TIN

Študentská zbierka príkladov

31. januára 2019

Obsah

1 Chomského hierarchia

1.1 1. opravný termín skúšky 2017

1. Formálne definujte pojem gramatika a pre každú triedu Chomského hierarchie uveďte typ gramatiky generujúcu jazyky tejto triedy.

1.2 2. opravný termín skúšky 2017

1. Uvažujte Chomského hierarchiu jazykov rozšírenú o triedu rekurzívnych jazykov a triedu deterministických bezkontextových jazykov. Pre každú triedu tejto klasifikácie uveďte a zdôvodnite, či je v tejto triede rozhodnuteľný, alebo čiastočne rozhodnuteľný, problém náležitosti (členstva) daného reťazca do jazyka.

2 Regulárne jazyky

2.1 Riadny termín skúšky 2017

1. Formálne definujte nedeterministický konečný automat, jeho konfiguráciu, reláciu prechodu medzi konfiguráciami a jazyk prijímaný týmto automatom.

2. Rozhodnite a dokážte, či jazyk

   $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) \text{ mod } 2 = \#_b(w) \text{ mod } 2\}$

   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w a *mod* značí operáciu modulo, je regulárny.

   Poznámka: Pri dokazovaní, že je jazyk regulárny, stačí uviesť odpovedajúcu gramatiku alebo automat. Pri dokazovaní, že jazyk nie je regulárny, použite Pumping Lemma.

3. Formálne zapíšte obecný tvar sústavy rovníc nad regulárnymi výrazmi v štandardnom tvare. Ďalej uvažujte jazyk generovaný gramatikou $G = (\{X, Y\}, \{x, y\}, P, X)$, kde P je tvorená pravidlami:

   $X \to xyX \mid xxY \mid \varepsilon$

   $Y \to yY \mid x$

   Zostavením príslušnej sústavy rovníc nad regulárnymi výrazmi vo štandardnom tvare a jej riešením vyjadrite jazyk $L(G)$.

   Poznámka: Preferované riešenie neprevádza G na ekvivalentný konečný automat.

2.2 1. opravný termín skúšky 2017

1. Rozhodnite a dokážte, či jazyk

   $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w) \vee \#_c(w) \geq 2\}$

   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w, je regulárny.

   Poznámka: Pri dokazovaní, že je jazyk regulárny, stačí uviesť odpovedajúcu gramatiku alebo automat. Pri dokazovaní, že jazyk nie je regulárny, použite Pumping Lemma.

2.3 2. opravný termín skúšky 2017

1. Rozhodnite a dokážte, či nasledujúci jazyk je regulárny.

   $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge \#_b(w) \leq 2\}$

   Poznámka: $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w. Pri dokazovaní, že je jazyk regulárny, stačí uviesť odpovedajúcu gramatiku alebo automat. Pri dokazovaní, že jazyk nie je regulárny, použite Pumping Lemma.

2.4 1. priebežný test 2018

1. Pre deterministický konečný automat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\})$, kde δ je definovaná ako:

   $\delta(q_0, a) = q_1 \quad \delta(q_0, b) = q_0 \quad \delta(q_0, c) = q_0$

   $\delta(q_1, a) = q_2 \quad \delta(q_1, b) = q_0 \quad \delta(q_1, c) = q_0$

   $\delta(q_2, a) = q_2 \quad \delta(q_2, b) = q_3 \quad \delta(q_2, c) = q_0$

   $\delta(q_3, a) = q_3 \quad \delta(q_3, b) = q_3 \quad \delta(q_3, c) = q_3$

   zapíšte jazyk $L(A)$ v tvare regulárneho výrazu. Ďalej zostrojte pravú lineárnu gramatiku G, pre ktorú platí, že $L(G) = L(A)$.

2. Uvážme nasledujúci problém P: pre nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodnite, či je jazyk $L(A)$ nekonečný.

   - Zapíšte stručne hlavnú myšlienku algoritmu, ktorý rieši problém P.
   - Na základe prechodovej funkcie δ zapíšte formálne reláciu $R_\delta \subseteq Q \times Q$, ktorá popisuje, či je v automate A možný (priamy) medzi danou dvojicou stavov (p, q). Na základe tejto relácie a ich uzáveru zapíšte predikát, ktorý rozhoduje problém P.
   - Demonštrujte použitie tohto predikátu na automatu $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, kde δ je definovaná ako:

     $\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\})$

     $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\})$

     $\delta(q_2, a) = \emptyset)$

2.5 Riadny termín skúšky 2018

1. Formálne definujte gramatiku typu 3, reláciu priamej derivácie a jazyk generovaný touto gramatikou.

2. Rozhodnite a dokážte, či jazyk

   $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 < \#_a(w) \bmod 3\}$

   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w a *mod* značí operáciu modulo, je regulárny.

   Poznámka: Pri dokazovaní, že je jazyk regulárny, stačí uviesť odpovedajúcu gramatiku alebo automat. Pri dokazovaní, že jazyk nie je regulárny, použite Pumping Lemma.

2.6 1. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte redukovaný DKA, reláciu nerozlišiteľnosti. Zostrojte redukovaný DKA pre
   $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podreťazec } aab\}$
2. Rozhodnite a dokážte, či
   - Existuje regulárny jazyk, ktorý nie je konečný ani co-konečný.
   - Problém neprázdnosti KA je rozhodnuteľný.
   - Trieda regulárnych jazykov je uzavretá na nekonečné zjednotenie, tj. pre každú nekonečnú množinu $\{L_0, L_1, L_2, \ldots\}$ regulárnych jazykov platí, že aj ich zjednotenie $L = \bigcup L_i$ je regulárny jazyk.
3. Dokážte, že nasledujúci jazyk nie je regulárny:
   $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#a(w) \neq \#b(w)\}$
   Poznámka: nedoporučuje se použitie Pumping Lemma.

2.7 2. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte pojem regulárne množiny a regulárneho výrazu. Pre jazyk:
   $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ mod } 2 = 1\}$
   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w a *mod* značí operáciu modulo, zostrojte konečný automat A, pre ktorý platí $L(A) = L$. Ďalej pre A zostavte príslušnú sústavu rovníc nad regulárnymi výrazmi, ktorej riešením je regulárny jazyk popisujúci jazyk L. Túto sústavu vyriešte a určite regulárny výraz E taký, že $L(E) = L$.
2. Zapíšte presne a formálne Pumping Lemma pre regulárne jazyky. Použite Pumping Lemma k dôkazu, že jazyk
   $L = \{a^n bc^m \mid n > m > 0\}$
   nie je regulárny.

3 Bezkontextové jazyky

3.1 1. priebežný test 2018

1. Pre bezkontextový jazyk
   $L = \{a^n b^m c^{3n} \mid n > 0 \land m \text{ je nepárne (liché)}\}$
   zostrojte a formálne zapíšte (v zhode s definíciou):
   - bezkontextovú gramatiku G takú, že $L(G) = L$
   - zásobníkový automat A taký, že $L(A) = L$

2. Presne a formálne definujte gramatiky typu 0 a typu 2. Nech $G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ a $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ sú gramatiky typu 2 a $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Zostrojte gramatiky $G_., G_*, G_\cup$ typu 2 také, že:

   $L(G_.) = L(G_1) \cdot L(G_2)$

   $L(G_*) = L(G_1)^*$

   $L(G_\cup) = L(G_1) \cup L(G_2)$

3.2 2. priebežný test 2018

1. Formálne zapíšte Pumping lemma pre bezkontextové jazyky.

2. Rozhodnite a dokážte, či jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ je bezkontextový:

   $L = \{c^i w \mid i > 0 \wedge \#_a(w) \leq 3 * \#_b(w)\} \cap \{c^i ww \mid i \geq 0 \wedge w \in \{a, b\}^*\}$

   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w.

3. Pre deterministický zásobníkový automat (DZA) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ formálne definujte tvar prechodovej funkcie δ a konfiguráciu automatu M.

4. Nech $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je DZA. Dokážte, že jazyk

   $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L(M) \wedge w \text{ obsahuje podreťazec } ab\}$

   je deterministický bezkontextový jazyk (je možné sa odkázať na vlastnosti bezkontextových jazykov z prednášky).

3.3 Riadny termín skúšky 2017

1. Ukážte, že pre jazyk

   $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

   kde w^R označuje reverzáciu reťazca w, platí Pumping Lemma pre bezkontextové jazyky pre hodnotu $k = 3$ (k je konštanta z Pumping Lemma).

2. Navrhnite bezkontextovú gramatiku pre jazyk

   $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

3. Formálne definujte bezkontextovú gramatiku, priamu deriváciu, reláciu derivácie a jazyk generovaný touto gramatikou.

3.4 1 opravný termín skúšky 2017

1. Formálne definujte (nedeterministický) zásobníkový automat, jeho konfiguráciu, reláciu prechodu medzi konfiguráciami a jazyk prijímaný týmto automatom.

2. Rozhodnite a dokážte, či nasledujúce jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ sú bezkontextové:

   $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid (w = zcz^R \wedge z \in \{a, b\}^*) \vee \#_a(w) = \#_b(w)\}$

   $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid (w = zcz^R \wedge z \in \{a, b\}^*) \wedge \#_a(w) = \#_b(w)\}$

   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w a w^R označuje reverzáciu reťazca w.

3.5 2 opravný termín skúšky 2017

1. Uvažujme gramatiku $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami P:

   $S \to aSB \mid ASb \mid aa$

   $A \to aAa \mid B$

   $B \to bb \mid A$

   Zostroje (systematickým postupom z prednášky) a formálne zapíšte zásobníkový automat M taký, že $L(G) = L(M)$, ktorý modeluje syntaktickú analýzu zhora nadol.

   Zapíšte postupnosť konfigurácii stroja M pre vstupný reťazec $bbaab$.

2. Rozhodnite a dokážte, či je nasledujúci jazyk bezkontextový.

   $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_c(w) \leq \#_b(w) + \#_c(w)\}$

   Poznámka: Pri dokazovaní, že je jazyk bezkontextový, stačí uviesť odpovedajúcu gramatiku alebo automat. Pri dokazovaní, že jazyk nie je bezkontextový, použite Pumping Lemma.

3.6 Riadny termín skúšky 2018

1. Formálne definujte nedeterministický zásobníkový automat, jeho konfiguráciu, reláciu prechodu a jazyk prijímaný týmto automatom.

2. Navrhnite bezkontextovú gramatiku pre jazyk

   $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \wedge (i \geq 3j \vee 2i \leq k)\}$

3. Ukážte, že pre jazyk

   $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

   kde $\#_x(w)$ označuje počet znakov x v reťazci w, platí Pumping Lemma pre bezkontextové jazyky pre hodnotu $k = 2$ (k je konštanta z Pumping Lemma).

4. Nech $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je nedeterministický zásobníkový automat. Popíšte konštrukciu nedeterministického zásobníkového automatu M', pre ktorý platí:

   $L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L(M) \wedge \#_a(w) \bmod 3 \neq 0\}$

3.7 1. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte Pumping Lemma pre bezkontextové jazyky. Uveďte hlavné kroky dôkazu Pumping Lemma pre bezkontextové jazyky.

2. Formálne definujte reláciu prechodu u DZA. Zostrojte DZA, ktorý akceptuje jazyk:

   $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \forall u \in \{a, b, c\}^*$ platí, že ak je u prefix w, potom $\#a(u) \geq \#b(u)\}$

3.8 2. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte nedeterministický zásobníkový automat, jeho konfiguráciu, reláciu prechodu medzi konfiguráciami a jazyk prijímaný týmto automatom. Ďalej zapíšte bezkontextový jazyk, ktorý nie je deterministickým bezkontextovým jazykom (požadované vlastnosti jazyka nemusíte dokazovať).

2. Uvažujme gramatiku $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidlami:

   $S \rightarrow aSB \mid ASb \mid aa$

   $A \rightarrow aAa \mid B$

   $B \rightarrow bb \mid A$

   Zostroje (systematickým postupom z prednášky) a formálne zapíšte zásobníkový automat M taký, že $L(G) = L(M)$, ktorý modeluje syntaktickú analýzu zhora nadol.

   Zapíšte postupnosť konfigurácii stroja M pre vstupný reťazec $bbaab$, ktorá vedie k akceptovaniu tohto reťazca.

4 Algoritmy

4.1 Riadny termín skúšky 2016

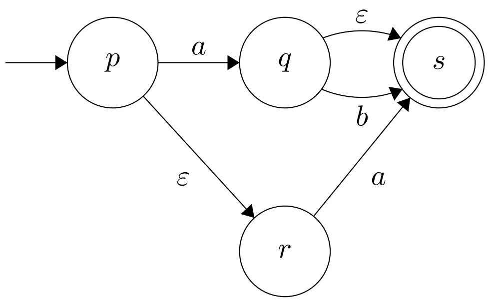
1. Definujte sústavu rovníc nad regulárnymi výrazmi v štandardnom tvare. Ďalej uvažujte obecnú lineárnu gramatiku G. Popíšte formálne algoritmus nájdenia regulárneho výrazu R takého, že $L(G) = L(R)$, bez toho, aby bolo potrebné ku gramatike G vytvárať ekvivalentný konečný automat a/alebo gramatiku G transformovať. Algoritmus nájdenia regulárneho výrazu ilustrujte na príklade netriviálnej (s rekurziou, aspoň 2 nonterminály a 4 pravidla) pravej lineárnej gramatiky G, ktorá nie je regulárna.

4.2 Riadny termín skúšky 2017

1. Zapíšte algoritmus (vrátane výpočtu množiny neterminálov $N_t = \{A \mid A \Rightarrow^+ \varepsilon\}$), ktorý danú bezkontextovú gramatiku transformuje na jazykovo ekvivalentnú bezkontextovú gramatiku bez epsilon pravidiel.

4.3 1. opravný termín skúšky 2017

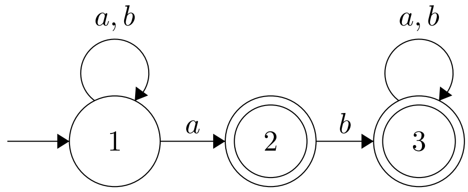
1. Formálne definujte pojem ε-uzáver stavu RKA (rozšíreného konečného automatu, tj. nedeterministického automate s ε prechodmi) a formálne zapíšte algoritmus, ktorý v polynomiálnom čase prevedie vstupný RKA na nedeterministický konečný automat bez ε prechodov (NKA). Ďalej uvažujte nasledujúci RKA A:



Pomocou zapísaného algoritmu preveďte A na jazykovo ekvivalentný NKA (t.j. bez ε prechodov).

4.4 Riadny termín skúšky 2018

1. Zapíšte algoritmus, ktorý daný nedeterministický konečný automat bez ε prechodov prevedie na jazykovo ekvivalentný konečný automat. Algoritmus demonštrujte na automatu uvedenom nižšie.



4.5 1. opravný termín skúšky 2018

1. Uveďte hlavné kroky algoritmu, ktorý pre danú bezkontextovú gramatiku G rozhoduje, či je jazyk $L(G)$ nekonečný. Algoritmus demonštrujte na bezkontextovej gramatike $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, \{S \to aA, S \to Sb, A \to b\}, S)$.

5 Uzáverové vlastnosti

5.1 2. priebežný test 2018

1. Rozhodnite a dokážte, či platia nasledujúce tvrdenia ($\mathcal{L}_2$ značí triedu všetkých bezkontextových jazykov a $\mathcal{L}_3$ značí triedu regulárnych jazykov):

   - $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 : \forall L_2 \in \mathcal{L}_2 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2$
   - $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : \forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$
   - Trieda bezkontextových jazykov nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ je uzavrená vzhľadom k binárnej operácii $\circ$ definovanej nasledovne:
     $L_1 \circ L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid (w \in L_1 \wedge w \in L_2) \vee |w| > 1\}$

1. Rozhodnite a dokážte, či pre jazyky nad abecedou Σ platí:

   $\forall L_1 \in \mathcal{L}_3 : \exists L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$

   kde $\mathcal{L}_3$ a $\mathcal{L}_2$ značia triedu regulárnych resp. bezkontextových jazykov.

5.2 1. opravný termín skúšky 2017

1. Rozhodnite a dokážte, či pre jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ platí:

   - $\forall L \in \mathcal{L}_3 : |L| = \infty \to \lozenge L \in \mathcal{L}_2$
   - $\forall L \in \mathcal{L}_3 : |L| = \infty \to \lozenge L \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$

   kde $\lozenge L = \{w \in L \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}$

2. Rozhodnite a dokážte, či pre jazyky nad abecedou Σ platí:

   $\forall L_1 \in \mathcal{L}_3 : \exists L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$

   $\mathcal{L}_3$ a $\mathcal{L}_2$ značia triedu regulárnych resp. bezkontextových jazykov.

5.3 2. opravný termín skúšky 2017

1. Nech $\mathcal{L}_{DBJ}$ značí triedu deterministických bezkontextových jazykov a $\mathcal{L}_3$ triedu regulárnych jazykov. Rozhodnite a dokážte, či platí:

   $\exists L_1 \in \mathcal{L}_{DBJ} : \exists L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_{DBJ}$

5.4 Riadny termín skúšky 2018

1. Nech $\mathcal{L}_{CK}$ značí triedu co-konečných jazykov, ktorých komplement je konečný. Rozhodnite a dokážte, či platí:

   $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CK}$ je jazyk $L_1 \cdot L_2$ regulárny

5.5 2. opravný termín skúšky 2018

1. Nech $\mathcal{L}_2$ značí triedu bezkontextových jazykov a $\mathcal{L}_3$ triedu regulárnych jazykov. Rozhodnite a dokážte, či platí nasledovné tvrdenia:

   - $\exists L_a \in \mathcal{L}_3 : \forall L_b \in \mathcal{L}_2 : L_a \setminus L_b \in \mathcal{L}_3$
   - Problém univerzality jazyka konečného automatu A (tj. či $L(A) = \Sigma^*$ pre danú abecedu Σ) je rozhodnuteľný.
   - $\exists L \in \mathcal{L}_3$ taký, že redukovaný konečný automat A s $L(A) = L$ má aspoň stavy.

2. Nech $\mathcal{L}_2$ značí triedu bezkontextových jazykov a $\mathcal{L}_3$ triedu regulárnych jazykov. Rozhodnite a dokážte, či platí nasledovné tvrdenia:

   - Pre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ platí, že $\exists L_a, L_b \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_a \cap L_b$ nie je konečný a zároveň $L_a \cap L_b \in \mathcal{L}_3$.
   - Problém prázdnosti jazyka bezkontextovej gramatiky je rozhodnuteľný.
   - Pre všetky $L_a, L_b \in \mathcal{L}_2$ platí, že $L_a \cup L_b$ je konečný $\Rightarrow L_a \cap L_b \in \mathcal{L}_2$.

6 Turingove stroje

6.1 2. priebežný test 2017

1. Definujte prechodovú funkciu NTS, reťazec prijímaný TS, jazyk prijímaný TS. TS zadaný prechodovou funkciou má na vstupe ΔabcaΔ^w. Doplňte 4 pravidlá tak, aby výstup bol ΔacbaΔ^w.

6.2 2. priebežný test 2018

1. Pre deterministický Turingov stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_f)$ formálne definujte tvar prechodovej funkcie δ, konfiguráciu stroja M a reláciu prechodu $\vdash_M$ medzi konfiguráciami.
2. Zostrojte a formálne zapíšte deterministický Turingov stroj M o najviac 4 stavoch a 4 prechodoch tak, aby platilo $(q_0, \Delta a^i \Delta^w, 0) {\vdash^*}_M (q_f, \Delta b^i \Delta^w, n)$, kde i,n ≥ 0.

6.3 1. opravný termín skúšky 2018

1. Pre nedeterministický Turingov stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_f)$ formálne definujte tvar prechodovej funkcie δ. Rozhodnite a dokážte, či pre každý NTS M existuje DTS M' taký, že $L(M) = L(M')$.

6.4 2. opravný termín skúšky 2018

1. Pre nedeterministický Turingov stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_f)$ formálne definujte tvar prechodovej funkcie δ. Ďalej rozhodnite a dokážte, či existuje rekurzívne vyčísliteľný jazyk L taký, že L nie je rekurzívny a zároveň komplement jazyka L je rekurzívne vyčísliteľný.

7 Diagonalizácia

7.1 1. opravný termín skúšky 2016

1. Diagonalizáciou dokážte, že existuje jazyk, ktorý nie je kontextový, ale je rekurzívny.

7.2 1. opravný termín skúšky 2017

1. Pomocou techniky diagonalizácie dokážte, že existuje jazyk, ktorý nie je rekurzívne vyčísliteľný.

7.3 2. opravný termín skúšky 2018

1. Diagonalizáciou dokážte, že existuje totálna funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá nie je primitívne rekurzívna. V dôkaze sa mimo iné pokúste argumentovať, prečo je možné enumerovať (tj. usporiadať do nejakej postupnosti) primitívne rekurzívne funkcie.

8 Redukcie, rekurzívne a rekurzívne vyčísliteľné jazyky

8.1 Riadny termín skúšky 2016

1. Rozhodnite a dokážte, či jazyk:

   $L_1 = \{\langle M \rangle \mid \exists w \in \Sigma^*$ také, že M zastaví na $w\}$ je rekurzívny

   $L_2 = \{\langle M \rangle \mid \exists w \in \Sigma^*$ také, že M nezastaví na w behom 17 krokov$\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   $\langle M \rangle$ označuje kód Turingovho stroja so vstupnou abecedou Σ

8.2 1. opravný termín skúšky 2016

1. Rozhodnite a dokážte, či jazyk:

   $L_1 = \{\langle M\rangle \mid \forall w \in \Sigma^*$ také, že M nezastaví na $w\}$ je rekurzívny

   $L_2 = \{\langle M\rangle \mid \forall w \in \Sigma^*$ také, že M zastaví na w behom 17 krokov$\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   $\langle M\rangle$ označuje kód Turingovho stroja so vstupnou abecedou Σ

2. Uveďte jazyk, ktorý je rekurzívne vyčísliteľný, ale nie je rekurzívny, a jeho komplement je tiež rekurzívne vyčísliteľný.

8.3 Riadny termín skúšky 2017

1. Formálne definujte pojem redukcie jazyka L_1 na jazyk L_2 a zapíšte príslušné tvrdenia (implikácie) pre určovanie rozhodnuteľnosti resp. nerozhodnuteľnosti jazykov.

2. Rozhodnete a dokážte, či sú rekurzívne vyčísliteľné jazyky uzavreného vzhľadom k operácii pozitívna iterácia $+$.

3. Rozhodnite a dokážte, či existuje rekurzívne vyčísliteľný jazyk L_1 a rekurzívny jazyk L_2, pre ktoré platí $L_2 \leq L_2$ (tj. L_1 sa redukuje na L_2).

8.4 1. opravný termín skúšky 2017

1. Rozhodnite a dokážte, či existuje jazyk L, ktorý nie je rekurzívny, ale je rekurzívne vyčísliteľný, a jeho doplnok $\overline{L}$ je tiež rekurzívne vyčísliteľný.

8.5 Riadny termín skúšky 2017

1. Pre abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ rozhodnite a dokážte, či:

   $L_1 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj taký, že $|L(M) \cap \{a, b\}| = 1\}$ je rekurzívny

   $L_2 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj taký, že $|L(M) \cap \{a, b\}| \geq 1\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   Poznámka: $\langle M\rangle$ označuje kód Turingovho stroja M.

8.6 1. opravný termín skúšky 2017

1. Pre abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ rozhodnite a dokážte, či:

   $L_1 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj taký, že $L(M)$ je bezkontextový jazyk$\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   $L_2 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj taký, že $|L(M)| \geq 3\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   $L_3 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj, pre ktorý platí, že existuje $w \in \{a, b\}^{42}$ také, že M zastaví na w do $|w|$ krokov$\}$ je rekurzívny

   Poznámka: $\langle M\rangle$ označuje kód Turingovho stroja M.

8.7 Riadny termín skúšky 2018

1. Definujte triedu rekurzívnych a rekurzívne vyčísliteľných jazykov. Ďalej pre každú triedu uveďte jazyk, ktorý do danej triedy patrí, a jazyk, ktorý do triedy nepatrí.

2. Definujte jazyk L_{HP}, ktorý špecifikuje problém zastavenia. Ďalej rozhodnite a dokážte, či existuje rekurzívny jazyk L, pre ktorý platí, že $L \leq L_{HP}$ (tj. L sa redukuje na L_{HP}).

3. Pre abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ rozhodnite a dokážte, či:

   $L_1 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj taký, že $|L(M)| > |\Sigma|\}$ je rekurzívny

   $L_2 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj, pre ktorý platí, že $\exists w \in L(M) : |w| > |\langle M\rangle|\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   Poznámka: $\langle M\rangle$ označuje reťazec, ktorý kóduje Turingov stroj M. V dôkazoch stačí uviesť hlavnú myšlienku redukcie či konštrukcie požadovaného Turingovho stroja.

8.8 1. opravný termín skúšky 2018

1. Rozhodnite a dokážte, či platí:

   - Pre ľubovoľné dva rekurzívne jazyky L_1 a L_2 platí, že $L_1 \geq L_2$.
   - Pre ľubovoľné dva neregulárne rekurzívne jazyky L_1 a L_2 platí, že $L_1 \geq L_2$.

2. Pre abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodnite a dokážte, či:

   $L_1 = \{\langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle \mid M_1$ a M_2 sú Turingove stroje také, že $L(M_1) \setminus L(M_2) = \{a\}\}$ je rekurzívny

   $L_2 = \{\langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle \mid M_1$ a M_2 sú Turingove stroje také, že $L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$ je rekurzívne vyčísliteľný

   Poznámka: $\langle M\rangle$ označuje reťazec, ktorý kóduje Turingov stroj M. V dôkazoch stačí uviesť hlavnú myšlienku redukcie či konštrukcie požadovaného Turingovho stroja.

8.9 2. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte pojem redukcie jazyka L_1 na jazyk L_2. Označme túto redukciu ako $L_1 \geq L_2$. Rozhodnite a dokážte, či $\{0^n\#1^n \mid n > 0\} \geq L_{MP}$, kde L_{MP} špecifikuje problém náležitosti (Membership problem) pre Turingove stroje.

   Poznámka: V dôkaze sa vyžadujú hlavné kroky konštrukcie požadovanej redukcie alebo dôkaz, že taká redukcia nemôže existovať.

2. Pre abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodnite a dokážte, či:

   $L_1 = \{\langle M_1\rangle\#\langle M_2\rangle \mid M_1$ a M_2 sú Turingove stroje také, že $L(M_1) \cdot L(M_2) = \{ab\}\}$ je rekurzívny

   $L_2 = \{\langle M\rangle \mid M$ je Turingov stroj, pre ktorý existuje $w \in \Sigma^*$, ktoré M akceptuje do 9 krokov$\}$ je rekurzívny

   Poznámka: $\langle M\rangle$ označuje reťazec, ktorý kóduje Turingov stroj M. V dôkazoch stačí uviesť hlavnú myšlienku redukcie či konštrukcie požadovaného Turingovho stroja. V prípade redukcie je možné použiť redukciu z Halting problemu.

9 Zložitosť

9.1 Riadny termín skúšky 2016

1. Rozhodnite a dokážte, či platí:

   - $n^3 \notin \mathcal{O}(n^2)$
   - $2n^n + 2n + n \in \mathcal{O}(n^2 - 2n - 2)$
   - $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \in DTIME[n]$

9.2 Riadny termín skúšky 2017

1. Definujte formálne časovú zložitosť Turingových strojov a triedu jazykov $DTIME[n^5]$.

2. Rozhodnite a dokážte, či platí:

   - $n^3 \in \mathcal{O}(10n^2 + 100)$
   - $10n^2 + 100 \in \mathcal{O}(n^3)$

3. Rozhodnite a dokážte, či platí:
   $L_1, L_2 \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\} \in NTIME[n^3]$

9.3 1. opravný termín skúšky 2017

1. Definujte formálne:

   - pre funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ množinu $\mathcal{O}(f(n))$
   - priestorovú zložitosť nedeterministických Turingových strojov

2. Rozhodnite a dokážte, či platí:
   $L \in DTIME[n^4] \Rightarrow \{u_1, u_2 \dots u_k \mid k \geq 1, \forall 1 \leq i \leq k : u_i \in L\} \in NTIME[n^4]$

9.4 Riadny termín skúšky 2018

1. Formálne definujte:

   - priestorovú zložitosť nedeterministických Turingových strojov, ktorý prijíma jazyk L
   - asymptotické horné obmedzenie funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tj. $\mathcal{O}(f(n))$
   - triedu jazykov $NSPACE[2^n]$

2. Pre $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodnite a dokážte, či platí:
   $L \in DTIME[n^5] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in L$ také, že w' je podslovo slova $w\} \in DTIME[n^7]$

9.5 1. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte časovú zložitosť DTS prijímajúceho jazyk L a triedu zložitosti P. Rozhodnite a dokážte, či je trieda zložitosti P uzavrená vzhľadom k unárnej operácii $\Diamond$ definovanej nasledovne:

   $\Diamond L = \{w \in L \mid w = a^n b^n c^n \wedge n > 0\}$

2. Formálne definujte pojem polynomiálnej redukcie jazyka L_1 na jazyk L_2. Označme túto redukciu ako $L_1 \geq_p L_2$. Rozhodnite a dokážte, či platí:

   $\exists L \in P : \forall L' \in NP : L' \geq_p L \Rightarrow P = NP$

9.6 2. opravný termín skúšky 2018

1. Formálne definujte asymptotické horné obmedzenie funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tj. $\mathcal{O}(f(n))$ a rozhodnite a dokážte, či platí:

   - $n^3 \in \mathcal{O}(10n^2 + 100)$
   - $10n^2 + 100 \in \mathcal{O}(n^3)$

2. Definujte formálne, kedy je jazyk NP-úplný. Ďalej rozhodnite a dokážte, či platí:

   $L_1, L_2 \in DTIME[n^5] \Rightarrow \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\} \in NTIME[n^5]$

10 NP problémy, polynomiálna redukcia

10.1 Riadny termín skúšky 2017

1. Definujte formálne, kedy je jazyk NP-úplný a dokážte, že nasledujúci jazyk je NP-úplný:

   $L = \{(\phi_1, \phi_2) \mid \phi_1, \phi_2$ sú výrokové formule v konjunktívnej normálnej forme, pre ktoré existujú dve rôzne valuácie premenných v_1 a v_2 také, že $\phi_1(v_1) \neq \phi_2(v_1) \wedge \phi_1(v_2) \neq \phi_2(v_2)\}$

   Poznámka: $\phi_i(v_i) \in \{true, false\}$ označuje, či je formula ϕ_i pravdivá pri valuácií premenných v_i.

10.2 1. opravný termín skúšky 2017

1. Definujte formálne, kedy je jazyk NP-úplný a dokážte, že nasledujúci jazyk je NP-úplný:

   $L = \{(\phi, n) \mid \phi$ je výroková formula nad premennými $x_1, \ldots, x_k$ v konjunktívnej normálnej forme, $n \in \mathbb{N}_{\not\vdash}$ a naviac platí, že existuje valuácia v premenných $x_1, \ldots, x_k$, ktorá splňuje ϕ, a pre ktorú platí $E(v) \geq n\}$,

   kde $E(v) \in \mathbb{N}$ značí číslo, ktorého binárny zápis $n_1, \ldots, n_k$ je definovaný nasledovným spôsobom:

   $$n_i = \begin{cases} 0 & \text{ak } v(x_i) = true \\ 1 & \text{ak } v(x_i) = false \end{cases}$$

10.3 Riadny termín skúšky 2018

1. Definujte formálne, kedy je jazyk NP-úplný. Ďalej uveďte hlavnú myšlienku dôkazu, že jazyk L definovaný nižšie je NP-úplný:

   $L = \{(\phi_1, \phi_2) \mid \phi_1, \phi_2$ sú výrokové formule v konjunktívnej normálnej forme, pre ktoré existuje valuácia premenných $\vec{v}$ taká, že $\phi_1(\vec{v}) \neq \phi_2(\vec{v})\}$

   Poznámka: $\phi_i(\vec{v}) \in \{true, false\}$ označuje, či je formula ϕ_i pravdivá pri valuácií premenných $\vec{v}$.

11 Vyčíslitelné funkcie

11.1 1. opravný termín skúšky 2017

1. Pomocou počiatočných funkcií a operátorov kombinácie, kompozície a primitívnej rekurzie vyjadrite funkciu:

   $tplus(x, y) = x + 3y$

   Nepoužívajte žiadne ďalšie funkcie zavedené na prednáškach mimo počiatočných funkcií. Nepoužívajte zjednodušenú syntax zápisu funkcií - dodržujte presne definičný tvar operátorov kombinácie, kompozície a primitívne rekurzie.

11.2 2. opravný termín skúšky 2017

1. Pomocou počiatočných funkcií a operátorov kombinácie, kompozície a primitívnej rekurzie vyjadrite funkciu:

   $tplus(x, y) = 3x + 2y$

   Nepoužívajte žiadne ďalšie funkcie zavedené na prednáškach mimo počiatočných funkcií. Nepoužívajte zjednodušenú syntax zápisu funkcií - dodržujte presne definičný tvar operátorov kombinácie, kompozície a primitívne rekurzie.

11.3 1. opravný termín skúšky 2018

1. Nech $a \in \mathbb{N}$ a $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je totálna turingovsky vyčísliteľná funkcia. Uvážme funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanú pomocou primitívnej rekurzívnej funkcie nasledovne:

   $f(0) = a$

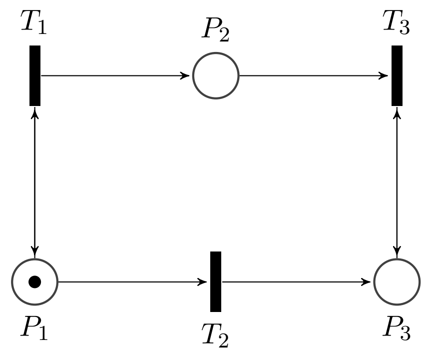
   $f(x + 1) = h(x, f(x))$

   Dokážte, že f je totálna turingovsky vyčísliteľná funkcia (stačí zostrojiť TS, ktorý vyčísluje f).

12 Petriho siete

12.1 Riadny termín skúšky 2017

1. Definujte formálne P/T Petriho siete. V zhode s touto definíciou popíšte sieť na obrázku (všetky miesta majú neobmedzenú kapacitu). Ďalej popíšte množinu výpočtových postupností tejto Petriho siete ako jazyk nad množinou jej prechodov.



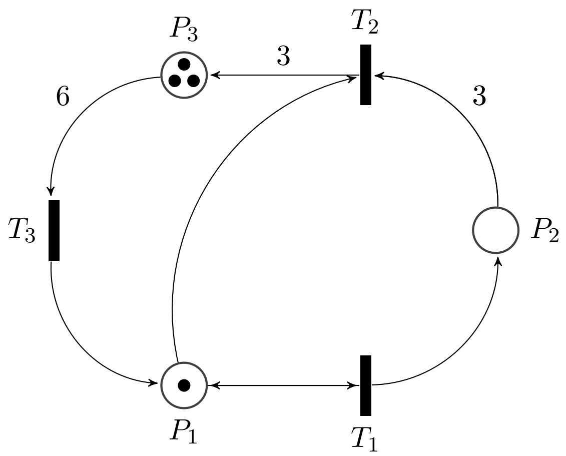
12.2 1. opravný termín skúšky 2017

1. Pre P/T Petriho sieť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ definujte formálne:

   - predpis pre výpočet nasledujúceho značenia M' zo značenia M pri prevediteľnom prechode t (tj. platí $M[t\rangle M'$)
   - množinu $[M_0\rangle$ dosiahnuteľných značení siete N
   - (obecnú) prechodovú funkciu $\delta : [M_0\rangle \times T^* \rightarrow [M_0\rangle$

12.3 Riadny termín skúšky 2018

1. Definujte formálne P/T Petriho siete. V zhode s touto definíciou popíšte sieť na obrázku (všetky miesta majú neobmedzenú kapacitu). Ďalej zapíšte prevediteľnú postupnosť prechodov a odpovedajúcich značení, v ktorej sa vyskytujú všetky prechody (použite zavedenú notáciu $M[t\rangle M'$).

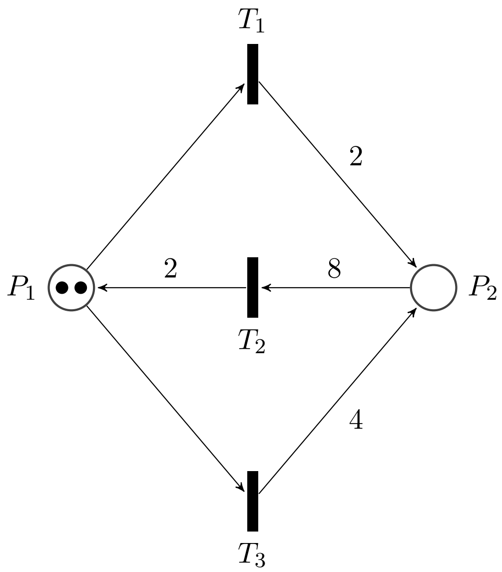


12.4 1. opravný termín skúšky 2018

1. Pre P/T Petriho sieť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ definujte formálne:

   - prevediteľný prechod a pravidlá pre výpočet nasledujúceho značenia
   - množinu dosiahnuteľných značení siete N zo značenia M_0

Ďalej popíšte množinu dosiahnuteľných značení uvedenej Petriho siete:



12.5 2. opravný termín skúšky 2018

1. Zostrojte P/T Petriho, ktorá ma 2 miesta, počiatočné značenie $M_0 = (0, 1)$ a má nekonečnú množinu $(M_1, M_2, \cdots)$ značení dosiahnuteľných z M_0, pre ktorú platí, že $\forall i > 0, M_i = (m_i, n_i)$, kde $m_i = 1$ a n_i je párne (sudé). Uveďte grafickú reprezentáciu tejto siete a popíšte ju v zhode s matematickou definíciou P/T Petriho sietí.