

Cheatsheet Distribuzioni

David Marabottini

2025-10-28

Contents

Distribuzioni	1
Distribuzioni discrete	2
Bernoulli	2
Binomiale	3
Geometrica	4
Poisson	5
Distribuzioni continue	6
Uniforme continua	6
Esponenziale	8
Normale	9
Gamma	10
Chi-quadro	11
T di student	12
F di Fisher	13
Distribuzioni asintotiche (per stimatori)	13

Distribuzioni

In questo pdf riassumo tutte le distribuzioni

Per disegnare le distribuzioni nel seguente pdf mi avvalgo della seguente funzione R

```
create_chart_fn <- function(rdistr, distr, discreet=F, n=1000, ...) {  
  set.seed(123)  
  x = rdistr(n, ...)  
  
  if(!discreet) {  
    hist(  
      x,  
      probability = T,  
      col = "lightblue",
```

```

    border = "white",
    xlab = "x"
  )
  curve(
    distr(x, ...),
    from = min(x),
    to = max(x),
    add = T,
    col = "red",
    lwd = 2
  )
} else {
  tab = table(x) / length(x)

  bar_centers = barplot(
    tab,
    col = "lightblue",
    border = "white",
    ylab = "Probabilità"
  )

  points(
    bar_centers,
    #as.numeric(names(tab)),
    distr(as.numeric(names(tab)), ...),
    col = "red",
    pch = 19
  )
}
}

```

Distribuzioni discrete

Bernoulli

Definizione:

Esperimento con solo 2 esiti possibili

Esito	probabilità	Definizione
0	p	Insuccesso
1	1-p	Successo

Legge:

$$X \in \{0, 1\}, P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

- **Media:** $E[X] = p$
- **Varianza:** $\text{Var}[X] = p(1-p)$

Stimatori:

- media: $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- varianza: $S^2 = \bar{X}(1 - \bar{X}) = \hat{p}(1 - \hat{p})$

Esempio:

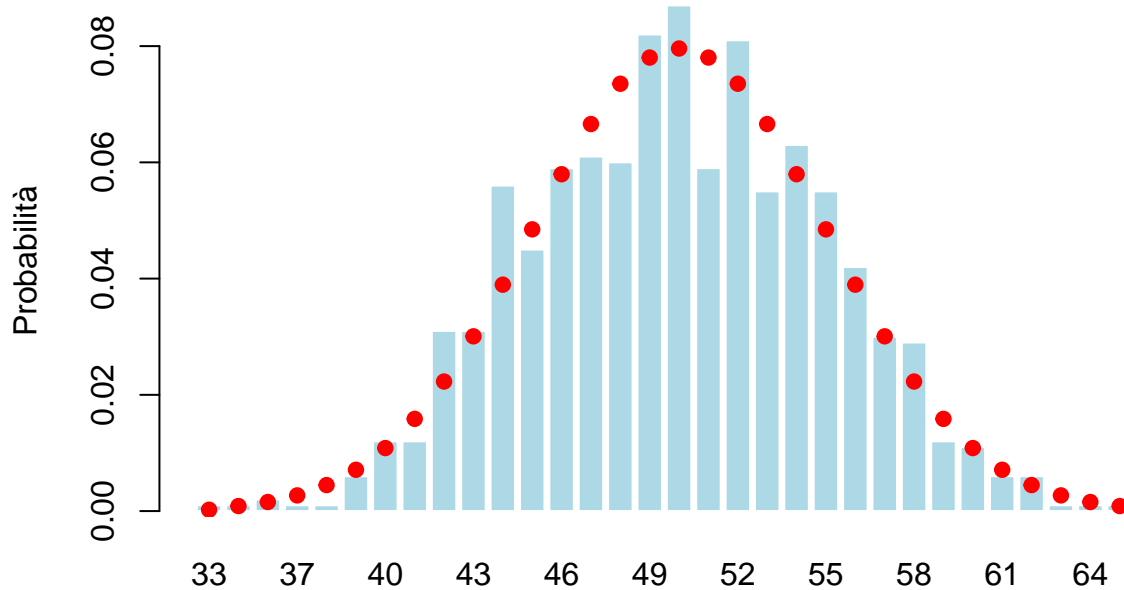
- Probabilità che lanciando una moneta esca testa piuttosto che croce
- Probabilità che una persona abbia una specifica malattia

Relazioni:

- Somma di n Bernoulli(p) -> Binomiale(n, p)

Binomiale

```
create_chart_fn(rbinom,dbinom, discreet=T, size=100, prob=0.5 )
```

**Definizione:**

Conta il numero di successi in n prove Bernoulliane indipendenti

Legge:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} * p^k (1 - p)^{n-k}$$

- **Media:** $E(X) = n * p$
- **Varianza:** $Var(X) = np(1-p)$

Stimatori:

- media: $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$
- varianza: $Var(X) = \frac{\bar{X}}{n} (1 - \frac{\bar{X}}{n}) n = \hat{p} (1 - \hat{p}) n$

Esempio:

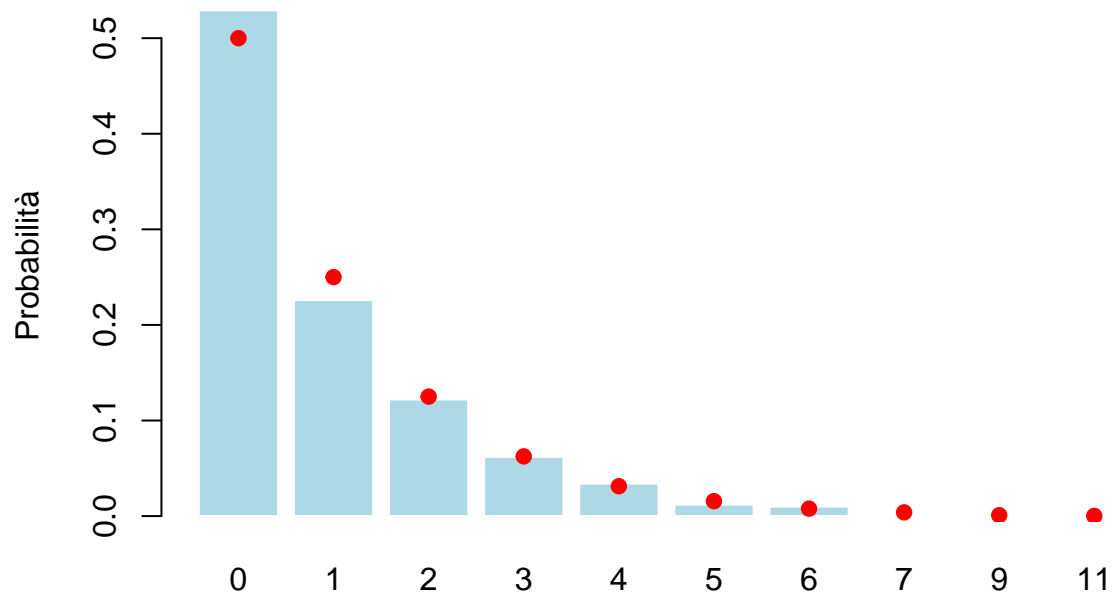
- Numero di prodotti difettosi in un lotto di n pezzi
- Numero di persone con una malattia in una determinata popolazione

Relazioni:

- da approfondire relazione con poisson

Geometrica

```
create_chart_fn(rgeom, dgeom, discreet=T, prob=0.5 )
```



Definizione:

Numero di prove fino al primo successo

Legge:

$$P(X = K) = (1 - p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$$

- **Media:** $E(X) = 1/p$
- **Varianza:** $\text{Var}(X) = (1 - p)/p^2$

Stimatori:

- **Media:** $\hat{p} = 1/\bar{X}$
- **Varianza:** $S^2 = \frac{\bar{X}-1}{\bar{X}^2}$

Esempio:

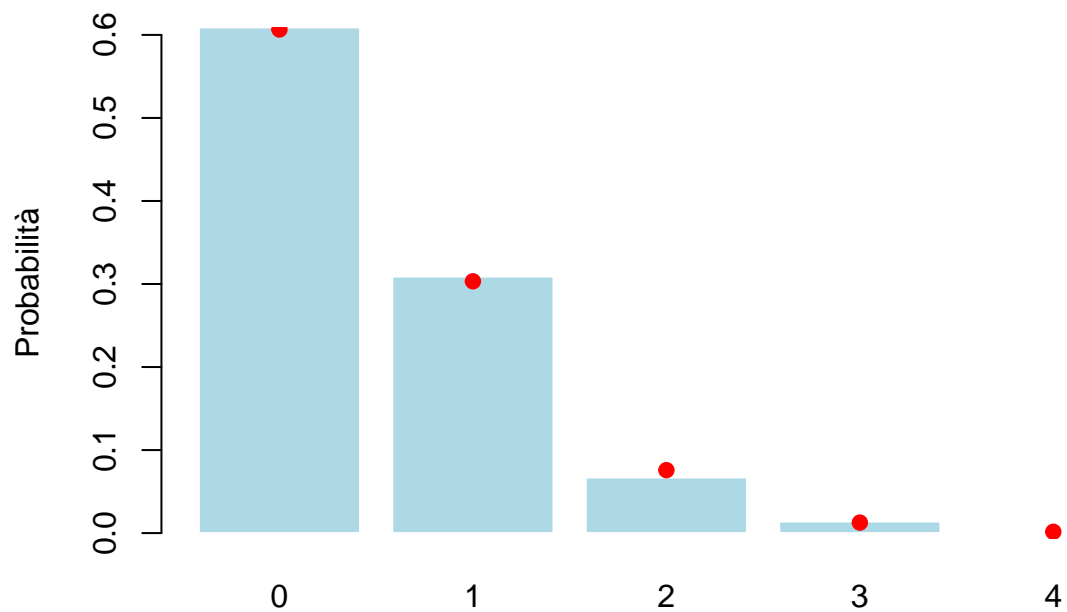
Numero di tiri di dado fino ad ottenere il primo 6

Relazioni:

Somma di r geometriche -> negativo binomiale

Poisson

```
create_chart_fn(rpois, dpois, discreet=T, lambda=0.5 )
```



Definizione:

Numero di eventi indipendenti in intervallo con media λ

Legge:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

- **Media** = $E(X)$ = **varianza** = $\text{Var}(X) = \lambda$

Stimatori:

$$\text{media} = \hat{\lambda} = \text{varianza} = S^2 = \bar{X}$$

Esempio:

Numero di e-mail ricevute in un ora

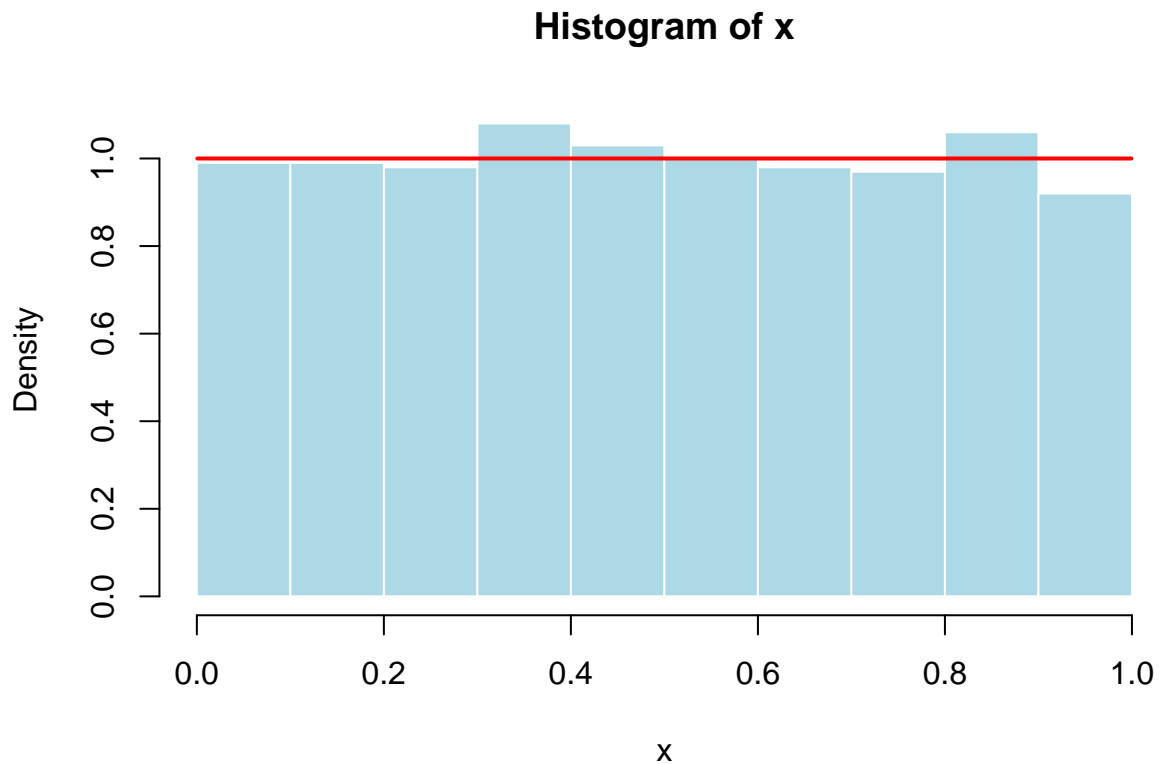
Relazioni:

Limite della binomiale per $n \rightarrow \infty$

Distribuzioni continue

Uniforme continua

```
create_chart_fn(runif,dunif, min=0, max=1)
```

**Definizione:**

Ogni valore tra a e b con la stessa possibilità

Legge:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se altrimenti} \end{cases}$$

- Media: $E(X) = (a+b)/2$
- Varianza: $\text{Var}(X) = (b-a)^2/12$

Stimatori:

- $\hat{a} = \min(X_i)$
- $\hat{b} = \max(X_i)$
- media campionaria = \bar{X}

Esempio:

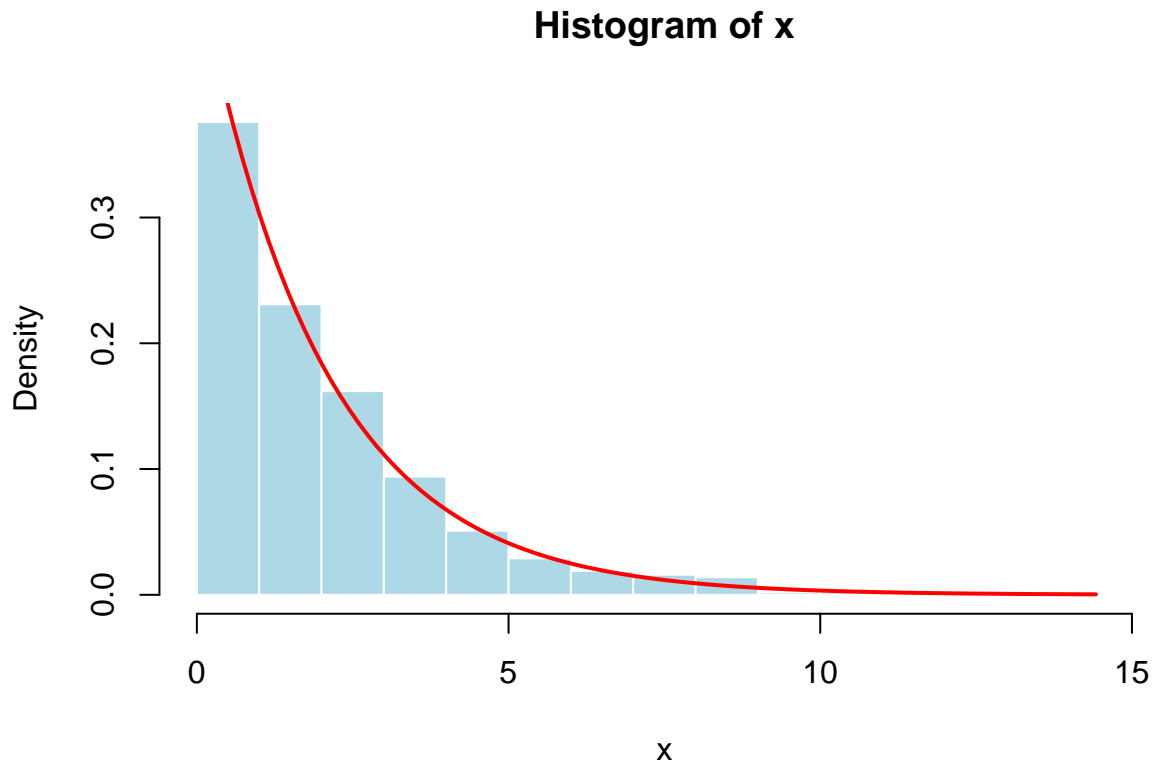
Numero casuale tra 0 e 1

Relazione:

Base per la generazione di distribuzioni con trasformazioni invrse

Esponenziale

```
create_chart_fn(rexp,dexp, rate=0.5)
```



Definizione:

Tempo di attesa tra 2 eventi di poisson consecutivi

$$f(x) = \lambda * e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

media: $1/\lambda$

varianza: $1/\lambda^2$

Stimatori:

- $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$
- $\sigma^2 = \bar{X}^2$

Esempio:

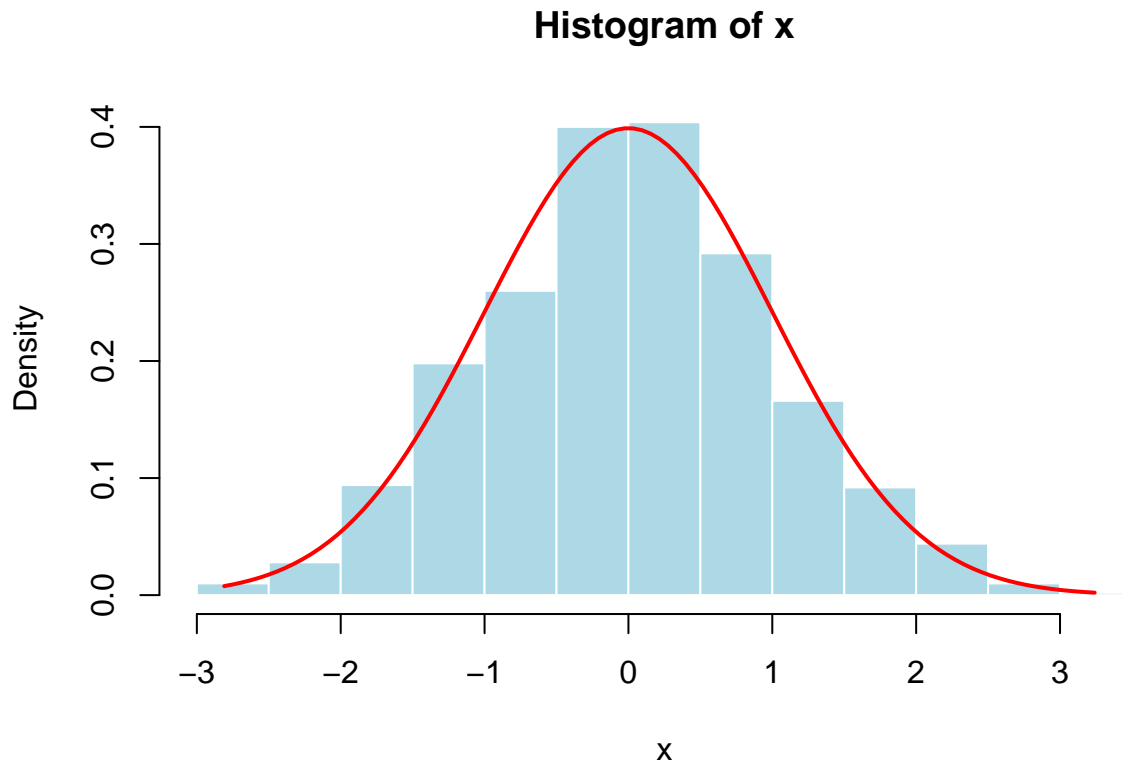
Tempo fino al prossimo arrivo o guasto

Relazioni:

- Somma di k esponenziali -> Gamma(k, λ)

Normale

```
create_chart_fn(rnorm, dnorm, mean=0, sd=1)
```



Variabile continua con densità simmetrica e a campana

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- **Media:** μ
- **Varianza:** σ^2

Stimatori:

- $\hat{\mu} = \bar{X}$
- $\sigma^2 = 1/n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
- $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

Distribuzioni derivate:

- $\hat{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

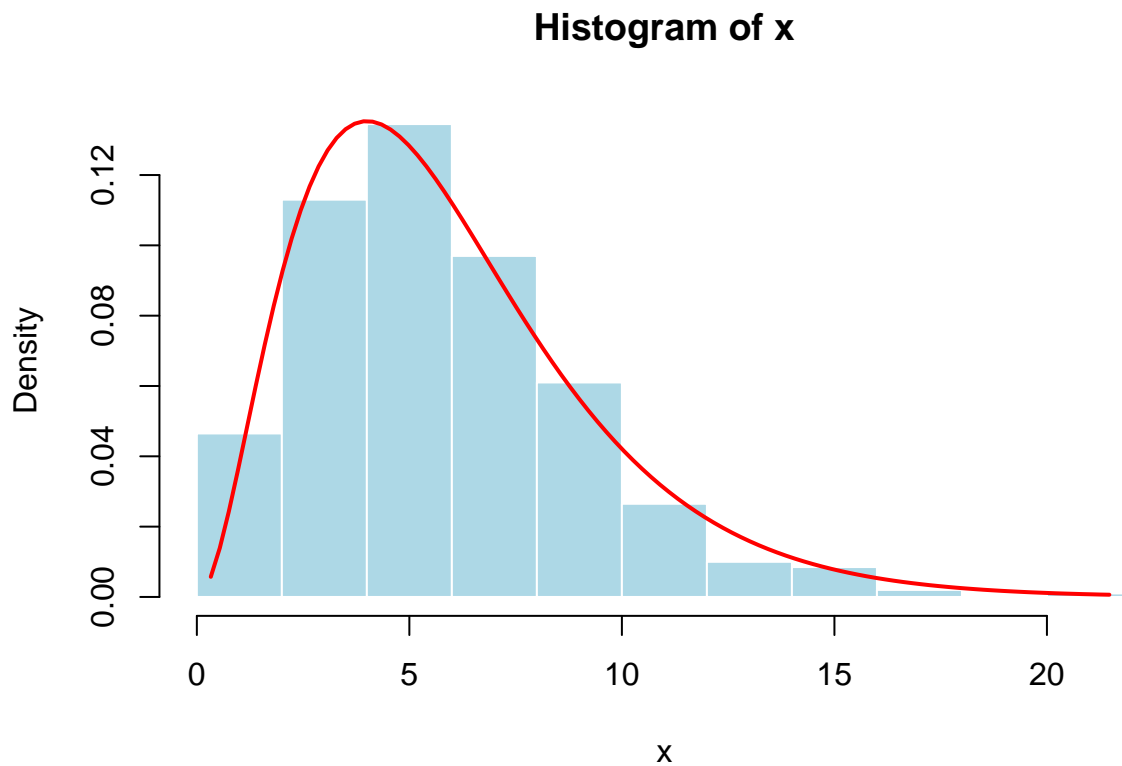
- $\frac{n-1S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$
- $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Esempio:

- Errori sperimentali
- Distribuzione altezze in una popolazione
- Distribuzione di medie campionarie

Gamma

```
create_chart_fn(rgamma, dgamma, shape=3, scale=2)
```



Definizione:

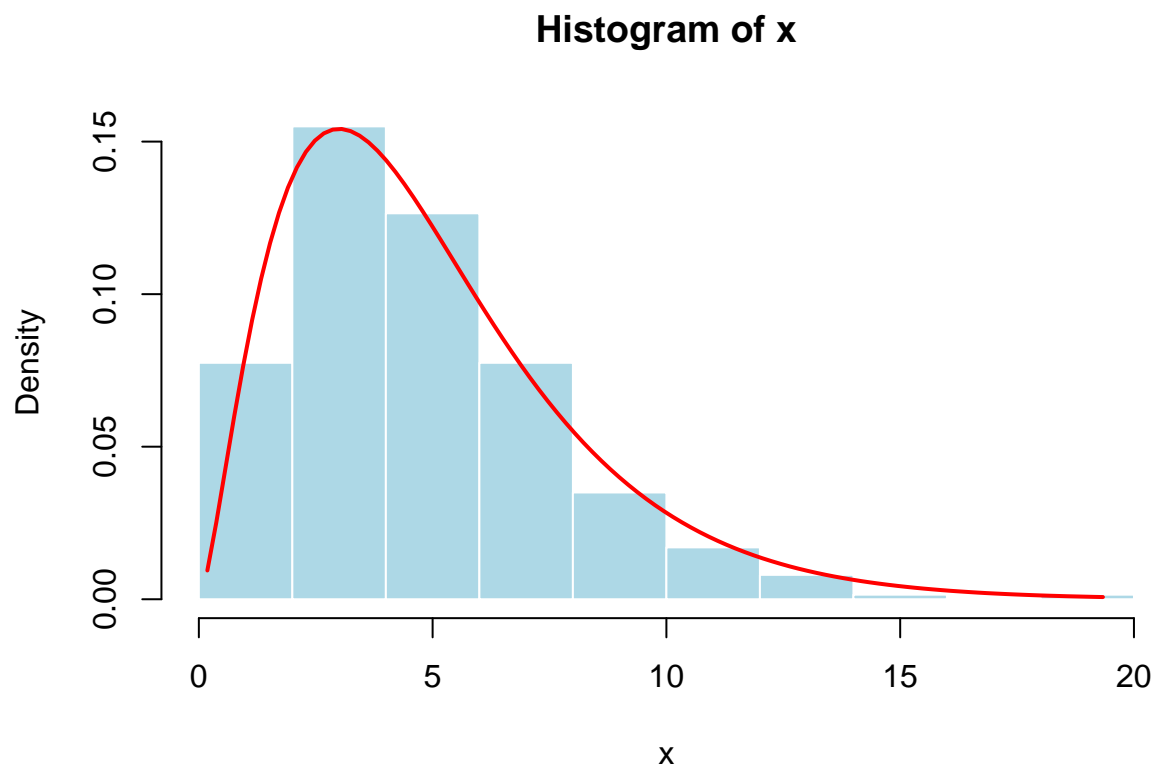
Somma di variabili esponenziali indipendenti

Legge:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} * e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$$

Chi-quadro

```
create_chart_fn(rchisq, dchisq, df=5)
```



#df -> gradi di libertà

Definizione:

Somma dei quadrati di k variabili $N(0,1)$

$$f(x) = \frac{x^{k/2-1} e^{-x/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)}, x > 0$$

media: k

varianza: 2k

stimatori:

- Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \hat{\sigma}^2 = S^2$

Esempio:

- Test di bontà dell'adattamento

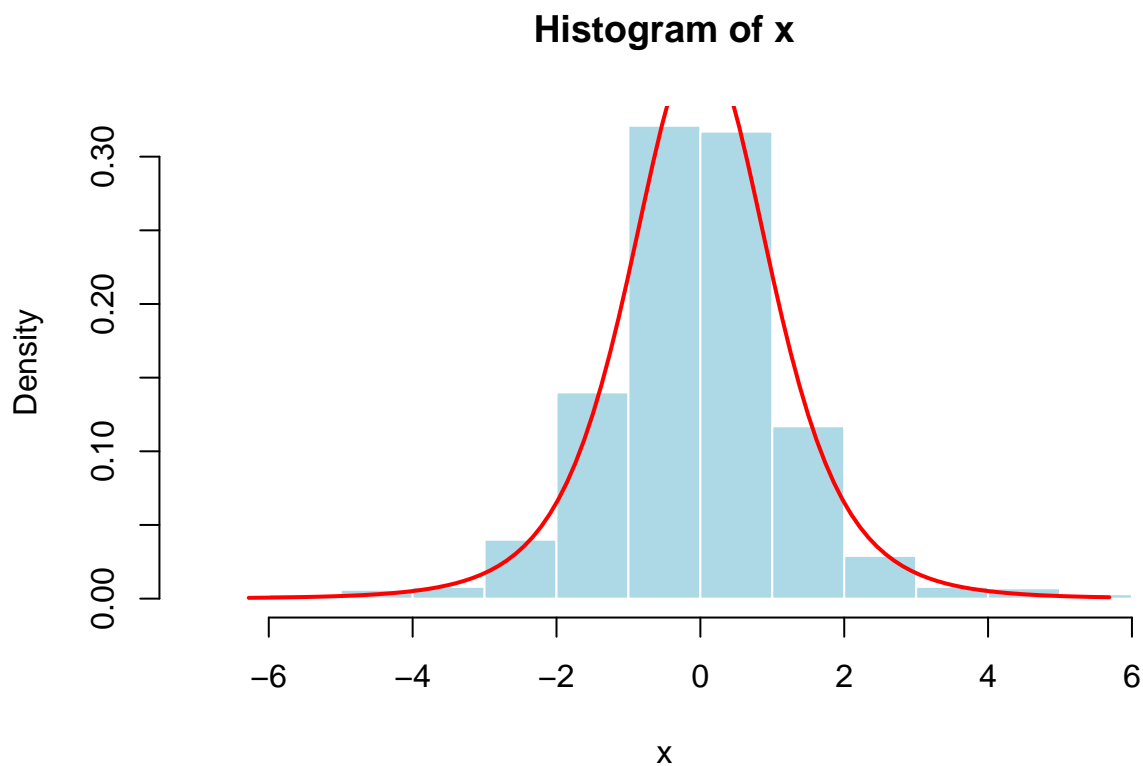
- Test sulle varianze

Relazioni:

- Caso particolare di gamma($k/2$, 2)
- Base per t e F

T di student

```
create_chart_fn(rt, dt, df=5)
```



Definizione:

Rapporto tra una normale standard e la radice quadrata di una chi quadro normalizzata

Legge:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/v}}, Z \sim N(0, 1), U \sim \chi^2(v)$$

Media: 0

Varianza: $\frac{v}{v-2}, v > 2$

Stimatori:

- se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \rightarrow$ usata per stimare intervalli di confidenza con σ^2 ignota

Esempio:

Analisi inferenziale per piccole dimensioni campionarie

Relazioni:

Per $v \rightarrow \infty \rightarrow$ Normale standard

F di Fisher

```
# create_chart_fn(rf, df, df1=5, df2=10)
```

Definizione:

Rapporto tra due variabili chi-quadro normalizzate.

Legge:

$$F = \frac{U_1/d_1}{U_2/d_2}, U_1 \sim \chi^2(d_1), U_2 \sim \chi^2(d_2)$$

- **Media:** $\frac{d_2}{d_2-2}, d_2 > 2$

Stimatori collegati:

- Confronto di due varianze campionarie $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(d_1, d_2)$ usata come test per $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Esempio:

- Analisi ANOVA
- Test omoschedasticità

Relazioni:

- $1/F(d_1, d_2) \sim F(d_2, d_1)$
- Se $d_1 = 1, F = T^2$

Distribuzioni asintotiche (per stimatori)

Teorema	Risultato	Applicazione
Legge dei grandi numeri	$\bar{X} \rightarrow \mu$	Consistenza stimatori
Limite Centrale (CLT)	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$	Approssimazione normale
Informazione di Fisher	$Var(\theta) \approx [I(\theta)]^{-1}$	Varianza asintotica MLE