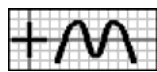
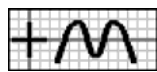


1. [2014] [EXT-A] Dados los puntos $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(5,4,-3)$ y $D(0,1,4)$, se pide:
 - a) Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
 - b) Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.
2. [2014] [EXT-A] Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x-z-1=0$; $\pi_2 \equiv x+z+2=0$; $\pi_3 \equiv x+3y+2z-3=0$, se pide:
 - a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2 .
 - b) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3 .
3. [2014] [EXT-B] Dados el plano π y la recta r siguientes: $\pi \equiv 2x-y+2z+3=0$, $r \equiv \begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=1+t \end{cases}$, se pide:
 - a) Estudiar la posición relativa de r y π .
 - b) Calcular la distancia entre r y π .
 - c) Obtener el punto P' simétrico de $P(3,2,1)$ respecto del plano π .
4. [2014] [JUN-A] Dados el punto $P(1,0,1)$, el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, se pide:
 - a) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π .
 - b) Hallar la distancia de P a r .
 - c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX , OY y OZ .
5. [2014] [JUN-B] Dados el plano $\pi \equiv 2x-y=2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$, se pide:
 - a) Estudiar la posición relativa de r y π .
 - b) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
 - c) Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r , y es paralela a π .
6. [2013] [EXT-A] Dados los puntos $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,-4)$, $D(2,-6,2)$, se pide:
 - a) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
 - b) Hallar el área del triángulo ABC .
7. [2013] [EXT-A] Dados el punto $P(1,2,-1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en el punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:
 - a) Hallar el punto de tangencia P' .
 - b) Hallar la ecuación de S .
8. [2013] [EXT-B] Sea r_A la recta con vector dirección $(1,\lambda,2)$ que pasa por el punto $A(1,2,1)$, r_B la recta con vector dirección $(1,1,1)$ que pasa por $B(1,-2,3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1,1,-2)$ que pasa por $C(4,1-3)$. Se pide:
 - a) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se cortan.
 - b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C .
 - c) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C .
9. [2013] [JUN-A] Dados el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas: $r \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$, se pide:
 - a) Determinar la posición relativa de r y s .
 - b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s .
 - c) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .



10. [2013] [JUN-B] a) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $(2,1,1)$ y que pasa por el punto $P(4,6,2)$, con la superficie esférica de centro $C(1,2,-1)$ y radio $\sqrt{26}$.
b) Hallar la distancia del punto $Q(-2,1,0)$ a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$.
11. [2013] [JUN-B] Dados el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$, se pide:
a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π .
b) Hallar el ángulo entre r y π .
12. [2012] [EXT-A] Se dan la recta r y el plano π , mediante: $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$, $\pi \equiv 2x+y-2z-7=0$.
Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.
13. [2012] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$, $s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$, se pide:
a) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(2,3,4)$ y es paralelo a las rectas r y s .
b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $B(4,-1,2)$ y es perpendicular al plano hallado anteriormente.
14. [2012] [EXT-B] Dado el punto $P(2,1,-1)$, se pide:
a) Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto $Q(3,0,2)$.
b) Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.
c) Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.
15. [2012] [JUN-A] Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:
a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
b) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
c) Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .
16. [2012] [JUN-B] Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:
a) Estudiar su posición relativa.
b) Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .
17. [2011] [EXT-A] Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1=0$, $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$, se pide:
a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2 .
b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ, YZ .
c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2 .
18. [2011] [EXT-B] Dado el punto $P(0,1,1)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, se pide:
a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r .
b) Determinar la recta que pasa por el punto P , tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s .
19. [2011] [JUN-A] a) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas $r_1 \equiv x=y=z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$, $r_3 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 2x+3y+7z=24$.



b) Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas $r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$, $r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

20. [2011] [JUN-B] Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-2z = 1$, $\pi_2 \equiv x-y+2z = 1$, se pide:

- Estudiar su posición relativa.
- En caso en que los planos sean paralelos, hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

21. [2011] [JUN-B] a) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2,1,1)$.

c) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .

22. [2010] [EXT-A] Dadas las rectas: $r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$; $r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y-z = 0 \end{cases}$, se pide:

- Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.
- Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2 .

23. [2010] [EXT-B] Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x-3y+z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto $P(0,2,4)$ y los vectores $\vec{v}_1 = (0,2,6)$ y $\vec{v}_2 = (1,0,b)$, se pide:

- Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
- Para $a = 1$ y $b = 0$ determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2 .
- Para $a = 4$ y $b = -2$ determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2 .

24. [2010] [JUN-A] Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$; $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

- Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .
- Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s .

25. [2010] [JUN-B] Dadas las rectas: $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$; $s \equiv \begin{cases} x+z = 3 \\ 2x-y = 2 \end{cases}$, se pide:

- Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s .
- Hallar la distancia desde el punto $A(0,1,-1)$ a la recta s .

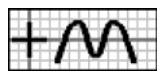
26. [2010] [JUN-B] Sea π el plano que contiene a los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (0,2,0)$ y $R = (0,0,3)$. Se pide:

- Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P , Q y R .
- Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π .

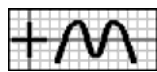
27. [2009] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}$ y $s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, determinar los valores de los parámetros a , b para los cuales las rectas r y s se cortan perpendicularmente.

28. [2009] [EXT-A] Dado el plano $\pi \equiv 2x-y+2z+1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π .

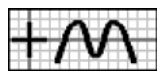
29. [2009] [EXT-B] Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x+y-2z+1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .



30. [2009] [JUN-A] Dado el plano $\pi \equiv x+3y+z = 4$, se pide:
- Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π .
 - Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
 - Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π , y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
31. [2009] [JUN-B] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, se pide:
- Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
 - Determinar la distancia entre las rectas r y s .
 - Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s .
32. [2008] [EXT-A] Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:
- Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
 - Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2 \cdot \text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.
33. [2008] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$, $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$, hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.
34. [2008] [EXT-B] Dados el plano $\pi_1 \equiv x+y+z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$, se pide:
- Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1 .
 - Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga longitud de $\sqrt{29}$ unidades.
35. [2008] [JUN-A] Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-ay = 2 \\ ay+z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-z = 1 \\ y+z = 3 \end{cases}$, se pide:
- Discutir la posición relativa de las dos rectas r y s , según los valores del parámetro a .
 - Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s .
36. [2008] [JUN-B] Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:
- Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
 - Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
 - Hallar la distancia del punto D al plano π .
37. [2008] [JUN-B] Dado el plano $\pi \equiv 3x+2y-z+10 = 0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:
- Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
 - Hallar el punto Q intersección de π y r .
 - Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
 - Hallar el área del triángulo PQR.
38. [2007] [EXT-A] Hallar los puntos de la recta $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x-y+2z+1 = 0$ es igual a 1.
39. [2007] [EXT-A] Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x-y = 3 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x-z = 4 \\ 2x-y = 7 \end{cases}$. Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.



40. [2007] [EXT-B] Dadas las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \begin{cases} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$.
- Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s .
 - Calcular la distancia entre el plano π y la recta s .
41. [2007] [JUN-A] Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x-2y-3z+1=0$, se pide:
- Ecuación del plano que pasa por A , es paralelo a r y perpendicular a π .
 - Ecuación de la recta que pasa por A , corta a r y es paralela a π .
42. [2007] [JUN-B] Sean los puntos $A(\lambda, 2, \lambda)$, $B(2, -\lambda, 0)$ y $C(\lambda, 0, \lambda+2)$.
- ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A , B y C están alineados?
 - Comprobar que si A , B y C no están alineados, el triángulo que forman es isósceles.
 - Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda=0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.
43. [2006] [EXT-A] Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:
- Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B .
 - Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es la misma a la distancia de A a B .
 - Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A .
44. [2006] [EXT-B] Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$. Se pide:
- Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen) sea 2.
 - Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcula la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O .
45. [2006] [JUN-A] Sean las rectas $r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4}$ y $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$.
- Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
 - Halla la recta perpendicular común a r y s .
46. [2006] [JUN-B] Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi: x=0$, el triángulo OPQ tenga área 1.
47. [2006] [JUN-B] Determinar la posición relativa de las rectas $r: \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1}$, $s: \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$.
- $\pi_1: x+z=\lambda$
48. [2005] [EXT-A] Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos: $\pi_2: 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2$
- $\pi_3: 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda$
49. [2005] [EXT-A] Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$
- Hallar la recta t , perpendicular a r y a s , que pasa por el origen.
 - Hallar las coordenadas del punto intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).
50. [2005] [EXT-B] Se considera la familia de planos $mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$.
- Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
 - Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.



c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$.

51. [2005] [JUN-A] Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:

a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

b) Calcular los puntos de la recta $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$ cuya distancia a P es igual a 3.

52. [2005] [JUN-B] Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ y $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

b) Calcular la mínima distancia entre r y s .

53. [2004] [EXT-A] Sea el plano $\pi \equiv x+2y+3z = 6$.

a) Hallar el punto simétrico del $(0,0,0)$ respecto de π .

b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ .

c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

54. [2004] [EXT-B] a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x-y+2z = 4$.

b) Describir dicho conjunto.

55. [2004] [EXT-B] El plano $\pi \equiv 2x-2y+z = 2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

c) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π .

56. [2004] [JUN-A] Se considera la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2-3x-2y-z = 0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv 3+2x+2y-2z = 0$$

Se pide:

a) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) Determinar la posición relativa de los dos planos.

c) Calcular la distancia de r a π_2 .

57. [2004] [JUN-B] a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k :

$$\pi_1 \equiv 2x+3y+kz = 3$$

$$\pi_2 \equiv x+ky-z = -1$$

$$\pi_3 \equiv 3x+y-3z = -k$$

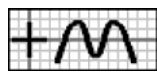
b) En los casos en los que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector directo de dicha recta.

58. [2003] [EXT-A] Dados los puntos $A(1,0,1)$, $B(0,2,0)$ y el plano $\pi \equiv x-2y-z-7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B .

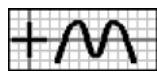
59. [2003] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z = 3 \\ 3x+z = 1 \end{cases}$

a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.

b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.



60. [2003] [EXT-B] Dado el plano $\pi \equiv x+y+z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:
- Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.
 - Encontrar un plano π' , paralelo a π , tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.
61. [2003] [JUN-A] Dadas las rectas en el espacio $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$, $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$
- Hallar la distancia entre las dos rectas.
 - Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.
62. [2003] [JUN-B] Dado el plano $\pi \equiv x+3y-z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$, se pide:
- Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .
 - Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π' .
63. [2002] [EXT-A] Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ :
- $$\begin{cases} x+y+\lambda z = \lambda^2 \\ y-z = \lambda \\ x+\lambda y+z = \lambda \end{cases}$$
- Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ .
 - Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
 - En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.
64. [2002] [EXT-A] Se consideran las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$; $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$
- Calcular la distancia entre r y s.
 - Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
 - Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y pasa por el punto P(1,0,0).
65. [2002] [EXT-B] Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:
- $$\pi_1: x+y+az = -2 \quad ; \quad \pi_2: x+ay+z = -1 \quad ; \quad \pi_3: ax+y+z = 3$$
- Se pide:
- Calcular los valores de a para los cuales los tres planos contienen una recta común.
 - Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.
66. [2002] [JUN-B] Hallar la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta $r: x = 1+t; y = -1+2t; z = t$ y es perpendicular al plano P: $2x+y-z = 2$.
67. [2001] [EXT-B] Se considera el tetraedro cuyos vértices son A(1,0,0), B(1,1,1), C(-2,1,0) y D(0,1,3).
- Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro ABCD.
 - Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.
 - Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.
68. [2001] [JUN-A] Dado el plano $\pi \equiv x+y+z = 1$, la recta $r \equiv (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(0,1,1)$ y el punto P(1,1,0), se pide:
- Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
 - Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
 - Hallar P'', simétrico de P respecto de π .



69. [2001] [JUN-B] Sean las rectas $r \equiv x-2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

- Hallar k para que r y s sean coplanarias.
- Para el valor anterior de k , hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
- Para el valor anterior de k , hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

70. [2000] [EXT-B] Se consideran los puntos $A(1,\lambda,0)$, $B(1,1,\lambda-2)$ y $C(1,-1,\lambda)$.

- Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro λ .
- Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

71. [2000] [EXT-B] Sea la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+kz = 0$.

- Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.
- Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

72. [2000] [JUN-B] Sean los puntos $P(8,13,8)$ y $Q(-4,-11,-8)$. Se considera el plano π , perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

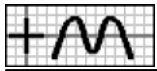
- Obtener la ecuación del plano π .
- Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0,0,0)$ sobre π .
- Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

— Soluciones —

12. $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -3\right), \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ 13. a) $3x-y+2z-11=0$ b) $\begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$ 14. a) $(4,-1,5)$ b) $(0,1,1)$ c) $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -1\right)$ 15. a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{10}{3}, \frac{-2}{3}$ c) $4x+10z-31=0$ 16. se cruzan; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 17. a) $(3,0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$ 18. a) $\left(\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ b) $\begin{cases} x=0 \\ y=1-k \\ z=1-k \end{cases}$ 19. a) 32 b) $(x,y,z) = \left(\frac{-28}{13}, \frac{35}{13}, \frac{17}{13}\right) + (4,-3,-1)\lambda$ 20. a) se cortan b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); (0,2,1)$

21. a) $2x+y+2z-2=0$ b) $2x-y-z+3=0$ c) $\frac{4}{3}$ 22. a) $\begin{cases} x=0 \\ y=1+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$ b) $\sqrt{2}$ 23. a) $b=-2, \forall a$ b) $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\lambda \\ z=-2+3\lambda \end{cases}$ c) $2x-3y+z+3=0$ 24. a) $\left(\frac{-217}{251}, \frac{-217}{251}, \frac{-868}{251}\right) + \lambda(13,-9,-1)$ b) $\frac{5\sqrt{251}}{251}$

25. a) $-5x+4y+3z-1=0$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 26. a) 1 b) $\left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49}\right)$ 27. 1, -1 28. $2x-y+2z+10=0; 2x-y+2z-8=0$ 29. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}-5\lambda \\ y=-\frac{2}{3}+\lambda \\ z=\frac{4}{3}-3\lambda \end{cases}$ 30. a) $\left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$ b) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ c) $\frac{32}{9}$ 31. a) $x-2z-1=0$ b) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ c) no 32. a) plano $x+3z-5=0$ b) $\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right), (-1, 1, -3)$ 33. $\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=-4-\lambda \end{cases}$ 34. a) $(3,2,-4)$ b) $x+y+z=0; x+y+z=2$ 35. (a) $a=-1$: paralelas; $a \neq -1$: secantes (b) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 36. (b) $2x+3y+z-1=0$ (c) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ 37. (a) $\begin{cases} x=1+3k \\ y=2+2k \\ z=3-k \end{cases}$ (b) $Q(-2,0,4)$ (c) $R(0,-5,0)$ (d) $\frac{3\sqrt{70}}{2}$ 38. $(0,2,2), (6,8,-4)$ 39. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ 40. a) $-3x+5y+4z-13=0$ b) $\frac{16\sqrt{2}}{5}$ 41. a) $3x+3y-z=0$ b) $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases}$ 42. a) no b) $\overline{AB}=\overline{BC}$ c) $x+y+z-2=0, \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 43. a) $2x-2y+2z-1=0$ b) $x^2+y^2+z^2-2y-2=0$ c) $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases}$ 44. a) 3 b) $12x+4y+3z-12=0$ 45. a) $\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-8y+5z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 14x+10y-2z-6=0 \\ x+15y-18z-23=0 \end{cases}$ 46. $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{40}, \frac{\sqrt{10}}{40}\right)$ 47. paralelas 48. $\lambda \in \left\{-\frac{8}{3}, 2\right\}$: dos planos paralelos cortados por otro; $\lambda \notin \left\{-\frac{8}{3}, 2\right\}$: se cortan en un punto 49. a) $\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ b) $(3,-1,-1)$ 50. a) $\begin{cases} -2y+3z+1=0 \\ x+y+3z+1=0 \end{cases}$ b) $x-5y+12z+4=0$ c) $x+13y-15z-5=0$ 51. a) $x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+2=0$ b) $(0,1,1), (3,2,-3)$ 52. a) $\begin{cases} x=\frac{27}{25}-2\lambda \\ y=\frac{28}{25} \\ z=\frac{29}{25}+\lambda \end{cases}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 53. a) $\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$ b) $2x-y=0$ c) 6 54. a) $P(x,-2x+13,0), Q(x,2x+5,0)$ b) rectas $\begin{cases} 2x-y-13=0 \\ z=0 \end{cases}; \begin{cases} 2x-y+5=0 \\ z=0 \end{cases}$ 55. a) $\frac{2}{3}$



- b) $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ c) $\frac{3}{2}$ 56. a) corta a π_1 ; paralela a π_2 b) se cortan c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 57. a) $k = -2$: se cortan en una recta; $k = \frac{1}{3}$: se cortan dos a dos; $k \notin \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$: se cortan en un punto. b) $(1,0,1)$ 58. $4x+2y-3=0$ 59. a) 4 b) $x+2y-z+5=0$ 60. a) $(1,0,-1)$ b) $3x+3y+3z-8=0$ ó $3x+3y+3z+8=0$ 61. a) $\frac{11\sqrt{26}}{13}$ b) $\begin{cases} x-3y-9z+1=0 \\ 7x-8y-11z+2=0 \end{cases}$ 62. a) $5x-7y-16z+17=0$ b) $\begin{cases} x = -2+5\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ 63. a) $\lambda \in \{0,1\}$: comp.ind; $\lambda \notin \{0,1\}$: incomp. b) $\lambda = 0$: $(-k,k,k)$; $\lambda = 1$: $(-2k,1+k,k)$ c) se cortan dos a dos 64. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $\begin{cases} 4x+y-z+2=0 \\ 2x-3y+3z-1=0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ 65. a) -2 b) $x = \frac{-5}{3} + \lambda$; $y = \frac{-1}{3} + \lambda$; $z = \lambda$ 66. $x-y+z-2=0$ 67. a) $\frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{7}{6}$ b) $\frac{7\sqrt{19}}{19}$ c) $\frac{7\sqrt{41}}{41}$ 68. a) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ b) $(1,-1,0)$ c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ 69. a) -1 b) $x+y-3=0$ c) $x = \frac{5}{4} + \lambda$; $y = \frac{7}{4} + \lambda$; $z = \frac{1}{2}$ 70. b) 1 71. a) $-8, \frac{-1}{2}$ b) 4, -2 72. a) $3x+6y+4z-12=0$ b) $\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)$ c) 4