

Parte B (Bifurcación). Para capturar cambios en la dinámica gravitacional reducida, considere el modelo unidimensional con parámetro μ :

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ .

$\tilde{z} \in \mathbb{R}$ es un **punto de equilibrio** para la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z)$$

Si $f(t, \tilde{z}) = 0$ para cualquier t .

Hallar los puntos que cumplen que la pendiente es igual a 0.

$$f(t, \tilde{z}) = 0$$

$$\mu \tilde{z} - \tilde{z}^3 = 0$$

$$\tilde{z}(\mu - \tilde{z}^2) = 0$$

$$\tilde{z}(\sqrt{\mu} + \tilde{z})(\sqrt{\mu} - \tilde{z}) = 0$$

$$\tilde{z} = 0 \vee \tilde{z} = \sqrt{\mu} \vee \tilde{z} = -\sqrt{\mu}$$

Por tanto, si $z = 0$, $z = \sqrt{\mu}$ ó $z = -\sqrt{\mu}$ entonces z es un punto de equilibrio para $\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$

2. Clasifique la estabilidad mediante $\dot{z} = \mu - 3z^2$.

Teorema (Estabilidad por linealización). Sea el sistema no lineal autónomo unidimensional $\dot{z} = f(z)$, y sea \tilde{z} un punto de equilibrio.

La estabilidad de \tilde{z} se determina analizando el signo de la derivada $f'(\tilde{z})$:

- Si la derivada es positiva ($f'(\tilde{z}) > 0$), entonces el punto de equilibrio \tilde{z} es **inestable** (un repulsor).
- Si la derivada es negativa ($f'(\tilde{z}) < 0$), entonces el punto de equilibrio \tilde{z} es **asintóticamente estable** (un atractor).
- Si la derivada es cero ($f'(\tilde{z}) = 0$), la linealización no decide la estabilidad y se requieren métodos de orden superior. Este es el caso de una posible bifurcación.

- $\mu > 0$

- $z = 0$

$$\dot{z}(0) = \mu - 3(0)^2 = \mu$$

$$\dot{z}(0) = \mu > 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = 0$ es **inestable**.

- $z = \sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = \mu - 3(\sqrt{\mu})^2 = \mu - 3\mu = -2\mu$$

$$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = -2\mu < 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = \sqrt{\mu}$ es **asintóticamente estable**.

- $z = -\sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = \mu - 3(-\sqrt{\mu})^2 = \mu - 3\mu = -2\mu$$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = -2\mu < 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = -\sqrt{\mu}$ es **asintóticamente estable**.

- $\mu < 0$

- $z = 0$

$$\dot{z}(0) = \mu < 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = 0$ es **asintóticamente estable**.

- $z = \sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = -2\mu > 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = \sqrt{\mu}$ es **inestable**.

- $z = -\sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = -2\mu > 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = -\sqrt{\mu}$ es **asintóticamente estable**.

- $\mu = 0$

$$\dot{z}(0) = 0$$

$$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = -2\mu = 0$$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = 2\mu = 0$$

Si $\mu = 0$ entonces el teorema no decide la estabilidad en los puntos de equilibrios.

Analizar gráficamente el comportamiento de $\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$.

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3 = -z^3$$

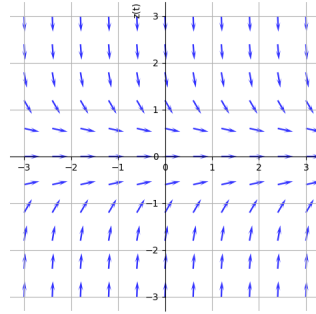


Figura 1: Campo direccional de $\frac{dz}{dt} = -z^3$ alrededor del punto de equilibrio $(0, 0)$

Como las pendientes alrededor del punto \tilde{z} apuntan hacia \tilde{z} , las soluciones de $\frac{dz}{dt}$ que comienzan con un punto inicial (t_0, z_0) lo suficientemente cerca de \tilde{z} presentan comportamiento asintótico $\lim_{x \rightarrow +\infty} = \tilde{z}$.

Por tanto, si $\mu = 0$, entonces $z_0 = 0$, $z_1 = \sqrt{\mu}$ y $z_2 = -\sqrt{\mu}$ son **asintóticamente estables**.

3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete qué significa físicamente el paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$ en términos de escape gravitacional frente a captura.

- Para $\mu < 0$: Existe un solo punto de equilibrio estable $z = 0$ (dibujado con una línea continua).

- Para $\mu = 0$: Existe un solo punto de equilibrio estable $z = 0$. Donde ocurre una bifurcación de tridente supercrítica.
- Para $\mu > 0$: Existe un punto de equilibrio inestable en $z = 0$ (dibujado con una línea discontinua), y dos equilibrios estables simétricos $z = \pm\sqrt{\mu}$ (ambos dibujados con líneas continuas).

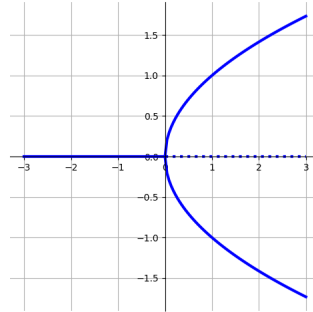


Figura 2: Diagrama bifurcación en el plano (μ, z) . Las líneas continuas representan los puntos de equilibrios estables, las discontinuas los inestables.

Interpretación física del paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$:

En $\mu < 0$ el sistema presenta un punto de equilibrio estable en el origen que representa la captura gravitacional. Donde cualquier perturbación o movimiento inicial del objeto decaerá con el tiempo, quedando atrapado en $z = 0$.

En $\mu > 0$ el origen se vuelve inestable, el objeto ya no puede mantenerse en el centro, una mínima perturbación hará que el mismo se aleje y se mueva a uno de los puntos de equilibrio estables $z = \pm\sqrt{\mu}$.

En resumen, esto representa una ruptura de simetría donde el sistema escapa del estado trivial de captura central para orbitar o situarse en una nueva configuración alejada del centro.