1. [2014] [EXT-A] Dados los puntos A(2,0,-2), B(3,-4,-1), C(5,4,-3) y D(0,1,4), se pide:
a) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.
b) Calcular el volumen del tetraedro ABCD.

2. [2014] [EXT-A] Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x-z-1 = 0$; $\pi_2 \equiv x+z+2 = 0$; $\pi_3 \equiv x+3y+2z-3 = 0$, se pide:
a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.
b) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

3. [2014] [EXT-B] Dados el plano π y la recta r siguentes: $\pi \equiv 2x-y+2z+3 = 0$, $r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-2t \\ z = 1+t \end{cases}$, se pide:
a) Estudiar la posición relativa de r y π.
b) Calcular la distancia entre r y π.
c) Obtener el punto P' simétrico de P(3,2,1) respecto del plano π.

4. [2014] [JUN-A] Dados el punto P(1,0,1), el plano $\pi \equiv x+5y-6z = 1$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, se pide:
a) Calcular el punto P' simétrico a P respecto de π.
b) Hallar la distancia de P a r.
c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas O(0,0,0) y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

5. [2014] [JUN-B] Dados el plano $\pi \equiv 2x-y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y-2z = 2 \end{cases}$, se pide:
a) Estudiar la posición relativa de r y π.
b) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.
c) Determinar la recta que pasa por A(-2,1,0), corta a r, y es paralela a π.

6. [2013] [EXT-A] Dados los puntos A(2,-2,1), B(0,1,-2), C(-2,0,-4), D(2,-6,2), se pide:
a) Probar que el cuadrilátero ABCD es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
b) Hallar el área del triángulo ABC.

7. [2013] [EXT-A] Dados el punto P(1,2,-1) y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en el punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:
a) Hallar el punto de tangencia P'.
b) Hallar la ecuación de S.

8. [2013] [EXT-B] Sea r_A la recta con vector dirección $(1,\lambda,2)$ que pasa por el punto A(1,2,1), r_B la recta con vector dirección (1,1,1) que pasa por B(1,-2,3), y r_C la recta con vector dirección (1,1,-2) que pasa por C(4,1-3). Se pide:
a) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se cortan.
b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.
c) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

9. [2013] [JUN-A] Dados el punto P(-1,0,2) y las rectas: $r \equiv \begin{cases} x-z = 1 \\ y-z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ se pide:
a) Determinar la posición relativa de r y s.
b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.
c) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

10. [2013] [JUN-B] **a**) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección (2,1,1) y que pasa por el punto P(4,6,2), con la superficie esférica de centro C(1,2,-1) y radio $\sqrt{26}$.

b) Hallar la distancia del punto Q(-2,1,0) a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-3}{2}$.

11. [2013] [JUN-B] Dados el punto P(1,0,-1), el plano $\pi \equiv 2x-y+z+1 = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x+y-1 = 0 \\ 3x-z-3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) Hallar el ángulo entre r y π.

12. [2012] [EXT-A] Se dan la recta r y el plano π, mediante: $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$, $\pi \equiv 2x+y-2z-7 = 0$.

Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

13. [2012] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$, $s \equiv \begin{cases} x+y = 4 \\ 2x+z = 4 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuacion del plano que pasa por A(2,3,4) y es paralelo a las rectas r y s.

b) Determinar la ecuacion de la recta que pasa por B(4,-1,2) y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

14. [2012] [EXT-B] Dado el punto P(2,1,-1), se pide:

a) Hallar el punto P' simetrico de P respecto del punto Q(3,0,2).

b) Hallar el punto P'' simetrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1 = y-1 = z$.

c) Hallar el punto P''' simetrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z = 3$.

15. [2012] [JUN-A] Dados los puntos $P_1(1,3,-1)$, $P_2(a,2,0)$, $P_3(1,5,4)$ y $P_4(2,0,2)$, se pide:

a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos esten en el mismo plano.

b) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vertices en P_1, P_2, P_3 ,P_4 tenga volumen igual a 7.

c) Hallar la ecuacion del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

16. [2012] [JUN-B] Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar su posicion relativa.

b) Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

17. [2011] [EXT-A] Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+3y+z-1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x+y-3z-1 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2}$, se pide:

a) El punto o puntos de r que equidistan de π_1 y π_2.

b) El volumen del tetraedro que π_1 forma con los planos coordenados XY, XZ, YZ.

c) La proyección ortogonal de r sobre el plano π_2.

18. [2011] [EXT-B] Dado el punto P(0,1,1) y las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar las coordenadas del punto simétrico de P respecto a r.

b) Determinar la recta que pasa por el punto P, tiene dirección perpendicular a la recta r y corta a la recta s.

19. [2011] [JUN-A] a) Hallar el volumne del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas $r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 2x+3y+7z = 24$.

b) Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas $r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}$, $r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

20. [2011] [JUN-B] Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+y-2z = 1$, $\pi_2 \equiv x-y+2z = 1$, se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) En caso en que los planos sean paralelos, hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

21. [2011] [JUN-B] a) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,1).

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto P(1,2,3) y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2,1,1)$.

c) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

22. [2010] [EXT-A] Dadas las rectas: $r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$; $r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y-z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2.

23. [2010] [EXT-B] Dados el plano $\pi_1 \equiv 2x-3y+z = a$ y el plano π_2 determinado por el punto P(0,2,4) y los vectores $\vec{v}_1 = (0,2,6)$ y $\vec{v}_2 = (1,0,b)$, se pide:

a) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Para a = 1 y b = 0 determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.

c) Para a = 4 y b = -2 determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

24. [2010] [JUN-A] Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$; $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

a) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.

b) Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

25. [2010] [JUN-B] Dadas las rectas: $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$; $s \equiv \begin{cases} x+z = 3 \\ 2x-y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.

b) Hallar la distancia desde el punto A(0,1,-1) a la recta s.

26. [2010] [JUN-B] Sea π el plano que contiene a los puntos P = (1,0,0), Q = (0,2,0) y R = (0,0,3). Se pide:

a) Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos P, Q y R.

b) Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

27. [2009] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}$ y $s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r y s se cortan perpendicularmente.

28. [2009] [EXT-A] Dado el plano $\pi \equiv 2x-y+2z+1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

29. [2009] [EXT-B] Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x+y-2z+1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

30. [2009] [JUN-A] Dado el plano $\pi \equiv x+3y+z = 4$, se pide:
a) Calcular el punto simétrico P del punto O(0,0,0) respecto del plano π.
b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $x = 0$.
c) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

31. [2009] [JUN-B] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$ y $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, se pide:
a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
b) Determinar la distancia entre las rectas r y s.
c) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por O(0,0,0) corta a la recta s.

32. [2008] [EXT-A] Dados los puntos P(1,1,3), Q(0,1,0), se pide:
a) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
b) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican dist(P,S) = 2·dist(Q,S), donde "dist" significa distancia.

33. [2008] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$, $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$, hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

34. [2008] [EXT-B] Dados el plano $\pi_1 \equiv x+y+z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$, se pide:
a) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.
b) Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga longitud de $\sqrt{29}$ unidades.

35. [2008] [JUN-A] Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-ay = 2 \\ ay+z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-z = 1 \\ y+z = 3 \end{cases}$, se pide:
(a) Discutir la posición relativa de las dos rectas r y s, según los valores del parámetro a.
(b) Si a = 1, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

36. [2008] [JUN-B] Dados los puntos A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2) y D(1,2,0), se pide:
(a) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
(b) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
(c) Hallar la distancia del punto D al plano π.

37. [2008] [JUN-B] Dado el plano $\pi \equiv 3x+2y-z+10 = 0$ y el punto P(1,2,3), se pide:
(a) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
(b) Hallar el punto Q intersección de π y r.
(c) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
(d) Hallar el área del triángulo PQR.

38. [2007] [EXT-A] Hallar los puntos de la recta $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano $\pi: 2x-y+2z+1 = 0$ es igual a 1.

39. [2007] [EXT-A] Se consideran las rectas $r: \begin{cases} x-y = 3 \\ x+y-z = 0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x-z = 4 \\ 2x-y = 7 \end{cases}$. Hallar la ecuación continua de la recta que contiene alpunto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

40. [2007] [EXT-B] Dadas las rectas r: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2}$ y s: $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$.

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

41. [2007] [JUN-A] Dados el punto A(1,-2,-3), la recta r: $\begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el plano π: $x-2y-3z+1=0$, se pide:

a) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

42. [2007] [JUN-B] Sean los puntos $A(\lambda,2,\lambda)$, $B(2,-\lambda,0)$ y $C(\lambda,0,\lambda+2)$.

a) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) Comprobar que si A, B y C no están alineados, el triángulo que forman es isósceles.

c) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para le valor $\lambda=0$ y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas.

43. [2006] [EXT-A] Se consideran los puntos A(0,1,0) y B(1,0,1). Se pide:

a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x,y,z) que equidistan de A y B.

b) Determinar la ecuación que verifican los puntos X(x,y,z) cuya distancia a A es la misma a la distancia de A a B.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos C(x,y,z) del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

44. [2006] [EXT-B] Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$. Se pide:

a) Hallar el valor de $\lambda>0$ de manera que el volumen del tetraedro OABC (donde O es el origen) sea 2.

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcula la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.

45. [2006] [JUN-A] Sean las rectas r: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}$ y s: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$.

a) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

b) Halla la recta perpendicular común a r y s.

46. [2006] [JUN-B] Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\vec{v}=(4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano π: $x=0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

47. [2006] [JUN-B] Determinar la posición relativa de las rectas r: $\frac{x+4}{-3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z}{1}$, s: $\begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$.

48. [2005] [EXT-A] Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos: $\begin{array}{l} \pi_1: x+z=\lambda \\ \pi_2: 4x+(\lambda-2)y+(\lambda+2)z=\lambda+2 \\ \pi_3: 2(\lambda+1)x-(\lambda+6)z=-\lambda \end{array}$

49. [2005] [EXT-A] Se consideran las rectas r: $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

a) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

b) Hallar las coordenadas del punto intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).

50. [2005] [EXT-B] Se considera la familia de planos $mx+(m-2)y+3(m+1)z+(m+1)=0$.

a) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.

b) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto P(1,1,0).

c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta r: $\begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$.

51. [2005] [JUN-A] Dado el punto P(1,3,-1), se pide:
a) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x,y,z) cuya distancia a P sea igual a 3.
b) Calcular los puntos de la recta $\begin{cases} x=3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases}$ cuya distancia a P es igual a 3.

52. [2005] [JUN-B] Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ y s: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$
a) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.
b) Calcular la mínima distancia entre r y s.

53. [2004] [EXT-A] Sea el plano $\pi \equiv x+2y+3z=6$.
a) Hallar el punto simétrico del (0,0,0) respecto de π.
b) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.
c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.

54. [2004] [EXT-B] a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano z = 0 que distan 3 unidades del plano de ecuación 2x-y+2z = 4.
b) Desribir dicho conjunto.

55. [2004] [EXT-B] El plano $\pi \equiv 2x-2y+z=2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:
a) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
c) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

56. [2004] [JUN-A] Se considera la recta y los planos siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2-3x-2y-z=0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv 3+2x+2y-2z=0$$

Se pide:
a) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.
b) Determinar la posición relativa de los dos planos.
c) Calcula la distancia de r a π_2.

57. [2004] [JUN-B] a) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\pi_1 \equiv 2x+3y+kz=3$$
$$\pi_2 \equiv x+ky-z=-1$$
$$\pi_3 \equiv 3x+y-3z=-k$$

b) En los casos en los que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector directo de dicha recta.

58. [2003] [EXT-A] Dados los puntos A(1,0,1), B(0,2,0) y el plano $\pi \equiv x-2y-z-7=0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

59. [2003] [EXT-A] Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-k}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+z=1 \end{cases}$
a) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

60. [2003] [EXT-B] Dado el plano $\pi \equiv x+y+z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.
b) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

61. [2003] [JUN-A] Dadas las recta en el espacio $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$, $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Hallar la distancia entre las dos rectas.
b) Determianr las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

62. [2003] [JUN-B] Dados el plano $\pi \equiv x+3y-z = 1$ y la recta $r \equiv \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
b) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

63. [2002] [EXT-A] Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+y+\lambda z = \lambda^2 \\ y-z = \lambda \\ x+\lambda y+z = \lambda \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
c) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

64. [2002] [EXT-A] Se consideran las rectas r: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}$; s: $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$

a) Calcular la distancia entre r y s.
b) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
c) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y pasa por el punto P(1,0,0).

65. [2002] [EXT-B] Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1: x+y+az = -2 \ ; \ \pi_2: x+ay+z = -1 \ ; \ \pi_3: ax+y+z = 3$$

Se pide:
a) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos contienen una recta común.
b) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

66. [2002] [JUN-B] Hallar la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r: $x = 1+t$; $y = -1+2t$; $z = t$ y es perpendicular al plano P: $2x+y-z = 2$.

67. [2001] [EXT-B] Se considera el tetraedro cuyos vértices son A(1,0,0), B(1,1,1), C(-2,1,0) y D(0,1,3).
a) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro ABCD.
b) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.
c) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

68. [2001] [JUN-A] Dado el plano $\pi \equiv x+y+z = 1$, la recta $r \equiv (x,y,z) = (1,0,0)+\lambda(0,1,1)$ y el punto P(1,1,0), se pide:
a) Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
b) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
c) Hallr P'', simétrico de P respecto de π.

69. [2001] [JUN-B] Sean las rectas $r \equiv x-2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

a) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
b) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
c) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

70. [2000] [EXT-B] Se consideran los puntos $A(1,\lambda,0)$, $B(1,1,\lambda-2)$ y $C(1,-1,\lambda)$.
a) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro λ.
b) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

71. [2000] [EXT-B] Sea la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+kz = 0$.
a) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.
b) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

72. [2000] [JUN-B] Sean los puntos P(8,13,8) y Q(-4,-11,-8). Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.
a) Obtener la ecuación del plano π.
b) Calcular la proyección ortogonal del punto O(0,0,0) sobre π.
c) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas.

— Soluciones

12. $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3},-3\right)$, $\left(\frac{14}{3},\frac{2}{3},3\right)$ **13.** a) $3x-y+2z-11 = 0$ b) $\begin{cases} x = 4+3\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$ **14.** a) (4,-1,5) b) (0,1,1) c) $\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{-1}{3}\right)$ **15.** a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{10}{3}$, $\frac{-2}{3}$ c) $4x+10z-31 = 0$ **16.** se cruzan; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **17.** a) (3,0,0), $\left(\frac{1}{2},\frac{-5}{4},\frac{-5}{2}\right)$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\begin{cases} x-2y-3 = 0 \\ 2x+y-3z-1 = 0 \end{cases}$ **18.** a) $\left(\frac{4}{3},\frac{-10}{3},\frac{-2}{3}\right)$ b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1-k \\ z = 1-k \end{cases}$ **19.** a) 32 b) $(x,y,z) = \left(\frac{-28}{13},\frac{35}{13},\frac{17}{13}\right)+(4,-3,-1)\lambda$ **20.** a) se cortan b) $\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},0\right)$; (0,2,1) **21.** a) $2x+y+2z-2 = 0$ b) $2x-y-z+3 = 0$ c) $\frac{4}{3}$ **22.** a) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$ b) $\sqrt{2}$ **23.** a) b=-2, $\forall$a b) $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \lambda \\ z = -2+3\lambda \end{cases}$ c) $2x-3y+z+3 = 0$ **24.** a) $\left(\frac{-217}{251},\frac{-217}{251},\frac{-868}{251}\right)+\lambda(13,-9,-1)$ b) $\frac{5\sqrt{251}}{251}$ **25.** a) $-5x+4y+3z-1 = 0$ b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **26.** a) 1 b) $\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$ **27.** 1, -1 **28.** $2x-y+2z+10 = 0$; $2x-y+2z-8 = 0$ **29.** $\begin{cases} x = \frac{1}{3}-5\lambda \\ y = -\frac{2}{3}+\lambda \\ z = \frac{4}{3}-3\lambda \end{cases}$ **30.** a $\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right)$ b) $\frac{\sqrt{11}}{11}$ c) $\frac{32}{9}$ **31.** a) $x-2z-1 = 0$ b) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ c) no **32.** a) plano $x+3z-5 = 0$ b) $\left(\frac{1}{3},1,1\right)$, $(-1,1,-3)$. **33.** $\begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = -2+2\lambda \\ z = -4-\lambda \end{cases}$ **34.** a) (3,2,-4) b) $x+y+z = 0$; $x+y+z = 2$. **35.** (a) a = -1: paralelas; a $\neq$ -1: secantes (b) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **36.** (b) $2x+3y+z-1 = 0$ (c) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ **37.** (a) $\begin{cases} x = 1+3k \\ y = 2+2k \\ z = 3-k \end{cases}$ (b) Q(-2,0,4) (c) R(0,-5,0) (d) $\frac{3\sqrt{70}}{2}$ **38.** $(0,2,2)$, $(6,8,-4)$ **39.** $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ **40.** a) $-3x+5y+4z-13 = 0$ b) $\frac{16\sqrt{2}}{5}$ **41.** a) $3x+3y-z = 0$ b) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2-\lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases}$ **42.** a) no b) $\overline{AB}=\overline{BC}$ c) $x+y+z-2 = 0$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **43.** a) $2x-2y+2z-1 = 0$ b) $x^2+y^2+z^2-2y-2 = 0$ c) $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$ **44.** a) 3 b) $12x+4y+3z-12 = 0$ **45.** a) $\begin{cases} 4x+2y-z = 0 \\ x-8y+5z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 14x+10y-2z-6 = 0 \\ x+15y-18z-23 = 0 \end{cases}$ **46.** $\left(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{3\sqrt{10}}{40},\frac{\sqrt{10}}{40}\right)$ **47.** paralelas **48.** $\lambda \in \left\{\frac{-8}{3},2\right\}$: dos planos paralelos cortados por otro; $\lambda \notin \left\{\frac{-8}{3},2\right\}$: se cortan en un punto **49.** a) $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ b) $(3,-1,-1)$ **50.** a) $\begin{cases} -2y+3z+1 = 0 \\ x+y+3z+1 = 0 \end{cases}$ b) $x-5y+12z+4 = 0$ c) $x+13y-15z-5 = 0$ **51.** a) $x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+2 = 0$ b) (0,1,1), (3,2,-3) **52.** a) $\begin{cases} x = \frac{27}{25}-2\lambda \\ y = \frac{28}{25} \\ z = \frac{29}{25}+\lambda \end{cases}$ b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **53.** a) $\left(\frac{6}{7},\frac{12}{7},\frac{18}{7}\right)$ b) $2x-y = 0$ c) 6 **54.** a) $P(x,-2x+13,0)$, $Q(x,2x+5,0)$ b) rectas $\begin{cases} 2x-y-13 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y+5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ **55.** a) $\frac{2}{3}$

b) $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ c) $\frac{3}{2}$ **56**. a) corta a π_1; paralela a π_2 b) se cortan c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **57**. a) k = -2: se cortan en una recta; k = $\frac{1}{3}$: se cortan dos a dos; $k \notin \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$: se cortan en un punto. b) $(1,0,1)$ **58**. $4x+2y-3 = 0$ **59**. a) 4 b) $x+2y-z+5 = 0$ **60**. a) (1,0,-1) b) $3x+3y+3z-8 = 0$ ó $3x+3y+3z+8 = 0$ **61**. a) $\frac{11\sqrt{26}}{13}$ b) $\begin{cases} x-3y-9z+1 = 0 \\ 7x-8y-11z+2 = 0 \end{cases}$ **62**. a) $5x-7y-16z+17 = 0$ b) $\begin{cases} x = -2+5\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ **63**. a) $\lambda \in \{0,1\}$: comp.ind; $\lambda \notin \{0,1\}$: incomp. b) $\lambda = 0$: (-k,k,k); $\lambda = 1$: (-2k,1+k,k) c) se cortan dos a dos **64**. a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ b) $\begin{cases} 4x+y-z+2 = 0 \\ 2x-3y+3z-1 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ **65**. a) -2 b) $x = \frac{-5}{3}+\lambda$; $y = \frac{-1}{3}+\lambda$; $z = \lambda$ **66**. $x-y+z-2 = 0$ **67**. a) $\frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{7}{6}$ b) $\frac{7\sqrt{19}}{19}$ c) $\frac{7\sqrt{41}}{41}$ **68**. a) $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ b) (1,-1,0) c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$ **69**. a) -1 b) $x+y-3 = 0$ c) $x = \frac{5}{4}+\lambda$; $y = \frac{7}{4}+\lambda$; $z = \frac{1}{2}$ **70**. b) 1 **71**. a) -8, $\frac{-1}{2}$ b) 4, -2 **72**. a) $3x+6y+4z-12 = 0$ b) $\left(\frac{36}{61}, \frac{72}{61}, \frac{48}{61}\right)$ c) 4