Análisis Numérico
Curso 2021–2022
Prácticas
Hoja 2. Métodos monopaso

1 Estructura general de las prácticas para resolver ecuaciones de la forma $\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}(\mathbf{t}))$.

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), & t \in [0, 2\pi] \\ x_2'(t) = -9x_1(t) + 8\,\mathrm{sen}(t), & t \in [0, 2\pi] \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 4. \end{cases}$$

a) Escribir, en la ventana de comandos de `Matlab`, la función $f(t, x)$ de la ecuación diferencial del problema de valor inicial anterior como una función anónima de `Matlab`:

```
f=@(t,x) [x(2);-9*x(1)+8*sin(t)]
```

b) Resolver el problema de valor inicial anterior utilizando la función `ode45` de `Matlab`, que resuelve numéricamente problemas de valor inicial mediante un método adaptativo de tipo Runge–Kutta. Concretamente, escribir

```
[t,x]=ode45(f,[0,2*pi],[0,4])
[t,x]=ode45(f,[0:0.01:2*pi],[0,4])
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,x(:,1))
subplot(2,1,2)
plot(t,x(:,2))
figure(2)
plot(x(:,1),x(:,2))
```

Comentarios acerca de los argumentos de entrada/salida de la función `ode45`:

1) El primer argumento de entrada (en el caso anterior `f`) es el nombre de la función f de la ecuación diferencial del problema de valor inicial. Dicha función puede venir dada como una función anónima (como en el apartado a)) o como un fichero de tipo función (véase la Observación del apartado d)).
2) El segundo argumento de entrada debe ser un vector fila `v` de los tipos `(1,2)` o `(1,p)`:
   - En el primer caso, el vector `v` determina los extremos izquierdo y derecho del intervalo en el que se quiere aproximar la solución del problema de valor inicial.
   - En el segundo caso, `v` es el vector de nodos en los que se quiere que el método devuelva los valores de la solución aproximada.
3) El tercer argumento de entrada es un vector fila de tipo `(1,n)` (en el caso anterior `n=2`) con las condiciones iniciales del problema de valor inicial.
4) La función `ode45` tiene dos argumentos de salida:
   - El primero es un vector columna t de tipo `(m,1)` en el que aparecen los nodos en los que se quiere obtener la solución aproximada.
     - Si el segundo argumento de entrada de `ode45` es un vector `v` de tipo `(1,2)`, el valor de `m` lo determina la propia función `ode45` automáticamente, como estime más adecuado.
     - Si dicho vector `v` es de tipo `(1,p)`, con $p \geq 3$, entonces `t=v`$^{\mathrm{T}}$ (y, por tanto, `m=p`).
   - El segundo es una matriz `x` de tipo `(m,n)` de forma que en la columna j–ésima de `x` aparece la solución aproximada de la componente j–ésima de la solución del problema de valor inicial en los `m` nodos del primer argumento de salida (en otras palabras, la fila i–ésima de `x` es la solución aproximada correspondiente al nodo i–ésimo del primer argumento de salida).

c) Repetir los apartados a) y b) para los siguientes problemas de valor inicial:

I) **Oscilador armónico**: Supongamos que un cuerpo de masa m está sujeto en el extremo de un muelle.
Si desplazamos la masa respecto de su posición de equilibrio y después la soltamos, a partir de la Segunda Ley de Newton y de la Ley de Hooke (que afirma que el muelle ejerce una fuerza de restitución proporcional al

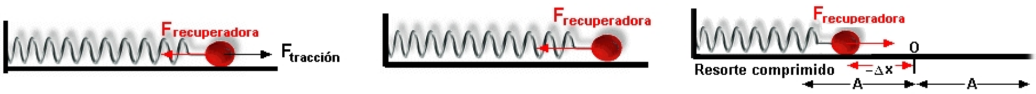


Figura 1: *Movimiento armónico simple*

alargamiento), en ausencia de rozamiento y de fuerzas externas, se tiene que el desplazamiento $x(t)$ respecto a la posición de equilibrio (*elongación*) en el instante de tiempo t es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} mx''(t) = -kx(t), \; t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Considerar $k = m = 1$, $T = 10$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$. Explorar el comportamiento de las soluciones para otros datos iniciales.

II) **Ecuación de Van der Pol**: Describe el comportamiento de circuitos electrónicos no lineales

$$\begin{cases} x''(t) + \alpha \left(x^2(t) - \beta\right) x'(t) + x(t) = 0, \; t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Considerar $\alpha = \beta = 1$, $T = 10$, $x_0 = 0'1$, $v_0 = 0'2$. Explorar, también, el comportamiento de las soluciones para otros datos iniciales.

d) Crear un fichero de tipo script llamado `datos.m` que contenga, en líneas distintas, ciertos datos que permiten caracterizar el problema de valor inicial cuya solución se quiere aproximar y cualquier otro dato necesario para implementar el método numérico que se vaya a utilizar. En particular, para utilizar el método implementado en `Matlab` en la función `ode45` y otros que implementaremos más adelante, introduciremos en el fichero `datos.m` la siguiente información:

```
f=@(t,x) [x(2);-9*x(1)+8*sin(t)]; intervalo=[0,2*pi]; x0=[0,4]; N=1000;
% k=1; m=1; f=@(t,x) [x(2);-(k/m)*x(1)]; intervalo=[0,10]; x0=[1,0]; N=1000;
```

Comentar en `datos.m` todas las líneas (usando para ello el símbolo `%`) excepto la correspondiente a la práctica que se desee ejecutar.

§ **Observación**: En lugar de definir la función f en el fichero `datos.m` como función anónima, también se pueden utilizar funciones definidas en ficheros externos con dos argumentos de entrada y uno de salida:

- El primer argumento de entrada es un número real y el segundo es un vector columna de tipo `(n,1)` o un vector fila de tipo `(1,n)` (en el caso anterior `n=2`).
- El argumento de salida es otro vector columna de tipo `(n,1)`.

Así, por ejemplo, podemos considerar la función $f(t, x)$ de la ecuación diferencial del problema de valor inicial escrita en un fichero de tipo función, con nombre `funcpvi.m` (por ejemplo), con el siguiente contenido:

```
function f=funcpvi(t,x)
f1=x(2);
f2=-9*x(1)+8*sin(t);
f=[f1;f2];
```

En este caso, introduciríamos, en el fichero `datos.m`, la siguiente información:

```
f=@funcpvi; intervalo=[0,2*pi]; x0=[0,4]; N=1000;
```

Nótese que, en la asignación de la función `f`, escribimos el nombre del fichero que contiene la función precedido del símbolo `@`.

e) Crear un fichero tipo script con nombre `graficas.m` que, al ejecutarlo tras obtener la solución aplicando la función `ode45` de `Matlab` como en el apartado b), dibuje:

I) Si la ecuación diferencial es escalar: la gráfica de la solución.

II) Si la ecuación diferencial es en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$: la gráfica de cada una de las componentes, en una misma ventana, usando los comandos `subplot`, `plot` y que, tras una pausa, dibuje en otra ventana la trayectoria de la solución.
Opcional: Utilizar el comando `title` y/o `legend` para indicar la curva de cada subventana.

Código de colores: Para unificar la notación, se utilizará el siguiente código de colores:

- Las gráficas para problemas escalares y las trayectorias para problemas 2D y 3D, serán de color rojo.
- Para problemas 2D, las componentes se dibujarán, respectivamente, en rojo y verde.
- Para problemas 3D los colores de las componentes serán, respectivamente, en rojo, verde y azul.

f) Crear un fichero tipo script con nombre `testode45.m` que lea los datos del fichero `datos.m`, resuelva con la función `ode45` y dibuje utilizando el fichero `graficas.m`

Como regla general, en cada uno de los ficheros que ejecutan los programas principales (la mayor parte de los cuales se llaman `test***.m`), introducir en la primera línea la sentencia `datos` para que, de esta forma, se lea en primer lugar el contenido de `datos.m`

Para evitar conflictos con las variables utilizadas, emplear, adecuadamente, la sentencia `clear all`

2 Método de Euler (explícito).

a) Crear un fichero de tipo función, de nombre `meuler.m`, que implemente el *Método de Euler*. Para tratar de mantener una estructura de argumentos parecida a la de la función `ode45`, el fichero `meuler.m` empezará de la siguiente forma:

```
function [t,x]=meuler(f,intervalo,x0,N)

% La función meuler resuelve un problema de valor inicial de la forma
%  x'(t)=f(t,x(t)) en [t0,T]
%  x(t0)=x0,
% con x0 en R^n, mediante el método de Euler (explícito).
%
% ENTRADA:
%  f: nombre de la función (definida en formato anónimo o como fichero de tipo función de Matlab)
%     del problema que se quiere resolver, con dos argumentos de entrada: el primero es un
%     número real y el segundo es un vector columna de tipo (n,1) o un vector fila de tipo (1,n)
%  intervalo: [t0,T], donde está planteado el sistema de ecuaciones diferenciales
%  x0: vector inicial de tipo (1,n)
%  N: número de subintervalos
%
% SALIDA:
%  t: vector columna de abscisas donde se va a aproximar la solución de tipo (N+1,1)
%  x: matriz de ordenadas de la solución aproximada de tipo (N+1,n)
```

Una forma de testar la función `meuler` que acabamos de implementar es mediante el siguiente apartado b).

b) Crear un fichero de tipo script, de nombre `testmeuler.m` que lea los datos del fichero `datos.m`, resuelva con la función `meuler` y dibuje la salida del algoritmo `meuler` haciendo una llamada al fichero `graficas.m`

3 Implementar los métodos de Taylor del Problema 8 de la Hoja 2 de problemas.

4 Método de Euler modificado. Repetir la Práctica 2 para el *Método de Euler modificado* (ficheros `meulermod.m` y `testmeulermod.m`).

Paso 1 $\quad x_0 \simeq \xi_0$

Paso 2 $\quad$ Para $i = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\begin{cases} F_1 = f(t_i, x_i) \\ F_2 = f\left(t_i + \dfrac{h}{2}, x_i + \dfrac{h}{2} F_1\right) \end{cases}$$

$$x_{i+1} = x_i + hF_2$$

5 Método de Euler mejorado. Repetir la Práctica 2 para el *Método de Euler mejorado* (ficheros `meulermej.m` y `testmeulermej.m`).

Paso 1 $\quad x_0 \simeq \xi_0$

Paso 2 $\quad$ Para $i = 0, 1, \ldots, N-1$

$$\begin{cases} F_1 = f(t_i, x_i) \\ F_2 = f(t_{i+1}, x_i + hF_1) \end{cases}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(F_1 + F_2)$$

6 Un Método de Runge–Kutta de orden 3. Repetir la Práctica 2 para el *Método de Runge–Kutta* de orden 3 (ficheros `mrk3.m` y `testmrk3.m`) dado por

$$\begin{array}{ll}
\underline{\text{Paso 1}}: & x_0 \simeq \xi_0 \\
\underline{\text{Paso 2}}: & \text{Para } i = 0, 1, \ldots, N-1 \\
& \left\{ \begin{array}{l} F_1 = f(t_i, x_i) \\ F_2 = f\left(t_i + \dfrac{h}{2}, x_i + \dfrac{h}{2} F_1\right) \\ F_3 = f\left(t_i + \dfrac{3h}{4}, x_i + \dfrac{3h}{4} F_2\right) \end{array} \right. \\
& x_{i+1} = x_i + \dfrac{h}{9}\left(2F_1 + 3F_2 + 4F_3\right)
\end{array}$$

7 Método de Runge–Kutta de orden 4 (clásico). Repetir la Práctica 2 para el siguiente *Método de Runge–Kutta* de orden 4 (ficheros `mrk4.m` y `testmrk4.m`).

$$\begin{array}{ll}
\underline{\text{Paso 1}} & x_0 \simeq \xi_0 \\
\underline{\text{Paso 2}} & \text{Para } i = 0, 1, \ldots, N-1 \\
& \left\{ \begin{array}{l} F_1 = f(t_i, x_i) \\ F_2 = f\left(t_i + \dfrac{h}{2}, x_i + \dfrac{h}{2} F_1\right) \\ F_3 = f\left(t_i + \dfrac{h}{2}, x_i + \dfrac{h}{2} F_2\right) \\ F_4 = f\left(t_i + h, x_i + hF_3\right) \end{array} \right. \\
& x_{i+1} = x_i + \dfrac{h}{6}\left(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right)
\end{array}$$

8 Crear un fichero de tipo función, de nombre `testmet.m`, que añada como variable de entrada el nombre de una función con un método ya implementado, ejecute este último y dibuje la solución con el programa `graficas.m` creado anteriormente. Esta función debe permitir ejecutar en `Matlab` lo siguiente: `testmet(@meuler)`, `testmet(@meulermod)`, `testmet(@mrk3),...`

9 Crear un fichero de tipo función, de nombre `comp2met.m`, que tomando como dato dos métodos ya implementados, los ejecute y dibuje, siguiendo el código establecido de colores, de la siguiente forma:

a) Si la ecuación diferencial es escalar: la gráfica de la solución por el primero de los métodos; tras una pausa y en otra ventana, la diferencia entre las soluciones obtenidas por ambos métodos y, tras una pausa y en otra ventana, la norma (infinito) de la diferencia entre las soluciones obtenidas por ambos métodos, utilizando el comando `legend` para mostrar su valor.

b) Si la ecuación diferencial es en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$: la gráfica de todas las componentes en la misma ventana por el primero de los métodos; tras una pausa, dibujar en otra ventana la diferencia entre las componentes respectivas de las soluciones obtenidas por ambos métodos; tras una pausa, dibujar la trayectoria de la solución por el primer método y, tras una pausa y en otra ventana, la norma (infinito) de la diferencia entre las soluciones obtenidas por ambos métodos, utilizando el comando `legend` para mostrar su valor.

Indicación: El fichero `comp2met.m` debe comenzar como `function comp2met(met1,met2)`, siendo `met1` y `met2` las variables asociadas a los nombres de las funciones que implementan los dos métodos que se quieren utilizar. Considerar, también, las sentencias utilizadas en el fichero `graficas.m`. Esta función debe permitir ejecutar en `MATLAB` lo siguiente: `comp2met(@meuler,@mrk3)`, `comp2met(@mrk4,@meulermej),...`

10 Crear un fichero de tipo función, de nombre `comp2ode45.m`, que tomando como dato uno de los métodos, lo compare con la función `ode45` de `Matlab`, siguiendo las indicaciones de la Práctica 9. Esta función debe permitir ejecutar en `Matlab` lo siguiente: `comp2ode45(@meuler)`, `comp2ode45(@mrk3),...`

11 Con el objetivo de poder comparar las soluciones numéricas con las soluciones exactas, cuando estas últimas se conozcan, incluir, en estos casos, en el fichero `datos.m` una variable que contenga una función anómima de `Matlab` o el nombre de una función que represente la solución exacta. Dicha función debe tener como argumento de entrada un vector (columna) `t` de tiempos de tipo `(m,1)`, con `m` arbitrario, y devolver una matriz de tipo `(m,n)` con la solución exacta, evaluada en los nodos del vector `t`, de los problemas de primer orden que se consideren. En particular, hacer esto para los siguientes problemas:

a) $$\begin{cases} x'(t) = -0'1x(t) + 2y(t),\ t \in [0,10] \\ y'(t) = -2x(t) - 0'1y(t),\ t \in [0,10] \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$ Solución exacta: $x(t) = e^{-0'1t}\,\mathrm{sen}(2t),\ y(t) = e^{-0'1t}\cos(2t).$

b) $$\begin{cases} x''(t) + 2x(t) = \cos(3t),\ t \in [0,10] \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$ Solución exacta: $x(t) = \dfrac{8}{7}\cos(\sqrt{2}t) - \dfrac{1}{7}\cos(3t).$

12 Crear un fichero de tipo función, de nombre `comp2solexac.m` que, en el caso de que se conozca la solución exacta del problema de valor inicial y ésta aparezca en el fichero `datos.m`, utilizando como entrada el nombre del fichero con uno de los métodos implementados, ejecute el método, evalúe la solución exacta de la ecuación en los mismos nodos y dibuje:

a) Si la ecuación diferencial es escalar: la gráfica de la solución exacta; tras una pausa y en otra ventana, la diferencia entre las soluciones exacta y aproximada y, tras una pausa y en otra ventana, la norma (infinito) de la diferencia entre la solución exacta y la aproximada, utilizando el comando `legend` para mostrar su valor.

b) Si la ecuación diferencial es en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$: la gráfica de todas las componentes de la solución exacta en la misma ventana; tras una pausa, dibujar en otra ventana la diferencia entre las componentes respectivas de las soluciones exacta y aproximada; tras una pausa, dibujar la trayectoria de la solución exacta y, tras una pausa y en otra ventana, la norma (infinito) de la diferencia entre las soluciones exacta y aproximada, utilizando el comando `legend` para determinar su valor.

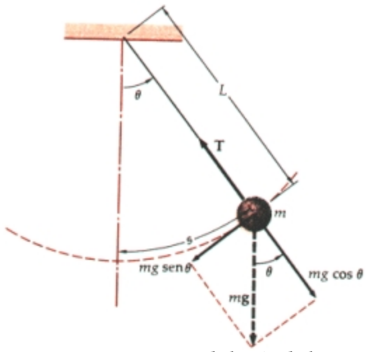
Esta función debe permitir ejecutar en `Matlab` lo siguiente: `comp2solexac(@meuler)`, `comp2solexac(@mrk4)`, ...

13 Utilizar las Prácticas 9, 10 y 12 para comparar entre diversos métodos numéricos, así como con la solución exacta, cuando se les aplica a la resolución de los problemas de valor inicial de la Práctica 11.

14 Ecuación del péndulo.

El desplazamiento angular $\theta(t)$ de un péndulo de longitud L, con respecto a la vertical, es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} mL\theta''(t) + 2L\beta\theta'(t) + mg\,\mathrm{sen}(\theta(t)) = F,\ t \in [0,T] \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = w_0. \end{cases}$$



Movimiento del péndulo

Se consideran los valores $m = 1$, $g = 9'8\,\mathrm{m/s^2}$ y $T = 10$.

- Suponiendo que $F = 0$ y $L = 1\,\mathrm{m}$ explorar, utilizando el *Método de Runge–Kutta* clásico de orden 4, el comportamiento de las soluciones para diversas elecciones de los datos iniciales. Considerar, en primer lugar, el valor $\beta = 0$ y, luego, los valores $\beta = 0'25$ y $\beta = 1'5$.
- Para cada uno de los datos iniciales escogidos, comparar los valores encontrados con los obtenidos al resolver el *problema linealizado*

$$\begin{cases} mL\theta''(t) + 2L\beta\theta'(t) + mg\theta(t) = 0,\ t \in [0,T] \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = w_0. \end{cases}$$

  Nótese que la similitud de las soluciones y trayectorias únicamente se da cuando los datos iniciales son pequeños. ¿Qué ocurre si se parte con el péndulo en posición vertical, es decir, si $\theta_0 = \pi$ y $w_0 = 0$?
- Considérese ahora el valor $\beta = 0'5$. Comprobar que si $F = 1$ entonces

$$\left(\widehat{\theta}_0, \widehat{w}_0\right) = \left(\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{g}\right), 0\right)$$

es un punto de equilibrio del péndulo. Tomar datos iniciales próximos a este punto de equilibrio, variar F según los valores $F = 0'9$, $F = 1$ y $F = 1'1$ y observar el cambio de comportamiento.

15 Para cada uno de los siguientes *problemas autónomos* explorar, mediante el *Método de Runge–Kutta* clásico de orden 4, el comportamiento de las soluciones en el intervalo $[0, 100]$, para diversas elecciones de los datos iniciales.

a) **Sistemas depredador–presa 1 (Lotka–Volterra)**: Si $x(t)$ e $y(t)$ denotan la población de presas y depredadores, respectivamente, en el instante t, el modelo matemático más simple que gobierna su evolución, es

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

donde los coeficientes a, b, c, d son no negativos. Tomar los casos $a = b = c = d = 1$ y $a = 3$, $b = 0'2$, $c = 0'6$, $d = 5$ y datos iniciales $x(0), y(0) > 0$.

b) **Sistema depredador–presa 2**: Un modelo de depredador–presa más completo, en el que se tiene en cuenta la saturación de presas en ausencia de depredadores y viceversa, es

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) - ex^2(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) - fy^2(t). \end{cases}$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f son no negativos. Tomar los valores $a = b = c = d = 1$, $e = 0'4$ y $f = 0'02$ y datos iniciales $x(0), y(0) > 0$.

c) **Ecuación de Van der Pol**: Esta ecuación describe el comportamiento de circuitos electrónicos no lineales

$$x''(t) + \alpha(x^2(t) - \beta)x'(t) + x(t) = 0.$$

Considerar, en primer lugar, $\alpha = 1$ y tomar datos iniciales próximos al origen para $\beta = -0'2$, $\beta = 0$ y $\beta = 0'2$. Fijar, a continuación, $\beta = 1$ y aumentar el valor de α desde $\alpha = 1$ hasta $\alpha = 8$.

d) **Ecuación de Duffing**: Esta ecuación describe el movimiento de una varilla bajo efectos magnéticos

$$x''(t) + \alpha x'(t) + x^3(t) - x(t) = 0.$$

Tomar, en primer lugar, $\alpha = 0$ y explorar las soluciones en torno a los 3 equilibrios del problema. Tomar, a continuación, $\alpha = 1$ y estudiar el cambio en el comportamiento de las soluciones.

e) **Sistema de Lorenz**: En 1963, tratando de analizar el comportamiento impredecible del tiempo meteorológico, el meteorólogo E. N. Lorenz obtuvo el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t). \end{cases}$$

Tomar $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ y dato inicial $(0, 5, 75)$ e ir aumentando desde $\rho = 0'1$ a $\rho = 30$. Observar la dinámica en los valores intermedios $\rho = 1$, $\rho = 13'962$ y $\rho = 24'74$. Tomar $\rho = 100'5$ y $N = 10000$ para observar una solución periódica. Mover ρ entre $99'524$ y $100'795$ (por ejemplo $\rho = 99'65$) y observar el cambio de dinámica.

16 Oscilador armónico forzado. Se considera el siguiente problema de valor inicial gobernado por la ecuación del *oscilador armónico forzado*

$$\begin{cases} x''(t) + 2\beta x'(t) + a^2x(t) = A\cos(wt) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Explorar, utilizando el *Método de Runge–Kutta* clásico de orden 4, el comportamiento de las soluciones en el intervalo $[0, 10]$ para las siguientes elecciones de los parámetros:

a) <u>Caso sin rozamiento</u>: $\beta = 0$. Tomar los valores $A = 1$, $a = 10$ y $w = 12$. Ir disminuyendo el valor de w hasta que $w = a$. Continuar disminuyendo a un poco más. ¿Qué ocurre cuando $w = a$?

b) <u>Caso con rozamiento</u>: $\beta > 0$. Tomar los valores $\beta = 1$, $A = 1$, $a = 10$. Comenzar con $w = 8$ e ir aumentando los valores hasta $w = 12$. ¿Qué se observa en las soluciones a medida que transcurre el tiempo? ¿Qué se observa cuando $w \simeq 9'8995$? Repetir lo anterior tomando $\beta = 15$. ¿Qué diferencia hay en las soluciones?