HASHING

Michael Tsai

2017/4/25

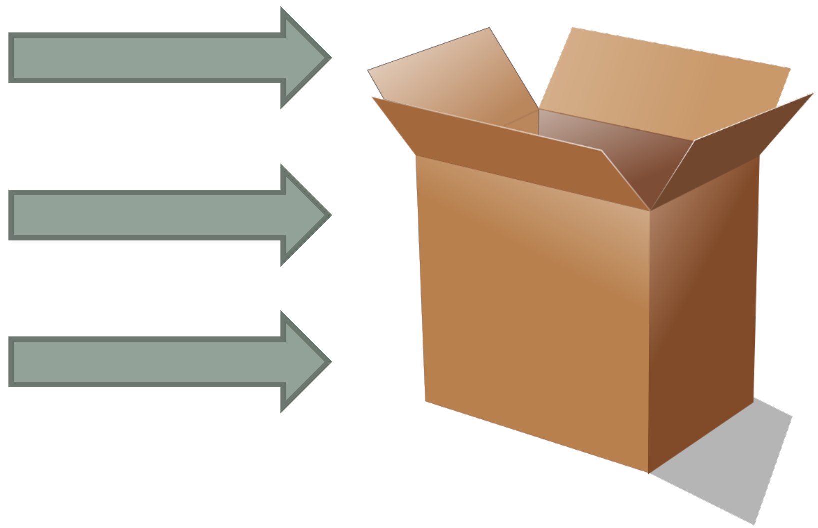
有沒有一種天方夜壇

(key, data)

Insert

Search

Delete



=O(1)

神秘的資料結構

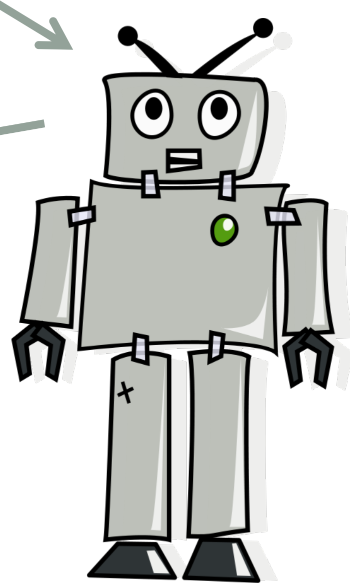
Hint: “以空間換取時間”

概念

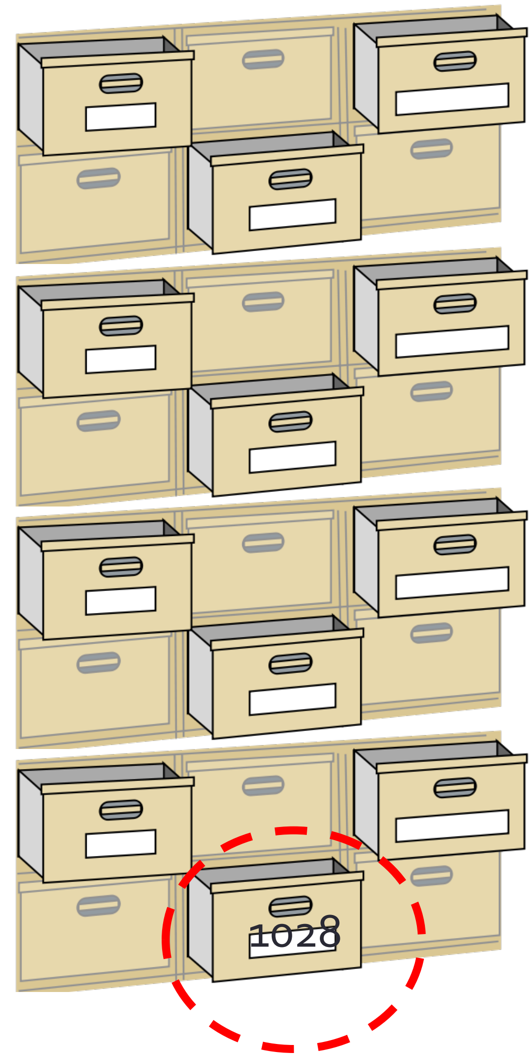
問: "菜瓜布"的資料去哪找?
("菜瓜布", 資料)

管理員: "菜瓜布" 對應
到1028號櫃子

管理員



很多很多有編號的櫃子



如果箱子夠多, 則花費在一個箱子裡面尋找的時間=O(1)

概念

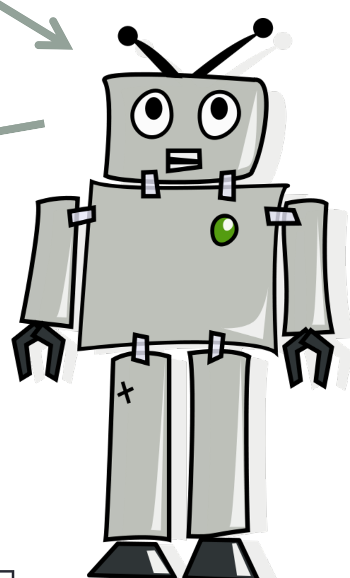
Hash table

很多很多有編號的櫃子

問: “菜瓜布”的資料去哪找?

Hash function: h(k)

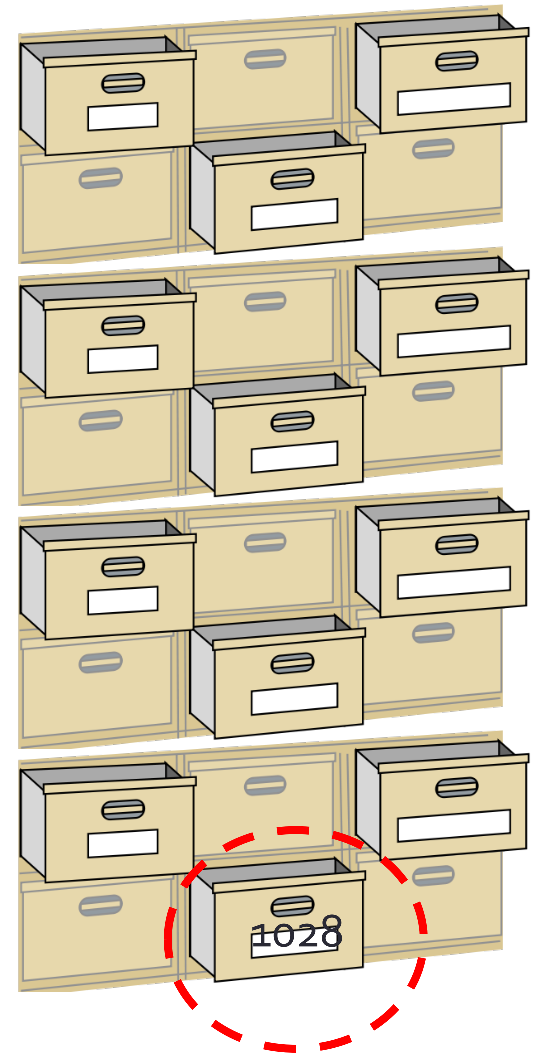
管理員



管理員: “菜瓜布” 對應
到1028號櫃子

key: 拿來當索引的東西
例如: “菜瓜布”
T=|U|: 所有可能的key的數目
n=|K|: 所有要存入的pair的數目

Key density: n/T
Load density (load factor): n/sm

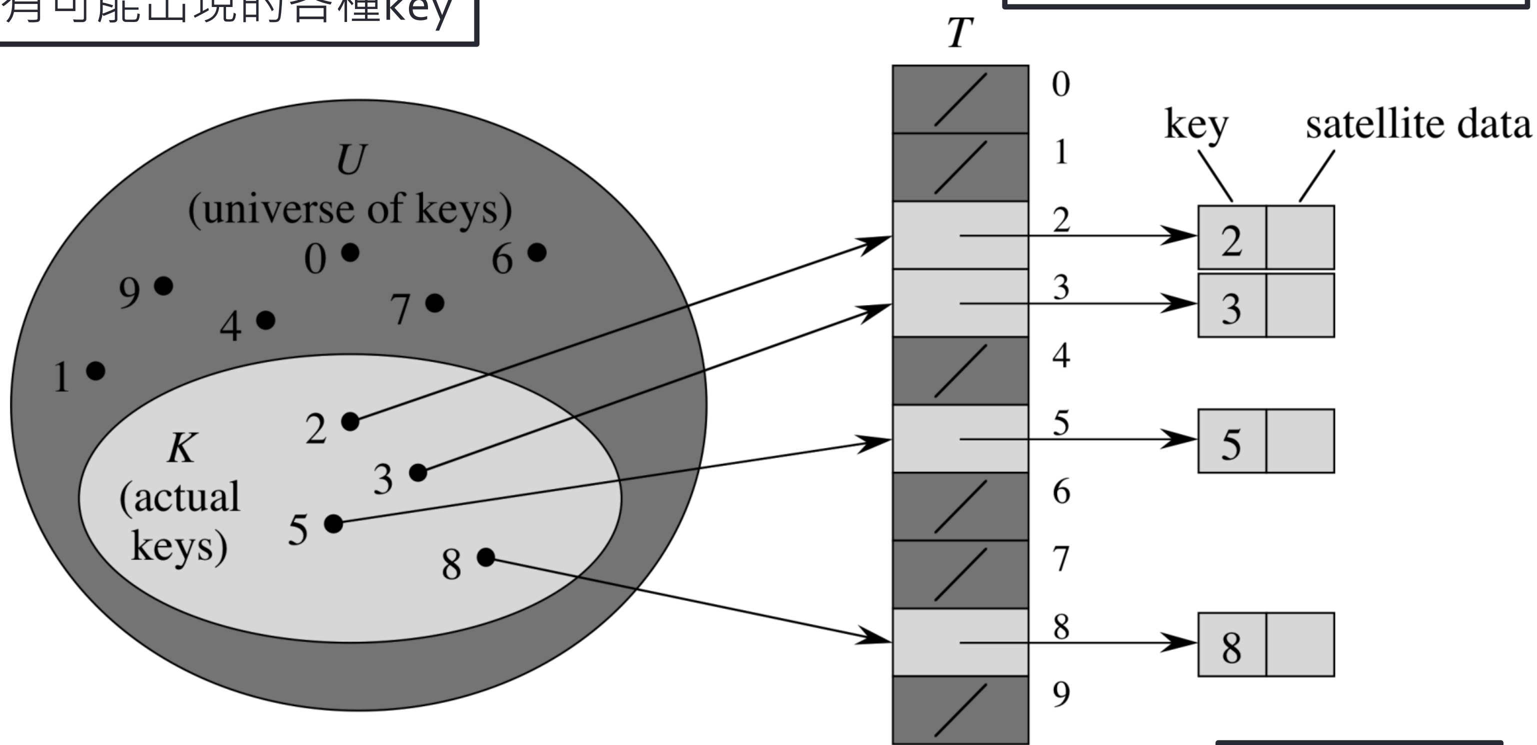


櫃子數目: m
每個位子可以放的資料數:s
sm: 所有可以放數櫃子資料數目

概念: Direct-address Table

很多很多有編號的櫃子

U: 所有可能出現的各種key



裡面存資料

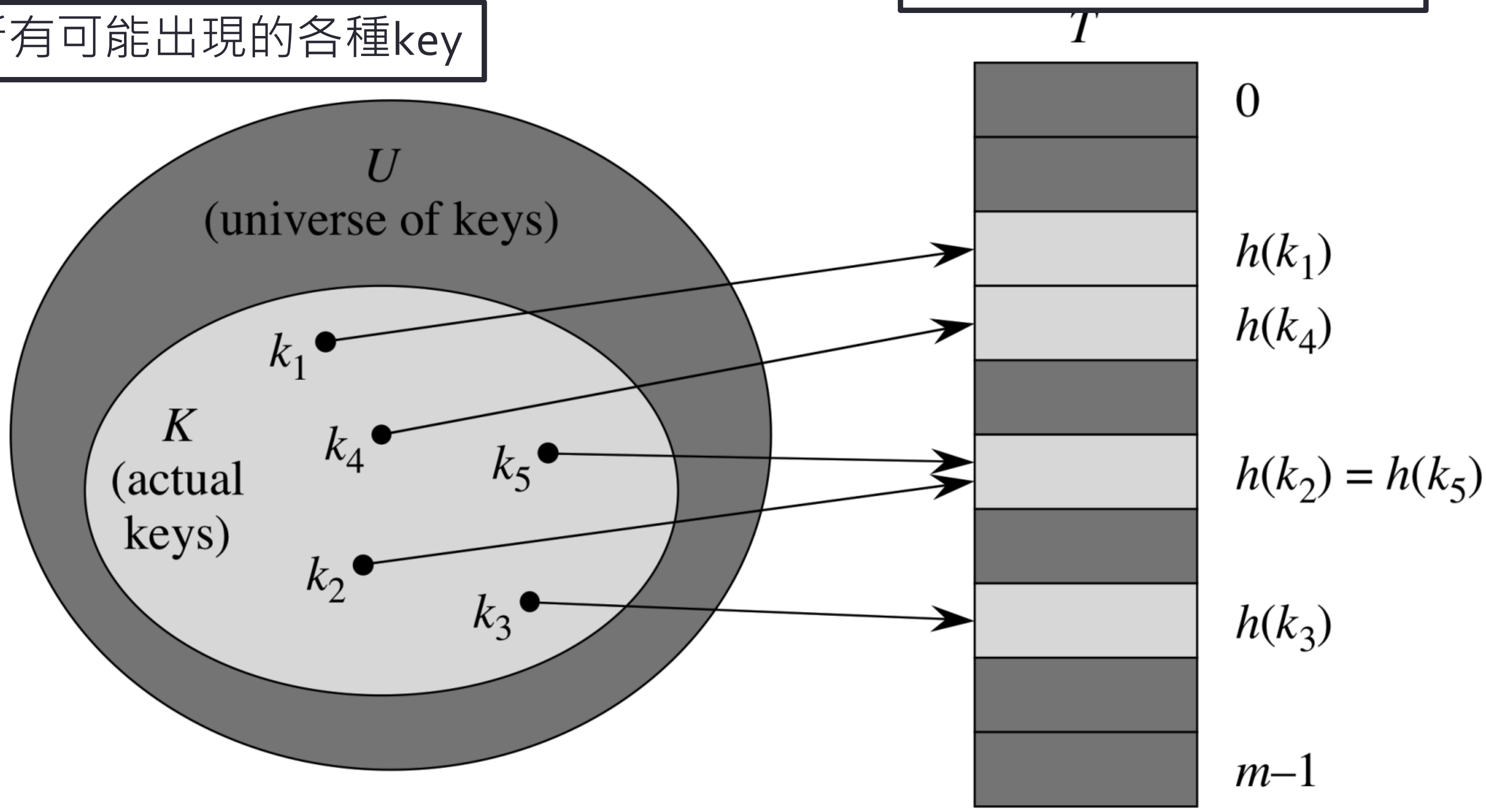
K: 結果真的出現在input的各種key

如果$|K| \ll |U|$，櫃子就浪費很多空間

概念：Hash Table

很多很多有編號的櫃子

U: 所有可能出現的各種key



K: 結果真的出現在input的各種key

把key做一次轉換以後得到"櫃子的編號"

櫃子數目變少→有可能有兩個key對應到同一個櫃子

一些定義

- h(k): hash function
- hash function 把key對應到一個數值(通常為櫃子編號)

- 有可能把不同的key對應到同一個數值
- (但是沒關係)
- 如果$h(k_1) = h(k_2)$, 則k_1, k_2 are synonyms with respect to h.

- 最簡單的hash function: k%m (k mod m)

- collision: 要把資料存進某櫃子的時候, 該櫃子已經有東西了
- overflow:要把資料存進某櫃子的時候, 該櫃子已經滿了
- if s==1, 則每次collision都會造成overflow (通常s==1)

為什麼是O(1)

- 當沒有overflow的時候:

- 計算hash function的時間: O(1)
- 進到某一個櫃子去insert, delete, search的時間都是O(1)
- worst case為尋找s個空間的時間: 固定

- 所以為O(1)

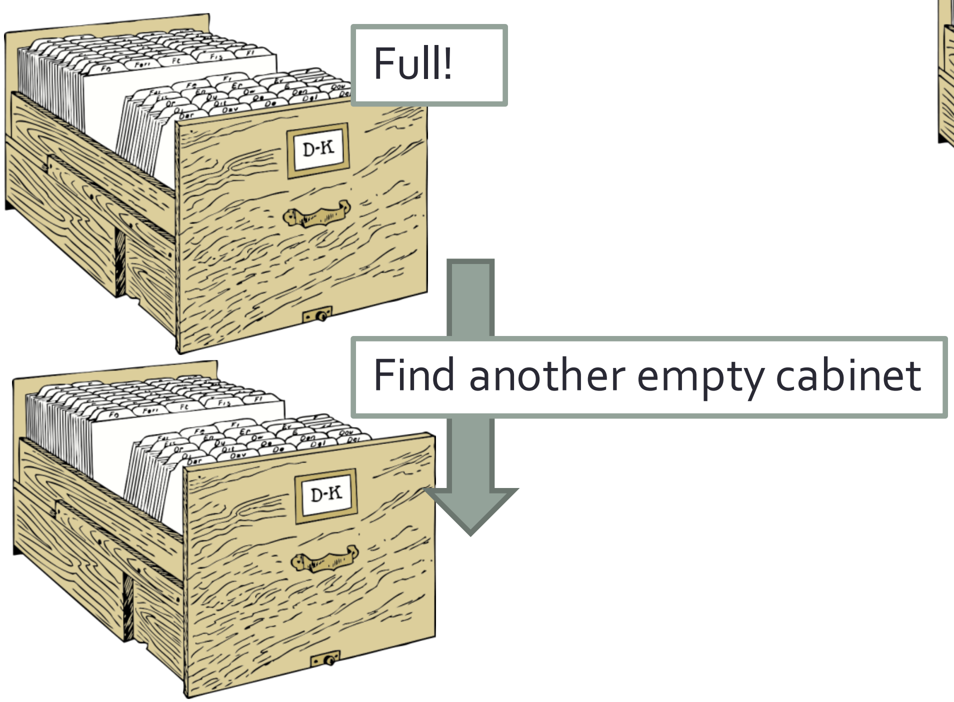
- 剩下的問題:
- (1) 當collision發生的時候怎麼處理?
- (2) 怎麼implement一個好的hash function?

Collision 處理

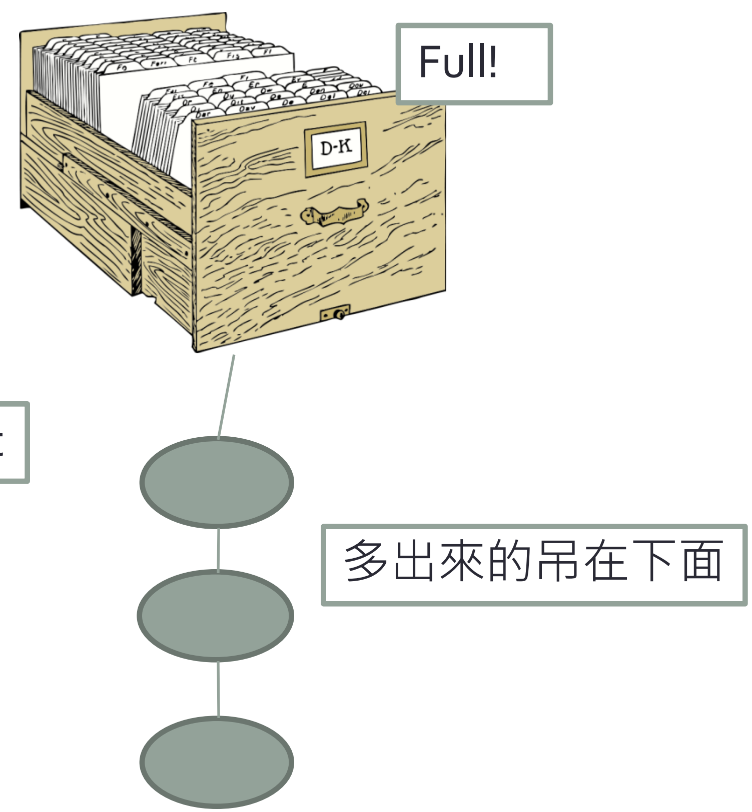
注意: 要確保能夠下次也能找到同一個地方!

- 兩種常用處理collision的方法:

(1) Open addressing



(2) Chaining



Open addressing – Linear probing

- 有好幾種方法:
- (1) Linear probing
- T[(h(k)+1)%m], T[(h(k)+2)%m], …

- Insert的時候順著往下找 (找的動作又叫做probe):
- 一直找到
  1. 有空位 →填入
  2. 回到原來的位置 h(k)了, 則沒有空位→可能要擴大.

  (load factor 永遠小於1)

- Search的時候, 一樣是從T[h(k)]開始往下找, 一直找到
  1. 有空位→k不在table裡
  2. 找到了, k在T[(h(k)+j)%m]的位置
  3. 回到原本的位置h(k)了, k不在table裡面

Open addressing

- 好處:
  - 利用hash table裡面沒有儲存東西的空間
  - 不用使用用記憶體來存pointer, 省下來的記憶體可以開更大的hash table

- 壞處:
  - 尋找overflow出去的element需要花額外的時間(不是O(1)了)
  - 讓在櫃子裏面的key容易集結(clustering)在一起
    →平均尋找時間更長

Open addressing – General Form

- 我們把hash function h變成以下的形式:
- h: $U \times \{0,1,\ldots,m-1\}$
- 也就是我們probe的順序為 (probing sequence)
- $\langle h(k,0), h(k,1), h(k,2), h(k,m-1) \rangle$
- 以上為$\langle 0,1,2,\ldots,m-1 \rangle$的排列組合

- 所以Linear probing的可以寫成:
- h(k,i)=(h'(k)+i))%m
- h'(k)是原本的hash function
- Linear probing總共只有m種probing sequence

Open addressing – Linear probing

Input sequence of keys: {8,16,18,5,31,15}

Primary clustering:
某些open addressing的probing方法會產生一長串填滿的格子

[0]						
[1]	8	8	8	8	8	8
[2]		16	16	16	16	16
[3]					31	31
[4]			18	18	18	18
[5]				5	5	5
[6]						15

Open addressing – Quadratic probing

- $h(k,i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2)\%\mathrm{m}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2$ 為正常數

- 例1: 我們可以用$h(k,i) = (h'(k) + i^2)\%\mathrm{m}$
- $\langle h'(k)\%m, (h'(k) + 1^2)\%m, (h'(k) + 2^2)\%m, \ldots, (h'(k) + (m-1)^2)\%m \rangle$

- 例2: 如果$m = 2^n$, 則我們可以用$h(k,i) = \left(h'(k) + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{2}\right)\%m$
- $\langle h'(k)\%m, (h'(k) + 1)\%m, (h'(k) + 3)\%m, (h'(k) + 6)\%m, (h'(k) + 10)\%m, \ldots \rangle$

- 用這些方法可以使得clustering的現象較為減輕: Secondary Clustering
- 只有當一開始的hash function產生一樣的位置才會造成一樣的probing sequence

- $h(k_1, 0) == h(k_2, 0)$ implies $h(k_1, i) == h(k_2, i)$

- 和linear probing一樣, 只有m種probing sequence (開始的h'(k)決定sequence)

Open addressing – Double hashing

- $h(k,i) = \left(h_1(k) + i\ h_2(k)\right)\%m$
- 為open addressing最好的方法之一

- 例子: $h_1(k) = k\ \%\ m, h_2(k) = 1 + \left(k\%(m-1)\right)$
- 如果k=123456, m=701, $h_1(k) = 80, h_2(k) = 257$
- 一開始找T[80], 後面每隔257格找一次

- 關鍵: 即使$h_1(k_1) == h_1(k_2), h_2(k_1) == h_2(k_2)$ 應該不成立
- 因此probing sequence有m^2種!
- (通常須要求$\mathrm{m} = 2^n$)

- Double hashing是最接近"uniform hashing"的方法
- Uniform hashing: 任何probing sequence出現的機率是一樣的
- 也就是$\langle 0,1,2,\dots,m-1\rangle$的任一種排列組合出現的機率是一樣的

來做一些分析(沒有推導)

- 在Uniform Hashing的假設下:
- Expected number of probes:
- 尋找一個key時平均所需要找(比較)的key個數
- 因為其他的operation都只需要O(1), 所以這個動作決定了search的time complexity
- α: load factor= n/m < 1

第一次一定要找

第二次有α機率要找

- 失敗(找到空位): $\frac{1}{1-\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots$
- 成功: $\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$

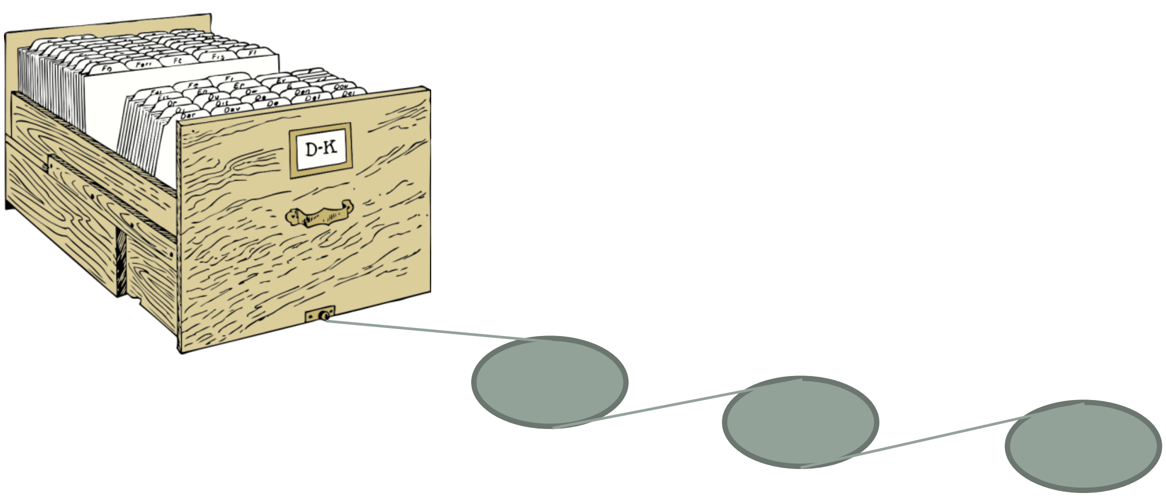
第三次有α^2機率要找

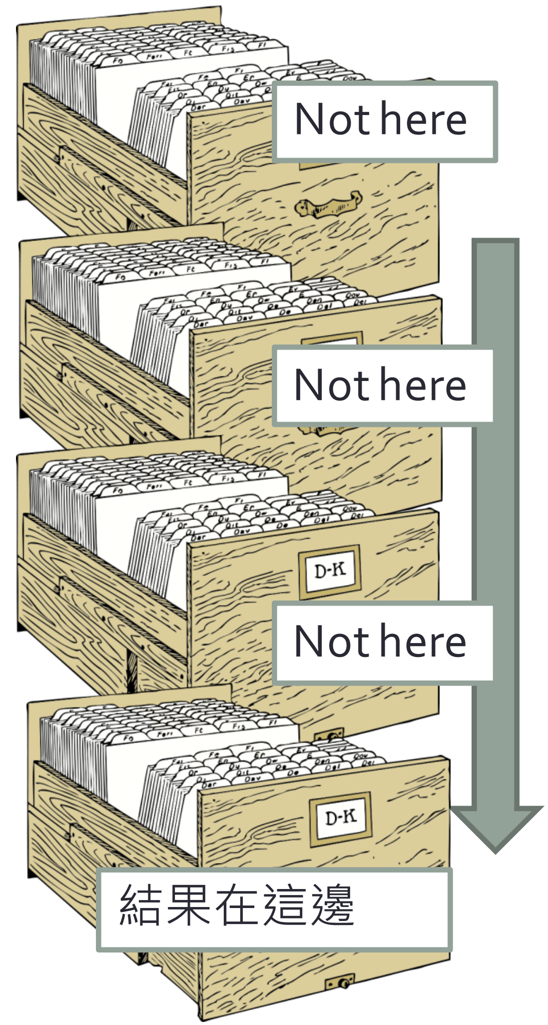
- (詳細的證明參見 Cormen p.274-276)

- Worst case?
- 全部都連在一起, 全部都填滿了
- O(n)

Chaining

- 之前的方法的缺點?
- 尋找過程中, 需多其他的資料的hash值和現在要找的key k的hash值根本就不一樣
  →有點冤枉
- 所以採取"掛勾"的方法
- 每個櫃子是一個linked list
- 搜尋的時候只會找掛在下面的 (h(k)都一樣)





Chaining – Worst case

- Worst case:
- 全部都塞在同一個櫃子下面的linked list
- time complexity這樣是?
- O(n)
- 小小的進步: 底下可以用binary search tree (之後有balanced 版)
- 可以進步到$O(\log n)$

Chaining - Expected performance

- 每個櫃子的chain上面平均有幾個pair?
- n: 總共存入的資料pair數目
- m: 櫃子數目
- 所以假設使用simple uniform hashing的話
- 也就是存到每個櫃子的機率相等
- 平均一個chain有n/m個pair (α個pair)
- 這也是如果找不到的話, 平均需要比較的次數
- 加上hash本身要花的時間, 總共為$\Theta(1+\alpha)$

- 如果是找得到的話, 平均需要比較的次數為$1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2n}$
- 加上hash本身要花的時間, 總共仍為$\Theta(1+\alpha)$
- (詳細證明可見Cormen p.260)

- 因此總體來說, 只要$n=O(m), \alpha=\frac{n}{m}=\frac{\mathrm{O(m)}}{\mathrm{m}}=\mathrm{O}(1)$
- n為m的一個比例時, 總時間可為constant time!

Hash function

- 先要知道的事情:
- 不可能讓所有key都map到不同的櫃子
- (因為|K|遠大於櫃子數目)

- 目標:
- (1) 希望隨便取一個key, 則平均來說它存到任何一個櫃子的機率都是1/m (m為櫃子數目) (都是一樣的)
- (2) 計算hash function的時間為O(1)

- 當(1)符合時, 此hash function稱為simple uniform hashing (hash function)

一些hash function的例子

- 複習: h(k)把k轉成另外一個數字 (櫃子編號)

- (1) Division: h(k)=k%D
- 則結果為0 ~ D-1 通常我們可以把D設為櫃子數目

- (2) Mid-square: h(k)=$bits_{i,i+r-1}(k^2)$
- 則結果為0 ~ 2^r-1, 所以通常櫃子數目為2^r

一些hash function的例子

- (3) shift folding
- 用例子解釋:
- k=12320324111220
- 每隔幾位數切一份. 例如, 三位數: (櫃子有1000個)
- {123, 203, 241, 112, 20}
- h(k)=(123+203+241+112+20)%1000=699

- (4)folding at the boundaries
- {123,302,241,211,20}
- h(k)=(123+302+241+211+20)%1000=897

一些hash function的例子

- (5) digit analysis
- 假設先知道所有的key了
- 此時就可以尋找一個比較好的hash function
- 假設k有5位數, 我們有100個櫃子
- 則需要把5位數轉換成2位數
- 則我們可以每次選某一位數來分類成10組
- 最不平均的3個位數可以刪掉
- (記得: 最好可以使得分到某櫃子的機率都相等)

- (6) Multiplication Method: 取 0<A<1, then h(k)=$\lfloor m\ (kA\ \%\ 1) \rfloor$
- (參看 Cormen p.264)

Key是string怎麼辦?

- 轉成數字! (然後再使用hash function)

- 可不可以把不同字串轉成一樣數字?
- 答: 可以! 反正hash function一樣已經會把不同key轉成一樣的櫃子號碼了

- 方法:
- (1) 把所有字串的character(數字)加起來, 進位的通通丟掉. (類似checksum)
- (2)把所有字串的character (數字)分別往左位移i格, i為該character在字串中的位置, 然後通通加起來.

Dynamic hashing

- 觀察: 當n/m比較大以後, O(1)就開始崩壞 (往O(n)方向移動)

- 應變: 所以要隨時觀察 n/m, 當它大過某一個threshold時就把hash table變大

- 觀察: 把hash table變大的時候,
- 需要把小hash table的東西通通倒出來,
- 算出每一個pair在大hash table的位置
- 然後重新放進大hash table

- 有個可憐鬼做insert正好碰到應該hash table rebuild的時候, 他就會等非常非常久. T_T

Dynamic hashing

- 目標: 重建的時候, 不要一次把所以重建的事情都做完
- 或許, 留一些之後慢慢做?
- 每個operation的時間都要合理

- 又叫做extendible hashing

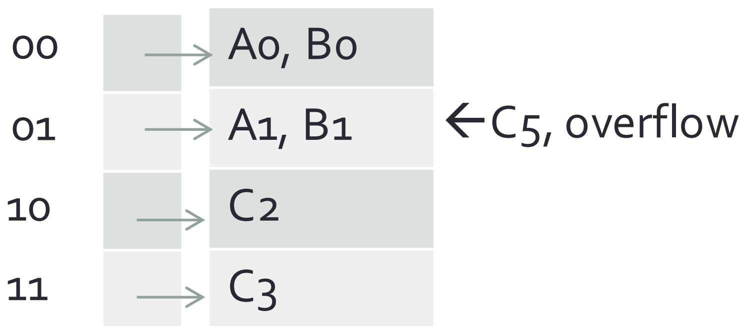
例子

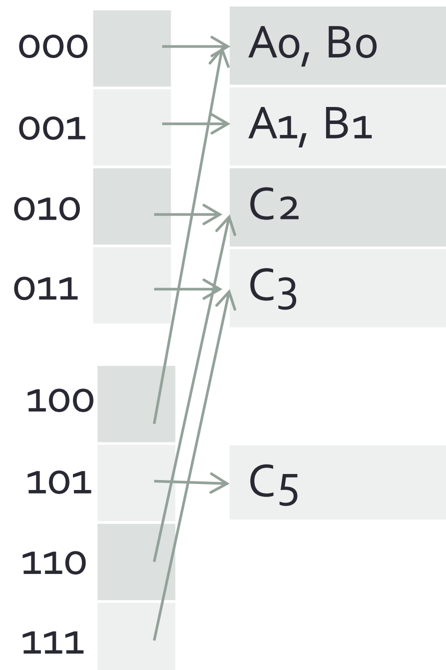
k	h(k)
A0	100 000
A1	100 001
B0	101 000
B1	101 001
C1	110 001
C2	110 010
C3	110 011
C5	110 101

h(k,i)=bits 0-i of h(k)
Example:
h(A0,1)=0
h(A1,3)=001=1
h(B1,4)=1001=9

Dynamic hashing using directories

directory depth=
number of bits of the index of the hash table





Insert C5

h(C5, 2)=01=1

k	h(k)
A0	100 000
A1	100 001
B0	101 000
B1	101 001
C1	110 001
C2	110 010
C3	110 011
C5	110 101

we increase d by 1
until not all h(k,d) of the keys in the cell are the same

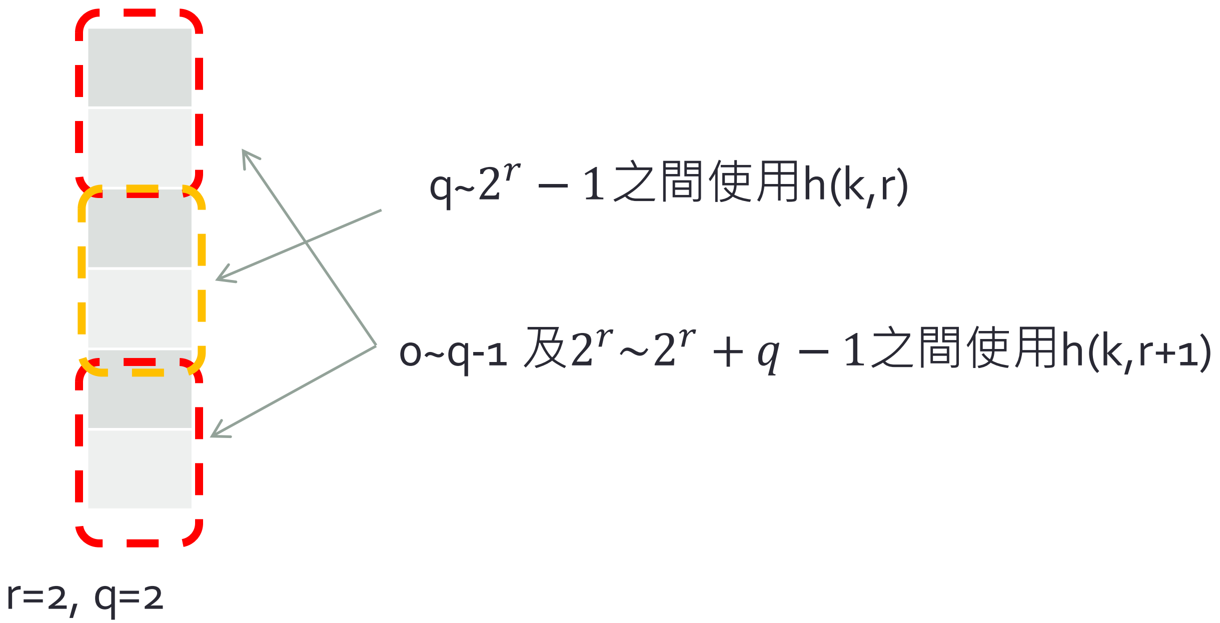
動腦時間:
如果原本的要加入C1呢?
如果第二步驟後加入A4呢?答案: Horowitz p. 412-413

Dynamic hashing using directories

- 為什麼比較快?
- 只需要處理overflow的櫃子
- 如果把directory放在記憶體, 而櫃子資料放在硬碟
- 則
- search只需要讀一次硬碟
- insert最多需要讀一次硬碟(讀資料, 發現overflow了), 寫兩次硬碟(寫兩個新的櫃子)
- 當要把hash table變兩倍大時, 不需要碰硬碟(只有改directory)

Directoryless Dynamic hashing

- 假設hash table很大, 但是我們不想一開始就整個開來用(initialization會花很大)
- 用兩個變數來控制的hash table大小: r, q
- hash table開啟的地方為 0, $2^r + q - 1$之間



Directoryless Dynamic hashing

- 每次輸入的時候, 如果現在這個櫃子滿了
- 則開一個新的櫃子: $2^r + q$
- 原本q櫃子裡面的東西用
- h(k,r+1)分到q和$2^r + q$兩櫃子裡
- 注意有可能還是沒有解決問題
- 多出來的暫時用chain掛在櫃子下面

問:再加入C1呢? (Horowitz p.415)

00	B4, A0
01	A1, B5
10	C2
11	C3

r=2, q=0

insert C5, full

000	A0	
01	A1, B5	C5
10	C2	
11	C3	
100	B4	

r=2, q=1

k	h(k)
A0	100 000
A1	100 001
B4	101 100
B5	101 101
C1	110 001
C2	110 010
C3	110 011
C5	110 101

Related Reading

- Cormen ch 11 (11.1, 11.2, 11.3 except 11.3.3, 11.4)
- Horowitz p. 410-416