• **Tema 15: Aceleración gravitacional variable (Solucionario)**
Resumen de la aplicación de las EDO en Aceleración gravitacional variable (Solución al ejercicio propuesto: Plano de Fase y Estabilidad).

- **Parte C (Plano de fase y estabilidad).** Considere el sistema para la altura $y(t)$ y la velocidad $v(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{100}{(y+1)^2} \end{cases} \tag{1}$$

1. **Cálculo y clasificación de puntos críticos**

   Para encontrar los puntos críticos (o puntos de equilibrio), debemos igualar las derivadas temporales a cero. Buscamos valores $(y^*, v^*)$ tales que:

$$\begin{cases} v = 0 \\ -\dfrac{100}{(y+1)^2} = 0 \end{cases}$$

   De la primera ecuación obtenemos $v = 0$. Sin embargo, al analizar la segunda ecuación:

$$-\frac{100}{(y+1)^2} = 0$$

   Observamos que el numerador es $-100$ (una constante distinta de cero). Para que una fracción sea cero, su numerador debe ser cero. Como $-100 \neq 0$, la segunda ecuación **no tiene solución** para ningún valor finito de $y$.

   Por tanto, el sistema **no tiene puntos críticos**.

2. **Construcción del plano de fase e interpretación**

   Para construir las trayectorias en el plano de fase $(y, v)$, eliminamos el tiempo $dt$ usando la regla de la cadena:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv/dt}{dy/dt} = \frac{-\frac{100}{(y+1)^2}}{v}$$

   Separamos variables e integramos:

$$v\,dv = -100(y+1)^{-2}\,dy$$

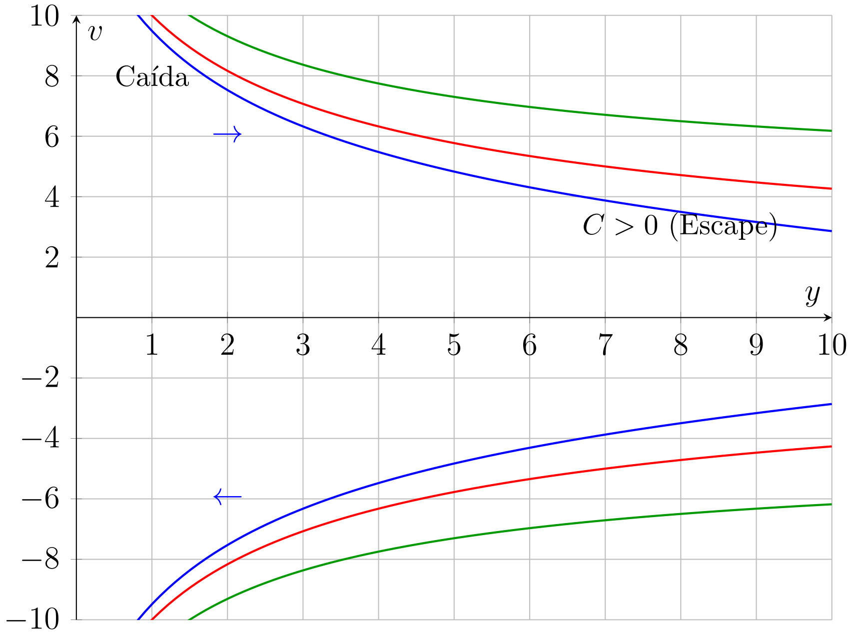
$$\int v\,dv = \int -100(y+1)^{-2}\,dy$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{100}{y+1} + C$$

   Las trayectorias son curvas de la forma:

$$v = \pm\sqrt{2C + \frac{200}{y+1}}$$

**Plano de Fase** $(y, v)$




**Interpretación del Movimiento:**

a) **Dinámica de flujo:**

- En el semiplano superior ($v > 0$): $\frac{dy}{dt} > 0$, la altura aumenta (el cuerpo sube), pero la velocidad disminuye (frenado por gravedad).
- En el semiplano inferior ($v < 0$): $\frac{dy}{dt} < 0$, la altura disminuye (el cuerpo cae) y la velocidad se hace cada vez más negativa (acelera hacia abajo).

El movimiento se interpreta como una **caída hacia el centro**. No existe acercamiento estable a órbita, ya que no hay puntos de equilibrio ni barreras centrífugas en este sistema simplificado.