¡Por supuesto! Aquí tienes más ejemplos de singularidades esenciales y singularidades removibles para que puedas entender mejor la diferencia entre ellas.

Singularidades Esenciales

Ejemplo 1: $e^{1/z}$

- **Función**: $f(z) = e^{1/z}$
- **Singularidad en**: $z = 0$
- **Comportamiento**: Cuando z se aproxima a 0, $e^{1/z}$ puede tomar valores extremadamente grandes, pequeños o incluso complejos, dependiendo de la dirección desde la que z se aproxima a 0.

Ejemplo 2: $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$

- **Función**: $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$
- **Singularidad en**: $z = 0$
- **Comportamiento**: Cerca de $z = 0$, la función $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ oscila infinitamente y toma valores arbitrarios, sin un patrón discernible.

Ejemplo 3: $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

- **Función**: $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$
- **Singularidad en**: $z = 0$
- **Comportamiento**: Similar al ejemplo anterior, cerca de $z = 0$, $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ también oscila infinitamente y toma valores arbitrarios.

Ejemplo 4: $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$

- **Función**: $f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$
- **Singularidad en**: $z = 0$
- **Comportamiento**: La función $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$ presenta aún más complejidad porque no solo oscila, sino que también tiene discontinuidades (puntos donde la función se va al infinito).

Singularidades Removibles

Ejemplo 1: $\frac{\sin(z)}{z}$

- **Función**: $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$
- **Singularidad en**: $z = 0$
- **Comportamiento**: La función tiene una indeterminación $\frac{0}{0}$ en $z = 0$. Sin embargo, si redefinimos $f(0) = 1$, la función se vuelve analítica (bien comportada) en todo el dominio.
- **Redefinición**: $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Ejemplo 2: $\frac{z^2 - 1}{z - 1}$

- **Función**: $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z - 1}$
- **Singularidad en**: $z = 1$

- **Comportamiento**: La función tiene una indeterminación en $z = 1$. Sin embargo, podemos simplificar $f(z)$ como: $$f(z) = \frac{(z - 1)(z + 1)}{z - 1} = z + 1 \quad \text{para} \quad z \neq 1$$ Redefiniendo $f(1) = 2$, la función se vuelve analítica en todo el dominio.
- **Redefinición**: $f(z) = \begin{cases} z + 1 & \text{si } z \neq 1 \\ 2 & \text{si } z = 1 \end{cases}$

Ejemplo 3: $\frac{\cos(z) - 1}{z^2}$

- **Función**: $f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^2}$
- **Singularidad en**: $z = 0$
- **Comportamiento**: La función tiene una indeterminación $\frac{0}{0}$ en $z = 0$. Sin embargo, utilizando la expansión en serie de Taylor de $\cos(z)$ alrededor de $z = 0$: $$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$ $$\frac{\cos(z) - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \cdots$$ Redefiniendo $f(0) = -\frac{1}{2}$, la función se vuelve analítica.
- **Redefinición**: $f(z) = \begin{cases} \frac{\cos(z) - 1}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Resumen

- **Singularidades Esenciales**: Caracterizadas por un comportamiento impredecible y altamente oscilante. Ejemplos incluyen $e^{1/z}$, $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$, y $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$.
- **Singularidades Removibles**: Pueden ser eliminadas mediante una redefinición adecuada de la función en el punto de la singularidad. Ejemplos incluyen $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{z^2 - 1}{z - 1}$, y $\frac{\cos(z) - 1}{z^2}$.

Estos ejemplos deberían ayudarte a entender mejor las diferencias y comportamientos de estos tipos de singularidades. ¡Buena suerte en tu examen!