CH2、Recurrence

遞迴的介紹

考題重點(目錄)
(如何選擇適合的方法)

一、Substitution Method
二、Recursion Tree
三、Master Theorem
四、數學解(迭代、變數變換)

Substitution Method

一、Concept

1. 先猜一個 bound(經驗法則)
2. 假設子問題符合此 bound，證母問題亦符合此 bound

二、適用時機

分多、單邊、題目要求

三、例

T(n) = 2T([n/2]) +n，問 T(n) = O(?)

用 Substitution Method
猜 T(n) = O(n log n)
(想法：已知 g(n) = 2g(n/2) + n = O(n log n)，覺得有 floor 和無 floor 不會對 order 產生太大影響)
欲證：T(n) = O(n log n)，即證：存在 c, n0>0，使得當 n>=n0，T(n) <= c n log n
假設 T([n/2]) <= c[n/2] lg[n/2]，考慮：T(n) = 2T([n/2]) +n <= 2 c[n/2]log[n/2] (假設)
<= 2c n/2 log n/2 +n = cn log n – (1-c)n (取 c=2) <= c n log n
⇨ *T(n) = O(n log n)*

例(97 成大)：

T(n) = 2T([sqrt(n)]) + log n，用 O 表示

用 Substitution Method

Recursion Tree

一、用到的 term：

T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n

母問題 子問題 成本

子問題 n 系數相加

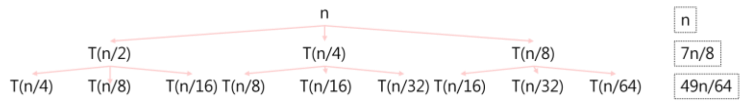
二、適用時機

子問題個數 >=2 個，子問題：T(n/a)

三、r<1 型

例：T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n，求 Theta

1. *建立 Recursion Tree*



T(n)=n + 7n/8 + 49n/64 + … + c

2. *先求 upper bound(O)：T(n) = n + 7n/8 + 49n/64 + … + c <= n + 7n/8 + … = n/(1-7/8) = 8n*
   T(n) = O(n)
3. *再求 lower bound(Omega)：T(n) = n + 7n/8 + 49n/64 + … + c >= n => T(n) = Omega(n)*

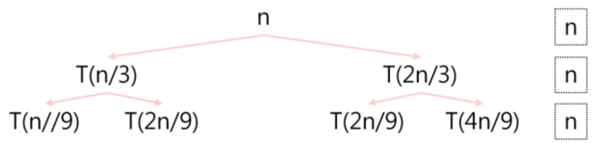
⇨ *T(n) = Theta(n)*

四、r=1 型

例(100 政大)(90、91 台大)：

$T(n) = T(n/3)+T(2n/3)+n$

1. *建立 Recursion Tree*



   $T(n) = n+n+\ldots+c$

2. *求 bound*
   (1) *先求 upper bound(O)*
   $T(n) = n+n+\ldots+c <= n+n+\ldots+n = n*h = n(\log_{3/2}n + 1)) => O(n \lg n)$
   $(2/3)kn = 1 => n(3/2)k => k= \log_{3/2}n => h=k+1 = \log_{3/2}n + 1$
   (2) *再求 lower bound(Omega)*
   $T(n) = n+n+\ldots+c >= n*h' = n(\log_3 n+1) => T(n)=Omega(n \lg n)$

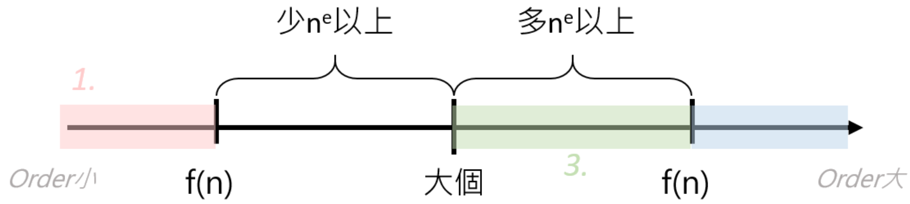
⇨ *$T(n) = Theta(n \lg n)$*

Master Theorem

(n^{logba} 稱其為大個，而 Master Theorem 即與大個比較)

一、易錯題目

1. 若存在 e>0，使得 $f(n)=O(n^{logba - e})$，則 $T(n)=Theta(n^{\log_b a})$
2. 若存在 e>0，0<c<1，使得 $f(n)=Omega(n^{logba + e})$，且 $af(n/b)<cf(n)$，則 $T(n)=Theta(f(n))$
3. 若 $f(n)=Theta(n^{logba}*\lg^k n)$, $k>=0$，則 $T(n)=Theta(n^{logba}*\lg^{k+1} n)$



例：

1. (100 政大)：$T(n) = 7T(n/2) + n2$
2. (99 交大)：$T(n) = 3T(n/4)+ n \lg n$
3. (98 交大)：$T(n) = 3T(n/2) + n \lg n$
4. $T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$

1. *n^{lg7}, $f(n)=n^2$，存在 $e=\lg 7 - 2$，使得 $n^2=O(n^{lg7-e})$，則 $T(n)=Theta(n^{lg7})$*
2. *n^{log43}, $f(n)=nlgn$，存在 $e=1-\log_4 3$, $c=3/4$，使得 $nlgn=Omega(n^{log43}+e)$，且 $3(n/4)\lg(n/4)<nlgn$，則 $T(n)=Theta(nlgn)$*
3. *n^{lg3}, $f(n)=nlgn$，存在 $e=\lg 3-1.0001$，使得 $nlgn=O(n^{lg3-e})$，則 $T(n)=Theta(n^{lg3})$*
4. *(不可用 Master Theorem)*