

2.3.1 Transformada Wavelet

De manera muy general, la Transformada Wavelet de una función $f(t)$ es la descomposición de $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$, que forman una base y son llamadas las “Wavelets”. La Transformada Wavelet se define como:

$$W_f(s, \tau) = \int f(t) \psi_{s,\tau}^*(t) dt \quad (2.11)$$

Las Wavelets son generadas a partir de la traslación y cambio de escala de una misma función wavelet $\psi(t)$, llamada la “Wavelet madre”, y se define como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right) \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) \quad (2.12)$$

donde s es el factor de escala, y τ es el factor de traslación.

Las wavelets $\psi_{s,\tau}(t)$ generadas de la misma función wavelet madre $\psi(t)$ tienen diferente escala s y ubicación τ , pero tienen todas la misma forma. Se utilizan siempre factores de escala $s > 0$. Las Wavelets son dilatadas cuando la escala $s > 1$, y son contraídas cuando $s < 1$. Así, cambiando el valor de s se cubren rangos diferentes de frecuencias. Valores grandes del parámetro s corresponden a frecuencias de menor rango, o una escala grande de $\psi_{s,\tau}(t)$. Valores pequeños de s corresponden a frecuencias de mayor rango o una escala muy pequeña de $\psi_{s,\tau}(t)$.

2.3.2 Wavelets ortonormales y discretas

Cuando la función $f(t)$ es continua y las wavelets son continuas con factor de escala y traslación discretas, la Transformada Wavelet resulta en una serie de coeficientes wavelets, y es llamada la descomposición en Series Wavelet.

La función $f(t)$ puede ser reconstruida desde los coeficientes wavelets discretos $W_f(s, \tau)$, de la siguiente manera:

$$f(t) = A \sum_s \sum_\tau W_f(s, \tau) \psi_{s,\tau}(t) \quad (2.13)$$

donde A es una constante que no depende de $f(t)$.

A estas funciones wavelets continuas con factores de escala y traslación discretos se las denomina *Wavelets discretas*. Los factores de escala y traslación de las wavelets discretas pueden ser expresados como:

$$s = s_0^i \quad y \quad \tau = k\tau_0 s_0^i \quad (2.14)$$

donde el exponente i y la constante k son enteros, y $s_0 > 1$ es un paso fijo de dilatación.

El factor de traslación τ depende del paso de dilatación s , Ec. (2.14). Entonces, a partir de la Ec. (2.12) y con la Ec. (2.14), las correspondientes wavelets discretas quedan expresadas como:

$$\psi_{i,k}(t) = s_0^{-i/2} \psi \left(s_0^{-i} (t - k\tau_0 s_0^i) \right) = s_0^{-i/2} \psi(s_0^{-i} t - k\tau_0) \quad (2.15)$$

A través de la Ec. (2.11), la Transformada Wavelet de una función continua es realizada a frecuencias y tiempos discretos que corresponden a muestreos con distintas traslaciones (tiempo) y distintas dilataciones (o cambios de escala).

El paso de muestreo en tiempo es pequeño para el análisis utilizando wavelets de pequeña escala, mientras que es grande para el análisis con wavelets de gran escala. La posibilidad de variar el factor de escala s permite usar wavelets de escala muy pequeña para concentrar el análisis en singularidades de la señal. Cuando solo los detalles de la señal son de interés, unos pocos niveles de descomposición son necesarios. Por lo tanto, el análisis wavelet provee una forma más eficiente de representar señales transitorias.

A modo de ejemplo, podemos hacer una analogía entre el análisis de Wavelet y el microscopio. Así, el factor de escala s_0^i corresponde al aumento o resolución del microscopio y el factor de traslación τ corresponde a la ubicación donde se hace la observación con el microscopio. Si queremos mirar detalles muy pequeños, el aumento y la resolución deben ser grandes, lo que se corresponde con un i grande y negativo. Esto da lugar a una función wavelet muy concentrada, y a pasos de traslación pequeños. Para un valor de i grande y positivo, la wavelet se extiende y los pasos de traslación son adaptados a esa amplitud.

Eligiendo adecuadamente $\psi(t)$ y los parámetros s_0, τ_0 , es posible lograr que las funciones $\psi_{s,\tau}(t)$ constituyan una base ortonormal de $L^2(\mathbf{R})$. En particular si se elige $s_0 = 2$ y $\tau_0 = 1$, entonces existe $\psi(t)$, con buenas propiedades de localización tiempo–frecuencia, tal que $\psi_{s,\tau}(t)$ constituye una base ortonormal $L^2(\mathbf{R})$.

De esta forma, si las funciones wavelets discretas forman una base ortonormal, una función $f(t)$ de soporte finito puede ser reconstruida como una suma de los coeficientes wavelets discretos $W_f(s, \tau)$ multiplicados por las funciones de la base, como sigue:

$$f(t) = \sum_s \sum_{\tau} W_f(s, \tau) \psi_{s,\tau}(t) \quad (2.16)$$

Una descomposición wavelet ortonormal no posee información redundante y representa la señal en forma univoca. Una base wavelet ortonormal es posible con wavelets con factores de traslación y dilatación discretos. Por lo tanto, para estas funciones wavelets discretas ortogonales, los productos internos son iguales a cero:

$$\int \psi_{i,k}^*(t) \psi_{m,n}(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{si } i = m \text{ y } k = n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

En 1986 Meyer y Mallat demostraron que la descomposición y reconstrucción wavelet ortonormal podrían ser implementadas en el marco del análisis multiresolución de señales.ⁱ

ⁱ [Introducción a la Transformada Wavelet - DESCOMPOSICIÓN DE SEÑALES](#)