

Trabalho Prático de

Matemática Discreta

2024/2025

Trabalho Elaborado por:

Grupo M

8240231 David Sérgio Ferreira Alves

8240216 Pedro Afonso Farinha Gomes Lima Paraty

8240266 Gabriel Alexandre Meireles Moreira

8240839 Samuel Silva da Cunha

Curso de:

Licenciatura em Segurança Informática e Redes de Computadores

Docentes:

Eliana Costa e Silva (eos@estg.ipp.pt)

Isabel Cristina Duarte (icd@estg.ipp.pt)

Felgueiras, 13 de maio de 2025

Conteúdo

1 Pergunta 1	5
2 Pergunta 2	9
3 Pergunta 3	13
Bibliografia	17

Pergunta 1

Conjuntos Escolhidos

Seja o conjunto universo:

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

Escolheram-se os seguintes subconjuntos:

$$A = \{3, 5, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

Estes conjuntos cumprem:

- $5 \leq \#A < 10$
- $\#B > 15$
- $A \neq B, A \neq U, B \neq U$

Resolução das Alíneas

- a) Cardinalidade (número de elementos do conjunto):

$$\#A = 7, \quad \#B = 17$$

- b) Complemento de B (conjunto dos elementos de U que não pertencem a B):

$$\bar{B} = \{1, 19, 20\}$$

- c) União (conjunto dos elementos que pertencem a A , a B (ou a ambos)):

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

- d) Interseção (conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B):

$$A \cap B = \{3, 5, 9, 11, 13, 17\}$$

- e) Diferença $B - A$ (elementos que estão em B , mas não estão em A):

$$B - A = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

- f) Diferença simétrica $A \oplus B$ (elementos que pertencem a um só dos conjuntos, mas não a ambos):

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19\}$$

- g) $\overline{A \oplus B} \cup (A - B)$ (complemento da diferença simétrica, unido com a diferença $A - B$):

Calculou-se primeiro o $\overline{A \oplus B}$:

$$\overline{A \oplus B} = U - A \oplus B = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 20\}$$

De seguida:

$$A - B = \{19\}$$

Por fim, realizou-se a reunião

$$Resultadofinal : \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 19, 20\}$$

- h) Produto cartesiano $B \times A$ (conjunto de pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a B e o segundo a A):

Como existem no total 119 pares (17×7), selecionaram-se apenas os 5 primeiros pares:

$$\{(2, 3), (2, 5), (2, 9), (2, 11), (2, 13), \dots\}$$

- i) Produto cartesiano $A \times A \times A$ (conjunto de trios ordenados formados com elementos de A):

Como existem no total 343 trios (7^3), selecionaram-se apenas os 5 primeiros trios:

$$\{(3, 3, 3), (3, 3, 5), (3, 3, 9), (3, 3, 11), (3, 3, 13), \dots\}$$

Pergunta 2

Primeiro definimos o valor de β como o último algarismo do número de estudante. Considerando que o número de estudante seja 8240266, temos que:

$$\beta = 6$$

Agora, escolhemos $n = 30$, de forma que satisfaça a condição $50 + \beta < 2n < 100 - \beta$. Ou seja, temos:

$$50 + 6 < 2n < 100 - 6 \quad \Rightarrow \quad 56 < 2n < 94 \quad \Rightarrow \quad 28 < n < 47$$

a) Queremos calcular o somatório:

$$\sum_{j=\beta+2}^n \left(\frac{-2\beta-1}{5} \right)^j$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\sum_{j=\beta+2}^n \left(\frac{-2\beta-1}{5} \right)^j = \sum_{j=6+2}^{30} \left(\frac{-2 \cdot 6 - 1}{5} \right)^j$$

Ou seja:

$$\sum_{j=8}^{30} \left(\frac{-13}{5} \right)^j$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\sum_{j=8}^{30} \left(\frac{-13}{5} \right)^j = 2.032 \times 10^{12}$$

A sequência dos termos forma uma **progressão geométrica**, pois cada termo é obtido multiplicando o anterior pela razão constante $\frac{-13}{5}$. O valor elevado do resultado deve-se à razão ser maior que 1 em módulo, o que faz os termos crescerem rapidamente.

b) Queremos calcular o somatório:

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{\beta+1}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, M\}, \quad M = \min \left(5 + \beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil \right)$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\begin{aligned} & \prod_{i \in C} \left(\frac{6+1}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, M\}, \quad M = \min \left(5 + \beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil \right) \\ & = \\ & \prod_{i \in C} \left(\frac{7}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, M\}, \quad M = \min \left(5 + \beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil \right) \end{aligned}$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{7}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, M\}, \quad M = \min \left(5 + \beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil \right) = 8.513^{-9}$$

A sequência dos fatores $\left(\frac{7}{i} - 1\right)^4$ não forma nem uma progressão aritmética nem geométrica, pois depende de uma razão variável (o inverso de i), e é posteriormente elevada à quarta potência, o que impede qualquer regularidade. O produto total é muito pequeno, refletindo a multiplicação sucessiva de termos inferiores a 1.

c) Queremos calcular o somatório:

$$\prod_{k=1}^{n-15} \left(3 \times \sum_{j=n-5}^n \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{\beta+1} \right\rceil \right) \right)$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{30-15} \left(3 \times \sum_{j=30-5}^{30} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{6+1} \right\rceil \right) \right) \\ & = \\ & \prod_{k=1}^{15} \left(3 \times \sum_{j=25}^{30} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{7} \right\rceil \right) \right) \end{aligned}$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\prod_{k=1}^{15} \left(3 \times \sum_{j=25}^{30} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{7} \right\rceil \right) \right) = -9.080 \times 10^{48}$$

Esta expressão combina somatórios e produtórios, não refletindo repetições. Como os valores internos variam de forma não regular, não há progressão aritmética nem geométrica. O resultado final é muito grande (em valor absoluto) e negativo, devido à multiplicação de somatórios negativos ao longo do produtório.

Pergunta 3

Alínea A

Foram geradas 20 coordenadas tridimensionais (X, Y, Z) aleatórias no intervalo $[-27, 27]$, utilizando a função `rand()`.

As coordenadas obtidas foram:

13.421736	-4.8380814	5.8564422
23.016656	3.6029409	3.8428503
-20.253562	12.3078000	-12.5400610
-13.218089	6.7601487	-20.7499460
6.031822	9.6333639	-9.0714855
-25.602966	0.9421284	-5.8488845
-13.966893	0.3479484	-4.1250492
-11.373871	-22.2051660	6.5495615
-8.343084	11.1502850	1.1419515
-11.499835	8.1150934	-22.2407920
-2.706678	12.0271670	21.4747000
0.370086	1.2580726	3.2235170
3.333458	-1.7184959	15.0905520
-4.012889	-13.7075730	22.8394750
-21.595973	-1.7376222	-5.6673126
4.293108	-12.8080030	-3.4506722
-13.011687	-4.6489286	-7.5603900
10.329055	14.3470370	-7.7076919
14.544359	2.5792231	-21.8036410
8.431460	-13.7940900	1.5288673

Alínea B

A matriz de adjacência resultante (valores arredondados para 7 casas decimais) contém a maioria dos elementos a zero, indicando poucas conexões no grafo. Exemplo:

...

$(10,4)$	$= 2.6478092$
$(15,6)$	$= 4.8239020$
$(4,10)$	$= 2.6478092$
$(6,15)$	$= 4.8239020$

...

A matriz apresenta valores reais não nulos, que correspondem às distâncias entre pares de pontos tridimensionais conectados por arestas. Tratando-se assim de uma **matriz de adjacência ponderada**, ou seja, uma matriz de pesos, onde o valor de cada entrada representa o custo (neste caso, a distância euclidiana) da ligação entre dois nós. As entradas a zero indicam ausência de conexão entre os respetivos pares de vértices.

Todos os outros elementos da matriz são zero, o que indica a existência de apenas duas arestas no grafo (ambas bidirecionais).

Alínea C

A determinação do caminho mais curto entre dois nós do grafo foi realizada com o algoritmo de Dijkstra. Com base nos números de estudante **8240231** e **8240266**, foram utilizados os valores de $\beta = 1$ e $\sigma = 66$, que foram determinados pelo último algarismo de cada número. No entanto, como , foi aplicado o seguinte critério de ajuste:

$\sigma = 10$ (caso $\sigma > 20$).

Como o valor da distância entre os nós foi infinito, conclui-se que não existe caminho entre os dois pontos selecionados:

"Não existe caminho entre os pontos selecionados."

Assim, o grafo gerado com os dados definidos não contém um caminho entre os vértices indicados.

Bibliografia

[ESTG-IPP(2025)] ESTG-IPP. Plataforma moodle da estg-ipp, 2025. URL <https://moodle2.estg.ipp.pt>.

[OpenAI(2025)] OpenAI. Chatgpt (versão gpt-4), 2025. URL <https://chat.openai.com/>.