Parte B (Bifurcación). Para capturar cambios en la dinámica gravitacional reducida, considere el modelo unidimensional con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.

   $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}$ es un **punto de equilibrio** para la ecuación diferencial

   $$\frac{dz}{dt} = f(t, z)$$

   Si $f(t, \tilde{z}) = 0$ para cualquier t.

   Hallar los puntos que cumplen que la pendiente es igual a 0.

   $$f(t, \tilde{z}) = 0$$

   $$\mu\tilde{z} - \tilde{z}^3 = 0$$

   $$\tilde{z}(\mu - \tilde{z}^2) = 0$$

   $$\tilde{z}(\sqrt{\mu} + \tilde{z})(\sqrt{\mu} - \tilde{z}) = 0$$

   $$\tilde{z} = 0 \lor \tilde{z} = \sqrt{\mu} \lor \tilde{z} = -\sqrt{\mu}$$

   Por tanto, si $z = \mathbf{0}$, $z = \sqrt{\mu}$ ó $z = -\sqrt{\mu}$ entonces z es un punto de equilibrio para $\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$

2. Clasifique la estabilidad mediante $\dot{z} = \mu - 3z^2$.

   Teorema (Estabilidad por linealización). Sea el sistema no lineal autónomo unidimensional $\dot{z} = f(z)$, y sea $\tilde{z}$ un punto de equilibrio.

   La estabilidad de $\tilde{z}$ se determina analizando el signo de la derivada $f'(\tilde{z})$:

   - Si la derivada es positiva ($f'(\tilde{z}) > 0$), entonces el punto de equilibrio $\tilde{z}$ es **inestable** (un repulsor).
   - Si la derivada es negativa ($f'(\tilde{z}) < 0$), entonces el punto de equilibrio $\tilde{z}$ es **asintóticamente estable** (un atractor).
   - Si la derivada es cero ($f'(\tilde{z}) = 0$), la linealización no decide la estabilidad y se requieren métodos de orden superior. Este es el caso de una posible bifurcación.

   - $\mu > 0$
     - $z = 0$

       $$\dot{z}(0) = \mu - 3(0)^2 = \mu$$

       $$\dot{z}(0) = \mu > 0$$

       Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = 0$ es **inestable**.
     - $z = \sqrt{\mu}$

       $$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = \mu - 3(\sqrt{\mu})^2 = \mu - 3\mu = -2\mu$$

       $$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = -2\mu < 0$$

       Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = \sqrt{\mu}$ es **asintóticamente estable**.

- $z = -\sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = \mu - 3(-\sqrt{\mu})^2 = \mu - 3\mu = -2\mu$$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = -2\mu < 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = -\sqrt{\mu}$ es **asintóticamente estable**.

- $\mu < 0$
  - $z = 0$

$$\dot{z}(0) = \mu < 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = 0$ es **asintóticamente estable**.

  - $z = \sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = -2\mu > 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = \sqrt{\mu}$ es **inestable**.

  - $z = -\sqrt{\mu}$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = -2\mu > 0$$

Si $\mu > 0$ entonces el punto de equilibrio $\tilde{z} = -\sqrt{\mu}$ es **asintóticamente estable**.

- $\mu = 0$

$$\dot{z}(0) = 0$$

$$\dot{z}(\sqrt{\mu}) = -2\mu = 0$$

$$\dot{z}(-\sqrt{\mu}) = 2\mu = 0$$

Si $\mu = 0$ entonces el teorema no decide la estabilidad en los puntos de equilibrios.
Analizar gráficamente el comportamiento de $\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$.

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3 = -z^3$$

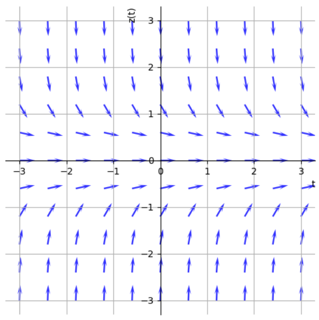

Figura 1: Campo direccional de $\frac{dz}{dt} = -z^3$ alrededor del punto de equilibrio (0, 0)

Como las pendientes alrededor del punto $\tilde{z}$ apuntan hacia $\tilde{z}$, las soluciones de $\frac{dz}{dt}$ que comienzan con un punto inicial (t_0, z_0) lo suficientemente cerca de $\tilde{z}$ presentan comportamiento asintótico $\lim_{x\to+\infty} = \tilde{z}$.
Por tanto, si $\mu = 0$, entonces $z_0 = 0$, $z_1 = \sqrt{\mu}$ y $z_2 = -\sqrt{\mu}$ son **asintóticamente estables**.

3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete qué significa físicamente el paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$ en términos de escape gravitacional frente a captura.

   - Para $\mu < 0$: Existe un solo punto de equilibrio estable $z = 0$ (dibujado com una linea continua).

- Para $\mu = 0$: Existe un solo punto de equilibrio estable $z = 0$. Donde ocurre una bifurcación de tridente supercrítica.
- Para $\mu > 0$: Existe un punto de equilibrio inestable en z = 0 (dibujado con una linea discontinua), y dos esquilibrios estables simetricos $z = \pm\sqrt{\mu}$ (ambos dibujados con lineas continuas).

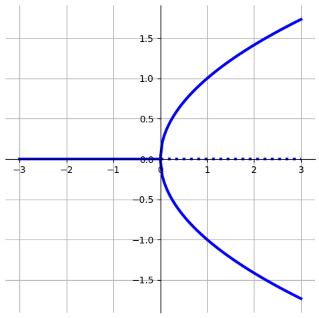

Figura 2: Diagrama bifurcación en el plano (μ, z). Las lineas continuas representan los puntos de equilibrios estables, las discontinuas los inestables.

Interpretacion fisica del paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$:

En $\mu < 0$ el sistema presenta un punto de equilibrio estable en el origen que representa la captura gravitacional. Donde cualquier perturbación o movimiento inicial del objeto decaerá con el tiempo, quedando atrapado en $z = 0$.

En $\mu > 0$ el origen se vuelve inestable, el objeto ya no puede mantenerse en el centro, una minima perturbación hará que el mismo se aleje a uno de los nuevos puntos de equilibrio estables $z = \pm\sqrt{\mu}$.

En resumen, esto representa una ruptura de simetría donde el sistema escapa del estado trivial de captura central para orbitar o situarse en una nueva configuración alejada del centro.