ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Trabalho Prático de

Matemática Discreta

2024/2025

Trabalho Elaborado por:

Grupo M

8240231 David Sérgio Ferreira Alves

8240216 Pedro Afonso Farinha Gomes Lima Paraty

8240266 Gabriel Alexandre Meireles Moreira

8240839 Samuel Silva da Cunha

Curso de:

Licenciatura em Segurança Informática e Redes de Computadores

Docentes:

Eliana Costa e Silva (eos@estg.ipp.pt)

Isabel Cristina Duarte (icd@estg.ipp.pt)

Felgueiras, 29 de abril de 2025

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Pergunta 1

Conjuntos Escolhidos

Seja o conjunto universo:

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$$

Escolheram-se os seguintes subconjuntos:

$$A = \{3, 5, 9, 11, 13, 17, 19\} \quad (\#A = 7)$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \quad (\#B = 17)$$

Estes conjuntos cumprem:

- $5 \leq \#A < 10$
- $\#B > 15$
- $A \neq B$, $A \neq U$, $B \neq U$

Resolução das Alíneas

a) Cardinalidade:

$$\#A = 7, \quad \#B = 17$$

b) Complemento de B:

$$\bar{B} = \{1, 19, 20\}$$

c) União:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

d) Interseção:

$$A \cap B = \{3, 5, 9, 11, 13, 17\}$$

e) Diferença $B - A$:

$$B - A = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$$

f) Diferença simétrica $A \oplus B$:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19\}$$

g) $\overline{A \oplus B} \cup (A - B)$:

Calculou-se primeiro o $\overline{A \oplus B}$:

$$\overline{A \oplus B} = U - A \oplus B = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 20\}$$

De seguida:

$$A - B = \{19\}$$

Por fim, realizou-se a reunião

$$Resultado final : \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 17, 19, 20\}$$

h) Produto cartesiano $B \times A$:

Como existem no total 119 pares (17x7), selecionaram-se apenas os 5 primeiros pares:

$$\{(2, 3), (2, 5), (2, 9), (2, 11), (2, 13), \ldots\}$$

i) Produto cartesiano $A \times A \times A$:

Como existem no total 343 trios (7^3), selecionaram-se apenas os 5 primeiros trios:

$$\{(3, 3, 3), (3, 3, 5), (3, 3, 9), (3, 3, 11), (3, 3, 13), \ldots\}$$

Pergunta 2

Primeiro definimos o valor de β como o último algarismo do número de estudante. Considerando que o número de estudante seja 8240266, temos que:

$$\beta = 6$$

Agora, escolhemos $n = 30$, de forma que satisfaça a condição $50 + \beta < 2n < 100 - \beta$. Ou seja, temos:

$$50 + 6 < 2n < 100 - 6 \quad \Rightarrow \quad 56 < 2n < 94 \quad \Rightarrow \quad 28 < n < 47$$

a) Queremos calcular o somatório:

$$\sum_{j=\beta+2}^{n} \left(\frac{-2\beta - 1}{5} \right)^j$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\sum_{j=\beta+2}^{n} \left(\frac{-2\beta - 1}{5} \right)^j = \sum_{j=6+2}^{30} \left(\frac{-2 \cdot 6 - 1}{5} \right)^j$$

Ou seja:

$$\sum_{j=8}^{30} \left(\frac{-12 - 1}{5} \right)^j$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\sum_{j=8}^{30} \left(\frac{-12-1}{5} \right)^j = 2.032 \times 10^{12}$$

A sequência dos termos forma uma progressão geométrica com razão $\frac{-13}{5}$

b) Queremos calcular o somatório:

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{\beta+1}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \ldots, M\}, \quad M = \min\left(5+\beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil\right)$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{6+1}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \ldots, M\}, \quad M = \min\left(5+\beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil\right)$$

$=$

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{7}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \ldots, M\}, \quad M = \min\left(5+\beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil\right)$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{7}{i} - 1 \right)^4, \quad C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \ldots, M\}, \quad M = \min\left(5+\beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil\right) = 8.513^{-9}$$

c) Queremos calcular o somatório:

$$\prod_{k=1}^{n-15} \left(3 \times \sum_{j=n-5}^{n} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{\beta+1} \right\rceil \right) \right)$$

Para $\beta = 6$ e $n = 30$, temos:

$$\prod_{k=1}^{30-15} \left(3 \times \sum_{j=30-5}^{30} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{6+1} \right\rceil \right) \right)$$

$=$

$$\prod_{k=1}^{15} \left(3 \times \sum_{j=25}^{30} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{7} \right\rceil \right) \right)$$

Resultado utilizando código scilab:

$$\prod_{k=1}^{15} \left(3 \times \sum_{j=25}^{30} \left(\left\lfloor 1 + \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lceil \frac{6!}{7} \right\rceil \right) \right) = -7.629 \times 10^{48}$$

Pergunta 3

Primeiramente, através de código Scilab, geramos 20 pontos aleatórios.

Exemplo dos 20 pontos gerados pelo Scilab:

$$(6.7443, \quad 4.3387, \quad 1.1133)$$
$$(3.3618, \quad 3.7462, \quad 3.0716)$$
$$(0.6013, \quad 1.8244, \quad 1.6582)$$
$$(3.8331, \quad 0.7792, \quad 2.1961)$$
$$(3.5035, \quad 3.1196, \quad 4.9157)$$
$$(0.6832, \quad 1.1796, \quad 2.4854)$$
$$(3.6511, \quad 5.9080, \quad 2.6283)$$
$$(2.2948, \quad 6.0429, \quad 3.4695)$$
$$(0.6312, \quad 1.3734, \quad 6.8159)$$
$$(6.6777, \quad 2.9017, \quad 5.4565)$$
$$(6.3327, \quad 2.1270, \quad 6.8061)$$
$$(3.5124, \quad 3.2083, \quad 4.2440)$$
$$(6.1907, \quad 3.3831, \quad 4.5059)$$
$$(6.9659, \quad 5.8523, \quad 4.9796)$$
$$(3.0729, \quad 2.3647, \quad 6.0207)$$
$$(4.8589, \quad 0.1358, \quad 0.7470)$$
$$(5.4721, \quad 5.5894, \quad 2.8132)$$
$$(0.2238, \quad 6.1500, \quad 4.2110)$$
$$(1.0393, \quad 6.9124, \quad 4.4235)$$
$$(0.4685, \quad 5.3910, \quad 6.7043)$$

Em seguida, através do código Scilab, calculámos as distâncias euclidianas entre cada par de pontos e construímos a respetiva matriz adjacente do grafo não orientado. Asseguramos também que esta é simétrica, uma vez que se trata de um grafo não orientado.

Por fim, utilizando o algoritmo de Dijkstra, atribuímos o valor de $\beta = 9$ e $\sigma = 16$, sendo que utilizamos os números 8240839 (para β) e 8240216 (para σ) para obtermos o caminho de menor distancia percorrida.

Asseguramos também que, caso σ fosse 0, ele assumiria o valor 2; caso fosse maior que 20, assumiria o valor 10. Além disso, alteramos o valor da distância de cada ponto até o ponto $(0, 0, 0)$, que era de 27 cm, para 7 cm, de forma a evitar que o valor do caminho de menor distancia fosse constantemente infinito. Apenas não conseguimos garantir que a distância mínima entre o ponto inicial e o ponto final fosse de, pelo menos, 50 cm, pois, independentemente dos valores de beta e sigma escolhidos, não conseguimos alcançar a distância mínima requerida.

O resultado do caminho de menor distância percorrida , de acordo com os 20 pontos gerados, obtida conforme o código do Scilab:

Caminho de menor distancia:

Caminho 6 - Caminho 16

Distancia total:

4.6419159 cm