

# TIN - Zbierka príkladov

16. januára 2019

## **Obsah**

<b>1 Chomského hierarchia</b>	<b>3</b>
<b>2 Regulárne jazyky</b>	<b>3</b>
<b>3 Bezkontextové jazyky</b>	<b>5</b>
<b>4 Algoritmy</b>	<b>7</b>
<b>5 Uzáverové vlastnosti</b>	<b>8</b>
<b>6 Turingove stroje</b>	<b>10</b>
<b>7 Diagonalizácia</b>	<b>10</b>
<b>8 Redukcie, rekurzívne a rekurzívne vyčísliteľné jazyky</b>	<b>10</b>
<b>9 Zložitosť</b>	<b>11</b>
<b>10 NP problémy, polynomiálna redukcia</b>	<b>12</b>
<b>11 Vyčísliteľné funkcie</b>	<b>13</b>
<b>12 Petriho siete</b>	<b>13</b>

# 1 Chomského hierarchia

Uvažujte Chomského klasifikaci jazyků rozšířenou o třídu rekurzivních jazyků a třídu deterministických bezkontextových jazyků. Pro každou třídu této klasifikace uveďte a zdůvodněte, zda je v této třídě rozhodnutelný, nebo částečně rozhodnutelný, problém náležitosti (členství) daného řetězce do jazyka (40 bodů).

Formálně definujte pojem *gramatika* a pro každou třídu Chomského hierarchie uveďte typ gramatiky generující jazyky této třídy. (30 bodů)

## 2 Regulárne jazyky

Pro deterministický konečný automat  $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_3\})$ , kde  $\delta$  je definována jako

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = q_1, & \delta(q_0, b) = q_0, & \delta(q_0, c) = q_0, \\ \delta(q_1, a) = q_2, & \delta(q_1, b) = q_0, & \delta(q_1, c) = q_0, \\ \delta(q_2, a) = q_2, & \delta(q_2, b) = q_3, & \delta(q_2, c) = q_0, \\ \delta(q_3, a) = q_3, & \delta(q_3, b) = q_3, & \delta(q_3, c) = q_3, \end{array}$$

zapište jazyk  $L(A)$  ve tvaru regulárního výrazu. Dále sestrojte pravou lineární gramatiku  $G_A$  pro kterou platí, že  $L(G) = L(A)$ .

**Cas: 60 minut**

Uvažme následující problém  $P$ : pro nedeterministický konečný automat  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  rozhodněte, zda je jazyk  $L(A)$  nekonečný.

- Zapište stručně hlavní myšlenku algoritmu, který řeší problém  $P$ .
- Na základě přechodové funkce  $\delta$  zapište formálně binární relaci  $R_\delta \subseteq Q \times Q$ , která popisuje, zda je v automatu  $A$  možný (přímý) přechod mezi danou dvojicí stavů  $(p, q)$ . Na základě této relace a jejich uzávěrů zapište predikát, který rozhoduje problém  $P$ .
- Demonstrujte použití tohoto predikátu na automatu  $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ , kde  $\delta$  je definována jako

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= \{q_1, q_2\}, \\ \delta(q_1, a) &= \{q_1, q_2\}, \\ \delta(q_2, a) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Formálně definujte nedeterministický konečný automat, jeho konfiguraci, relaci přechodu mezi konfiguracemi a jazyk přijímaný tímto automatem. (40 bodů)

Rozhodněte a dokažte, zda jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = \#_b(w) \bmod 2\},$$

kde  $\#_x(w)$  značí počet znaků  $x$  v řetězci  $w$  a mod značí operaci modulo, je regulární. (40 bodů)

Poznámka: Při dokazování, že je jazyk regulární, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není regulární, použijte Pumping Lemma.

Formálně zapište obecný tvar soustavy rovnic nad regulárními výrazy ve standardním tvaru. Dále uvažte jazyk generovaný gramatikou  $G = (\{X, Y\}, \{x, y\}, P, X)$ , kde  $P$  je tvořena pravidly

$$\begin{aligned} X &\rightarrow xyX \mid xxY \mid \epsilon \\ Y &\rightarrow yY \mid x \end{aligned}$$

Sestavením příslušné soustavy rovnic nad regulárními výrazy ve standardním tvaru a jejím řešením vyjádřete jazyk  $L(G)$ . (40 bodů)

Poznámka: Preferované řešení neprevádí  $G$  na ekvivalentní konečný automat.

Rozhodněte a dokažte, zda jazyk

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w) \vee \#_c(w) \geq 2\},$$

kde  $\#_x(w)$  značí počet znaků  $x$  v řetězci  $w$ , je regulární. (40 bodů)

Poznámka: Při dokazování, že je jazyk regulární, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není regulární, použijte Pumping Lemma.

Rozhodněte a dokažte, zda je následující jazyk regulární

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge \#_b(w) \leq 2\}.$$

(40 bodů)

Poznámka:  $\#_x(w)$  značí počet symbolů  $x$  v řetězci  $w$ . Při dokazování, že je jazyk regulární, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není regulární, použijte Pumping Lemma.

Formálně definujte gramatiku typu 3, relaci přímé derivace a jazyk generovaný touto gramatikou. (30 bodů)

Rozhodněte a dokažte, zda jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 < \#_a(w) \bmod 3\},$$

kde  $\#_x(w)$  značí počet znaků  $x$  v řetězci  $w$  a mod značí operaci modulo, je regulární. (40 bodů)

Poznámka: Při dokazování, že je jazyk regulární, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není regulární, použijte Pumping Lemma.

### 3 Bezkontextové jazyky

Formálně zapište Pumping lemma pro bezkontextové jazyky.

Rozhodněte a dokažte, zda jazyk  $L$  nad abecedou  $\Sigma = \{a, b, c\}$  je bezkontextový:

$$L = \{c^i w \mid i > 0 \wedge \#_a(w) \leq 3 * \#_b(w)\} \cap \{c^i w w \mid i \geq 0 \wedge w \in \{a, b\}^*\},$$

kde  $\#_x(w)$  označuje počet znaků  $x$  v řetězci  $w$ .

Pro deterministický zásobníkový automat (DZA)  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  formálně definujte tvar přechodové funkce  $\delta$  a konfiguraci automatu  $M$ .

Nechť  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  je DZA. Dokažte, že jazyk

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L(M) \wedge w \text{ obsahuje podřetězec } ab\}$$

je deterministický bezkontextový jazyk (lze se odkázat na vlastnosti bezkontextových jazyků z přednášky).

Ukažte, že pro jazyk

$$L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\},$$

kde  $w^R$  označuje reverzi řetězce  $w$ , platí Pumping Lemma pro bezkontextové jazyky pro hodnotu  $k = 3$  ( $k$  je konstanta z Pumping Lemmatu). (40 bodů)

Navrhněte bezkontextovou gramatiku pro jazyk

$$L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}.$$

(40 bodů)

Formálně definujte bezkontextovou gramatiku, přímou derivaci, relaci derivace a jazyk generovaný touto gramatikou. (30 bodů)

Formálně definujte (nedeterministický) zásobníkový automat, jeho konfiguraci, relaci přechodu mezi konfiguracemi a jazyk přijímaný tímto automatem. (40 bodů)

Rozhodněte a dokažte, zda následující jazyky nad abecedou  $\Sigma = \{a, b, c\}$  jsou bezkontextové:

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid (w = zcz^R \wedge z \in \{a, b\}^*) \wedge \#_a(w) = \#_b(w)\},$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid (w = zcz^R \wedge z \in \{a, b\}^*) \vee \#_a(w) = \#_b(w)\},$$

kde  $\#_x(w)$  značí počet znaků  $x$  v řetězci  $w$  a  $w^R$  označuje reverzi řetězce  $w$ . (70 bodů)

Uvažujme gramatiku  $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$  s pravidly  $P$ :

$$S \rightarrow aSB \mid ASb \mid aa$$

$$A \rightarrow aAa \mid B$$

$$B \rightarrow bb \mid A$$

- i) Sestrojte (systematickým postupem z přednášky) a formálně zapište zásobníkový automat  $M$ , takový, že  $L(G) = L(M)$ , který modeluje syntaktickou analýzu shora dolů.
- ii) Zapište posloupnost konfigurací stroje  $M$  pro vstupní řetězec  $bbaab$ .

(40 bodů)

Rozhodněte a dokažte, zda je následující jazyk bezkontextový.

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_c(w) \leq \#_b(w) + \#_c(w)\}.$$

(40 bodů)

Poznámka: Při dokazování, že je jazyk bezkontextový, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není bezkontextový, použijte Pumping Lemma.

Formálně definujte nedeterministický zásobníkový automat, jeho konfiguraci, relaci přechodu mezi konfiguracemi a jazyk přijímaný tímto automatem. (30 bodů)

Navrhněte bezkontextovou gramatiku pro jazyk

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0 \wedge (i \geq 3j \vee 2i \leq k)\}.$$

(40 bodů)

Ukažte, že pro jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\},$$

kde  $\#_x(w)$  značí počet znaků  $x$  v řetězci  $w$ , platí Pumping Lemma pro bezkontextové jazyky pro hodnotu  $k = 2$  ( $k$  je konstanta z Pumping Lematu). (40 bodů)

Nechť  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  je nedeterministický zásobníkový automat. Popište konstrukci nedeterministického zásobníkového automatu  $M'$ , pro který platí

$$L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L(M) \wedge \#_a(w) \bmod 3 \neq 0\}.$$

(40 bodů)

Pro bezkontextový jazyk

$$L = \{a^n b^m c^{3n} \mid n > 0 \wedge m \text{ je liché}\},$$

sestrojte a formálně zapište (ve shodě s definicí)

a) bezkontextovou gramatiku  $G$  takovou, že  $L(G) = L$ ,

b) zásobníkový automat  $A$  takový, že  $L(A) = L$ .

Přesně a formálně definujte gramatiky typu 0 a typu 2. Nechť  $G_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$  a  $G_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$  jsou gramatiky typu 2 a  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ . Sestrojte gramatiky  $G_\bullet$ ,  $G_\star$  a  $G_\cup$  typu 2 takové, že

a)  $L(G_\bullet) = L(G_1) \cdot L(G_2)$ ,

b)  $L(G_\star) = L(G_1)^*$ ,

c)  $L(G_\cup) = L(G_1) \cup L(G_2)$ .

## 4 Algoritmy

### 1. Riadny termín skúšky 2016

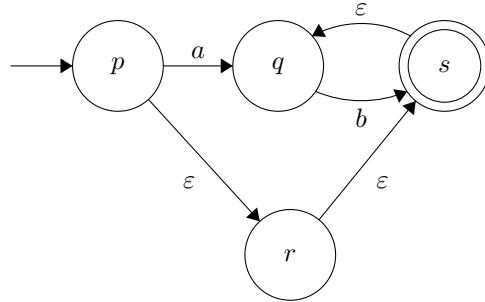
Definujte sústavu rovníc nad regulárnymi výrazmi v štandardnom tvaru. Ďalej uvažujte obecnú lineárnu gramatiku  $G$ . Popište formálne algoritmus nájdenia regulárneho výrazu  $R$  takého, že  $L(G) = L(R)$ , bez toho, aby bolo potrebné ku gramatike  $G$  vytvárať ekvivalentný konečný automat a/alebo gramatiku  $G$  transformovať. Algoritmus nájdenia regulárneho výrazu ilustrujte na príklade netriviálnej (s rekuriou, aspoň 2 nonterminály a 4 pravidla) pravej lineárnej gramatiky  $G$ , ktorá nie je regulárna.

### 2. Riadny termín skúšky 2017

Zapište algoritmus (vrátane výpočtu množiny neterminálov  $N_t = \{A \mid A \Rightarrow^+ \epsilon\}$ ), ktorý danú bezkontextovú gramatiku transformuje na jazykovo ekvivalentnú bezkontextovú gramatiku bez epsilon pravidiel.

### 3. 1. opravný termín skúšky 2017

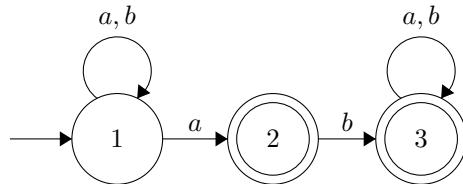
Formálne definujte pojem  $\varepsilon$ -uzáver stavu RKA (rozšíreného konečného automatu, tj. nedeterministického automatu s  $\varepsilon$  pravidlami) a formálne zapíšte algoritmus, ktorý v polynomiálnom čase prevedie vstupný RKA na nedeterministický konečný automat bez  $\varepsilon$  prechodov (NKA). Ďalej uvažujte nasledujúci RKA  $A$ :



Pomocou zapísaného algoritmu prevedťte  $A$  na jazykovo ekvivalentný NKA (t.j. bez  $\varepsilon$  prechodov).

#### 4. 2. opravný termín skúšky 2017, Riadny termín skúšky 2018

Zapíšte algoritmus, ktorý daný nedeterministický konečný automat bez  $\varepsilon$  prechodov prevedie na jazykovo ekvivalentný konečný automat. Algoritmus demonštrujte na automatu uvedenom nižšie.



## 5 Uzáverové vlastnosti

Definícia, co je to uzavretosť triedy jazykov. Dokaz neuzavretosti deterministickej bezkontextových jazykov na operacie prienik a zjednotenie. Zadana binarna relacia, dokazat, že je uzavrená.  $L1 \circ L2 = \{uv \mid u \in L1 \wedge v \in L2 \wedge |uv| \leq 5\}$ .

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení ( $\mathcal{L}_2$  značí třídu všech bezkontextových jazyků a  $\mathcal{L}_3$  značí třídu všech regulárních jazyků):

- a)  $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 : \forall L_2 \in \mathcal{L}_2 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2$
- b)  $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : \forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3$
- c) Třída bezkontextových jazyků nad abecedou  $\Sigma = \{a, b\}$  je uzavřená vzhledem k binární operaci  $\diamond$  definované následovně:

$$L_1 \diamond L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid (w \in L_1 \wedge w \in L_2) \vee |w| > 1\}.$$

Rozhodněte a dokažte, zda pro jazyky nad abecedou  $\Sigma$  platí

$$\forall L_1 \in \mathcal{L}_3 : \exists L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3,$$

kde  $\mathcal{L}_3$  a  $\mathcal{L}_2$  značí třídu regulárních resp. bezkontextových jazyků. (30 bodů)

Rozhodněte a dokažte, zda pro jazyky nad abecedou  $\Sigma = \{a, b, c\}$  platí:

- (a)  $\forall L \in \mathcal{L}_3 : |L| = \infty \implies \Diamond L \in \mathcal{L}_2,$
- (b)  $\forall L \in \mathcal{L}_3 : |L| = \infty \implies \Diamond L \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3,$

kde  $\Diamond L = \{w \in L \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}$ . (40 bodů)

Rozhodněte a dokažte, zda pro jazyky nad abecedou  $\Sigma$  platí

$$\forall L_1 \in \mathcal{L}_3 : \exists L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3,$$

kde  $\mathcal{L}_3$  a  $\mathcal{L}_2$  značí třídu regulárních resp. bezkontextových jazyků. (30 bodů)

Nechť  $\mathcal{L}_{CK}$  značí třídu co-konečných jazyků, tj. jazyků, jejichž komplement je konečný. Rozhodněte a dokažte, zda platí:

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CK} \text{ je jazyk } L_1 \cdot L_2 \text{ regulární.}$$

(40 bodů)

Nechť  $\mathcal{L}_{DBJ}$  značí třídu deterministických bezkontextových jazyků a  $\mathcal{L}_3$  značí třídu regulárních jazyků. Rozhodněte a dokažte, zda platí:

$$\exists L_1 \in \mathcal{L}_{DBJ} : \exists L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_{DBJ}.$$

(30 bodů)

## 6 Turingove stroje

### 1. 2. priebežný test 2017

Definujte prechodovú funkciu NTS, reťazec prijímaný TS, jazyk prijímaný TS. TS zadaný prechodovou funkciou má na vstupu  $\Delta abca\Delta^w$ . Doplňte 4 pravidlá tak, aby výstup bol  $\Delta acba\Delta^w$ .

### 2. 2. priebežný test 2018

Pre deterministický Turingov stroj  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sigma, q_0, q_f)$  formálne definujte tvar prechodej funkcie  $\sigma$ , konfiguráciu stroja  $M$  a reláciu prechodu  $\vdash_M$  medzi konfiguráciami.

### 3. 2. priebežný test 2018

Zostrojte a formálne zapíšte deterministický Turingov stroj  $M$  o najviac 4 stavoch a 4 prechodoch tak, aby platilo  $(q_0, \Delta a^i \Delta^w, 0) \vdash^* M (q_f, \Delta b^i \Delta^w, n)$ , kde  $i, n \geq 0$ .

## 7 Diagonalizácia

### 1. 1. opravný termín skúšky 2017

Pomocou techniky diagonalizácie dokážte, že existuje jazyk, ktorý nie je rekurzívne vyčísliteľný.

### 2. Riadny termín skúšky 2016

Dokážte, že existuje totálna funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , ktorá nie je primitívne rekurzívna.

## 8 Redukcie, rekurzívne a rekurzívne vyčísliteľné jazyky

### 1. Riadny termín skúšky 2017

Formálne definujte pojem redukcie jazyka  $L_1$  na jazyk  $L_2$  a zapíšte príslušné tvrdenia (implikácie) pre určovanie rozhodnutelnosti resp. nerozhodnutelnosti jazykov.

### 2. Riadny termín skúšky 2017

Rozhodnete a dokážte, či sú rekurzívne vyčísliteľné jazyky uzavreného vzhľadom k operácii pozitívna iterácia  $+$ .

### 3. Riadny termín skúšky 2017

Rozhodnite a dokážte, či existuje rekurzívne vyčísliteľný jazyk  $L_1$  a rekurzívny jazyk  $L_2$ , pre ktoré platí  $L_2 \leq L_1$  (tj.  $L_1$  sa redukuje na  $L_2$ ).

#### 4. 1. opravný termín skúšky 2017

Rozhodnite a dokážte, či existuje jazyk  $L$ , ktorý nie je rekurzívny, ale je rekurzívne vyčísliteľný, a jeho doplnok  $\bar{L}$  je tiež rekurzívne vyčísliteľný.

Pro abecedu  $\Sigma = \{a, b\}$  rozhodněte a dokažte, zda:

- i)  $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je Turingův stroj, pro který } |L(M) \cap \{a, b\}| = 1\}$  je rekurzivní.
- ii)  $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je Turingův stroj, pro který } |L(M) \cap \{a, b\}| \geq 1\}$  je rekurzivně vyčíslitelný.

(60 bodů)

Poznámka:  $\langle M \rangle$  označuje kód Turingova stroje  $M$ .

Pro abecedu  $\Sigma = \{a, b\}$  rozhodněte a dokažte, zda:

- i)  $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je Turingův stroj takový, že } L(M) \text{ je bezkontextový jazyk}\}$  je rekurzivně vyčíslitelný.
- ii)  $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je Turingův stroj takový, že } |L(M)| \geq 3\}$  je rekurzivně vyčíslitelný.
- iii)  $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je Turingův stroj, pro který platí, že existuje } w \in \{a, b\}^{42} \text{ takové, že } M \text{ zastaví na } w \text{ do } |w| \text{ kroků}\}$  je rekurzivní.

(90 bodů)

Poznámka:  $\langle M \rangle$  označuje kód Turingova stroje  $M$ .

(3b) Rozhodněte a dokážte zda jazyk:

- $L_1 = \{\langle M \rangle \mid \exists \omega \in \Sigma^* \text{ takové, že } M \text{ zastaví na } \omega\}$  je rekurzivní,
- $L_2 = \{\langle M \rangle \mid \exists \omega \in \Sigma^* \text{ takové, že } M \text{ nezastaví na } \omega \text{ během 17 kroků}\}$  je rekurzivně vyčíslitelný.

kde  $\langle M \rangle$  označuje kód Turingova stroje  $M$  se vstupem abecedou  $\Sigma$ . V důkazech použijte reducičné popisy hlavní myšlenky fungování partičného TS. Dále uvedete jazyk (různý od  $L_1$  a  $L_2$ ), který není rekurzivně vyčíslitelný.

## 9 Zložitost'

### 1. Riadny termín skúšky 2017

Definujte formálne časovú zložitosť Turingových strojov a triedu jazykov  $DTIME[n^5]$ .

### 2. Riadny termín skúšky 2017

Rozhodnite a dokážte, či platí:

$$n^3 \in \mathcal{O}(10n^2 + 100)$$

$$10n^2 + 100 \in \mathcal{O}(n^3)$$

### 3. Riadny termín skúšky 2017

Rozhodnite a dokážte, či platí:

$$L_1, L_2 \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{uv \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\} \in NTIME[n^3]$$

### 4. 1. opravný termín skúšky 2017

Definujte formálne:

- pre funkciu  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  množinu  $\mathcal{O}(f(n))$
  - priestorovú zložitosť nedeterministických Turingových strojov
5. 1. opravný termín termín skúšky 2017  
Rozhodnite a dokážte, či platí:  
 $L \in DTIME[n^4] \Rightarrow \{u_1, u_2 \dots u_k \mid k \geq 1, \forall 1 \leq i \leq k : u_i \in L\} \in NTIME[n^4]$
6. Riadny termín skúšky 2018  
Formálne definujte:
- priestorovú zložitosť nedeterministických Turingových strojov, ktorý prijíma jazyk  $L$
  - asymptotické horné obmedzenie funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (tj.  $\mathcal{O}(f(n))$ )
  - triedu jazykov  $NSPACE[2^n]$

## 10 NP problémy, polynomiálna redukcia

Definujte formálne, kdy je jazyk NP-úplný, a dokažte, že následujúci jazyk je NP-úplný:  
 $L = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2 \text{ jsou výrokové formule v konjunktívnej normálnej forme, pro které existují dvě různé hodnoty pro proměnné } v_1 \text{ a } v_2, \text{ takové že } \Phi_1(v_1) \neq \Phi_2(v_1) \wedge \Phi_1(v_2) \neq \Phi_2(v_2)\}$   
(40 bodů)  
Poznámka:  $\Phi_i(v_i) \in \{\text{true}, \text{false}\}$  označuje, zda je formule  $\Phi_i$  pravdivá při hodnotení proměnných  $v_i$ .

Definujte formálne, kdy je jazyk NP-úplný, a dokažte, že následujúci jazyk je NP-úplný:

$L = \{(\Phi, n) \mid \Phi \text{ je výroková formula nad proměnnými } x_1, \dots, x_k \text{ v konjunktívnej normálnej forme, } n \in \mathbb{N}_0, \text{ a navíc platí, že existuje hodnota } v \text{ pro proměnné } x_1, \dots, x_k, \text{ která splňuje } \Phi, \text{ a pro kterou platí } E(v) \geq n\},$   
kde  $E(v) \in \mathbb{N}$  značí číslo, jehož binárni zápis  $n_1 \dots n_k$  je definován následujícím způsobem:  

$$n_i = \begin{cases} 0 & \text{pokud } v(x_i) = \text{false}, \\ 1 & \text{pokud } v(x_i) = \text{true}. \end{cases}$$

(40 bodů)

Definujte formálně, kdy je jazyk NP-úplný. Dále uveďte hlavní myšlenku důkazu, že jazyk  $L$  definovaný níže je NP-úplný:

$$L = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2 \text{ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě, pro které existuje valuce proměnných } \bar{v} \text{ taková, že } \Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}.$$

(40 bodů)

Poznámka:  $\Phi_i(\bar{v}) \in \{\text{true}, \text{false}\}$  označuje, zda je formule  $\Phi_i$  pravdivá při valuci proměnných  $\bar{v}$ .

## 11 Vyčíslitelné funkce

Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci

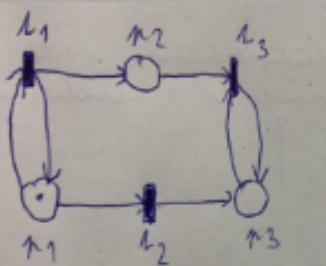
$$tplus(x, y) = x + 3y.$$

Nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí—dodržte písaně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

(30 bodů)

## 12 Petriho sítě

Definujte formálně P/T Petriho síť. Ve shodě s touto definicí popište síť na obrázku (všechna místa mohou mít neomezenou kapacitu). Dále popište množinu výpočetních posloupností této Petriho sítě jako jazyk nad množinou jejich přechodů. (40 bodů)



Pro P/T Petriho síť  $N = (P, T, F, W, K, M_0)$  definujte formálně následující:

- (a) předpis pro výpočet následujícího značení  $M'$  ze značení  $M$  při proveditelném přechodu  $t$  (tj. platí, že  $M[t]M'$ ),
- (b) množinu  $[M_0]$  dosažitelných značení síť  $N$  a
- (c) (zobecněnou) přechodovou funkci  $\delta : [M_0] \times T^* \rightarrow [M_0]$ .

(30 bodů)

Definujte formálně P/T Petriho sítě. Ve shodě s touto definicí popište síť na obrázku (všechna místa mají neomezenou kapacitu). Dále zapište proveditelnou posloupnost přechodů a odpovídajících značení, ve které se vyskytují všechny přechody (použijte zavedenou notaci  $M[t]M'$ ). (40 bodů)

