Manipulation d'un qubit

IBM Client Center Montpellier

JM Torres | torresjm@fr.ibm.com | 2-4 décembre 2019

les 5 postulats de la physique quantique

L'axiomatique de la physique quantique mobilise un espace géométrique, l'espace de Hilbert E des états, constitué de vecteurs représentant des états physique, chacun d'eux étant normé.

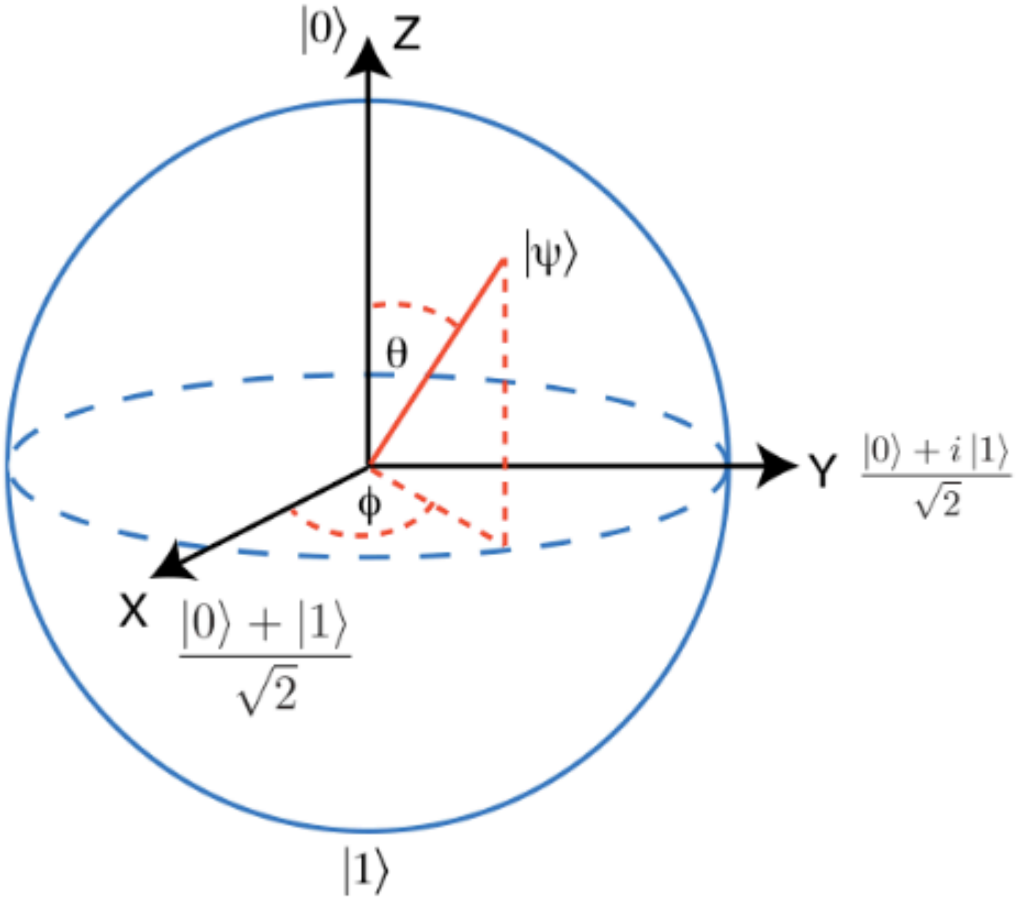
1. A chaque instant l'état d'un système physique est entièrement défini par un vecteur normé $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace des états du système considéré.
   Par linéarité un nouvel état peut être obtenu par addition d'états, c'est le principe de superposition, propriété fondamentale, spécifiquement quantique.
2. A toute grandeur physique observable A correspond un opérateur linéaire hermitien $\hat{A}$ défini dans E. Cet opérateur est appelé observable et est supposé décrire complètement la grandeur physique associée. Ce postulat définit la relation entre les grandeurs physiques et leur représentation.
3. La valeur de la mesure d'une quelconque grandeur physique observable A ne peut fournir comme résultat que l'une des valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}$.
4. La mesure d'une grandeur physique observable A effectuée sur un système dans un état initial $|\psi\rangle$ a pour probabilité $P_\psi(a_j)$ de fournir la valeur propre a_j associée au vecteur propre $\overrightarrow{u_j}$ de l'opérateur associé $\hat{A}$.
   En conséquence, on ne peut pas en général prédire avec certitude le résultat d'une mesure réalisée sur un système pourtant parfaitement connu. Ce postulat est à l'origine du caractère probabiliste de la théorie. Si la mesure est répétée un grand nombre de fois, les résultats suivront la courbe de probabilité prévue.
5. Si, quel que soit l'état initial du vecteur d'état, la mesure d'une observable donne la valeur propre a_j alors immédiatement après la mesure, le vecteur d'état du système est la projection normée de $|\psi\rangle$ sur le sous espace associé à cette valeur propre a_j.

Tangente Magazine HS 71. Les cinq postulats de la physique quantique | Marc Leconte

La sphère de Bloch

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \binom{\alpha}{\beta}$$



The Bloch sphere

Manipulation comme un bit classique:

$$ID|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \quad ID|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$SET|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad SET|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$UNSET|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \quad UNSET|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$NOT|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad NOT|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

Qubit : operators

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$ = **identité**

$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ = **NOT** car $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ devient $|1\rangle$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ devient $|0\rangle$

mais il y a des opérations que l'on ne peut pas faire (que l'on pouvait faire sur un bit classique) :

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

par contre bien d'autres sont possibles! …

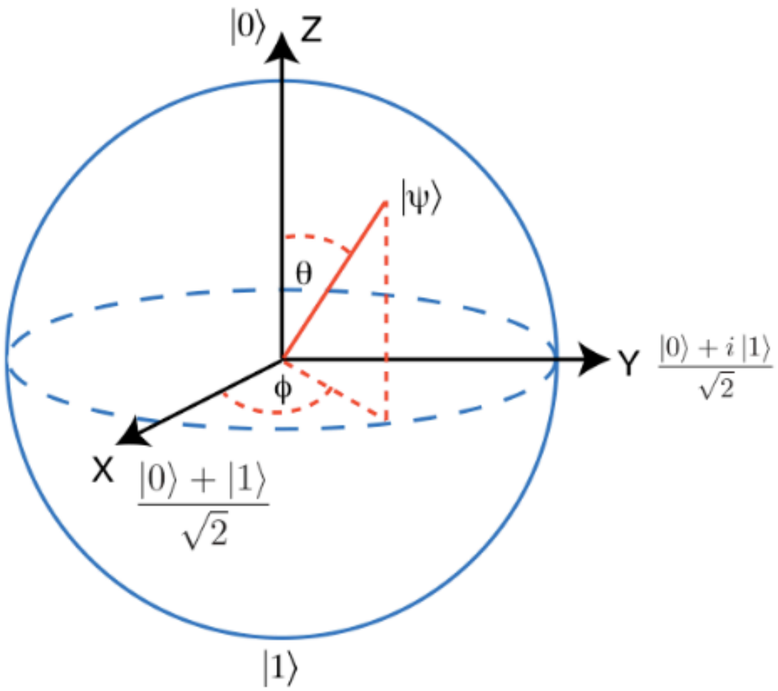
Bit Flip– X gate, NOT

- Rotation around the x-axis by π (Bit-Flip (0→1, 1→

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

X|0> = |1>

X|1> = |0>



The Bloch sphere

Y gate

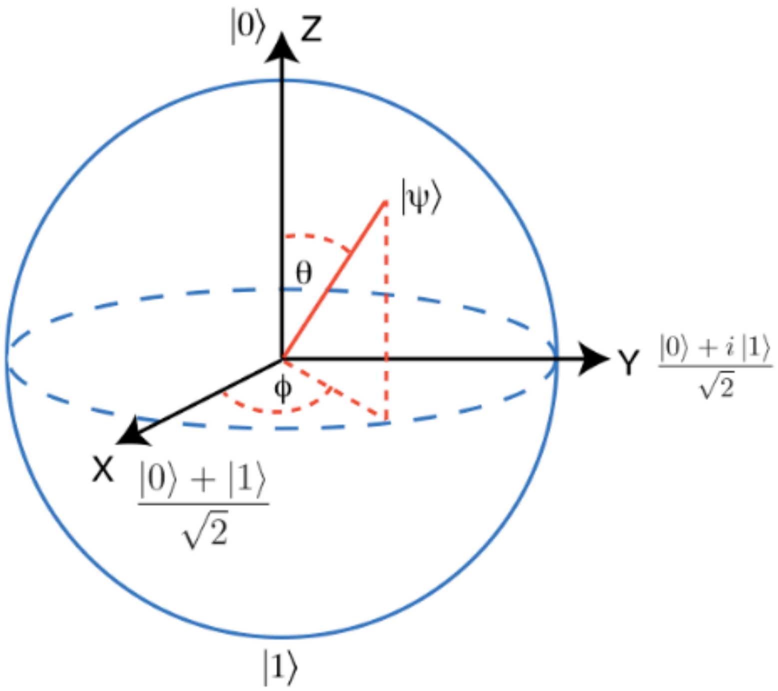
- Rotation around the y-axis by π

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Y|0> = -i|0>

Y|1> = i|1>

Same as X (+ phase)



The Bloch sphere

Other gates : Z gate

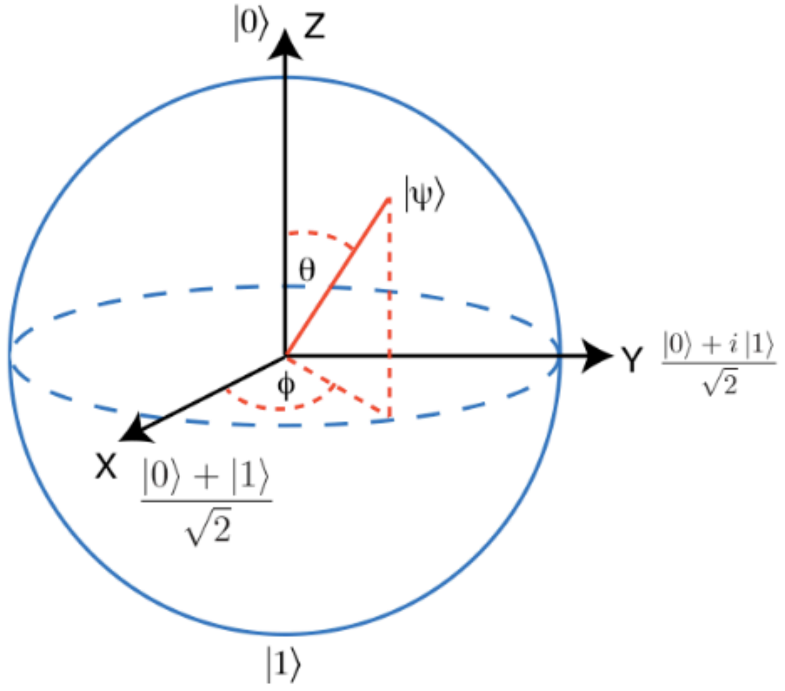
Z

- Rotation around the Z-axis by π

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Z|0> = |0>

Z|1> = -|1>



The Bloch sphere

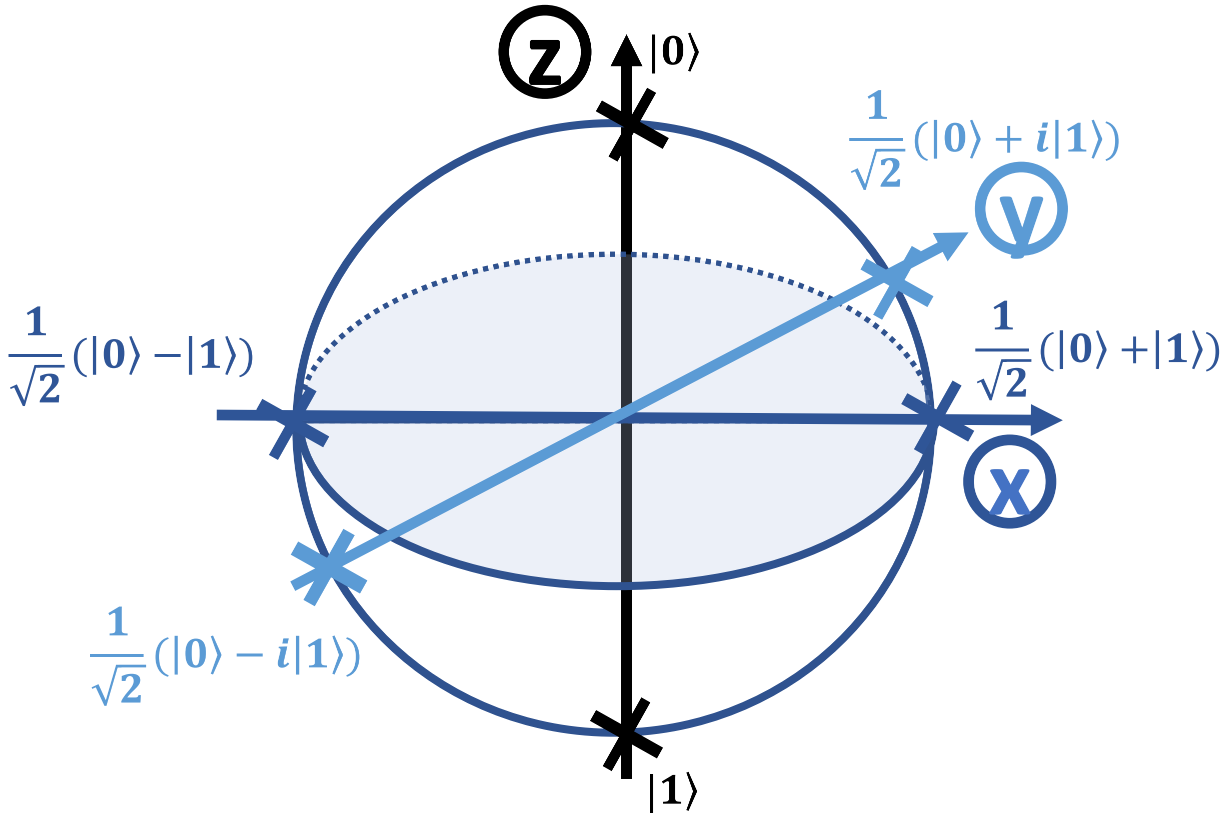
En résumé

Rotation of $\boldsymbol{\pi}$ around the X, Y, Z axis

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Properties:

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I$$

$$XY = iZ\,; ZX = iY\,; YZ = iX$$

$$XY = -YX\,; YZ = -ZY; XZ = -ZX$$

And we have many more possibilities …

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

$$U_3(\theta,\phi,\lambda) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\lambda}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\lambda+i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

U3 has the effect of rotating a qubit in the initial $|0\rangle$ state to one with an arbitrary superposition and relative phase

$$U_2(\phi,\lambda) = U_3(\frac{\pi}{2},\phi,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{i\lambda} \\ e^{i\phi} & e^{i\lambda+i\phi} \end{pmatrix}$$

From this gate, the Hadamard is done by H=U2(0,π)

$$U_1(\lambda) = U_3(0,0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix}$$

The U1 gate is known as the phase gate and is essentially the same as Rz(λ).

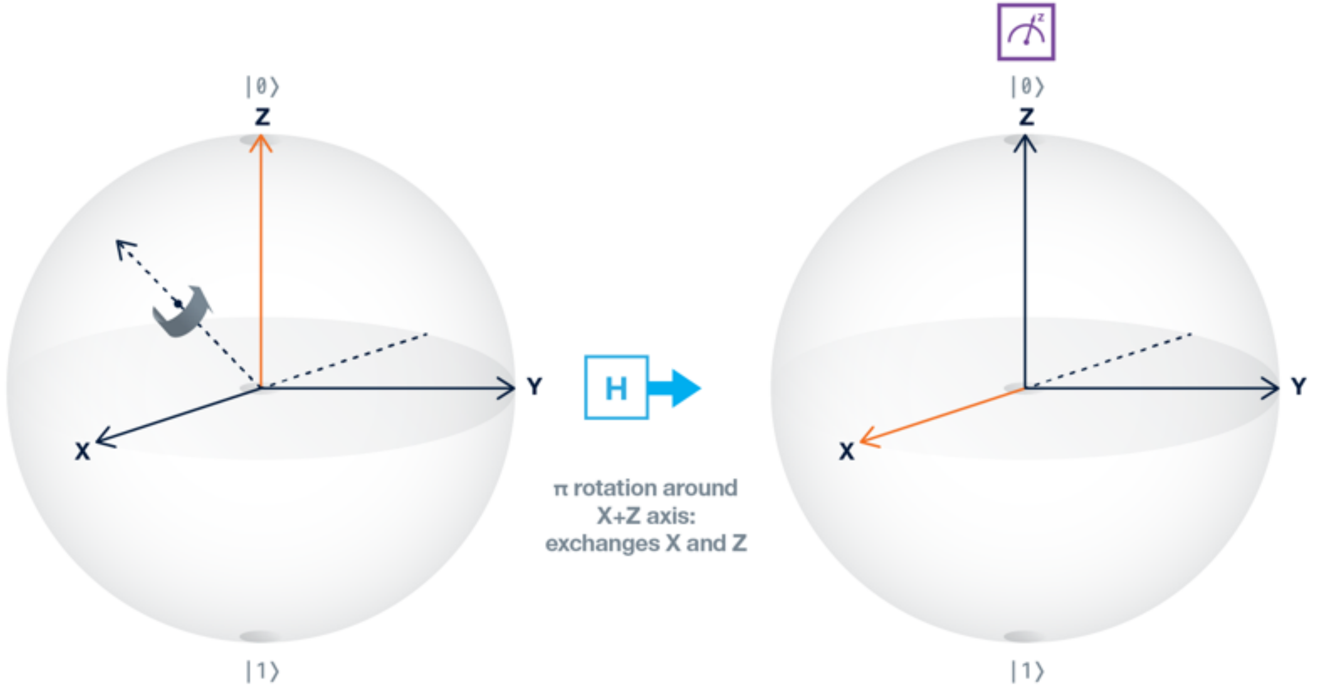
Creating Superposition – Hadamard gate

Produces equal-weighted combination of the states $|0\rangle$ and $|1\rangle$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

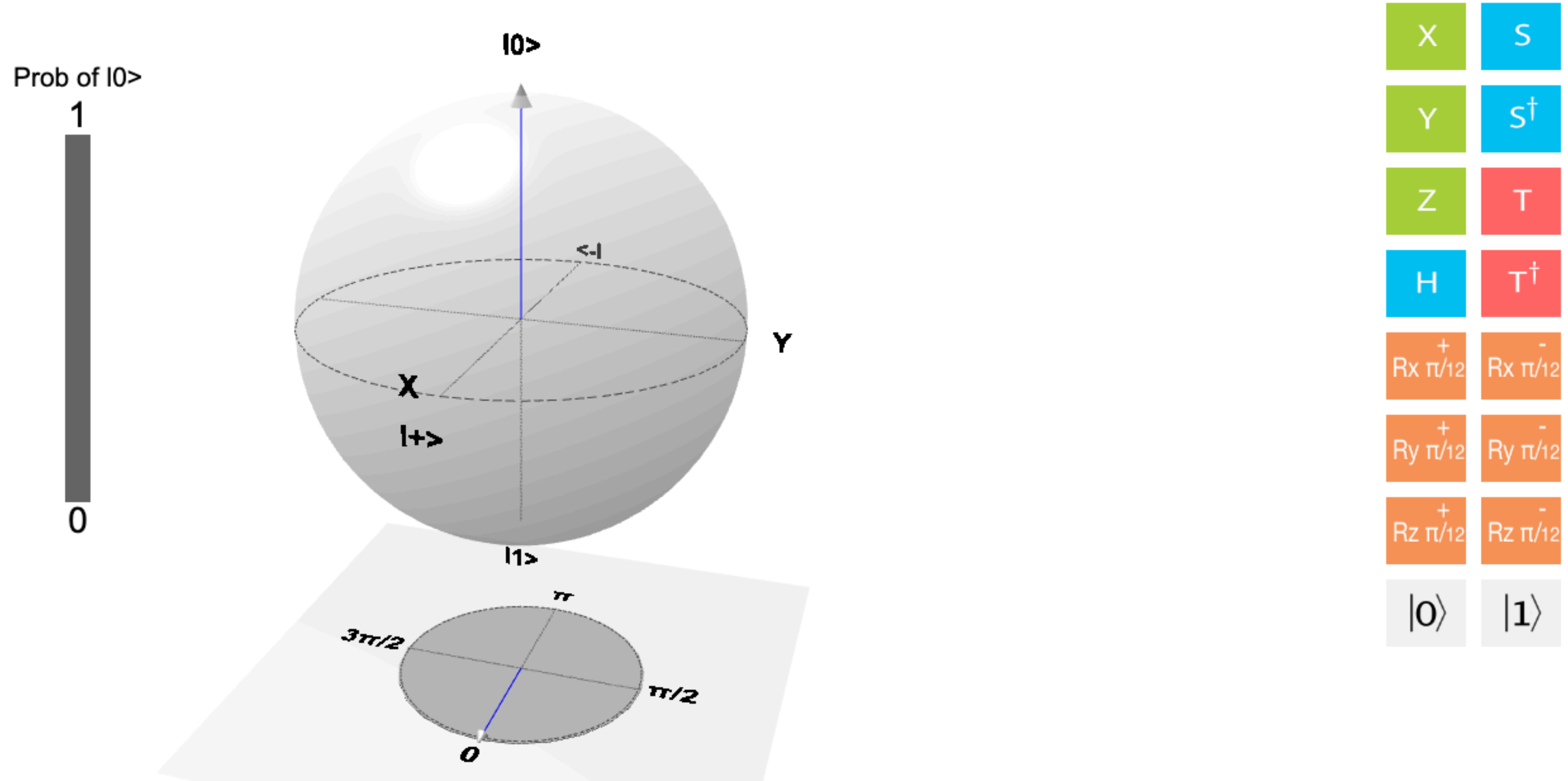


Superposition is one of the two crucial properties giving quantum computers their special ability

Manipulation de la sphère de Bloch

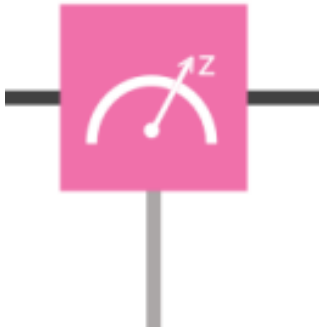
https://javafxpert.github.io/grok-bloch/

$$|\psi\rangle = \sqrt{1.00}\,|0\rangle + (\sqrt{0.00})e^{i\,0}\;|1\rangle$$



Opération de mesure

Quantum measurement



$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

If a qubit in some state $|\psi\rangle$ is measured in the standard basis, the **result 0 is obtained with probability $|\alpha|^2$**, and the **result 1 is obtained with the complementary probability $|\beta|^2$**.

3Q