec les travaux de Jean Leray on étudie déjà la notion de faisceau d'ensemble comme outil en topologie algébrique.

Néanmoins il faudra attendre les années 1950-1960 pour que la puissance de la théorie des faisceaux soit reconnue par les géomètres algébristes, particulièrement par l'école de Grothendieck dont nous soulignons l'importance.

En effet tout au long de nos recherches, nous avons rencontré leurs travaux exposés dans les fameux séminaires de géométrie algébrique du Bois Marie (SGA) entre 1960 et 1969. Notamment pour le concept d'univers, et d'autres notions que nous introduirons plus tard. Ces séminaires dirigés par Grothendieck, cherchent à démontrer en grande parties les conjectures Weil (1949) (démontrées en partie par Grothendieck dans les années 60, puis finalisées un de ses anciens élèves de thèse et futur médaille Fields Pierre Deligne en 1974). Néanmoins dans ses travaux monumentales l'école de Grothendieck introduit de nombreux outils, et rénove la géométrie algébrique et lui donner des bases moderne. De plus, dans la plupart de mes lectures SGA est cité avec grande ferveur et admiration.

L'école de Grothendieck définit plus généralement de faisceau, et introduit de nombreuses notions que nous verrons dans le chapitre 2 sur la topologie de Grothendieck. De plus elle va définir la notion de topos de Grothendieck, dont Jean Giraud l'un de ses mathématiciens donnera une caractérisation en propriétés uniquement catégorique, dans le théorème qui porte son nom.

La seconde branche qui est à l'origine de la theorie du topos provient de l'article de William Lawvere "An elementary theory of the category of sets." [Law64]. Dans cette article Lawvere introduit une axiomatisation de la catégorie **Set**, il le fait dans une tradition plus Cantorienne, c'est à dire en raisonnant sur les "isomorphism-invariant structure" [1].

Néanmoins même si cette construction est très intéressante en terme de fondation des mathématiques, elle est trop rigide et trop spécialisée. De ce fait on cherche une axiomatisation qui couvre la catégorie de foncteur avec **Set**.

De plus dans d'autres papiers Lawvere observa que l'ensemble $\{true, false\}$ pouvait être regardé comme objet "des valeurs de vérités" dans **Set**. C'est pourquoi Lawvere et Myles Tierney ont cherché à prendre l'existence d'un tel objet comme un axiome d'une notion englobant **Set**.

Donc Lawvere et Tierney ont donné une généralisation du topos de Grothendieck avec l'objet décrit ci-dessus on a la notion de topos.

Un topos est une catégorie muni de propriété semblable à **Set**. Vulgairement un topos correspond à une multitude d'univers dans lesquels on pourrait faire des mathématiques différentes, et la théorie des ensembles serait l'un d'eux.

[1] En opposition à ZFC qui raisonne sur l'appartenance

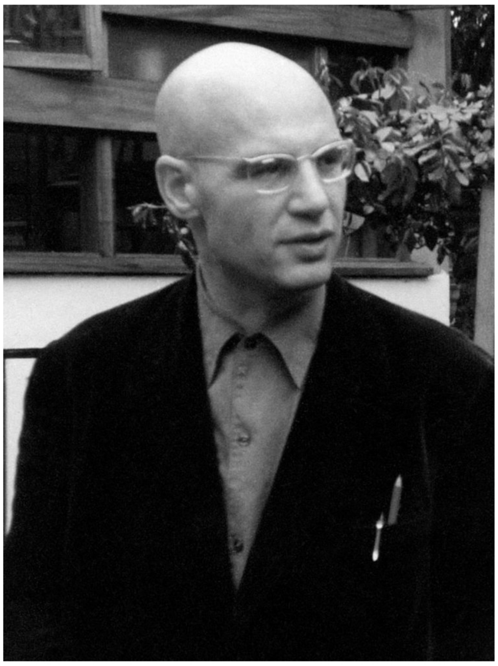


Figure 2.2: Alexandre Grotendieck

Figure 2.1: William Lawvere

Chapitre 3

Théorie des faisceaux

3.1 Notion de Préfaisceau et de Faisceau d'ensemble

Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de faisceau F sur un espace topologique. Vulgairement un faisceau décrit un ensemble de classe de fonctions qui ont de "bonnes" propriétés. Des propriétés qui permettent de passer d'une situation locale à une situation globale.

Nous définirons d'abord de façon ensembliste puis en terme de catégorie, et enfin nous allons fournirons des exemples un plus concrets pour mieux figurer la notion de faisceau.

Définition 3.1.1. On note $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ la catégorie $\mathbf{Func}(\mathcal{C}^{\mathbf{op}}, \mathbf{Set})$ on appelle ses objets des préfaisceaux.

Exemple 3.1.2. Le prolongement de Yoneda est un préfaisceaux.

Corollaire 3.1.3. *La catégorie $PSh(\mathcal{C})$ est complète et ses limites sont calculés objet par objet.*

Démonstration. Par le fait que **Set** soit une catégorie complète d'après le théorème 2.4.3. Il s'agit d'une simple application du théorème 2.4.6 et de son corollaire. □

D'abord une définition plus ensembliste:

Définition 3.1.4. Un préfaisceau d'ensembles F sur X un espace topologique est appelé **faisceau** lorsque pour tout ouvert U de X, possédant un recouvrement $U = \cup_{i_i n I} U_i$, et pour toute famille de fonctions $(s_i)_I : F \to U_i$, vérifiant :

$$s_i \mid_{U_i \cap U_j} = s_j \mid_{V_i \cap U_j}$$

il existe une unique fonction $s : F \to U$ telle que : $s \mid_{V_i} = s_i$.

On rappelle que la catégorie $\mathcal{O}(X)$ a été définie dans l'exemple 2.1.7

On donne ainsi une définition dans un langage plus catégorique:

Définition 3.1.5. On appelle **Faisceau** d'ensemble F sur un espace topologique X un foncteur $F : \mathcal{O}(X)^{op} \to$ **Set** tel que quelque soit le recouvrement d'un ouvert U de X, on a l'égalisateur suivant :

$$F(U) \to \prod_i F(U_i) \overset{p,q}{\rightrightarrows} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

où $t \in F(U)$, $e(t) = \left\{ t_{|U_i} \mid i \in I \right\}$, $t_i \in F(U_i)$

$p\{t_i\} = \left\{t_i \mid_{(U_i \cap U_j)}\right\}$, $q\{t_i\} = \left\{t_j \mid_{(U_i \cap U_j)}\right\}$

Remarque 3.1.6. On note $Sh(X)$ la catégorie dont les objets sont les faisceaux et les flèches les transformations naturelles entre faisceaux. On remarque que les faisceaux sont des préfaisceaux, de ce fait la catégorie $Sh(X)$ est un sous catégorie de $PSh(X)$.

Exemple 3.1.7. Commençons par un exemple détaillé, puis nous énoncerons d'autres exemples sans détails.

1. On chercher à montrer que $C : \mathcal{O}(X)^{op} \to$ **Set** qu'on définit par, pour une flèche $U \xrightarrow{f} V$ de $\mathcal{O}(X)^{op}$ on a :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C(U) \arrow[d, "g \mapsto g_{|V}"] \\ V, \arrow[r] & C(V) \end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

où $g \in C(U) = \{h : U \to \mathbb{R} \mid \text{h est continue}\}$. On veux donc montrer que C est un préfaisceau. Soit $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ deux flèche de $\mathcal{O}(X)^{op}$, alors pour $h \in C(U)$ on a:

$$\begin{aligned} C(f \circ g)(h) &= h_{|W} \\ C(f) \circ C(g) &= h_{|V_{|W}} \quad \text{or par définition W est inclue dans V d'où} \\ h_{|W} &= h_{|V_{|W}} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} C(id_U)(h) &= h \\ id_{C(U)}(h) &= h \end{aligned}$$

On en déduit que $C \in PSh(X)$.

Soit $\cup_{i \in I} U_i = U$ un recouvrement, et soit $\alpha : U \to \mathbb{R}$. On pose pour tout $i \in I$ la fonction suivante $\alpha_i = \alpha_{|U_i}$, on suppose que pour tout $i \in I$ les α_i sont continues.

On définit $\alpha : U \to \mathbb{R}$ par

$$\alpha(u) = \begin{cases} \alpha_1 \text{ si } u \in U_1 \\ \ldots \\ \alpha_i \text{ si } u \in U_i \\ \ldots \end{cases} \tag{3.1.2}$$

On chercher à montrer que ce "recollement" est continu.

D'abord on remarque si $u \in \cap_{j \in J \subset I} U_j$, alors on a $\alpha_i(u) = \alpha_j(u)$ pour tout $i, j \in J$. Donc α est bien définie pour $u \in \cap_{j \in J \subset I} U_j$. Soit $u \in U$ fixé, sans perte de généralité on peut supposer que $u \in U_1$.

Par définition d'un ouvert on sait qu'il existe δ tel que $B(u, \delta) \subset U_1$. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Du fait que α_1 soit continu on a $\exists \delta'$ tel que $\forall x \in U_1, \parallel x - u \parallel < \delta'$, on a $\mid \alpha_1(x) - \alpha_1(u) \mid < \epsilon$.

On prend $\delta'' = min(\delta, \delta')$. Alors $\parallel x - u \parallel < \delta'' < \delta$, et $\parallel x - u \parallel < \delta'' < \delta'$.

D'où $\mid \alpha_1(x) - \alpha_1(u) \mid = \mid \alpha(x) - \alpha(u) \mid < \epsilon$ D'où α est continue et on a bien que C est un faisceau.

2. Par un raisonnement analogue, on peut prouver que $C^k(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \text{ f est de classe } C^k\}$ et de ce fait on a la chaine inclusive de sous-faisceau :

$$C^\infty \subset ... \subset C^k \subset C^{k-1} \subset ... \subset C^1 \subset C$$

3. Soit $D(U)) = \{f : U \to \mathbb{R}\}$ est un faisceau.

4. le foncteur $hom(-, U) : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ définie pour un $V \in \mathcal{O}(X)^{op}$ par:

$$\text{hom}(V, U) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } V \not\subseteq U \\ \bullet \text{ si } V \subset U \end{cases} \tag{3.1.3}$$

   est un faisceau. Dans certain cas on le note **1**, car il s'agit de l'objet terminal de la catégorie $Sh(X)$.

5. Maintenant nous allons développer un contre exemple. Soit $B : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ tel que pour $U \in \mathcal{O}^{op}$ on a $B(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid \text{ f soit continue et bornée } \}$ c'est un préfaisceau, pour les mêmes raisons que C est un préfaisceau.

   Néanmoins si on prend $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $U =]-1, 2[$ et un recouvrement d'ouvert donné par $U = \cup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n} - 1, 2[$. Ainsi pour $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $f_{|U_i} \in B(U_i)$ (ie. sont bornées et continues), mais $f \notin B(U)$ (ie. f n'est évidement pas bornée). De ce fait B n'est pas un faisceau.

Proposition 3.1.8. *Soit $G \xrightarrow{\alpha} H$ une flèche de $PSh(X)$ ou $Sh(X)$, alors on a :*
α est un mono si et seulement si quelque soit $U \in \mathcal{O}(X)^{op}$ on a α_U est injectif.

Démonstration. $\Leftarrow$
Soit $U \in \mathcal{O}(X)^{op}$, on suppose que pour $x, y \in \mathbf{Set}$ si $\alpha_U(x) = \alpha_U(y)$, alors $x = y$. Soit 2 flèches de $PSh(X)$ ou $Sh(X)$ données par $\beta_1, \beta_2 : F \to G$. Si on suppose $\alpha \circ \beta_1 = \alpha \circ \beta_2$ on a pour tout $x \in \mathbf{Set}$ l'implication suivante par hypothèse : $\alpha_U \circ \beta_{1_U} = \alpha_U \circ \beta_{2_U}$ d'où $\beta_{1_U} = \beta_{2_U}$.
Et donc $\beta_1 = \beta_2$.

$\Rightarrow$ On suppose que α est un mono, c'est à dire: Pour tout F dans $PSh(X)$ ou $Sh(X)$ et pour toute paire de flèches $\beta_1, \beta_2 : F \to G$ on a :

$$\alpha \circ \beta_1 = \alpha \circ \beta_2 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$$

En particulier si on prends pour $U \in \mathcal{O}(X)^{op}$ le faisceau (donc préfaisceau) $F = Hom(-, U)$ on a un cas particulier du lemme de Yoneda avec deux flèches de PSh(X) ou Sh(X) c'est à dire des transformations naturelles, $\beta_1, \beta_2 \in Nat(Hom(-, U), G)$. Or d'après le lemme de Yoneda on sait que $Nat(Hom(-, U), G) \simeq G(U)$. Et $G(U) \in \mathbf{Set}$, donc on peut faire correspondre à β_1 (resp.β_2) un objet X (resp. Y) $\in \mathbf{Set}$ tel qu'on ait par hypothèse $\alpha_U(X) = \alpha_U(Y) \Rightarrow X = Y$. On a bien l'injectivité de α_U. □

Théorème 3.1.9 (Théorème de Densité)**.** *Soit $\mathcal{D}$ une petite catégorie.*
*Tout foncteur $K : \mathcal{D} \to$ **Set** peut être représenté de façon canonique comme une colimite d'un foncteur représentable $Hom(d, -)$ où $d \in \mathcal{D}$*

Démonstration. Se donnant un foncteur K on peut construire une catégorie J dont :

- Les objets sont les paires (d, x) où $d \in \mathcal{D}$ et $x \in K(d)$.

- Les flèches $(d,x) \xrightarrow{f} (d',x')$ sont des flèches de $\mathcal{D}$ de $d \xrightarrow{g} d'$ tel que $K(g)x = x'$.

Nous allons montrer K est la colimite du foncteur suivant :

$$M : J \to Func(\mathcal{D}, \mathbf{Set})$$

défini par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(d,x) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\mathcal{D}}(d,-) \arrow[d, "f^*:Hom_{\mathcal{D}}(d'\,-)\to Hom_{\mathcal{D}}(d\,-)"] \\
(d',x) \arrow[r] & Hom_{\mathcal{D}}(d',-)
\end{tikzcd} \tag{3.1.4}$$

Yoneda nous donne : $y^{-1} : K(d) \to Nat(Hom_{\mathcal{D}}(d,-), K)$ Ce qui induit un cône $(K, y^{-1}(x))$ sur $Hom_{\mathcal{D}}(d,-)$. On va montrer qu'il possède une propriété universelle.

Soit un cône $(L, y^{-1}(z))$ sur $Hom_{\mathcal{D}}(d,-)$. On cherche θ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{D}}(d',-) \arrow[rr] \arrow[dr, "y^{-1}(x)"] \arrow[ddr, bend right, "y^{-1}(z)"'] & & Hom_{\mathcal{D}}(d,-) \arrow[dl, "y^{-1}(x')"'] \arrow[ddl, bend left, "y^{-1}(z')"] \\
& K \arrow[d, "\theta"] & \\
& L &
\end{tikzcd} \tag{3.1.5}$$

soit commutatif.

Soit $x \in K(d)$, avec l'objet $(d,x) \in J$ on pose $\theta_d(x) = z$ pour $z \in L(d)$.

On veut montrer que $\theta : K \to L$ est bien une transformation naturelle. On prend $d \xrightarrow{f} d'$ tel que $f(x) = x'$, d'où $f(z) = z'$, et comme y^{-1} est une transformation naturelle on a $f(y^{-1}(z) = y^{-1}(f(z)) = y^{-1}(z')$ et donc θ est une transformation naturelle. $\square$

Remarque 3.1.10. Par dualité on observe que tout $F \in PSh(X)$ peut être vu comme la colimite de foncteur hom contravariant.

3.2 Sous-Objets

3.2.1 Notion de Sous-Objets

Dans cette section nous allons traiter le concept de sous anneau, sous groupe, sous espace vectoriel, etc... de façon catégorique à l'aide de mono.

Définition 3.2.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $s \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} t$ deux mono. On note $f \leqq g$ s'il existe f' tel que

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & a \\
& t \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

commute. On a la relation d'équivalence définie par $f \leqq g$ et $g \leqq f$, on la note $f \equiv g$. La classe d'équivalence de ces monos est appelée **sous-objets** de a.

Notation 3.2.2. Soit X un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$ on note $Sub_{\mathcal{C}}(X)$ l'ensemble de tout les sous-objets de X dans la catégorie $\mathcal{C}$

Lemme 3.2.3. *Pour tout diagramme de produit fibré :*

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd} \tag{3.2.2}$$

On a :

- *Si f est un mono, alors f' est un mono.*
- *Si g est un mono, alors g' est un mono.*

Démonstration. Considérons une paire de flèches $h, k\colon \bullet \to p$ tel que $f' \circ h = f' \circ k$. Et donc par la commutativité du diagramme $g \circ f' \circ h = g \circ f' \circ h$ et $f \circ g' \circ h = f \circ g' \circ k$. Or f est un mono d'où par définition on a $g' \circ h = g' \circ k$. Or comme p est un produit fibré, on a $h = k$. De ce fait f' est un mono. On obtient par le même raisonnement que g' est un mono sous condition que g l'est. □

Remarque 3.2.4. D'après le lemme ci-dessus on a que si $s \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} t$ sont deux sous-objets de a, alors le produit fibré du couple (f,g) noté p, nous donne un autre mono : $p \xrightarrow{h} a$ tel que $h \leqq f$ et $h \leqq g$.

Définition 3.2.5. Une catégorie est dite **well-powered** si pour tout $Sub_{\mathcal{C}}(X)$ est isomorphe à un ensemble petit.

Remarque 3.2.6. Soit une catégorie $\mathcal{C}$. On peut définir un foncteur . A un objet $X \in \mathcal{C}$ le foncteur attribue l'ensemble $Sub_{\mathcal{C}}(X)$. De plus on remarque que pour une flèche $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ le produit fibré de tout mono $S \xrightarrow{m} Y$ avec f est un mono par le lemme ci dessus et on le note $S' \xrightarrow{m'} X$. De ce fait on définit la fonction suivante

$$\begin{aligned} Sub_{\mathcal{C}}(f) :& Sub_{\mathcal{C}}(Y) \to Sub_{\mathcal{C}}(X) \\ & m \mapsto m' \end{aligned}$$

D'où on peut définir un foncteur $Sub_{\mathcal{C}}(-) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Sub_{\mathcal{C}}(X) \\ Y \arrow[r] & Sub_{\mathcal{C}}(X) \arrow[u, "Sub_{\mathcal{C}}(f)"'] \end{tikzcd}$$

3.2.2 Sous-Objets Classifiant

Définition 3.2.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec toutes les limites finies. On note $\mathbf{1}$ un objet final de $\mathcal{C}$. On appelle **sous-objet classifiant** un mono $\mathbf{1} \xrightarrow{true} \Omega$. Tel que pour tout mono $S \to X$ dans $\mathcal{C}$, il existe une unique flèche ϕ tel que le diagramme carré suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & \Omega \end{tikzcd} \tag{3.2.3}$$

forme un produit fibré.

ϕ est appelée **fonction caractéristique**.

Lemme 3.2.8. *Soit le produit fibré de deux couples $b \xrightarrow{f} a \xleftarrow{g} c$ et $b' \xrightarrow{h} b \xleftarrow{g'} p$, qu'on représente par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} p' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g''"] & p \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & c \arrow[d, "g"] \\ b' \arrow[r, "h"] & b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd} \tag{3.2.4}$$

Alors il existe un produit fibré du couple $b' \xrightarrow{f \circ h} a \xleftarrow{g} c$.

Démonstration. On va donc montrer que dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} p' \arrow[r, "f' \circ h'"] \arrow[d, "g''"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f \circ h"] & a \end{tikzcd} \tag{3.2.5}$$

p' est le produit fibré de $b \xrightarrow{f \circ h} a \xleftarrow{g}$.

On sait par hypothèse du produit fibré de $b' \xrightarrow{h} b \xleftarrow{g'} p$ que pour tout diagramme carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} q' \arrow[r, "s"] \arrow[d, "s'"] & c \arrow[d, "g'"] \\ b' \arrow[r, "h"] & b \end{tikzcd} \tag{3.2.6}$$

ayant pour base f et g. On a qu'il existe $q' \xrightarrow{t'} p'$ tel que $g'' \circ t' = s'$ et $h' \circ t' = s$ De ce fait, on veut montrer que pour tout diagramme carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} q' \arrow[r, "z"] \arrow[d, "z'"] & c \arrow[d, "g'"] \\ b' \arrow[r, "f \circ h"] & a \end{tikzcd} \tag{3.2.7}$$

Sans perte de généralité on peut prendre $z = f' \circ s$ et $z' = s'$. Car le diagramme reste commutatif, en effet :

$$f \circ h \circ s' = f \circ g' \circ s$$
$$g \circ f' \circ s = g'' \circ f \circ s$$

Maintenant on va montrer que l'unique flèche $q' \xrightarrow{t''} p'$ qui vérifie $f' \circ h' \circ t'' = f' \circ s$ et $g'' \circ t'' = s'$ est donnée par $q' \xrightarrow{t'} p'$. En effet : $f' \circ h' \circ t' = f' \circ s$ et $g'' \circ t' = s'$ par hypothèse. On a bien l'existence et l'unicité du produit fibré.

□

Proposition 3.2.9. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie complète.*
la petite collection de flèches est munie d'un sous objet classifiant si et seulement s'il existe $\Omega \in \mathcal{C}$ et un isomorphisme :

$$\theta_X : Sub_{\mathcal{C}}(X) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega)$$

naturel pour $X \in \mathcal{C}$.

Dans ce cas $\mathcal{C}$ est well-powered.

Démonstration. Soit un sous-objet classifiant comme dans la définition ci-dessus. On a bien une bijection qui envoie un sous-objet (le mono $\mathbf{1} \overset{true}{\to} \Omega$) sur sa fonction caractéristique $X \overset{\phi}{\to} \Omega$. On doit montrer que cette bijection est naturelle, c'est à dire que :

$$\begin{array}{ccc} X & Sub_{\mathcal{C}}(X) \xrightarrow{\theta_X} Hom_{\mathcal{C}}(X,\Omega) \\ {\scriptstyle \forall f}\big\downarrow & {\scriptstyle Sub_{\mathcal{C}}(f)}\big\uparrow \qquad\qquad\qquad \big\uparrow{\scriptstyle Hom_{\mathcal{C}}(f\,\Omega)} \\ Y & Sub_{\mathcal{C}}(Y) \xrightarrow{\theta_Y} Hom_{\mathcal{C}}(Y,\Omega) \end{array} \tag{3.2.8}$$

commute.

Or pour tout mono $Y \overset{m}{\to} S$ on a

$$Hom_{\mathcal{C}}(f,\Omega) \circ \theta(Y)(m) = Hom_{\mathcal{C}}(f,\Omega)(\phi_Y)$$
$$Hom_{\mathcal{C}}(f,\Omega) \circ \theta(Y)(m) = \phi_Y \circ f$$

$$\theta_X \circ Sub_{\mathcal{C}}(f)(m) = \theta_X(m')$$
$$\theta_X \circ Sub_{\mathcal{C}}(f)(m) = \phi_X$$

où $Y \overset{\phi_X}{\to} \Omega$ est la fonction la fonction caractéristique de m et $X \overset{\phi_X}{\to} \Omega$ celle de m'. Or d'après le lemme précédent on a bien que les deux produits fibrés :

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\phi_X"] & \Omega \end{tikzcd} \tag{3.2.9}$$

forme un 3ème produit fibré ce qui nous donne la dernière égalité.

□

Exemple 3.2.10. Dans **Set**, un sous-ensemble $S \subset X$ peut être décrit comme une fonction caractéristique $\phi_S : X \to \{0,1\}$ définie comme pour tout élément de $x \in X$:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in S \\ 1, \text{ si } x \notin S \end{cases} \tag{3.2.10}$$

où 0 correspond à la valeur "true" et donc $\{0,1\}$ à l'ensemble des "valeurs de vérités". Si on note $\mathbf{1} = \{0\}$, on a le sous-objet suivant $\mathbf{1} \overset{true}{\to} \{0,1\}$. Avec cette notation chaque sous-ensemble S de X correspond à un produit fibré du couple $(\phi_S, \mathbf{true})$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & \mathbf{1} \arrow[d, "\mathbf{true}"] \\ X \arrow[r, "\phi_S"] & \{0,1\} \end{tikzcd} \tag{3.2.11}$$

On peut définir une flèche false de façon similaire.

3.2.3 Sous-Objets Classifiant de Préfaisceaux et Crible

Remarque 3.2.11. Pour appréhender la notion de sous-objet classifiant sur les préfaisceaux, nous allons définir la notion de crible.

Nous n'utiliserons pas que cette notion dans le cas des sous-objets classifiants, mais aussi pour définir une topologie de Grothendieck dans la section 3.4

Définition 3.2.12. Soit C un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$, on appelle **crible** sur C un ensemble S de flèche $\bullet \xrightarrow{f} C$ tel que $f \circ h$ est définie implique $f \circ h \in S$.

Exemple 3.2.13. Si $\mathcal{C} = \textbf{Préordre}$ un crible sur $c \in \textbf{Préordre}$ correspond à l'ensemble des $b \leq c$ tel que $a \leq b \in S$ implique $a \in S$.

Remarque 3.2.14. Soit Q un sous-foncteur de $Hom_{\mathcal{C}}(-, C)$, alors

$$S = \left\{ f \mid \text{ pour un certain } A \in \mathcal{C}, A \xrightarrow{f} C \text{ et } f \in Q(a) \right\}$$

est un crible sur C. Et inversement soit S un crible sur C, alors si on note

$$Q(A) = \left\{ f \mid A \xrightarrow{f} C \text{ et } f \in S \right\}$$

nous donne un sous-foncteur $Q : \mathcal{C}^{op} \to \textbf{Set}$ de $Hom_{\mathcal{C}}(-, C)$.

De ce fait on peut identifier un crible S sur c à un sous foncteur de $Hom_{\mathcal{C}}(-, c)$.

Remarque 3.2.15. L'opération la plus courante sur les cribles est le produits fibré, en effet on a de façon évidente.

Soit S un crible sur C un objet d'une catégorie $\mathcal{C}$, et $D \xrightarrow{f} C$ une flèche de $\mathcal{C}$. Alors le produit fibré du couple $D \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g \in S} \bullet$ définis un crible sur D, qu'on note $S \times_C D$ ou $f^*(S)$.

Pour tout $E \in \mathcal{C}$, on peut aussi définir on a $f^*(S(E)) = \left\{ E \xrightarrow{g} C \mid f \circ g \in S(E) \right\}$

Exemple 3.2.16. Dans $\textbf{PSh}(\mathcal{C})$ tous les sous-objets sont donnés par des sous-foncteurs Q. Un sous-objet classifiant de $\textbf{PSh}(\mathcal{C})$ qu'on notera Ω doit en particulier classifier les foncteurs représentables $Hom_{\mathcal{C}}(-, C)$: $\mathcal{C}^{op} \to \textbf{Set}$. De ce fait on a

$$Sub_{\textbf{PSh}(\mathcal{C})}(Hom_{\mathcal{C}}(-, C)) \simeq Nat(Hom_{\mathcal{C}}(-, C), \Omega)$$

D'après le lemme de Yoneda le coté droit est isomorphe à $\Omega(C)$. Ainsi le sous-objet classifiant Ω s'il existe doit être un foncteur tel que pour tout $C \in \mathcal{C}^{op}$ on a :

$$\begin{aligned} \Omega(C) &= Sub_{\textbf{PSh}(\mathcal{C})}(Hom_{\mathcal{C}}(-, C)) \\ \Omega(C) &= \{S \mid S \text{ un sous foncteur de } Hom_{\mathcal{C}}(-, C))\} \end{aligned}$$

Définition 3.2.17. Soit U un ouvert de X un espace topologique, et S un crible sur U. S est dit **crible recouvrant U**, si U est l'union de tous les sous ensembles V ouvert de S.

Proposition 3.2.18. *Soit $P \in PSh(X)$ est un faisceau si et seulement si pour tout sous ensemble U ouvert de X et pour tout crible S recouvrant U, l'inclusion S dans $Hom(-, U)$ de foncteur induit :*

$$Nat(Hom(-, U), P) \simeq Nat(S, P)$$

.

Démonstration. Pour tout $P \in PSh(X)$ et pour tout recouvrement U par des U_i, on peut construire l'égaliseur E donné par le diagramme :

$$E \to \prod_i P(U_i) \overset{p,q}{\rightrightarrows} \prod_{i,j} P(U_i \cap U_j)$$

Où E correspond à la famille de $x_i \in P(U_i)$ tel que pour tout couple d'indice i et j on a $x_{i|_{U_i \cap U_j}} = x_{j|_{U_i \cap U_j}}$.

On va maintenant remplacer le recouvrement de U_i par le recouvrement du crible S (ie. Tout les sous ensembles ouverts $V \subset U_i$ pour un certain i) et on pose $x_V = x_{i_{|V}}$. Cette définition et cohérente car les x_i coïncident sur les U_i et donc ne dépendent pas du choix de l'indices.

On peut donc décrire E comme l'ensemble des $x_V \in P(V)$ avec $x_{V|V'} = x'_V$ pour $V' \subset V$.

Or comme nous l'avons vu auparavant le crible peut être vu comme un foncteur $S : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ défini comme :

$$S(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in S \\ 1, \text{ si } x \notin S \end{cases} \tag{3.2.12}$$

De ce fait E peut être décrit comme l'ensemble $\{\theta \in Nat(S, P) \mid \theta_V(1) = x_V\}$. De plus la flèche d'inclusion entre les deux foncteurs donnés par $i_S : S \to Hom(-, U)$ nous donne un nouveau diagramme :

$$\begin{tikzcd} Nat(S\,P) \arrow[r, "d"] & \prod_i P(U_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{i,j} P(U_i \cap U_j) \\ Nat(Hom(-\,U)\,P) \arrow[u, "Hom(i_S\,U)"] \arrow[r, "yoneda"] & P(U) \arrow[u, "e"'] & \end{tikzcd} \tag{3.2.13}$$

Les flèches e, p et q sont celles décrites dans la définition du faisceau 3.1.5. Et la flèche d est définie par $d(\theta) = (\theta_{V_i})_{i \in I}$

Or e est un égaliseur si et seulement si P est un faisceau. Mais on a aussi que e est un égaliseur si et seulement si pour tout recouvrement, $Hom(i_S, U)$ est un isomorphisme.

□

Proposition 3.2.19. *Quelle que soit $X \in$ **Top** la catégorie $Sh(X)$ a toute les petites limites.*

Démonstration. Soit deux faisceaux $F \rightrightarrows G$ et E son égaliseur. Or on sait que le Hom Foncteur $Hom(P, -)$ préserve les limites (en particulier les égaliseurs). De ce fait pour tout crible recouvrant S sur U on a les égaliseurs suivants dans **Set** :

$$\begin{tikzcd} Hom(Hom(-\,U)\,E) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(Hom(-\,U)\,F) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & Hom(Hom(-\,U)\,G) \arrow[d] \\ Hom(S\,E) \arrow[r] & Hom(S\,F) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Hom(S\,G) \end{tikzcd} \tag{3.2.14}$$

Où les flèches verticales sont celles induit par l'inclusion $i_S : S \to Hom(-, U)$.

Or d'après la proposition 3.2.18, comme F et G sont des faisceaux, on a les deux flèches verticales à droite de 3.2.14 sont des isomorphismes.

Maintenant en procédant par "diagram chasing" comme dans la démonstration du lemme des cinq .2, on a que la flèche verticale de gauche est un isomorphisme.

De ce fait E est un faisceau, car $E \to F$ est un égaliseur dans $PSh(X)$ et donc immédiatement dans $Sh(X)$. $\square$

Lemme 3.2.20. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et $H, F \in \mathcal{C}$. m est un mono si et seulement si le carré*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{id} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} \\ H & \xrightarrow{m} & F \end{array} \tag{3.2.15}$$

est un produit fibré.

Démonstration. $\Rightarrow$ On suppose que m est un mono, on va montrer que

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{id} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} \\ H & \xrightarrow{m} & F \end{array} \tag{3.2.16}$$

est un produit fibré. Soit un autre diagramme carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle b} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} \\ H & \xrightarrow{m} & F \end{array} \tag{3.2.17}$$

Donc par définition on a $m \circ b = m \circ a$, d'où par hypothèse $a = b$.
De ce fait le carré commutatif 3.2.16 vérifie bien une propriété universelle, donnée par la flèche a.

$\Leftarrow$ On suppose que

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{id} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} \\ H & \xrightarrow{m} & F \end{array} \tag{3.2.18}$$

est un produit fibré. D'où pour tout autre diagramme carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a} & H \\ \Big\downarrow{\scriptstyle b} & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} \\ H & \xrightarrow{m} & F \end{array} \tag{3.2.19}$$

il existe un unique $G \xrightarrow{t} H$ tel que :

$$id \circ t = a$$
$$id \circ t = b$$

donc on a bien $a = b$ et m est un mono. $\square$

Corollaire 3.2.21. *Un sous-objet d'un faisceau F dans la catégorie $Sh(X)$ est isomorphe à un sous-faisceau de F.*

Démonstration. Soit un sous-objet représenté par un mono $H \overset{m}{\to} F$ dans $Sh(X)$.

On verra dans le corollaire 3.3.13 qu'un produit fibré dans $Sh(X)$ est toujours un produit fibré dans $PSh(X)$. Or dans $PSh(X)$ les produits fibrés sont définis objet par objet, et donc les mono aussi.

De ce fait $H(U)$ est isomorphe à $S(U)$ un sous ensemble de $F(U)$. Donc on en déduit que H est isomorphe à S un sous-foncteur de F.

□

Remarque 3.2.22. La réciproque est évidemment juste par définition d'un sous-foncteur 2.1.29 comme mono défini objet par objet.

On remarquera aussi qu'on peut élargir le corollaire à la catégorie $Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est une catégorie avec tous les produit fibrés.

Proposition 3.2.23. *Pour tout $X \in$ **Top**, on a l'isomorphisme d'ensemble suivant :*

$$\mathcal{O}(X) \simeq Sub_{Sh(X)}(Hom(-, X)$$

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} \delta : &\mathcal{O}(X) \to \{ \text{ Sous-Faisceau de } Hom(-, X)\} \\ &W \mapsto S_W \end{aligned}$$

Où $S_W : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ est définie pour tout $U \in \mathcal{O}(X)^{op}$ par :

$$S_W(U) = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } U \in S \\ 1, \text{ si } U \notin S \end{cases} \tag{3.2.20}$$

C'est clairement un faisceau et un sous faisceau de $Hom(-, X)$.

On remarque tout de suite que d'après le corollaire 3.2.21, on a que tout sous-faisceau de $Hom(-, X)$ est isomorphe à un sous-objet de $Hom(-, X)$. On a donc la première partie de l'isomorphisme.

Maintenant on va montrer que δ a une application réciproque.

Soit S un sous-faisceau de $Hom(-, X)$. Dans ce cas on a

- $S(U) = 1$ pour un certain U et $V \subsetneqq U$, implique $S(V) = 1$.
- Si U_i est un recouvrement d'ouvert de U et $S(U_i) = 1$, alors $S(U) = 1$

De ce fait, si on pose $W = \cup\{U \in \mathcal{O}(X) \mid S(U) = 1\}$, alors pour tout U, on a $S(U) = 1$ si et seulement si $U \subsetneqq W$. On a clairement $S = S_W$.

D'où l'application

$$\begin{aligned} \alpha : &\{ \text{ Sous-Faisceau de } Hom(-, X)\} \to \mathcal{O}(X) \\ &S \mapsto W \end{aligned}$$

définie bien la réciproque de δ par l'argument ci-dessus. □

Remarque 3.2.24. De ce fait, on déduit une caractérisation de la topologie de X (ie. de ses ouverts) par la catégorie des faisceaux d'ensemble.

3.3 Fibré et Section

La notion de fibré a été étudiée pour la première fois par Hassler Whitney dans les années 1935-1940.

Définition 3.3.1. Soit $X \in \mathbf{Top}$, on appelle **fibré** sur X un objet de **Top**/X.

Remarque 3.3.2. Je rappelle que **Top**/X correspond à la catégorie de **Top** au dessus de X un espace topologique(cf. 2.1.12), c'est à dire au flèche de la forme $\bullet \xrightarrow{f} X$

Définition 3.3.3. On appelle **section** d'un fibré $Y \xrightarrow{p} X$ une application continue $X \xrightarrow{s} Y$ telle que $p \circ s = 1$. Qui correspond à une flèche de l'identité $X \to X$ vers $Y \to X$ dans **Top**/X.

Définition 3.3.4. Soit un fibré $Y \xrightarrow{p} X$, pour chaque $x \in X$ l'image inverse $p^{-1}(x)$ est appelé **fibre** de Y sur x.

Remarque 3.3.5.

- Intuitivement un fibré $Y \xrightarrow{p} X$ peut être pensé comme l'union de ses fibres "collés ensemble" par la topologie de Y.
- Soit $p : Y \to X$ un fibré et U un sous ensemble ouvert de X, alors le fibré sur U défini par une restriction de p : $p_U : p^{-1}(U) \to U$ défini un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "p_U"] & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r] \arrow[ur, "s"] & X \end{tikzcd} \tag{3.3.1}$$

  Où les flèches horizontales sont les flèches inclusion. Et où s est la section d'un fibré p_U aussi appelé **la section du fibré p sur U**, c'est une application continue telle que la composition $p \circ s$ soit la flèche inclusion $i : U \to X$.

Proposition 3.3.6. *Le foncteur $\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ défini par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] & \Gamma_p(U)\, \{s \mid s : U \to X \ et\, p \circ s = i : U \subset X\} \arrow[d] \\ V \arrow[u] \arrow[r] & \Gamma_p(V) \end{tikzcd} \tag{3.3.2}$$

*est un faisceau appelé **faisceau de section**.*

Définition 3.3.7. Soit $P \in PSh(X)$, $x \in X$, deux voisinages de ce point U et V, et $s \in P(U)$, $t \in P(V)$. On définit la relation suivante :

$$(U, s) \backsim (V, t) \Leftrightarrow \text{ s'il existe } W \subset U \cap V \text{ un voisinage de W tel que } s_{|W} = t_{|W}$$

. La classe d'équivalence de s par x est appelé **germe de s par x** et est notée $\mathbf{germ_x(s)}$.
On note $P_x = \{germ_x(s) \mid s \in P(U)$ et $x \in U$ un ouvert de X$\}$

Proposition 3.3.8. *Soit $P \in PSh(X)$, alors on a :*

$$P_x = \underset{\rightarrow}{lim} P(U)$$

où P_x est définie ci dessus.

Démonstration. On note $P^{(x)}$ la restriction de P aux voisinages ouverts de x. Le couple $(P_x, germ_x)$ forme un co-cône de $P^{(x)}$, en effet pour toute flèche $U \xrightarrow{f} W$ on a $germ_x(s) = germ_x(s_{|W})$ pour $x \in W$ et $s \in P(U)$.

Soit (τ_u, L) un co-cône de $P^{(x)}$ quelconque. La définition de germe dit qu'il existe un unique $P_x \xrightarrow{t} L$ tel que $t \circ germ_x = \tau$. C'est à dire implique que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[rr] \arrow[dr, "germ_x"] \arrow[ddr, bend right, "\tau_U"'] & & P(W) \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left] \\
& P_x \arrow[d, "t"] & \\
& L &
\end{tikzcd} \tag{3.3.3}$$

□

Remarque 3.3.9. On note

$$\Lambda_P = \coprod_x P_x = \{ \text{ tout les } germ_x(s) \mid x \in X, s \in P(U)\}$$

On définit une fonction :

$$\begin{aligned} p :& \Lambda_P \to X \\ & germ_x(s) \mapsto x \end{aligned}$$

La fonction $s \in P(U)$ induit une fonction :

$$\begin{aligned} \dot{s} :& U \to \Lambda_P \\ & x \mapsto germ_x(s) \end{aligned}$$

On remarque tout de suite que $\dot{s}$ est une section de p.

On peut donner une topologie à Λ_P en prenant comme ouvert les $\dot{s}(U)$. Sur cette topologie $\dot{s}$ et p sont continues.

Maintenant définissons pour tout $U \subset X$ la fonction :

$$\begin{aligned} \eta_U :& P(U) \to \Gamma(\Lambda_P(U)) \\ & s \mapsto \dot{s} \end{aligned}$$

(on rappelle que $\Gamma(\Lambda_P(U))$ correspond au faisceau des sections du fibré $\Lambda_P \to X$). On observe tout de suite que $\eta : P \to \Gamma \circ \Lambda_P$ est une transformation naturelle.

Théorème 3.3.10. *Si le préfaisceau P est un faisceau, alors η défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. On va commencer par démontrer l'injectivité de η, c'est à dire pour $s, t \in F(U)$ on a

$$\dot{s} = \dot{t} \Rightarrow s = t$$

$\dot{s} = \dot{t}$ est équivalent à dire que $germ_x(s) = germ_x(t)$, pour tout $x \in U$.

Donc par définition il existe V_x un ouvert inclus dans U tel que $s_{|V_x} = t_{|V_x}$.

Ces ouverts V_x forment un recouvrement de U, tel que s et t aient la même image sur $P(U) \to \prod_x P(V_x)$. Or par définition d'un faisceau on a $s = t$.

Maintenant la surjectivité, c'est à dire :

$$\forall h \in \Gamma(\Lambda_P(U))\ \exists s \in P(U) \text{ tel que } \dot{s} = h$$

Donc soit $h \in \Gamma(\Lambda_P(U))$. Alors pour tout $x \in U$, il existe un ouvert U_x et $s_x \in P(U_x)$ tel que $h(x) = germ_x(s_x)$. Par définition de la topologie de Λ_P il existe un ouvert V_x de U, avec $h(V_x) \subset \dot{s_x}(U_x)$ et avec $h = \dot{s_x}$ sur V_x.

De plus on a un recouvrement de U donné par les V_x et $s_{x|V_x} \in P(V_x)$.

On sait aussi que sur chaque $V_x \cap V_y$ on a que $\dot{s_x}, \dot{s_y}$ et h coïncident. Donc pour $z \in V_x \cap V_y$ on a $germ_z(s_x) = germ_z(s_y)$, c'est à dire par l'injectivité ci-dessu $s_{x|V_x \cap V_y} = s_{y|V_x \cap V_y}$.

La famille s_x a la même image sur $\prod P(V_x) \rightrightarrows \prod P(V_x \cap V_y)$ et par le fait que P soit un faisceau on sait qu'il existe $s \in P(U)$ tel que $s_{|V_x)} = s_x$.

D'où pour tout x on a $h(x) = germ_x(s_x) = germ_x(s)$ donc $h = \dot{s}$. Et s est bien surjective et donc un isomorphisme. □

Remarque 3.3.11. En d'autre mot tout faisceau est un faisceau de section.

Théorème 3.3.12. *Pour tout préfaisceau P la flèche $\eta : P \to \Gamma(\Lambda_P)$ (définie ci dessus) de préfaisceau est universelle de P aux faisceaux.*

Démonstration. C'est à dire, si $F \in Sh(X)$ et $P \xrightarrow{\theta} F$ une flèche de préfaisceau, alors il existe une unique flèche $\Gamma(\Lambda_P) \xrightarrow{\sigma} F$ de faisceau tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\theta"'] & \Gamma(\Lambda_P) \arrow[d, "\sigma"] \\ & F \end{tikzcd} \tag{3.3.4}$$

commute. D'après le théorème 3.3.10 on sait que η est un isomorphisme.

D'où on peut définir une flèche $\Gamma(\Lambda_P) \xrightarrow{\sigma} F$ de faisceau comme $\sigma = \eta^{-1})(\Gamma(\Lambda_\theta)$ tel que le triangle inférieur du diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\theta"] & \Gamma(\Lambda_P) \arrow[d, "\Gamma(\Lambda_\theta)"] \arrow[dl, "\sigma"] \\ F \arrow[r, "\eta"] & \Gamma(\Lambda_F) \end{tikzcd} \tag{3.3.5}$$

commute. Or par la naturalité de η la carré entier commute et donc $\sigma \circ \eta = \theta$. On a donc la première partie de l'universalité, il reste à démontrer que σ est unique.

On suppose qu'il existe une flèche parallèle à σ qu'on appelleτ, tel que $\tau \circ \eta = \sigma \circ \eta = \theta$. On cherche à montrer que $\sigma = \tau$.

Soit un U un ouvert de X et $h\Gamma(\Lambda_P(U))$ c'est à dire une section. Si $x \in U$, alors il existe V_x un voisinage de x et $s_x \in P(V_x)$ tel que $h(x) = germ_x(s_x)$. Et comme dans la démonstration de 3.3.10 on peut prendre V_x assez petit tel que $h_{|V_x} = \dot{s_x} = \eta_{V_x}(s_x)$.

Ainsi $\sigma(h_{|V_x}) = \sigma(\eta(s_x)) = \tau(h_{|V_x})$ par hypothèse.

Or les V_x forment un recouvrement de U, et comme F est un faisceau on a $\sigma(h) = \tau(h)$. Mais comme h est une section arbitraire on a $\sigma = \tau$

□

Corollaire 3.3.13. *Pour tout* $X \in \mathbf{Top}$*. Le foncteur inclusion* $Sh(X) \to PSh(X)$ *a un adjoint à gauche.*

Démonstration. Le théorème 3.3.12 nous dit exactement que le foncteur $\Gamma \circ \Lambda$ est un adjoint à gauche. Avec la flèche universelle η comme unité de cette adjonction.

Le foncteur adjoint

$$\Gamma\Lambda : PSh(X) \to Sh(X)$$

est appelé le foncteur associé au faisceau, ou "sheafification functor" (sheaf=faisceau en anglais). □

Exemple 3.3.14.

- Soit $F \in Sh(X)$, où X est un espace topologique discret (ie. tout sous ensemble de X est un ouvert). De ce fait pour tout $x \in X$ $\{x\}$ est ouvert. Et on peut déterminer la fonction suivante

  $$\begin{aligned} f : & X \to \mathbf{Set} \\ & x \mapsto F(\{x\}) \end{aligned}$$

  Or pour tout ouvert U de X on a le recouvrement trivial d'ouvert donné par $U = \cup_{x \in U} x$, d'où :

  $$F(U) \to \prod_{x \in U} F(\{x\}) \rightrightarrows 1$$

  est un égaliseur et de ce fait $F(U) = \coprod_{x \in X} f(x)$.

  L'application

  $$\begin{aligned} p : & \coprod_{x \in X} f(x) \xrightarrow{p} X \\ & f(x) \mapsto x \end{aligned}$$

  est un fibré sur X appelé le **fibré discret**, et sa fibre correspond aux $f(x)$.

  On remarque que toute fonction $f : X \to \mathbf{Set}$ détermine un fibré discret sur X.

- Soit $X \in \mathbf{Top}$ et L un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'une topologie. Soit $X \times L$ muni de la topologie produit usuelle. Alors la projection:

  $$\begin{aligned} p : & X \times L \to X \\ & (x, l) \mapsto x \end{aligned}$$

  est un fibré sur X appelé le **fibré vectoriel produit**

- On appelle **fibré vectorielle** Y sur X un fibré $Y \xrightarrow{p} X$ qui est "localement" un fibré vectoriel produit, c'est à dire qu'il vérifie :

  1. Pour tout $x \in X$, la fibre p^{-1} est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
  2. Tout $x \in X$ a un voisinage ouvert V tel qu'il existe L un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, et $p^{-1}(V) \xrightarrow{\phi} V \times L$ un isomorphisme.

3.4 Topologie de Grothendieck

Nous avons défini dans les sections précédentes, un préfaisceau sur toute catégorie sans restriction. Néanmoins la notion de faisceau d'ensemble que nous avons vue, est liée à celle de recouvrement sur un espace topologique.

De ce fait, il est venu un désir d'étudier les faisceaux sur des catégories plus générales et donc d'élargir la conception de topologie et de recouvrement de façon plus catégorique. Il s'en suit la définition de Topologie de Grothendieck donnée dans le tome 1 de SGA 4, que nous allons étudier dans cette section.

Définition 3.4.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

On appelle **crible maximal** sur un objet $c \in \mathcal{C}$, l'ensemble de flèches de $\mathcal{C}$ noté $t_c = \{f \mid cod(f) = c\}$.

Remarque 3.4.2. Le crible maximal mérite bien sa dénomination, car il s'agit d'un crible. En effet si on prends pour $d \in \mathcal{C}$ une flèche $d \xrightarrow{f} c \in t_c$, alors pour toute flèche $e \xrightarrow{g} d$ on a bien que la composition $f \circ g \in t_c$.

Définition 3.4.3. On appelle **topologie de Grothendieck** sur une catégorie $\mathcal{C}$ une application J qui assigne à chaque objets $c \in \mathcal{C}$ un ensemble $J(c)$ de crible de $\mathcal{C}$ (cf. définition 3.2.12) tel que :

1. **le crible maximal** t_c appartient à $J(c)$.

2. Si $S \in J(c)$, alors pour toutes flèches $d \xrightarrow{h} c$, on a $h^*(S) = \{g \mid cod(g) = d, h \circ g \in S\}$ appartient à $J(d)$. (**Axiome de Stabilité**)

3. Si $S \in J(c)$ et R est un crible sur c, tel que pour toutes flèches $d \xrightarrow{h} c$ de S, on a $h^*(R) \in J(d)$, alors R appartient à $J(c)$. (**Axiome de Transitivité**)

Proposition 3.4.4. *Soit $S \in J(c)$, alors tout crible R sur c tel que $S \subset R$ appartient aussi à $J(c)$.*

Démonstration. Soit une flèche $d \xrightarrow{h} c$ avec $h \in S$, alors $h^*(S)$ est le crible maximal sur d. Or comme $h^*(S) \subset h^*(R)$, on a que $h^*(R)$ est aussi un crible maximal sur d, et donc par l'axiome 1 on a que $h^*(R) \in J(d)$. On a cette appartenance pour toutes flèches de $h \in S$, donc par l'axiome de transitivité (3), on a $R \in J(c)$. □

Remarque 3.4.5. De ce faite l'axiome de transitivité (3), a pour conséquence :

Si $S \in J(c)$ et si pour toutes flèches $d_f \xrightarrow{f} c$ dans le S, il existe un crible $R_f \in J(d_f)$, alors l'ensemble $\{f \circ g \mid f \in S, g \in R_f\}$ appartient à $J(c)$.

Définition 3.4.6. On appelle **Site** le couple $(\mathcal{C}, J)$ où $\mathcal{C}$ une petite catégorie, et J une topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$.

Notation 3.4.7. Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site et $c \in \mathcal{C}$, si $S \in J(c)$, S est dit **crible recouvrant** c, ou S est un **recouvrement** de c, ou encore si c'est nécessaire S est un $\mathbf{J}-$**recouvrement** de c.

Définition 3.4.8. Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site et $c \in \mathcal{C}$, et soit S un recouvrement de c. On dit que S **recouvre une flèche** $d \xrightarrow{f} c$, si $f^*(S)$ recouvre d.

Remarque 3.4.9.
- On a donc une définition équivalente à S recouvre c si et seulement si S recouvre id_c.
- On a la formulation équivalente suivante des axiomes de topologie de Grothendieck :
  1. Si S est un crible sur c et si $f \in S$, alors S recouvre f.

2. Si S recouvre une flèche $d \xrightarrow{f} c$, alors pour tout $e \xrightarrow{G} d$, S recouvre la composition $f \circ g$.
3. Si S recouvre une flèche $d \xrightarrow{f} c$, et si R est un crible sur c qui recouvre toutes les flèches de S, alors R recouvre f.

- Il en suit que si $R, S \in J(c)$, alors $R \cap S \in J(c)$ ou de façon équivalente si R, S recouvre $g : d \to c$, alors $R \cap S$ recouvre g.

Exemple 3.4.10. • Soit $\mathcal{C}$ est une catégorie quelconque, la **topologie triviale** sur $\mathcal{C}$, est celle dans laquelle il n'y a qu'un seul crible recouvrant $c \in \mathcal{C}$ donné par le crible maximal t_c. C'est à dire le couple $(\mathcal{C}, J)$ où $c \overset{J}{\mapsto} J(c) = \{t_c\}$.

On va montrer qu'il s'agit bien d'un site, donc que J vérifie bien chaque axiome :

1. Le crible maximal t_c appartient par définition à $J(c)$.
2. Soit $S \in J(c)$, on a $S = t_c$, donc pour toutes flèches $d \xrightarrow{h} c$, on a

$$\begin{aligned} h^*(t_c) &= \{g \mid cod(g) = d, h \circ g \in t_c\} \\ &= \{g \mid cod(g) = d\} \\ h^*(t_c) &= t_d \end{aligned}$$

Donc appartient à $J(d)$.

3. De façon évidente si on prend $S \in J(c)$, donc $S = t_c$. Soit R un crible sur c tel que pour toutes flèches $d \xrightarrow{h} c$ de S on a $h^*(R) \in J(d)$, c'est à dire $h^*(R) = t_d$. De ce fait par le raisonnement inverse de ci-dessus on a $R = t_c$ et donc $R \in J(c)$.

- Un autre exemple de site est donné par le couple $(\mathcal{O}(X), J)$ (on rappelle que la catégorie $\mathcal{O}(X)$ est défini 2.1.7) qui correspond à la topologie classique définie en théorie des ensembles. Où on a pour $U \in \mathcal{O}(X)$ une application :

$U \overset{J}{\mapsto} J(U) = \{S \text{ un crible sur } U\}$ et $S \in J(U)$ si et seulement si $U \subseteq \underset{i}{\cup} U_i$ où $U_i \in S$.

De plus on sait qu'un crible sur $U \in \mathcal{O}(X)$ est simplement une famille S de sous ensemble ouvert de U tel que pour $V \in S$, si $W \subset V$, alors $W \in S$.

On va montrer qu'il s'agit bien d'un site, donc que J vérifie bien chaque axiome :

1. On cherche à montrer que $t_u \in J(U)$. C'est le cas si et seulement si $U \subseteq \underset{i}{\cup} U_i$ où $U_i \in t_U$, or $id_U \in t_U$, c'est à dire $U \in t_u$. Donc on a bien $U \subseteq \cup U$ et donc $t_U \in J(U)$.
2. Soit $V \xrightarrow{h} U$ est flèche. On va montrer que, si S $\in J(U)$ est un crible recouvrant de U, alors $h^*(S)$ est un crible recouvrant de V.

   Notons que si $U_i \in S$, alors $U_i \cap V \in h^*(S)$, par définition de $h^*(S)$.

   D'où on voit que $h^*(S)$ contient les ouverts de la forme $\{U_i \cap V | U_i \in S\}$. Or, comme $U \subset \bigcup_{U_i \in S} U_i$, on a aussi

$$V = V \cap U \subset V \cap \bigcup_{U_i \in S} U_i = \bigcup_{U_i \in S} V \cap U_i$$

3. Soit S un crible recouvrant sur U et soit R un crible quelconque. Supposons que pour toute flèche $V \xrightarrow{h} U$ dans S, $h^*(R)$ soit un crible recouvrant sur V.

   Il faut montrer que $U \subset \bigcup_{U_i \in R}$. Soit $x \in U$ un point. Comme S est un crible recouvrant, on peut choisir $V \xrightarrow{h} U$ dans S tel que $x \in V$. Comme $h^*(R)$ est un crible recouvrant sur V, on a $x \in \bigcup_{W \in h^*(R)} W$, donc il existe $W \in h^*(R)$ tel que $x \in W$. Mais par définition de $h^*(R)$, on voit que la flèche $W \to V \to U$ appartient à R. Donc, $x \in \bigcup_{U_i \in R} U_i$.

Définition 3.4.11. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie de tout les produits fibrés.

Une **base** pour une topologie de Grothendieck sur $\mathcal{C}$ est une fonction K est une fonction qui assigne à tout $c \in \mathcal{C}$ un ensemble $K(c)$ consistant en une famille de flèches de $\mathcal{C}$ de codomaine c tel que :

1. Si $c' \xrightarrow{f} c$ est un isomorphisme, alors $\left\{c' \xrightarrow{f} c\right\} \in K(c)$.
2. Si $\left\{c_i \xrightarrow{f_i} c \mid i \in I\right\} \in K(c)$, alors pour toute flèche $d \xrightarrow{g} c$de $\mathcal{C}$, la famille de produits fibrés $\left\{c_i \times_c d \xrightarrow{\pi_i} d \mid i \in I\right\} \in K(d)$. (Axiome de stabilité)
3. Si $\left\{c_i \xrightarrow{f_i} c \mid i \in I\right\} \in K(c)$, et pour tout $i \in I$ il existe une famille Si $\left\{d_{i_j} \xrightarrow{g_{i_j}} c_i \mid j \in I_i\right\} \in K(c_i)$, alors la famille de composition $\left\{d_{i_j} \xrightarrow{f_i \circ g_{i_j}} c \mid i \in I, j \in I_i\right\} \in K(c)$. (Axiome de Transitivité)

Notation 3.4.12. Le couple $(\mathcal{C}, K)$ est aussi appelé site, et un élément $R \in K(c)$ est aussi appelé recouvrement.

3.5 Faisceaux sur un Site

Pour toute la section on pose $(\mathcal{C}, J)$ un site.

Définition 3.5.1. $P \in PSh(\mathcal{C})$ est un faisceau si et seulement si pour tout $c \in \mathcal{C}$, et pour tout crible recouvrant c l'inclusion $S \to Hom(-, c)$ induit

$$Nat(S, P) \simeq Nat(Hom(-, c), P)$$

On peut exprimer cette définition sous forme de diagramme:

Proposition 3.5.2. *$P \in PSh(\mathcal{C})$ est un faisceau si et seulement si pour tout $c \in \mathcal{C}$, et pour tout crible recouvrant c le diagramme :*

$$P(c) \xrightarrow{e} \prod_{f \in S} P(dom(f)) \overset{p,a}{\rightrightarrows} \prod_{f,g \ f \in S \ et \ dom(f)=cod(g)} P(dom(g))$$

*est un égaliseur dans **Set**.*

Où $e(x) = \{P(f)(x)\}$ et $p(\{y_f\}_{f \in S})_{f,g} = x_{f \circ g}$, $a(\{y_f\}_{f \in S})_{f,g} = P(g)(x_f)$

Démonstration. Cette proposition est similaire à celle sur les faisceaux d'ensemble (cf. démonstration 3.2.3). $\square$

Définition 3.5.3. Soit $P \in PSh(\mathcal{C})$ et S un crible recouvrant $c \in \mathcal{C}$.

On appelle une **famille de recollement** pour S une application :

$$\begin{aligned} \delta :& S \to P(d) \\ & d \xrightarrow{f} c \mapsto x_f \end{aligned}$$

tel que pour toutes flèches $e \xrightarrow{g} d$ de $\mathcal{C}$ on a

$$P(g)(x_f) = x_{f \circ g}$$

Remarque 3.5.4. $x_{f \circ g}$ est bien défini, car $f \circ g \in S$, en effet S est un crible.

Définition 3.5.5. Soit $P \in PSh(\mathcal{C})$ et S un crible recouvrant $c \in \mathcal{C}$.
Une **amalgamation** d'une famille de recollement pour S est un $x \in P(c)$ tel que pour tout $f \in S$ on a

$$P(f)(x) = x_f$$

On peut donner une autre définition équivalente de faisceau en terme d'amalgamation, néanmoins nous donnerons que l'énoncé, sans démontrer l'équivalence.

Proposition 3.5.6. *$P \in PSh(\mathcal{C})$ est un faisceau si et seulement si pour tout recouvrement $\left\{c_i \xrightarrow{f_i} c \mid i \in I\right\}$ dans une base K toute famille de recollement $\{x_i\}_i$ a une unique amalgamation.*

3.5.1 Faisceau associé à un Préfaisceau

Définition 3.5.7. Soit $P \in PSh(\mathcal{C})$.
On dit que P est **séparé** si toute famille de recollement a au plus une amalgamation.

Remarque 3.5.8. on peut traduire la définition de séparé pour $c \in \mathcal{C}$:
P est séparé si pour tout $x, y \in P(c)$, pour tout recouvrement S de c, et pour tout $f \in S$. On a :

$$P(f)(x) = P(g)(x)$$

. De ce fait les préfaisceaux séparés satisfont la condition d'unicité mais pas d'existence par rapport aux faisceaux.

De plus on peut remarquer que si $P \in PSh(\mathcal{C})$ est un faisceau on a que pour tout recouvrement R d'un objet $c \in \mathcal{C}$, une famille de recollement $(x_f)_{f \in R}$ du préfaisceau P représente un unique élément de $P(c)$. On a aussi que pour tout recouvrement S du même c tel que $S \subseteq R$ la sous-famille de recollement $(x_f)_{f \in S}$ de S représente le même élément.

Notation 3.5.9. Soit $P \in PSh(\mathcal{C})$ on note

$$P^+ = \varinjlim_{R \in J(c)} Match(R, P)$$

Où $\mathbf{Match}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ l'ensemble des familles de recollement pour le recouvrement R d'un $c \in \mathcal{C}$.

Remarque 3.5.10. De ce fait on peut remarquer qu'un objet $P^+(c)$ correspond à une classe d'équivalence de famille de recollement :

En effet pour

$$\left\{x_f \mid d \xrightarrow{f} c \in R\right\}$$

Où $x_f \in P(d)$ et pour tout $e \xrightarrow{k} d$ on a $P(k)(x_f) = x_{f\circ k}$. Donc

$$\{x_f\}_{f\in R} \sim \{y_g\}_{g\in S} \Leftrightarrow \text{il existe } T \subseteq R\cap S \text{ avec } T \in J(c) \text{ tel que pour tout } f \in T \text{ on a } x_f = y_f \tag{3.5.1}$$

On remarque P^+ a la structure d'un préfaisceau.

De plus, chaque flèches de préfaisceaux $P \xrightarrow{\phi} Q$, induit une flèche $P^+ \xrightarrow{\phi^+} Q^+$. Donc on peut définir le foncteur suivant par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\phi"] & P^+ \arrow[d, "\phi^+"] \\ Q^+ \arrow[r, mapsto] & Q^+ \end{tikzcd} \tag{3.5.2}$$

Exemple 3.5.11. Soit $X \in \mathbf{Top}$, soit $B \in PSh(X)$ le préfaisceau défini dans l'exemple 5, et soit $C \in Sh(X)$ le faisceau de même défini dans l'exemple 5.

On va montrer que $B^+(U) \simeq C(U)$.

Pour toute famille de recollement $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ sur un recouvrement U_i de U on associe une unique fonction continue $f : U \to \mathbb{R}$ (De plus des familles de recollements équivalentes donne le même f).

Réciproquement à une fonction continue $f : U \to \mathbb{R}$ on associe une famille de recollement de fonction continu $f_n : U_n \to \mathbb{R}$, où $U_n = \{x \in U \mid |f(x)| < n\}$ et où $f_n = f_{|U_n}$.

On a donc bien l'isomorphisme voulu. Dans ce cas la construction en "+" du préfaisceau nous donne un faisceau, celui des fonctions continues.

Remarque 3.5.12. On a aussi la flèche canonique de préfaisceaux $P \xrightarrow{\eta} P^+$ définis pour tout $x \in P(c)$ comme la classe d'équivalence de la famille de recollement

$$\eta_c(x) = \{P(f)(x) \mid f \in t_c\}$$

où t_c est le crible maximal.

Lemme 3.5.13. *1. Un préfaisceau P est séparé si et seulement si $P \xrightarrow{\eta} P^+$ est un mono.*

2. Un préfaisceau P est un faisceau si et seulement si $P \xrightarrow{\eta} P^+$ est un iso.

Démonstration. 1. Soit $x, y \in P(c)$ pour un objet $c \in \mathcal{C}$. Alors on a $\eta(x) = \eta(y)$, c'est à dire $P(f)(x) = P(f)(y)$ pour tout $f \in S$. Or $x = y$ justement si et seulement si P est séparé.

2. L'équivalence est évidente.

□

Lemme 3.5.14. *Si $F \in Sh(\mathcal{C})$ et $P \in PSh(\mathcal{C})$, alors pour toutes flèches $P \xrightarrow{\phi} F$ de préfaisceau, il existe un unique flèche $P^+ \xrightarrow{\tilde{\phi}} F$ tel que le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\phi"'] & P^+ \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\ & F \end{tikzcd} \tag{3.5.3}$$

commute.

Démonstration. Un élément de $P^+(c)$ est représenté par une famille de recollement $\{x_f \mid f \in R\}$ de P pour un certain crible R et un certaine objet c. D'où par définition de η, pour toutes flèches de $c \xrightarrow{h} d$ dans R, on a $\eta_d(x_h) = \{P(k)(x_h) \mid k \in t_d\}$. Mais on a aussi

$$P(h)(\{x_f \mid f \in R\}) = \left\{x_{h'_f} \mid f' \in h^*(R)\right\}$$

Or $h^*(R) = t_d$, car $h \in R$, d'où on a l'égalité suivante :

$$\eta_d(x_h) = P(h)(\{x_f \mid f \in R\})$$

De ce fait, si $\tilde{\eta}$ existe comme décrit dans l'énoncé du lemme, on a que $\tilde{\phi}(\{x_f \mid f \in R\}$ doit être l'unique élément $y \in F(c)$ tel que :

$$\begin{aligned}
P(h)(y) &= P(h)(\tilde{\phi}(\{x_f \mid f \in R\}) \\
&= \tilde{\phi}(P(h)(\{x_f \mid f \in R\})) \\
&= \tilde{\phi}(\eta_d(x_h)) \\
&= \phi(x_h)
\end{aligned}$$

Mais un tel $y \in F(c)$ existe bien car F est un faisceau et $\{\phi(x_h) \mid h \in R\}$ est une famille de recollement. □

Lemme 3.5.15. *Pour tout préfaisceau P, P^+ est un préfaisceau séparé.*

Démonstration. Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P^+(c)$ tel que pour toute $d \xrightarrow{h} c \in Q$ un recouvrement de c on a $P(h)(\mathbf{x}) = P(h)(\mathbf{y})$.
On peut représenter $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ comme des familles de recollement $\mathbf{x} = \{x_f \mid f \in R\}$ et $\mathbf{y} = \{y_f \mid g \in S\}$ pour des recouvrements $R, S \in J(c)$.
$P(h)(\mathbf{x}) = P(h)(\mathbf{y})$ nous dit qu'il existe un certain recouvrement $T_h \subseteq h^*(R) \cap h^*(S)$ de d tel que pour tout $t \in T_h$ on ait $x_{h \circ t} = y_{h \circ t}$
Or par l'axiome de transitivité on a que l'ensemble suivant:

$$T = \{h \circ t \mid h \in Q, t \in T_h\}$$

est encore un recouvrement de c, et $T \subseteq R \cap S$, d'où $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Donc $P^+(c)$ est un préfaisceau séparé. □

Je vais admettre le lemme suivant. Une démonstration en est donnée dans section III.3 de [MLM92].

Lemme 3.5.16. *Si P est un préfaisceau séparé, alors P^+ est un faisceau.*

Remarque 3.5.17. On en déduis donc que pour tout préfaisceau P, P^+ est séparé par le lemme 3.5.15, et donc ${P^+}^+$ est un faisceau par le lemme 3.5.16.

On en déduis le théorème suivant :

Théorème 3.5.18. *Le foncteur inclusion $i : Sh(\mathcal{C}, J) \to PSh(\mathcal{C})$ a un adjoint à gauche :*

$$\mathbf{a} : PSh(\mathcal{C}) \to Sh(\mathcal{C}, J)$$

*appelé le **foncteur associé au faisceau**. De plus* $\mathbf{a}$ *commute avec les limites finis.*

Démonstration. On définis $\mathbf{a} : PSh(\mathcal{C}) \to Sh(\mathcal{C}, J)$, comme

$$\mathbf{a}(P) = (P^+)^+$$

C'est cohérent par la remarque 3.5.17.

On a donc la composition

$$P \xrightarrow{\eta_P} P^+ \xrightarrow{\eta_{P^+}} P^{++} \tag{3.5.4}$$

qui associe à un préfaisceau P un faisceau $\mathbf{a}(P)$. De plus cette composition est universelle. Donc $\mathbf{a}$ correspond bien à l'adjoint à gauche de i. □

Chapitre 4

Théorie du topos et théorème de Giraud

4.1 Topos de Grothendieck

On va définir une notion pour accompagner la notion d'isomorphismes de catégories, celle d'équivalence:

Définition 4.1.1. Une **équivalence** de catégories $\mathcal{C}$, et $\mathcal{D}$ est la donnée de deux foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ appelés **équivalence de catégories**, tel qu'on ait les isomorphismes naturels :

$$F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}$$
$$G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}$$

Définition 4.1.2. Une catégorie $\mathcal{E}$ est appelé **topos de Grothendieck** s'il existe un site $(\mathcal{C}, J)$ tel que $\mathcal{E}$ est équivalent $Sh(\mathcal{C}, J)$.

4.2 Théorème de Giraud

Jean Giraud (1936-2007) est un mathématicien de l'école de Grothendieck, de ce fait on trouve le théorème de Giraud dans SGA 4. Il est en partie connu pour ses travaux en cohomologie non abélienne.

Nous citerons Giraud en 1994 en ce qui concerne le théorème qui porte son nom : "J'ai donné une caractérisation intrinsèque des topos[1] assez surprenante à l'époque et dont les catégoriciens ont mis plusieurs années à mettre au point, sous l'impulsion de F. Lawere , une version abstraite."[2]

En résumé, le théorème de Giraud caractérise les topos de Grothendieck sans utiliser la notion de Site. Il affirme qu'une catégorie est un topos de Grothendieck si et seulement si, il vérifie un certain nombre de points.

C'est pourquoi dans cette section, nous définirons la notion. De plus démontrerons qu'elles sont en particulier vérifiées dans **Set**, ce qui nous aidera dans la démonstration du théorème de Giraud. Dont je ne démontrerai qu'une implication pour voir la démonstration entière je conseille de lire l'appendice de [MLM92] ou les préliminaires de [Joh77]

[1] ici il veut dire topos de Grothendieck
[2] [Sau13]

Pour cette section on pose la catégorie $\mathcal{E}$ co-complète et muni des limites **fini**.

Lemme 4.2.1. *Chaque coégaliseur est un épi.*

Démonstration. Soit un coégaliseur représenté par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "e"] & Z \end{tikzcd}$$

On va montrer que e est un épi.
Soit $\alpha, \beta \colon Z \to W$ tel que $\alpha \circ e = \beta \circ e$. Alors on a les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha \circ e \circ f = \alpha \circ e \circ g \\ \beta \circ e \circ f = \alpha \circ e \circ g \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Donc on a par l'universalité du coégaliseur on a le diagramme commutant suivant :

$$\begin{tikzcd} & & W \\ X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[ur, "\beta\circ e"] \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "\alpha\circ e"'] & Z \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

D'où on a $\beta \circ e = \gamma \circ e = \alpha \circ e$. Et donc $\alpha = \beta$. $\square$

Remarque 4.2.2. La réciproque est fausse en générale, néanmoins on peut remarquer qu'elle est juste dans **Set**, par le lemme suivant:

Lemme 4.2.3. *Chaque épi dans* ***Set*** *est un coégaliseur de son noyau pair.*

Démonstration. En effet, soit un épi $X \overset{f}{\to} Y$ de **Set**. Soit $p_0, p_1 \colon X \times_Y X \to X$ le noyau pair de f. On sait que le coégaliseur de p_0, p_1 existe on le note $X \overset{g}{\to} E$. Or on sait que $f \circ p_0 = f \circ p_1$. D'où par l'universalité du coégaliseur on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & E \arrow[d, "t"] \\ & & Y \end{tikzcd} \tag{4.2.2}$$

Maintenant soit le noyau pair de t donné par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times_Y E \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "q_1"] & E \arrow[d, "t"] \\ E \arrow[r, "t"] & Y \end{tikzcd} \tag{4.2.3}$$

Comme on a $t \circ g \circ p_0 = f \circ p_0 = f \circ p_1 = t \circ g \circ p_1$ on sait qu'il existe une unique flèche $X \times_Y X \overset{b}{rightarrow} E \times_Y E$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] \arrow[d, "b"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ E \times_Y E \arrow[r, shift left, "q_0"] \arrow[r, shift right, "q_1"'] & E \arrow[ur, "t"] \end{tikzcd} \tag{4.2.4}$$

Or b est de façon évidente un épi, et donc $q_0 = q_1$. On sait que t est un mono. Or comme $f = t \circ g$ et f est un épi par hypothèse, on a que t est un épi.

D'où t est un iso, et on a bien que f est un épi implique que f est un coégaliseur de noyau pair. □

Définition 4.2.4. Un coproduit $E = \coprod_\alpha E_\alpha$ dans $\mathcal{E}$ est dit **disjoint** si tout les inclusions du coproduit $E_\alpha \overset{i_\alpha}{\to} E$ sont des monos et si pour tout $\alpha \neq \beta$ on a que le produit fibré $E_\alpha \times_E E_\beta$ est un objet initial dans $\mathcal{E}$.

Lemme 4.2.5. *Les coproduits de **Set** sont disjoint.*

Démonstration. En d'autre termes, si $X \overset{\pi_0}{\to} X \coprod Y$ et $Y \overset{\pi_0}{\to} X \coprod Y$ sont les inclusions du coproduit, alors pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $\pi_0(x) \neq \pi_1(y)$.

Supposons par l'absurde que $\pi_0(x) = \pi_1(y)$. On va utiliser l'exemple 3.2.10, soit $X \overset{g}{\to} \Omega$ l'unique fonction pour laquelle il existe $X \overset{\lambda}{\to} \mathbf{1}$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \Omega \\ & \mathbf{1} \arrow[u, "true"'] \end{tikzcd} \tag{4.2.5}$$

commute. Et soit $Y \overset{h}{\to} \Omega$ l'unique fonction pour laquelle il existe $Y \overset{\lambda'}{\to} \mathbf{1}$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\lambda'"'] & \Omega \\ & \mathbf{1} \arrow[u, "false"'] \end{tikzcd} \tag{4.2.6}$$

commute.

Par l'universalité du coproduit on a qu'il existe une unique fonction $X \coprod Y \overset{g \coprod h}{\to} \Omega$ telle que $(g \coprod h)(\pi_0) = g$ et $(g \coprod h)(\pi_1) = 1$. Ainsi on a la contradiction suivante :

$$\begin{aligned} true \circ \lambda &= g(x) \\ &= (g \coprod h)(\pi_0)(x) \\ &= (g \coprod h)(\pi_1)(y) \\ &= h(y) \\ true \circ \lambda &= false \circ \lambda' \end{aligned}$$

D'où $\pi_0(x) \neq \pi_1(y)$ □

Définition 4.2.6. Un coproduit $E = \coprod_\alpha E_\alpha$ dans $\mathcal{E}$ est dit **stable sous les produits fibrés** si pour toutes flèches $E' \to E$ de $\mathcal{E}$ le produit fibré $E' \times_E E_\alpha$ de l'inclusion du coproduit $E_\alpha \overset{i_\alpha}{\to} E$ induit un isomorphisme $\coprod_\alpha E' \times_E E_\alpha \simeq E'$.

Définition 4.2.7. On appelle **relation d'équivalence** (ou congruence) sur un objet $E \in \mathcal{E}$, un sous-objet $R \overset{(\delta_0,\delta_1)}{\to} E \times E$ vérifiant les axiomes suivants :

1. Il existe une flèche $E \xrightarrow{\lambda} R$ de $\mathcal{E}$ rendant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\lambda"'] & E \times E \\ R \arrow[ur, "(\delta_0\, \delta_1)"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2.7}$$

   commutatif. Où Δ est la flèche diagonale. (**reflective**)

2. Il existe une flèche $R \xrightarrow{\tau} R$ tel que les deux diagrammes:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\delta_0"] & E \times E \\ R \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\delta_1"] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\tau"] & E \times E \\ R \arrow[ur, "\delta_1"] & \end{tikzcd} \tag{4.2.8}$$

   commutent. (**Symétrie**)

3. Si $R * R$ représente le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} R * R \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & R \arrow[d, "\delta_0"] \\ R \arrow[r, "\delta_1"] & E \end{tikzcd} \tag{4.2.9}$$

   alors il existe une flèche $R * R \xrightarrow{\mu} R$ rendant le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R * R \arrow[r, "(\delta_0\pi_1\, \delta_0\pi_2)"] \arrow[d, "\mu"] & E \times E \\ R \arrow[ur, "(\delta_0\, \delta_1)"'] & \end{tikzcd} \tag{4.2.10}$$

   commutatif. (**Transitivité**)

Remarque 4.2.8. Pour expliquer l'apparence un peu plus complexe de l'axiome (3), nous allons voir à quoi il correspond dans **Set**.

Dans **Set** on a l'égalité (cf. 2.3.16) $R * R = \{((x, y), (z, w)) \in R \times R \mid y = z\}$. On a donc bien la transitivité usuelle.

Définition 4.2.9. Le **quotient** E/R d'une relation d'équivalence R dans $\mathcal{E}$, est défini comme le coégaliseur suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & E \arrow[r, "g"] & E/R \end{tikzcd}$$

Remarque 4.2.10. la flèche g du coégaliseur ci-dessus quand elle existe est un épi.

Proposition 4.2.11. *Si $E \xrightarrow{u} D$ une flèche de $\mathcal{E}$, alors le noyau pair de u est une relation d'équivalence sur E.*

Démonstration. Soit $E \xrightarrow{u} D$ une flèche de $\mathcal{E}$, le noyau pair de u est une paire de flèches $\delta_0, \delta_1 : R \to E$ muni d'une propriété universelle et tel que $u \circ \delta_0 = u \circ \delta_1$. Ainsi un objet R est le produit fibré de u sur lui même. On en déduis que $R \xrightarrow{(\delta_0,\delta_1)} E \times E$ est un mono et une relation d'équivalence sur E. $\square$

Notation 4.2.12. Quand la réciproque est vraie on dit que les relations d'équivalence sont **effectives**.

Lemme 4.2.13. *Dans **Set** les relations d'équivalence sont effectives.*

Démonstration. Soit R une relation d'équivalence dans **Set**, et soit E/R le quotient de R définie par le coégaliseur suivant :

$$R \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} E \xrightarrow{g} E/R$$

Alors le noyau pair de g donné par l'ensemble suivant $\{(x,y) \in E \mid g(x) = g(y)\}$ correspond bien à la relation d'équivalence E. □

Définition 4.2.14. Un diagramme en fourchette est dit :

$$R \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} E \xrightarrow{g} Q \tag{4.2.11}$$

1. **exacte** si Q est le coégaliseur de δ_0 et δ_1.
2. **exacte de façon stable** si le diagramme

$$R \times_Q Q' \rightrightarrows E \times_Q Q' \xrightarrow{g \times id} (Q \times_Q Q') = Q' \tag{4.2.12}$$

obtenu par produit fibré sur le diagramme ci-dessus est encore exacte.

Remarque 4.2.15. Dans **Set** un diagramme en fourchette exacte évidemment exacte de façon stable.

Définition 4.2.16. On dit qu'un ensemble d'objets $\{C_i \mid i \in I\}$ de $\mathcal{E}$ **génère** $\mathcal{E}$. Si pour tout $E \in \mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les flèches de $C_i \to E$ est une famille d'épi pour tout $i \in I$.

Remarque 4.2.17. De façon équivalente on a qu'un ensemble d'objets $\{C_i \mid i \in I\}$ de $\mathcal{E}$ **génère** $\mathcal{E}$. Si pour toutes flèches parallèles $u, v \colon E \to E'$ distinctes, on a qu'il existe $i \in I$ et une flèche $C_i \overset{w}{\to} E$ tel que $u \circ w \neq v \circ w$.

Lemme 4.2.18. *L'ensemble à un point $*$ génère **Set**.*

Démonstration. En effet, pour toutes flèches parallèles distinctes $u, v \colon X \to Y$, si on prend $x \in X$ un élément arbitraire de X et qu'on définit :

$$w : * \to X \qquad\qquad * \mapsto x$$

de ce fait on a bien pour tout $u \circ w(*) = u(x) \neq v(x)$ par hypothèse. □

Théorème 4.2.19 (Théorèmes de Giraud)**.** *Une catégorie $\mathcal{E}$ est un topos de Grothendieck si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{E}$ a tout les petits coproduits, et ils sont disjoints et stables par produit fibré.*
2. *Chaque épi de $\mathcal{E}$ est un coégaliseur.*
3. *Les relations d'équivalences sont effectives.*
4. *Chaque diagramme en fourchette exacte est exacte de façon stable.*
5. *Il existe un ensemble d'objet de $\mathcal{E}$ qui génère $\mathcal{E}$.*
6. *$\mathcal{E}$ a toutes les limites finies.*
7. *$\mathcal{E}$ a tous les petits Hom-Set. (cf. 2.1.15)*

Démonstration. $\Rightarrow$

On suppose que $\mathcal{E}$ est un topos de Grothendieck. Toute les propriétés sont vérifiés par **Set**. De ce fait ces propriétés sont vrais dans $PSh(\mathcal{C})$ pour toute petite catégorie $\mathcal{C}$, car $PSh(\mathcal{C})$ par le corollaire 3.1.3 a les limites et les colimites définies objets par objets.

Soit J une topologie de Grothendieck sur une catégorie $\mathcal{C}$. Les propriétés sont donc vraies dans $PSh(\mathcal{C})$, néanmoins on cherche à montrer leurs validité dans $Sh(\mathcal{C}, J)$. Pour ça on utilise le théorème 3.5.18. Comme le foncteur associé au faisceau est un adjoint à gauche il doit préserver commute, de plus il commute avec les limites finis.

Donc $Sh(\mathcal{C}, J)$ hérite par $PSh(\mathcal{C})$ du fait que les propriétés sont valide.

$\Leftarrow$ voir l'appendice de [MLM92], pour la deuxième implication. $\square$

4.3 Topos élémentaire

Définition 4.3.1. Une catégorie $\mathcal{E}$ est appelé **topos** (élémentaire) si

- $\mathcal{E}$ est une catégorie complète.
- $\mathcal{E}$ est une catégorie cartésienne fermée.
- $\mathcal{E}$ est munie d'un sous-objet classifiant.

Exemple 4.3.2. Un exemple vient tout naturellement, la catégorie **Set** est un topos. En effet **Set** est une catégorie complète (ie. 2.4.3), est cartésienne fermée(ie. 2.6.4), et est munie d'un sous-objet classifiant (ie. 3.2.10).

On va admettre le théorème suivant, démontré dans [MLM92] III.7.

Théorème 4.3.3. *Un topos de Grothendieck est un topos élémentaire.*

Chapitre III

Appendice

.1 Diagramme commutatif

Définition .1.1. On appelle **diagramme** sur une catégorie $\mathcal{C}$ une collection de flèches de $\mathcal{C}$, qu'on représente par un polygone dont les arrêtes représentent les flèches et les sommets leurs domaines et codomaine respectifs.

Exemple .1.2.

- L'exemple le plus trivial
$$A \xrightarrow{f} B$$
s'il est évident que c'est f qui relie A et B, on peut l'omettre.

- Un diagramme carré :
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & B \arrow[d, "f_3"] \\ C \arrow[r, "f_4"] & D \end{tikzcd} \tag{.1.1}$$

- Ou moins évident une fourchette :
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd} \tag{.1.2}$$

- on peut imaginer tous types de figures.

Définition .1.3. Un diagramme est dit **commutatif** si lorsque l'on suit à travers le diagramme un chemin d'un objet à un autre, le résultat par composition des flèches ne dépend que de l'objet de départ et de l'objet d'arrivée.

.2 Suite exacte et lemme des cinq

Tout d'abord citons un cas particulier de suite exacte dans la catégorie des A-Modules, pour A un anneau commutatif. Puis nous définirons de façon plus générale et valable sur un ensemble de catégories plus conséquentes (les groupes, etc...).

Définition .2.1. Soit une suite de flèche de **A-Mod** donné par :

$$... \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to ...$$

est dite :

- **exacte en $\mathbf{M_i}$** si on a $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.
- **exacte** si pour tout i elle est exacte en M_i

Proposition .2.2. *En particulier on a les propositions triviales suivantes :*

1. $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ *est exacte si et seulement si* f *est injectif*
2. $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *est exacte si et seulement si* g *est surjectif*

Maintenant donnons la définition générale :

Définition .2.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d'un objet zéro et de noyau. Une suite de flèches de $\mathcal{C}$ données par le diagramme suivant :

$$... \to C_{i-1} \overset{a_i}{\to} C_i \overset{a_{i+1}}{\to} C_{i+1} \to ...$$

est dite :

- **exacte en $\mathbf{C_i}$** si on a :
  1. $a_n \circ a_{n-1} = 0$
  2. Dans la factorisation $a_{n-1} = ker(a_n) \circ f$ garantie par (1), on a f est un épi
- **exacte** si pour tout i elle est exacte en C_i

Définition .2.4. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **abélienne** si elle satisfait les axiomes suivants :

1. $\mathcal{C}$ possède un objet zéro.
2. $\mathcal{C}$ possède tout les produits et coproduits finis.
3. Toutes flèches de $\mathcal{C}$ a un noyau et conoyau
4. Tout mono est un noyau et tout épi est un conoyau.

On a une généralisation de la proposition .2.2 tout aussi évidente :

Proposition .2.5. *Dans une catégorie exacte, on a :*

1. $0 \to A \overset{m}{\to} B$ *est exacte si et seulement si* f *est un mono*
2. $A \overset{p}{\to} B \to 0$ *est exacte si et seulement si* g *est un épi*

Définition .2.6. Dans une catégorie exacte une suite exacte du type :

$$0 \to A \overset{m}{\to} B \overset{p}{\to} C \to 0$$

est dite **suite courte exacte**.

Lemme .2.7 (Lemme des cinq)**.** *Soit le diagramme suivant dans une catégorie abélienne :*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 & \xrightarrow{u_3} & A_4 & \xrightarrow{u_4} & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B_1 & \xrightarrow{d_1} & B_2 & \xrightarrow{d_2} & B_3 & \xrightarrow{d_3} & B_4 & \xrightarrow{d_4} & B_5 \end{array} \tag{.2.1}$$

On suppose que les lignes sont des suites exactes, que :

- *l est un épi.*
- *q est un mono.*
- *m et p sont des iso.*

Alors n est un iso.

Démonstration. Pour simplifier, on se placera dans la catégorie des A-Module, où A est un anneau commutatif. On va procéder en deux parties :

1. si m,p sont surjectif et q est injectif, alors n est surjectif.
2. si m,p est surjectif et l est injectif, alors n est injectif.

(1) Soit $b_3 \in B_3$, alors il existe $a_4 \in A_4$ avec $p(a_4) = d_3(b_3)$ par la surjectivité de p. De plus en appliquant d_4, par la commutativité des diagrammes, et le fait que les lignes soient exactes on a:

$$\begin{aligned} d_4(d_3(b_3) &= d_4(p(a_4)) \\ &= q(u_4(a_4)) \\ &= u_4(a_4) \text{ par injectivité de q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De plus il existe $a_3 \in A_3$ avec $u_3(a_3) = a_4$.

$$\begin{aligned} d_3(b_3 - n(a_3)) &= d_3(b_3) - d_3((n(a_3)) \\ & p(a_4) - p(u_3(a_3)) \\ &= p(a_4) - p(a_4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il existe $b_2 \in B_2$ tel que $d_2(b_2) = b_3 - n(a_3)$, et par la surjectivité de m il existe $a_2 \in A_2$ avec $m(a_2) = b_2$. De ce fait :

$$\begin{aligned} n(u_2(a_2) + a_3) &= n(u_2(a_2)) + n(a_3) \\ &= d_2(m(a_2)) + n(a_3) \\ &= d_2(b_2) + n(a_3) \\ &= b_3 - n(a_3) + n(a_3) \\ &= b_3 \end{aligned}$$

(2) correspond au raisonnement duale.
Le lemme est évident quand on a (1) et (2).

□

Remarque .2.8. Ce type de démonstration est très courante en algèbre homologique et est dite "diagram chase".

Corollaire .2.9 (Lemme des cinq court)**.** *Soit le diagramme suivant dans une catégorie abélienne :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "m"] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "n"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "d_1"] & B_2 \arrow[r, "d_2"] & B_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{.2.2}$$

On suppose que les lignes sont des suites courtes exactes, que m et p sont des iso.
Alors n est un iso.

Démonstration. Une simple application du lemme des cinq. □

Conclusion et Ouverture

La définition de topos que j'ai donné ci dessus, donne un excellent outil pour la géométrie algébrique, mais aussi pour la logique et les fondations des mathématiques. En effet comme je l'ai expliqué dans l'introduction de la 2ème partie, la théorie du topos a en partie comme origine la réflexion de Lawvere sur une axiomatisation de la catégorie **Set**.

Avec les topos on peut donner une généralisation des fondements de la théorie des ensembles. Par exemple l'axiome de l'infini de ZFC qui postule l'existence d'un ensemble de cardinal infini (le plus souvent $\mathbb{N}$) peut être généraliser pour certain topos $\mathcal{E}$:

Il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{E}$ il existe une unique flèche $N \xrightarrow{h} X$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[d, "h"] \\ \mathbf{1} \arrow[r, "x"] & X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \tag{.2.3}$$

Ainsi chaque topos définit un espace de travail. L'un de ces topos est la catégorie **Set** qui correspond à notre espace de travail habituelle. Néanmoins on peut travailler dans des topos un peu différents, par exemple sur des topos muni ou non de l'axiome du choix, des topos constructifs (ie. où le principe du tiers exclue n'est pas postulé).

Un problème intéressant que l'on peut étudier concerne l'hypothèse du continu de Cantor qui dit qu'il n'existe pas de cardinal infini entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$. Kurt Gödel avait donné un modèle de ZFC dans lequel l'hypothèse du continu était valide. On peut montrer qu'il existe un topos satisfaisant l'axiome du choix, dans lequel l'hypothèse du continu n'est plus valide.

Un autre résultat intéressant de la théorie des Topos qui a été donné dans une appendice de [GAV63b] est le théorème de Deligne

"Un topos cohérent a assez de points."

Passons sur les détails de ce qu'est un topos cohérent. Un point d'un topos $\mathcal{E}$ correspond à une pair de foncteur $\mathcal{E} \leftrightarrows \mathbf{Set}$ où l'un préserve les suites exactes et l'autre est adjoint à gauche du premier. On dit que $\mathcal{E}$ a assez de points si pour deux flèches parallèles distinctes α et β de $\mathcal{E}$ il existe un point $p : \mathbf{Set} \to \mathcal{E}$ tel que $p(\alpha) \neq p(\beta)$.

Il s'avère que ce théorème est équivalent au fameux théorème de complétude de Gödel !

Chapitre IV

Bibliographie

Bibliography

[AM69] Michael Francis Atiyah and Ian Grant Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Company, 1969.

[Bel09] Jean-Pierre Belna. *Histoire de la Théorie des Ensembles*. ellipses, 2009.

[Bou69] Nicolas Bourbaki. *Elements d'Histoire des Mathématiques*. Hermann, 1969.

[GAV63a] Alexander Grothendieck, Michael Artin, and Jean-Louis Verdier. *Séminaire de Géométrie Algébrique de Bois Marie 4 - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas Tome 1*. Springer-Verlag, 1963.

[GAV63b] Alexander Grothendieck, Michael Artin, and Jean-Louis Verdier. *Séminaire de Géométrie Algébrique de Bois Marie 4 - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas Tome 2*. Springer-Verlag, 1963.

[Joh77] P.T Johnstone. *Topos Theory*. Academic Press, 1977.

[Joh02] P.T Johnstone. *Sketches of an Elephant A Topos Theory Compendium*. Clarendon Press - Oxford, 2002.

[Kan56] Daniel Kan. Adjoint functor. 1956.

[Law64] William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. 1964.

[LS94] SBernard Le Stum. *Algèbre homologique et théorie des faisceaux*. Université de Rennes 1, 1994.

[ML71] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1971.

[ML05] Saunders Mac Lane. *Saunders Mac Lane: A Mathematical Autobiography*. CRC Press, 2005.

[MLE42] Saunders Mac Lane and Samuel Eilenber. Group extensions and homology. 43(4), Octobre 1942. disponible sur JSTOR.

[MLM92] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic - A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag, 1992.

[Sau13] Jacques Sauloy. Jean giraud - images des mathématiques cnrs. 2013. http://images.math.cnrs.fr/Jean-Giraud-premiere-partie.html.

[Ser04] Lang Serge. *Algebre*. Dunod, 2004.

[YBM10] Itai Ben Yaacov, Thomas Blossier, and Julien Melleray. Introduction à la logique mathématique. 2010.

[Yon54] Nobuo Yoneda. *On the Homology Theory of Module.* Tokyo-Daigaku, 1954.