P.PORTO
ESCOLA
SUPERIOR
DE TECNOLOGIA
E GESTÃO

Trabalho Prático de

Matemática Discreta

2024/2025

Trabalho Elaborado por:

Grupo M

8240231 David Sérgio Ferreira Alves

8240216 Pedro Afonso Farinha Gomes Lima Paraty

8240266 Gabriel Alexandre Meireles Moreira

8240839 Samuel Silva da Cunha

Curso de:

Licenciatura em Segurança Informática e Redes de Computadores

Docentes:

Eliana Costa e Silva (eos@estg.ipp.pt)

Isabel Cristina Duarte (icd@estg.ipp.pt)

Felgueiras, 1 de maio de 2025

Conteúdo

Pergunta 1

Conjuntos Escolhidos

Seja o conjunto universo:

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$$

Escolheram-se os seguintes subconjuntos:

$$A = \{3, 5, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

Estes conjuntos cumprem:

- $5 \leq \#A < 10$
- $\#B > 15$
- $A \neq B$, $A \neq U$, $B \neq U$

Resolução das Alíneas

a) Cardinalidade:

$$\#A = 7, \quad \#B = 17$$

b) Complemento de B:

$$\bar{B} = \{1, 19, 20\}$$

c) União:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

d) Interseção:

$$A \cap B = \{3, 5, 9, 11, 13, 17\}$$

e) Diferença $B - A$:

$$B - A = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

f) Diferença simétrica $A \oplus B$:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19\}$$

g) $\overline{A \oplus B} \cup (A - B)$:

Calculou-se primeiro o $\overline{A \oplus B}$:

$$\overline{A \oplus B} = U - A \oplus B = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 20\}$$

De seguida:

$$A - B = \{19\}$$

Por fim, realizou-se a reunião

$$Resultado final : \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 19, 20\}$$

h) Produto cartesiano $B \times A$:

Como existem no total 119 pares (17x7), selecionaram-se apenas os 5 primeiros pares:

$$\{(2, 3), (2, 5), (2, 9), (2, 11), (2, 13), \ldots\}$$

i) Produto cartesiano $A \times A \times A$:
Como existem no total 343 trios (7^3), selecionaram-se apenas os 5 primeiros trios:

$$\{(3,3,3),(3,3,5),(3,3,9),(3,3,11),(3,3,13),\ldots\}$$

Pergunta 2

Primeiro definimos o valor de β como o último algarismo do número de estudante. Considerando que o número de estudante seja 8240266, temos que:

$$\beta = 6$$

Agora, escolhemos $n = 30$, de forma que satisfaça a condição $50 + \beta < 2n < 100 - \beta$. Ou seja, temos:

$$50 + 6 < 2n < 100 - 6 \quad \Rightarrow \quad 56 < 2n < 94 \quad \Rightarrow \quad 28 < n < 47$$

a) Queremos calcular o somatório:

$$\sum_{j=\beta+2}^{n} \left(\frac{-2\beta - 1}{5} \right)^j$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\sum_{j=\beta+2}^{n} \left(\frac{-2\beta - 1}{5} \right)^j = \sum_{j=6+2}^{30} \left(\frac{-2 \cdot 6 - 1}{5} \right)^j$$

Ou seja:

$$\sum_{j=8}^{30} \left(\frac{-12 - 1}{5} \right)^j$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\sum_{j=8}^{30} \left(\frac{-12 - 1}{5} \right)^j = 2.032 \times 10^{12}$$

A sequência dos termos forma uma progressão geométrica com razão $\frac{-13}{5}$

b) Queremos calcular o somatório:

$$\prod_{i\in C}\left(\frac{\beta+1}{i}-1\right)^4, \quad C=\{5m\in\mathbb{Z}: m=1,\ldots,M\}, \quad M=\min\left(5+\beta, \left\lceil\frac{100}{\beta+1}\right\rceil\right)$$

Para $\beta=6$ e $n=30$, temos:

$$\prod_{i\in C}\left(\frac{6+1}{i}-1\right)^4, \quad C=\{5m\in\mathbb{Z}: m=1,\ldots,M\}, \quad M=\min\left(5+\beta, \left\lceil\frac{100}{\beta+1}\right\rceil\right)$$

$$=$$

$$\prod_{i\in C}\left(\frac{7}{i}-1\right)^4, \quad C=\{5m\in\mathbb{Z}: m=1,\ldots,M\}, \quad M=\min\left(5+\beta, \left\lceil\frac{100}{\beta+1}\right\rceil\right)$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\prod_{i\in C}\left(\frac{7}{i}-1\right)^4, \quad C=\{5m\in\mathbb{Z}: m=1,\ldots,M\}, \quad M=\min\left(5+\beta, \left\lceil\frac{100}{\beta+1}\right\rceil\right) = 8.513^{-9}$$

c) Queremos calcular o somatório:

$$\prod_{k=1}^{n-15}\left(3\times\sum_{j=n-5}^{n}\left(\left\lfloor 1+\frac{j+k}{200}\right\rfloor-\left\lceil\frac{6!}{\beta+1}\right\rceil\right)\right)$$

Para $\beta=6$ e $n=30$, temos:

$$\prod_{k=1}^{30-15}\left(3\times\sum_{j=30-5}^{30}\left(\left\lfloor 1+\frac{j+k}{200}\right\rfloor-\left\lceil\frac{6!}{6+1}\right\rceil\right)\right)$$

$$=$$

$$\prod_{k=1}^{15}\left(3\times\sum_{j=25}^{30}\left(\left\lfloor 1+\frac{j+k}{200}\right\rfloor-\left\lceil\frac{6!}{7}\right\rceil\right)\right)$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\prod_{k=1}^{15}\left(3\times\sum_{j=25}^{30}\left(\left\lfloor 1+\frac{j+k}{200}\right\rfloor-\left\lceil\frac{6!}{7}\right\rceil\right)\right) = -7.629\times 10^{48}$$

Pergunta 3

Alínea A

Com base nos números de estudante **8240231** e **8240266**, foram utilizados os valores de $\beta = 1$ e $\sigma = 66$.

Foram geradas 20 coordenadas tridimensionais (X, Y, Z) aleatórias no intervalo $[-27, 27]$, utilizando a função `rand()`.

As coordenadas obtidas foram:

```
  13.421736  -4.8380814   5.8564422
  23.016656   3.6029409   3.8428503
 -20.253562  12.3078000 -12.5400610
 -13.218089   6.7601487 -20.7499460
   6.031822   9.6333639  -9.0714855
 -25.602966   0.9421284  -5.8488845
 -13.966893   0.3479484  -4.1250492
 -11.373871 -22.2051660   6.5495615
  -8.343084  11.1502850   1.1419515
 -11.499835   8.1150934 -22.2407920
  -2.706678  12.0271670  21.4747000
   0.370086   1.2580726   3.2235170
   3.333458  -1.7184959  15.0905520
  -4.012889 -13.7075730  22.8394750
 -21.595973  -1.7376222  -5.6673126
   4.293108 -12.8080030  -3.4506722
 -13.011687  -4.6489286  -7.5603900
  10.329055  14.3470370  -7.7076919
```

```
 14.544359   2.5792231 -21.8036410
  8.431460 -13.7940900   1.5288673
```

Alínea B

Com base nas coordenadas geradas, foi construída a matriz de adjacência do grafo tridimensional, onde cada aresta entre dois vértices i e j foi definida apenas se a distância euclidiana entre os pontos for inferior ao valor de $\sigma = 66$. O peso das arestas corresponde à distância entre os pontos.

A matriz de adjacência resultante (valores arredondados para 7 casas decimais) contém a maioria dos elementos a zero, indicando poucas conexões no grafo. Exemplo:

```
...
(10,4) = 2.6478092
(15,6) = 4.8239020
(4,10) = 2.6478092
(6,15) = 4.8239020
...
```

Todos os outros elementos da matriz são zero, o que indica a existência de apenas duas arestas no grafo (ambas bidirecionais).

Alínea C

A determinação do caminho mais curto entre dois nós do grafo foi realizada com o algoritmo de Dijkstra. O nó de origem foi determinado pelo último algarismo do número de estudante ($\beta = 1$ e o nó de destino pelo valor de $\sigma = 66$). No entanto, como , foi aplicado o seguinte critério de ajuste:
$\sigma = 10$ (caso $\sigma > 20$).

Como o valor da distância entre os nós e foi infinito, conclui-se que não existe caminho entre os dois pontos selecionados:

"Não existe caminho entre os pontos selecionados."

Assim, o grafo gerado com os dados definidos não contém um caminho entre os vértices indicados.

Bibliografia

[ESTG-IPP(2025)] ESTG-IPP. Plataforma moodle da estg-ipp, 2025. URL `https://moodle2.estg.ipp.pt`.

[OpenAI(2025)] OpenAI. Chatgpt (versão gpt-4), 2025. URL `https://chat.openai.com/`.