

	RK4	Verlet	Heun	Euler
h=1	11069.50311	11069.51058	11069.50311	11072.3929
h=5	11069.50311	11069.58525	11069.55538	11083.9971
h=10	11069.50311	11069.8242	11069.71966	11098.5732
h=100	11069.62259	11101.21664	11091.42704	11376.5426

Errores				11072.3
RK4	Verlet	Heun	Euler	
0.000252602	0.000251928	0.000252602	8.39455E-06	
0.000252602	0.000245184	0.000247882	0.001056429	
0.000252602	0.000223603	0.000233045	0.002372879	
0.000241812	0.00261162	0.001727467	0.027477818	

Complejidad Temporal				Maximo de pasos
RK4	Verlet	Heun	Euler	
O(n)	O(n)	O(n)	O(n)	

Backward Analysis				
	RK4	Verlet	Heun	Euler
h=10	1.465	1.465	-2.441	2.441

Backward Analysis				
	RK4	Verlet	Heun	Euler
h=5,10	4	2	2.003	1.009

Orden de Convergencia			
RK4	Verlet	Heun	Euler
2.506	1.726	1.728	1.007

1. Comportamiento frente a perturbaciones en r_0

La ecuación contiene singularidades en $r=0$ y $r=S$, donde los términos $1/r^2$ y $1/(S-r)^2$ se disparan. Sin embargo, estas singularidades se encuentran fuera del dominio físico relevante para el problema, ya que la trayectoria se desarrolla en el intervalo $[R, req]$. Por ello, aunque matemáticamente exista una sensibilidad teórica cerca de $r=0$, en la práctica las perturbaciones pequeñas de r_0 solo introducen variaciones cuantitativas menores y no alteran cualitativamente el resultado.

2. Alta sensibilidad a perturbaciones en v_0

La extrema sensibilidad ante cambios mínimos en v_0 puede explicarse mediante un cambio de variable que transforma la ecuación original en:

$$v dv/dr = GmE/r^2 + GMm/(S-r)^2$$

Al despejar $dv/dr = F(r)/v$, se observa que cuando $v \rightarrow 0$ la derivada se hace muy grande, lo que indica una alta sensibilidad numérica en regiones de velocidad cercana a 0. En la trayectoria que se alcanza el punto de equilibrio, es decir, donde la aceleración neta es 0, las órbitas con v_0 ligeramente por debajo del valor crítico regresan a la Tierra, mientras que aquellas con v_0 ligeramente por arriba alcanzan la Luna. Este comportamiento se observa mejor en la próxima sección, en las isoclinas

Forward Analysis					Conclusiones
r0, h=1	RK4	Verlet	Heun	Euler	Para $r_0 = R$, la condición inicial dada originalmente, Euler y Heun producen un error sistemático de aproximadamente +2.89 de diferencia respecto a los demás, mientras que para radios mayores, las diferencias absolutas entre los métodos disminuyen, aunque Euler mantiene pequeñas discrepancias consistentes. En general, el error es más dependiente del método que de la magnitud de r_0 y la perturbación de la posición inicial no afecta demasiado la estabilidad del sistema.
6371000	11069.5	11069.51	11072.39	11072.39	
6571000	10896.14	10896.14	10896.14	10898.85	
6771000	10730.44	10730.44	10730.44	10733	
7171000	10419.95	10419.96	10419.95	10422.23	
7371000	10274.21	10274.21	10274.21	10276.36	
v0, h=1					Euler propaga el error cerca del umbral crítico, cambiando la predicción cualitativa, sin embargo, el resto mantiene coherencia, siendo estables numéricamente en el punto crítico. Runge-Kutta, Verlet, y Heun son consistentes frente a las perturbaciones de datos
11000	No	No	No	No	
11070	Si	Si	Si	No	
11072	Si	Si	Si	No	
7371000	Si	Si	Si	Si	