Parte B (Bifurcación). Para capturar cambios en la dinámica gravitacional reducida, considere el modelo unidimensional con parámetro μ:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z - z^3$$

1. Determine los puntos de equilibrio en función de μ.

   $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}$ es un **punto de equilibrio** para la ecuación diferencial

   $$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z})$$

   Si $\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{z}}) = \mathbf{0}$ para cualquier t.

   Hallar los puntos que cumplen que la pendiente es igual a 0.

   $$\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{z}}) = 0$$

   $$\mu\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}}^3 = 0$$

   $$\tilde{\mathbf{z}}(\mu - \tilde{\mathbf{z}}^2) = 0$$

   $$\tilde{\mathbf{z}}(\sqrt{\mu} + \tilde{\mathbf{z}})(\sqrt{\mu} - \tilde{\mathbf{z}}) = 0$$

   $$\tilde{\mathbf{z}} = 0 \vee \tilde{\mathbf{z}} = \sqrt{\mu} \vee \tilde{\mathbf{z}} = -\sqrt{\mu}$$

   Por tanto, si $z = 0 \vee z = \sqrt{\mu} \vee z = -\sqrt{\mu}$ entonces z es un punto de equilibrio para $\frac{d\mathbf{z}}{dt}$

2. Clasifique la estabilidad mediante $z' = \mu - 3z^2$.

3. Construya el diagrama de bifurcación en el plano (μ, z) e identifique el tipo de bifurcación. Interprete qué significa físicamente el paso de $\mu < 0$ a $\mu > 0$ en términos de escape gravitacional frente a captura.

1.