MATRICES (definiciones)

Tamaño o dimensión

número de filas x número de columnas

Matriz rectangular

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{2x4}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Matriz cuadrada

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4}$$

Matriz identidad

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Matriz columna

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4x1}$$

Matriz fila

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{1x3}$$

Matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

A es una **matriz ortogonal** si

$$A \cdot A^t = I$$

A^{-1} es la **matriz inversa** de A si

$$A \cdot A^{-1} = I \text{ y } A^{-1} \cdot A = I$$

Matrices nulas

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz opuesta

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz regular, aquellas que **<u>SÍ</u>** tienen inversa.

Matriz singular, aquellas que **<u>NO</u>** tienen inversa.

INVERSA DE UNA MATRIZ

Una matriz tiene inversa si es cuadrada y además, el determinante NO es cero.

Cálculo de la inversa de una matriz 2x2 (usando incógnitas):

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix};\qquad \text{Por la definición de inversa, sabemos: } A\cdot A^{-1}=I \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\textit{multiplicando matrices}\quad \begin{pmatrix}2a+c&2b+d\\3a&3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad \textit{igualando matrices}:\ \begin{cases}2a+c=1\\2b+d=0\\3a=0\\3b=1\end{cases}\Rightarrow \textit{resolviendo}\begin{cases}a=0\\b=1/3\\c=1\\d=-2/3\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/3\\1&-2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0&-1\\-3&2\end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa de una matriz 3x3 (usando determinantes):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$$

1º) Se calcula el determinante de A. **2º) Se calcula la traspuesta de A.** **3º) Se calcula la adjunta de A^t.**

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&0\\3&-2&4\end{pmatrix}$$

1º) El determinante: $|A|=-8\neq 0$ ***(DISTINTO DE 0)***

2º) La traspuesta de A: $A^t=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{pmatrix}$

3º) La adjunta de A^t: Adj(A^t) =

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&-2\\0&0&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1&-2\\0&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-2\\0&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\0&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&3\\0&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&3\\1&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2\\1&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4&0\\-8&0&0\\-1&3&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-8}\cdot\begin{pmatrix}-4&-4&0\\-8&0&0\\-1&3&-2\end{pmatrix}$$

PROPIEDADES CON OPERACIONES MATRICIALES

i) $A+B=B+A$

ii) $A\cdot B\neq B\cdot A$

iii) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

iv) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

v) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

vi) $aA+bA=(a+b)A$ (**factor común**)

vii) en caso de sacar factor común con matrices, si queda un número "suelto", se le añade I (identidad)

$$3BA+5A=(3B+5I)A$$

<u>Y NO</u> $3BA+5A=(3B+5)A$

viii) al sacar factor común matrices, hay que tener cuidado en la posición que están (izquierda o derecha). De manera que:

- si tengo una matriz repetida a la derecha de cada sumando, se saca factor común a la derecha.

$$BA+2A=(B+2I)A$$

- si tengo una matriz repetida a la izquierda de cada sumando, se saca factor común a la izquierda.

$$AB+2A=A(B+2I)$$

- si tengo una matriz repetida a la derecha en un sumando y a la izquierda en otro sumando, entonces **<u>NO</u>** se puede sacar factor común.

$$AB+CA=\text{no se puede sacar factor común}$$

ix) $(A+B)^t=A^t+B^t$

x) NO siempre se cumplen las identidades notables (solo si A y B conmutan):

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$$

EXPRESIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN FORMA MATRICIAL

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y=5 \\ 7x-y-3z=8 \end{cases}$$; Escribamos el sistema como $AX=B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix};\ \textbf{donde } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix};\quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & -4 & 0 & | & 5 \\ 7 & -1 & -3 & | & 8 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, despejamos X:

$$AX=B \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$$

NOTA: Si $XA=B \quad\Rightarrow\quad X=B\cdot A^{-1}$

Rango de una matriz: el número de ecuaciones (o filas en matrices) que son linealmente independientes.

Cálculo de un determinante de orden 2 (tamaño 2x2):

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & (-4) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) = 10$$

Cálculo de un determinante de orden 3 (tamaño 3x3): **REGLA DE SARRUS**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2$$
$$-1 \cdot (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$= 1$$

Cálculo de un determinante de orden 4 (desarrollo de una fila por sus adjuntos):

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

i) Si una matriz tiene una fila o columna entera de ceros: su determinante es 0.

ii) Si una matriz tiene dos filas iguales o columnas iguales: su determinante es 0.

iii) Si una matriz tiene dos filas o dos columnas proporcionales: su determinante es 0.

iv) Si una matriz tiene una fila que es combinación lineal del resto de filas, o tiene una columna que es combinación lineal del resto de columnas: su determinante es 0.

v) Si en una matriz cambiamos entre sí dos filas o dos columnas: el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

vi) Si en una fila tengo sumas (o restas), se puede separar el determinante en otros dos, conservando el resto de filas iguales y separando la fila de sumas en dos partes:

$$\begin{vmatrix} a+1 & b+1 & c+1 \\ d+1 & e+1 & f+1 \\ g+1 & h+1 & i+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+1 & e+1 & f+1 \\ g+1 & h+1 & i+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d+1 & e+1 & f+1 \\ g+1 & h+1 & i+1 \end{vmatrix}$$

vii) Si el determinante de una matriz es 0, entonces las filas son linealmente dependientes.

viii) Se puede **sacar factor común** <u>por cada fila o por cada columna</u> (**NO** se saca factor común de toda la matriz a la vez)

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 5 & 0 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 0 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2\cdot 5}{3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

ix) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

x) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

xi) $|A^t| = |A|$

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Dado un sistemas de ecuaciones de la forma $AX = B$, donde $A^* = A|B$

- Si $Rg(A) = Rg(A^*) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow S.C.D.$ (se resuelve con la Regla de Cramer)
- Si $Rg(A) = Rg(A^*) <$ nº de incógnitas $\Rightarrow S.C.I.$ (puede resolverse con $z = \lambda$)
- Si $Rg(A) \neq Rg(A^*)$ $\Rightarrow S.I.$ (no tiene solución)

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS CON PARÁMETROS

Discutir el siguiente sistema en función del parámetro a: $\begin{cases} (a+1)x+y+z=a+1 \\ x+(a+1)y+z=a+3 \\ x+y+(1+a)z=-2a-4 \end{cases}$

1º) Escribo la matriz A*:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 1 & a+3 \\ 1 & 1 & a+1 & -2a-4 \end{array}\right)$$

2º) Calculo el mayor determinante posible en A*:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}=a^3+3a^2$$

3º) Igualo el determinante anterior a 0 y resuelvo la ecuación:

$$|A|=a^3+3a^2=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a=-3 \end{cases}$$

4º) Discuto el sistema en función de los valores obtenidos del parámetro:

Si $a\neq 0,-3$

$$\left.\begin{array}{r} |A|\neq 0\Rightarrow Rg(A)=3 \\ Rg(A^*)=3 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S.C.D.$$

Si $a=-3$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} |A|=0\Rightarrow Rg(A)=2 \\ Rg(A^*)=2 \end{array}\right\}\Rightarrow S.C.I.$$

Si $a=0$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$

$$|1|\neq 0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{r} |A|=0\Rightarrow Rg(A)=1 \\ Rg(A^*)=2 \end{array}\right\}\Rightarrow S.I.$$

5º) Resuelvo el sistema en los casos en los que se pida:

Si $a\neq 0,-3$ S.C.D.

CRAMER

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ a+3 & a+1 & 1 \\ -2a-4 & 1 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a+1}{a}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+3 & 1 \\ 1 & -2a-4 & a+1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a+3}{a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & a+3 \\ 1 & 1 & -2a-4 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-2(a+2)}{a}$$

Si $a=-3$ S.C.I.

Los rangos son iguales a 2, por lo que:

$$\begin{cases} -2x+y+z=-2 \\ x-2y+z=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$x=\frac{4+3\lambda}{3}$$

$$y=\frac{2+3\lambda}{3} \qquad \lambda\in\Re$$

$$z=\lambda$$