Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Informe Trabajo Forma Canónica de Jordan: Álgebra Lineal

Segundo semestre 2016

Licenciatura en Ciencia de la Computación

David Sanhueza Andreus
Ignacio Olave
david.sanhueza.a@usach.cl
ignacio.olave@usach.cl

Índice general

Contenidos **2**

1. Introducción

En el presente informe se dará solución a la Forma Canónica de Jordan, que gracias a los conocimientos entregados y desarrollados se pudo llegar a satisfactorias respuestas. Se explicará la lógica utilizada y su implementación en *Python*, lenguaje utilizado para desarrollar el problema.

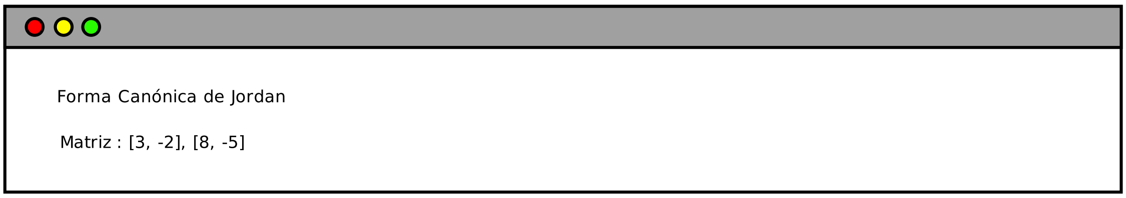
En *Python* se realizó la utilización de las librerias Matemáticas, con el objetivo de cumplir con la finalidad del trabajo, la cual era aprender a calcular y entender cómo funciona la Forma Canónica de Jordan.

- **Desarrollo**
    - Python Version : 2.7
    - GNU/Linux Ubuntu 16.04
- Modulos
    - Sympy (Libreria Matemática)
- **Archivos :**
    - Trabajo.py
      Incluye Desarrollo de la Forma Canónica de Jordan

2. Funcionamiento

Para desarrollar la Forma Canónica de Jordan, el usuario deberá ingresar los datos de la Matriz. Estos datos serán ingresados de la forma : $A = [3, -2], [8, 5]$

- **Información Entregada :**
  - $\lambda^n + b\lambda + c$
  - $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n \rightarrow$ Valores Propios
  - Determina si la Matriz es Diagonalizable
    - Si la Matriz es Diagonalizable
      - Matriz Diagonal
      - P y P^{-1}
    - Si la Matriz No es Diagonalizable
      - Vector Generalizado
      - *Jordan*



3. Especificaciones

Para una gran parte de las matrices de nxn con vectores característicos linealmente independiente existen transformaciones que permiten expresar esa matriz en otra semejante de forma más sencilla.

Sin embargo existen otras matrices que no son diagonalizables, pero igualmente es posible encontrar a partir de ella otra matriz semejante más sencilla.

Definimos la Matriz N_k

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Es una matriz que tiene 1 sobre la diagonal principal y ceros en las demás posiciones.
Luego definimos los bloques de Jordan

$$B(\lambda) = \lambda \mathrm{I} + N_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

Es decir $B(\lambda)$ es la matriz de kxk con el escalar λ en la diagonal principal, unos sobre la diagonal principal y ceros en las demás posiciones.

La Matriz de Jordan J tiene la forma:

$$B(\lambda) = \lambda \mathrm{I} + N_k = \begin{pmatrix} B(\lambda_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & B(\lambda_2) & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & B(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Donde $B(\lambda_i)$ = matriz de bloque de Jordan para λ_i.

4. Implementación

Como ya hemos explicado el funcionamiento del método de la Forma Canónica de Jordan, ahora es necesario describir la realización de cada paso de nuestro código, para ello veremos cada ítem del código que permite resolver la Forma Canónica de Jordan:

$$A = [3, -2], [8, -5]$$

A continuación se describirá el desarrollo utilizado para la Forma Canónica de Jordan:

- **Polinomio Característico :**
  Teniendo la Función *charpoly* que tomando los valores de la Matriz, realiza el desarrollo del Polinomio Característico. λ^n

- **Valores Propios :**
  Se utiliza la Función $factor$ y *eigenvals* que tomando las raices del Polinomio Característico, calcula los Valores Propios

- **Determinar si una Matriz es Diagonal** Mediante la Función $is_d iagonalizable$ se realizan las operaciones correspondientes para determinar si una Matriz es Diagonalizable.

- **Vector Generalizado**

  Luego que se procede a Realizar la matriz de Jordan, que devuele el valor del Vector Generalizado.

- **Jordan**

  Una Vez que se determina la Matriz Generalizada, se llama a la función $jordan_f orm$ que nos devuelve la Matriz de Jordan

- **Matriz Diagonal**

  Si la Matriz es Diagonalizable se hace un llamado a la función *diagonalize*, que nos devuelve la Matriz Diagonal

- P **y** P^{-1}

  Gracias a la Función *diagonalize* podemos obtener la Matriz P, para luego utilizar la función inv, que nos entrega la Matriz P^{-1}

5. Ejemplo de Uso

5.1. Forma Canónica de Jordan

Queremos Calcular la Forma Canónica de Jordan : $A = [3, -2], [8, -5]$ El Programa Arrojará el Mensaje :

```
Forma Canónica de Jordan

Matriz : [3, -2], [8, -5]
```

5.2. Polinomio Característico

```
Forma Canónica de Jordan

Matriz : [3, -2], [8, -5]

Polinomio Característico
λ**3 + 3*λ**2 + 3*λ + 1
```

5.3. Valores Propios

```
Forma Canónica de Jordan

Matriz : [3, -2], [8, -5]

Polinomio Característico
λ**2 + 2*λ + 1

Valores Propios
(λ + 1)**2
{-1: 2}
```

5.4. ¿Es Diagonalizable la Matriz?

```
Forma Canónica de Jordan

Matriz : [3, -2], [8, -5]

Polinomio Característico
λ**2 + 2*λ + 1

Valores Propios
(λ + 1)**2
{-1: 2}

¿Es Diagonalizable la Matriz?
False
```

5.5. Vector Generalizado

```
Forma Canónica de Jordan

Matriz : [3, -2], [8, -5]

Polinomio Característico
λ**2 + 2*λ + 1

Valores Propios
(λ + 1)**2
{-1: 2}

¿Es Diagonalizable la Matriz?
False

Vector Generalizado
([[-10, -2], [-20, 1]])
```

5.6. Canónica de Jordan

```
Forma Canónica de Jordan

Matriz : [3, -2], [8, -5]

Polinomio Característico
λ**2 + 2*λ + 1

Valores Propios
(λ + 1)**2
{-1: 2}

¿Es Diagonalizable la Matriz?
False

Vector Generalizado
([[-10, -2], [-20, 1]])

Canónica de Jordan
([[-1, 1], [0, -1]])
```

6. Conclusión

Al resolver el trabajo, podemos concluir que se cumplió el objetivo de aprender a calcular y entender la Forma Canónica de Jordan. El hecho de programar cada paso, sirvió mucho para repasar y grabar en la memoria la forma en que se realiza el cálculo de la Forma Canónica de Jordan, y si bien se encontraron algunas dificultades al momento de realizar algunos cálculos, debido a las condiciones que debían cumplir, estas dificultades fueron las que ayudaron a entender como y cuando podemos encontrar una solución a la Forma Canónica.