



ELEKTRONIKA PRO INFORMAČNÍ TECHNOLOGIE

2020/2021

Semestrální projekt

Obsah

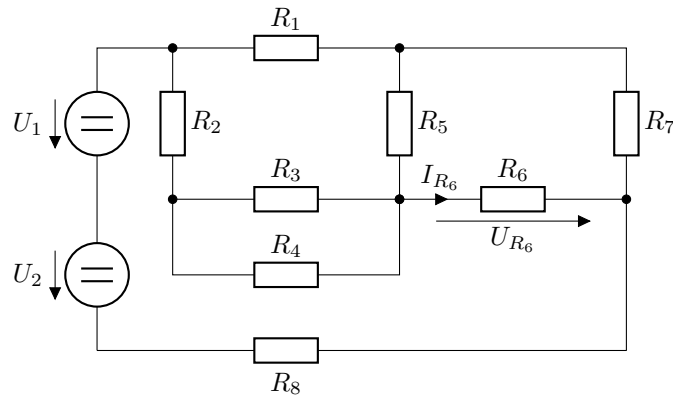
1	Příklad 1 – Metoda postupného zjednodušování obvodu	2
1.1	Zjednodušení obvodu	2
1.2	Zpětné počítání hodnot napětí a proudů	9
2	Příklad 2 – Théveninova věta	13
2.1	Vyjádření vztahu pro proud I_{R_3}	13
2.2	Výpočet hodnot odporu R_i a napětí U_i	14
2.3	Výpočet hodnot proudu I_{R_3} a napětí U_{R_3}	17
3	Příklad 3 – Metoda uzlových napětí	18
3.1	Vyjádření vztahů mezi jednotlivými proudy obvodu	19
3.2	Vytvoření náhradních obvodů	20
3.3	Výpočet hodnoty napětí U_{R_2} a proudu I_{R_2}	22
4	Příklad 4 – Metoda smyčkových proudů	24
4.1	Výpočet úhlové frekvence	24
4.2	Určení smyčkových proudů	25
4.3	Sestavení maticové rovnice	25
4.4	Určení hodnot determinantů a proudů I_A a I_C	26
4.5	Výpočet $ U_{L_2} $ a φ_{L_2}	27
5	Příklad 5 – Diferenciální rovnice	28
5.1	Sestavení diferenciální rovnice prvního řádu	28
5.2	Analytické řešení	29
5.3	Zkouška	30
6	Výsledky	31

1 Příklad 1 – Metoda postupného zjednodušování obvodu

Zadání: Stanovte napětí U_{R_6} a proud I_{R_6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
H	135	80	680	600	260	310	575	870	355	265

Tabulka 1: Zadané hodnoty



Obrázek 1: Zadaný obvod

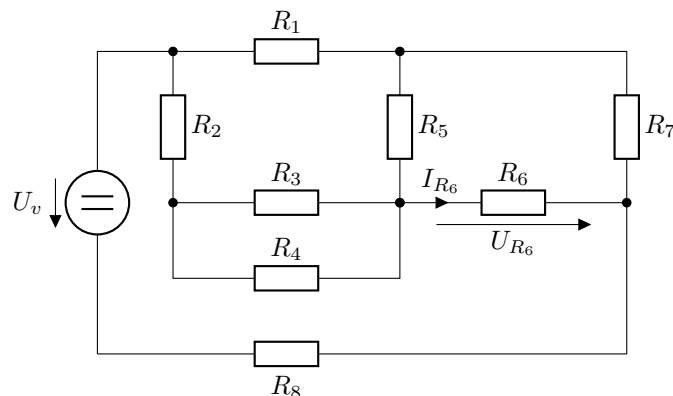
1.1 Zjednodušení obvodu

Jako první krok při zjednodušování zadaného obvodu zvolíme nahrazení zdrojů napětí U_1 a U_2 zapojených v sérii zdrojem napětí U_V dle II. Kirchhoffova zákona:

$$U_1 + U_2 - U_V = 0$$

po úpravě:

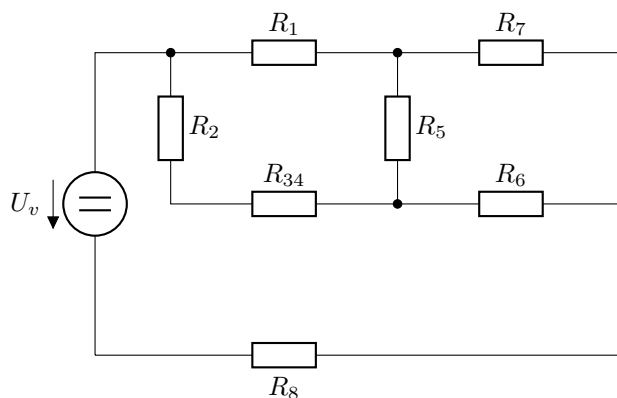
$$U_V = U_1 + U_2 = 135 + 80 = 215V$$



Obrázek 2: Nahrazení zdrojů napětí U_1 a U_2 zdrojem napětí U_V

Dalším krokem ke zjednodušení obvodu je nahradit rezistory R_3 a R_4 zapojené paralelně rezistorem R_{34} podle vztrahu:

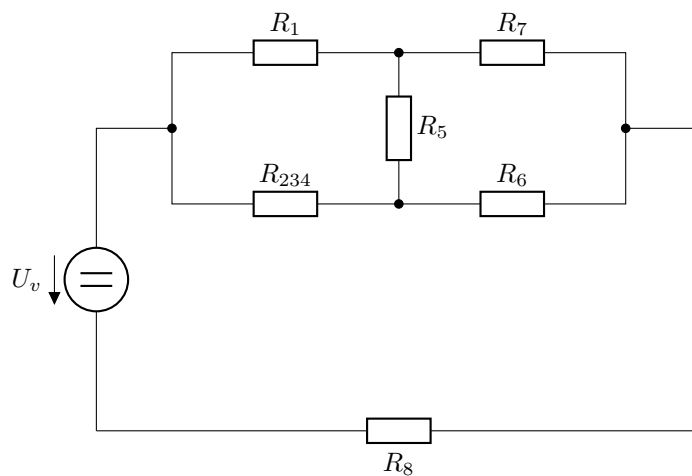
$$R_{34} = \frac{R_3 * R_4}{R_3 + R_4} = \frac{260 * 310}{260 + 310} = 141,403\,509\,\Omega$$



Obrázek 3: Nahrazení rezistorů R_3 a R_4 rezistorem R_{34}

Nyní si můžeme povšimnout, že nově vzniklý rezistor R_{34} je zapojený v sérii s rezistorem R_2 . Nahradíme jej tedy rezistorem R_{234} podle vztahu:

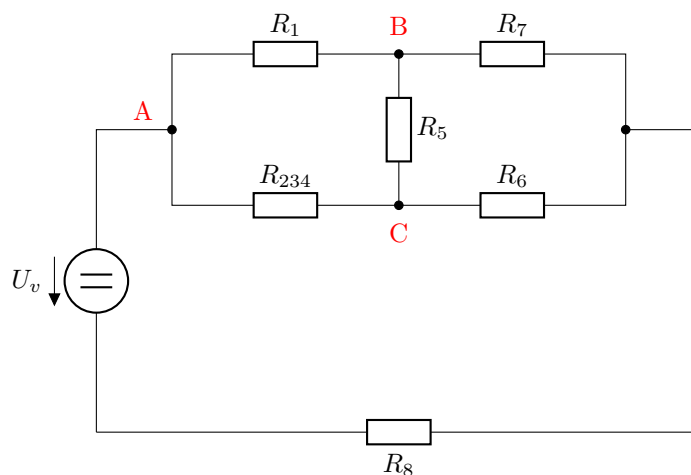
$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 600 + 141,403\,509 = 741,403\,509\,\Omega$$



Obrázek 4: Nahrazení rezistorů R_2 a R_{34} rezistorem R_{234}

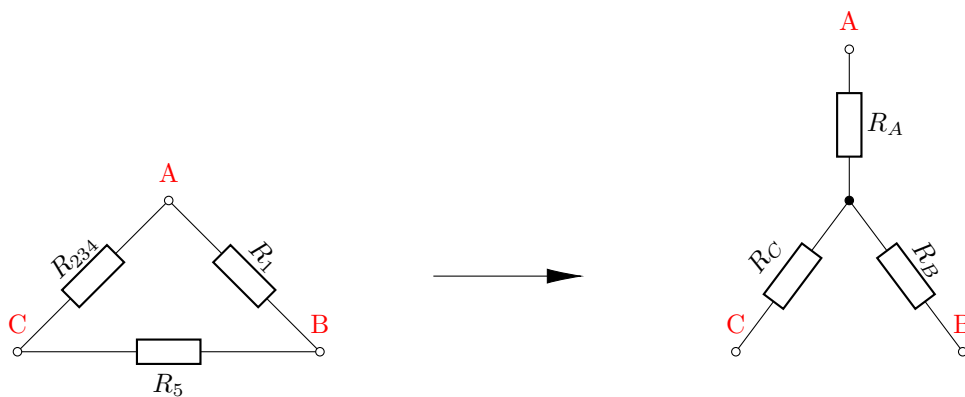
Při zjednodušování obvodu dále využijeme transformaci trojúhelník – hvězda, která danou část obvodu, kterou chceme transformovat, zjednoduší.

V námi dosud zjednodušeném obvodu lze aplikovat transformaci trojúhelník – hvězda dvěma způsoby, a to pro levou nebo pravou smyčku. Jelikož budeme počítat hodnoty proudu a napětí pro odpor R_6 , který se nachází v pravé smyčce, aplikujeme transformaci na smyčku levou. Tato volba se nám později projeví tím, že bude jednodušší zpětně dopočítat výsledné hodnoty U_{R_6} a I_{R_6} .



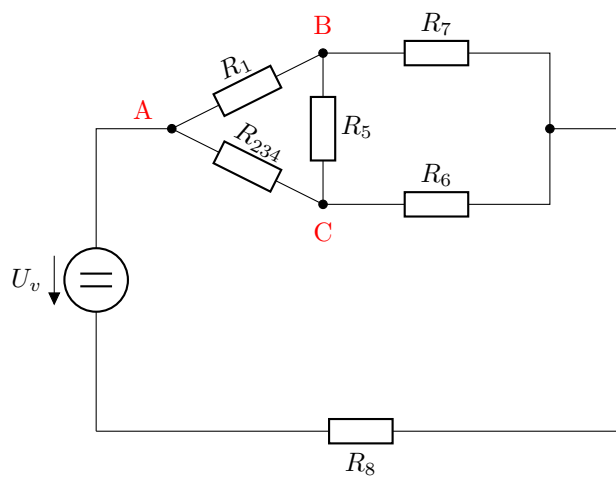
Obrázek 5: Obvod s vyznačenými uzly

V zadaném obvodu aplikujeme transformaci trojúhelník – hvězda pro rezistory R_1 , R_{234} a R_5 .



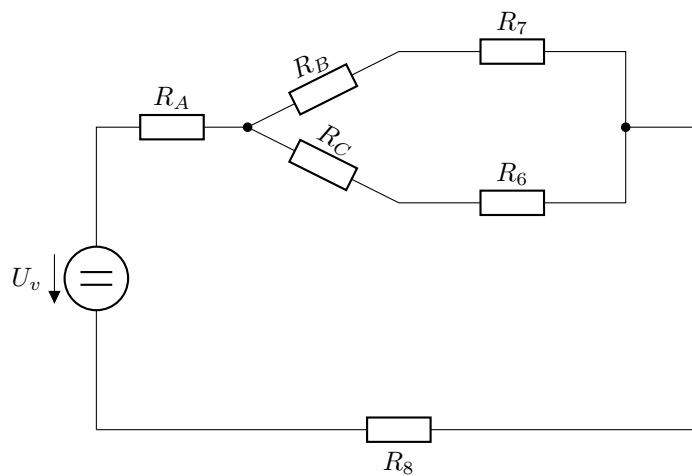
Obrázek 6: Transformace trojúhelník – hvězda

Nyní můžeme trojúhelník překreslit přímo do zadaného obvodu:



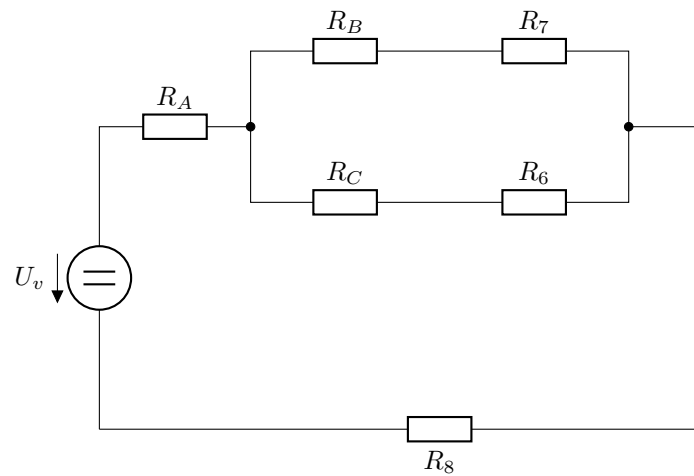
Obrázek 7: Zadaný obvod před transformací

Aplikace transformace trojúhelník – hvězda:



Obrázek 8: Zadaný obvod po transformaci

Následně si obvod přeuspořádáme pro lepší názornost:



Obrázek 9: Obvod po přeuspořádání

Při odvozování vztahů pro převod trojúhelníku na hvězdu je možný zápis soustavy rovnic ve tvaru:

$$R_A + R_B = \frac{R_1 * (R_{234} + R_5)}{R_1 + R_{234} + R_5}$$

$$R_A + R_C = \frac{R_{234} * (R_1 + R_5)}{R_1 + R_{234} + R_5}$$

$$R_B + R_C = \frac{R_5 * (R_1 + R_{234})}{R_1 + R_{234} + R_5}$$

Po úpravě rovnic dostáváme 3 vztahy pro R_A , R_B a R_C :

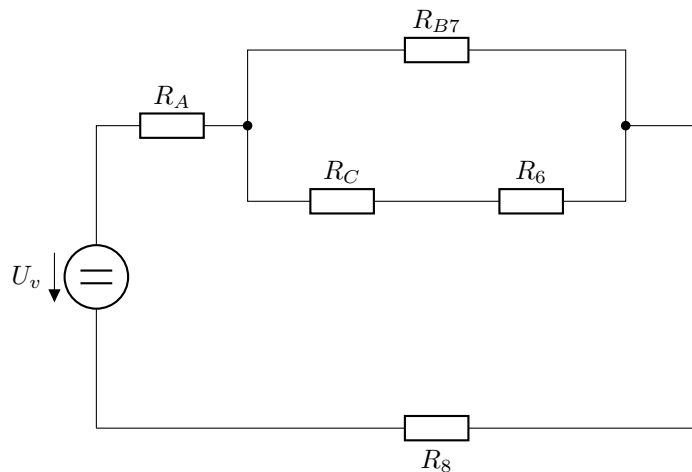
$$R_A = \frac{R_1 * R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{680 * 741,403\,509}{680 + 741,403\,509 + 575} = 252,531\,306\,\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 * R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{680 * 575}{680 + 741,403\,509 + 575} = 195,852\,19\,\Omega$$

$$R_C = \frac{R_{234} * R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{741,403\,509 * 575}{680 + 741,403\,509 + 575} = 213,537\,502\,\Omega$$

V takto transformovaném obvodu budeme dále zjednodušovat podle sériového či paralelního zapojení rezistorů. Nyní můžeme nahradit rezistory R_B a R_7 zapojené v sérii rezistorem R_{B7} podle vztahu:

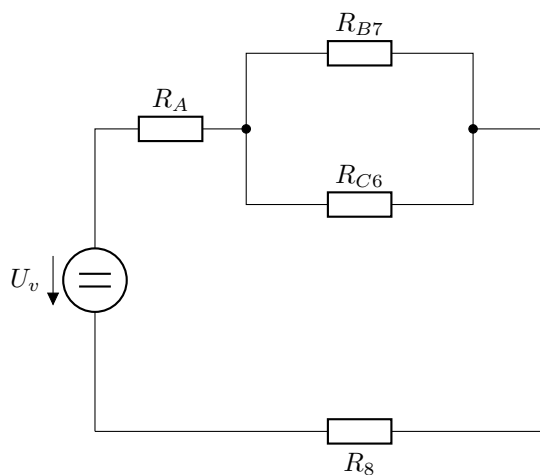
$$R_{B7} = R_B + R_7 = 195,852\,190 + 355 = 550,852\,19\,\Omega$$



Obrázek 10: Nahrazení rezistorů R_B a R_7 rezistorem R_{B7}

Tento postup použijeme také pro rezistory R_C a R_6 , které jsou opět zapojené v sérii. Nahradíme je rezistorem R_{C6} podle vztahu:

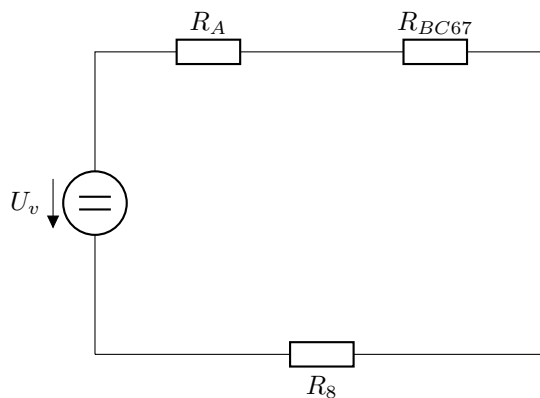
$$R_{C6} = R_C + R_6 = 213,537\,502 + 870 = 1\,083,537\,502\,\Omega$$



Obrázek 11: Nahrazení rezistorů R_C a R_6 rezistorem R_{C6}

Nyní si můžeme povšimnout, že nově vzniklé rezistory R_{B7} a R_{C6} jsou zapojené paralelně. Nahradíme je rezistorem R_{BC67} podle vztahu:

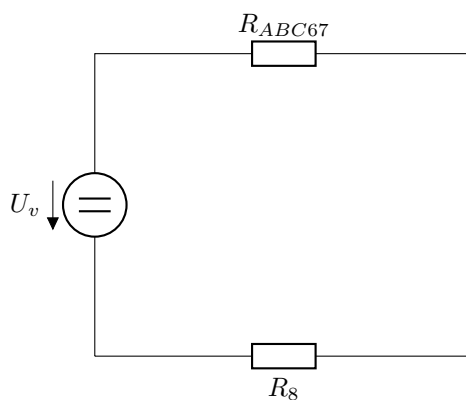
$$R_{BC67} = \frac{R_{B7} * R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}} = \frac{550,852\,19 * 1\,083,537\,502}{550,852\,19 + 1\,083,537\,502} = 365,193\,814\,\Omega$$



Obrázek 12: Nahrazení rezistorů R_{B7} a R_{C6} rezistorem R_{BC67}

Dalším postupem ke zjednodušení obvodu je nahradit rezistory R_A a R_{BC67} , zapojené v sérii, rezistorem R_{ABC67} dle vztahu:

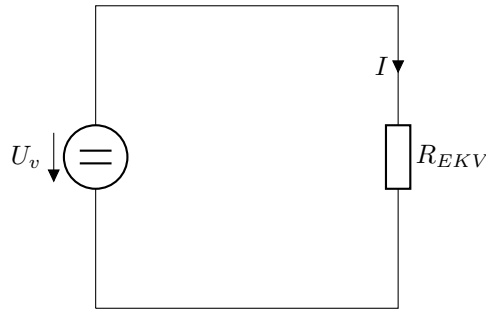
$$R_{ABC67} = R_A + R_{BC67} = 252,531\,306 + 365,193\,814 = 617,725\,12\,\Omega$$



Obrázek 13: Nahrazení rezistorů R_A a R_{BC67} rezistorem R_{ABC67}

Posledním krokem je již nahradit rezistory R_{ABC67} a R_8 zapojené v sérii výsledným rezistorem R_{EKV} podle vztahu:

$$R_{EKV} = R_{ABC67} + R_8 = 617,725\,12 + 265 = 882,725\,12\,\Omega$$



Obrázek 14: Nahrazení rezistorů R_{ABC67} a R_8 rezistorem R_{EKV}

Po zjednodušení obvodu můžeme vypočítat hodnotu proudu I dle Ohmova zákona:

$$I = \frac{U_V}{R} = \frac{215}{882,725\,12} = 0,243\,564\,\text{A}$$

1.2 Zpětné počítání hodnot napětí a proudů

Nyní máme obvod zjednodušený a můžeme zpětně dopočítat jednotlivé hodnoty napětí a proudů. V následujících výpočtech opět využijeme Ohmův zákon:

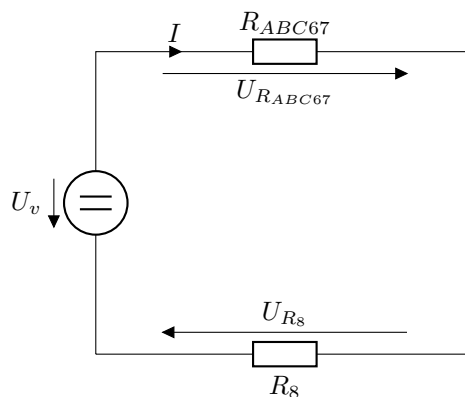
$$I = \frac{U}{R}$$

Pro kontrolu můžeme využít také Kirchhoffových zákonů.

Z následujícího obvodu nám vyplývají vztahy pro napětí $U_{R_{ABC67}}$ a U_{R_8} :

$$U_{R_{ABC67}} = I * R_{ABC67} = 0,243\,564 * 617,725\,12 = 150,455\,601\,\text{V}$$

$$U_{R_8} = I * R_8 = 0,243\,564 * 265 = 64,544\,46\,\text{V}$$



Obrázek 15: Napětí $U_{R_{ABC67}}$ a U_{R_8} :

Pro kontrolu využijeme II. Kirchhoffův zákon a to v následujícím tvaru:

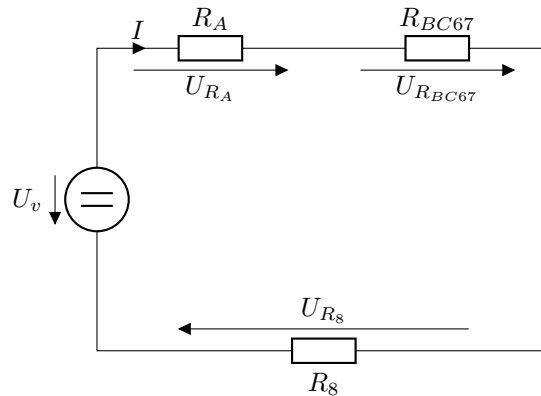
$$U_V - U_{R_{ABC67}} - U_{R_8} = 0$$

$$215 - 150,455\,601 - 64,544\,46 \approx 0$$

Z dalšího obvodu nám vyplývají vztahy pro napětí U_{R_A} a $U_{R_{BC67}}$:

$$U_{R_A} = I * R_A = 0,243\,564 * 252,531\,306 = 64,507\,535\text{ V}$$

$$U_{R_{BC67}} = I * R_{BC67} = 0,243\,564 * 365,193\,814 = 88,948\,066\text{ V}$$



Obrázek 16: Napětí U_{R_A} a $U_{R_{BC67}}$

Kontrola pomocí II. Kirchhoffova zákona:

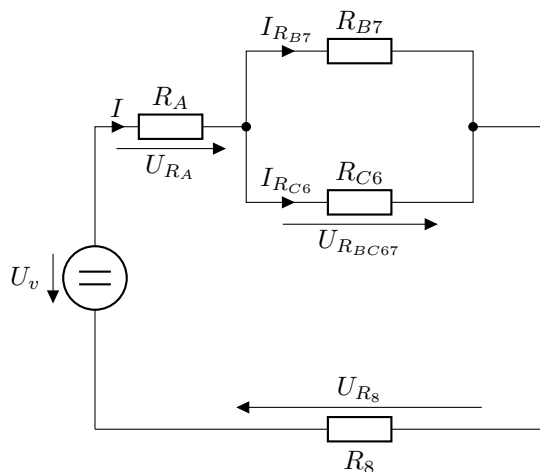
$$U_V - U_{R_A} - U_{R_{BC67}} - U_{R_8} = 0$$

$$215 - 64,507\,535 - 88,948\,066 - 265 \approx 0$$

Nyní si můžeme vyjádřit vztahy pro proudy $I_{R_{B7}}$ a $I_{R_{C6}}$:

$$I_{R_{B7}} = \frac{U_{R_{BC67}}}{R_{B7}} = \frac{88,948\,066}{550,852\,19} = 0,161\,474\,\text{A}$$

$$I_{R_{C6}} = \frac{U_{R_{BC67}}}{R_{C6}} = \frac{88,948\,066}{1\,083,537\,502} = 0,082\,090\,436\,\text{A}^1$$



Obrázek 17: Proud $I_{R_{B7}}$ a $I_{R_{C6}}$

Kontrola nyní podle I. Kirchhoffova zákona:

$$I - I_{R_{B7}} - I_{R_{C6}} = 0$$

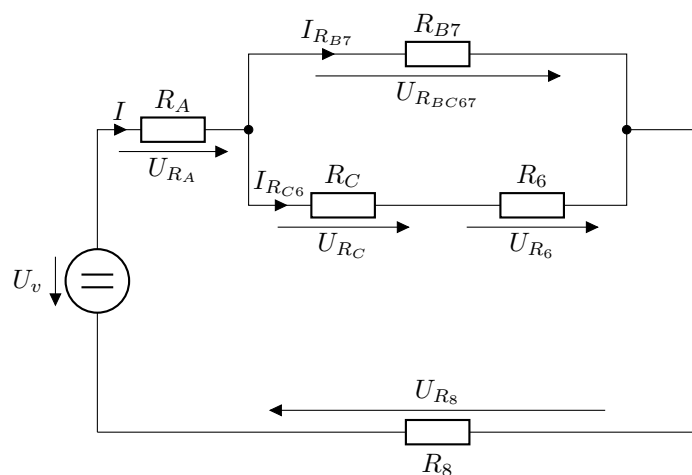
$$0,243\,564 - 0,161\,474 - 0,082\,090\,436 \approx 0$$

¹Výsledek uveden na 9 desetinných míst za účelem přesnosti následného výpočtu U_{R_6} .

Jako poslední krok ve zpětném počítání hodnot napětí a proudů si vyjádříme vztahy pro napětí U_{R_C} a námi hledané napětí U_{R_6} :

$$U_{R_C} = I_{R_{C6}} * R_C = 0,082\,090\,436 * 213,537\,502 = 17,529\,387\text{ V}$$

$$U_{R_6} = I_{R_{C6}} * R_6 = 0,082\,090\,436 * 870 = 71,418\,679\text{ V}$$



Obrázek 18: Napětí U_{R_C} a U_{R_6}

Provedeme kontrolu pomocí II. Kirchhoffova zákona:

$$U_V - U_{R_A} - U_{R_C} - U_{R_6} - U_{R_8} = 0$$

$$215 - 64,507\,535 - 17,529\,387 - 71,418\,679 - 64,544\,46 \approx 0$$

Výsledné hodnoty:

$$I_{R_6} = I_{R_{C6}} = 0,082\,090\,436 \doteq \underline{\underline{0,082\,1\text{ A}}}$$

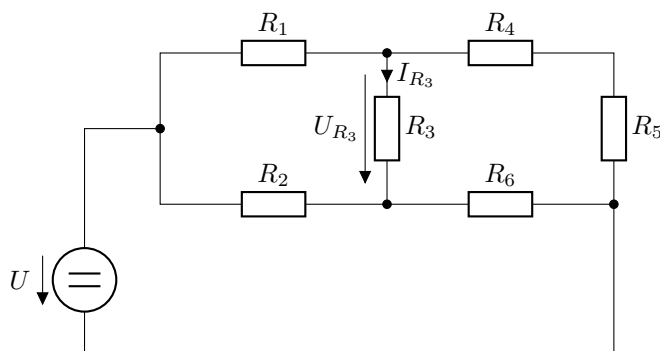
$$U_{R_6} = 71,418\,679 \doteq \underline{\underline{71,418\,7\text{ V}}}$$

2 Příklad 2 – Théveninova věta

Zadání: Stanovte napětí U_{R_3} a proud I_{R_3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600	150

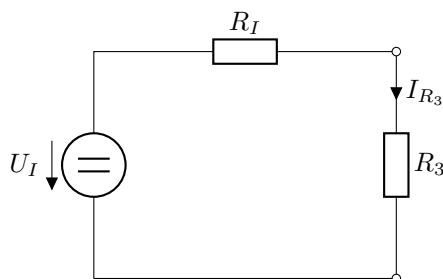
Tabulka 2: Zadané hodnoty



Obrázek 19: Zadaný obvod

2.1 Vyjádření vztahu pro proud I_{R_3}

Nejprve si nahradíme obvod bez rezistoru R_3 obvodem skutečného zdroje napětí:



Obrázek 20: Nahrazení části obvodu obvodem skutečného zdroje napětí

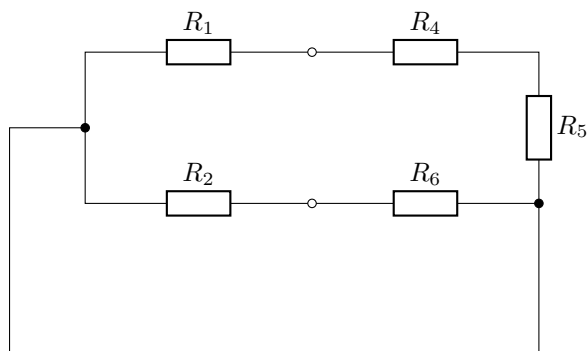
Pomocí výše uvedeného obvodu si vyjádříme vztah pro I_{R_3} :

$$I_{R_3} = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$

Dále budeme pokračovat výpočtem prozatím neznámých hodnot, a to hodnot U_i a R_i .

2.2 Výpočet hodnot odporu R_i a napětí U_i

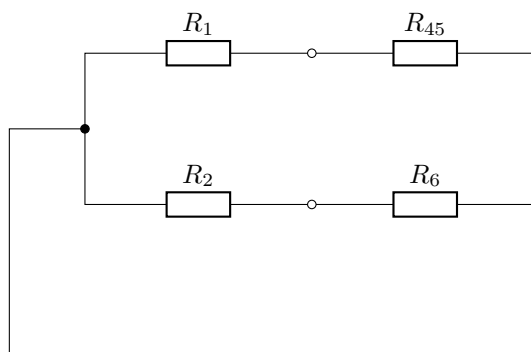
Nyní překreslíme obvod bez rezistoru R_3 a napěťový zdroj nahradíme zkratem:



Obrázek 21: Obvod bez rezistoru R_3 s nahrazením napěťového zdroje zkratem

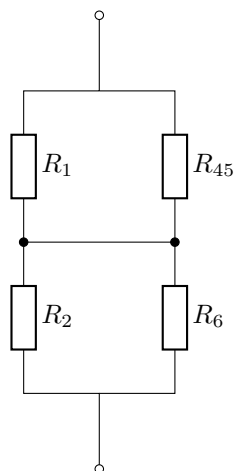
Následně si obvod postupně zjednodušíme:

$$R_{45} = R_4 + R_5$$



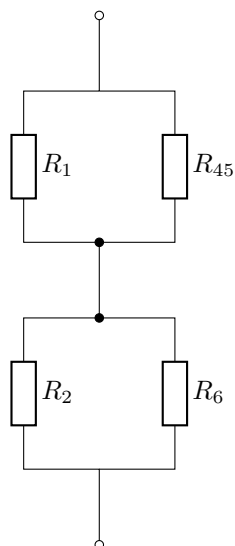
Obrázek 22: Nahrazení rezistorů R_4 a R_5 rezistorem R_{45}

Obvod si překreslíme pro lepší názornost:



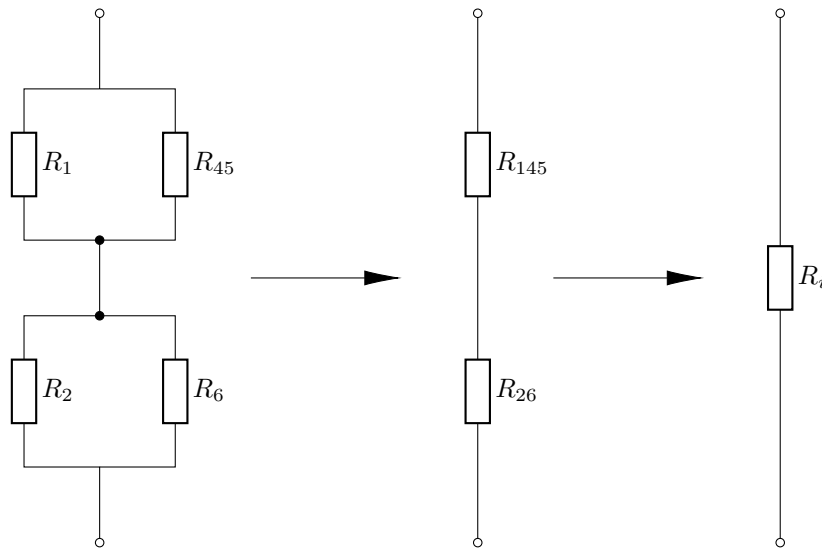
Obrázek 23: Překreslený obvod 1

Dále si obvod překreslíme tak, aby lépe vynikly zapojení mezi jednotlivými rezistory:



Obrázek 24: Překreslený obvod 2

Obvod postupně dále zjednodušíme:



Obrázek 25: Postupné zjednodušení obvodu

Ze zmíněného zjednodušení obvodu vyplývají následující vztahy mezi rezistory:

$$R_{145} = \frac{R_1 * R_{45}}{R_1 + R_{45}}$$

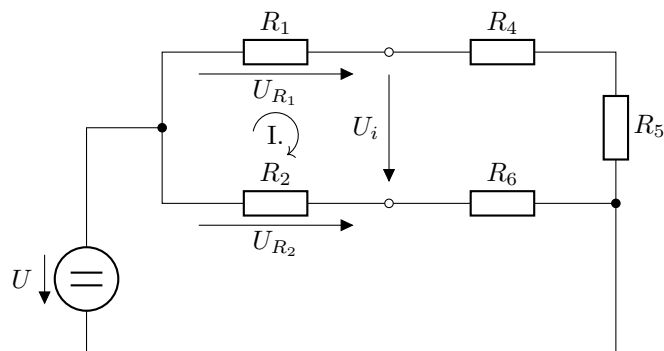
$$R_{26} = \frac{R_2 * R_6}{R_2 + R_6}$$

$$R_i = R_{145} + R_{26}$$

Vypočítáme hodnotu rezistoru R_i :

$$R_i = \frac{R_1 * (R_4 + R_5)}{R_1 + R_4 + R_5} + \frac{R_2 * R_6}{R_2 + R_6} = \frac{150 * (245 + 600)}{150 + 245 + 500} + \frac{335 * 150}{335 + 150} = 230,995\,182\,\Omega$$

Dále překreslíme obvod bez R_3 a určíme napětí naprázdno:



Obrázek 26: Obvod bez R_3

Pomocí II. Kirchhoffova zákona si vyjádříme vztah napětí ve smyčce vyznačené v obvodu:

I.

$$U_i + U_{R_1} - U_{R_2} = 0$$

$$U_i = U_{R_2} - U_{R_1}$$

Dále si vyjádříme vztahy napětí U_{R_1} a napětí U_{R_2} :

$$U_{R_1} = U * \frac{R_1}{R_1 + R_4 + R_5}$$

$$U_{R_2} = U * \frac{R_2}{R_2 + R_6}$$

Výše zmíněné vztahy si dosadíme do vzorce pro výpočet napětí U_i . Do nově vzniklého vztahu dosadíme číselné hodnoty a vypočítáme hodnotu napětí U_i :

$$\begin{aligned} U_i &= U_{R_2} - U_{R_1} \\ U_i &= U * \frac{R_2}{R_2 + R_6} - U * \frac{R_1}{R_1 + R_4 + R_5} \\ U_i &= U * \left(\frac{R_2}{R_2 + R_6} - \frac{R_1}{R_1 + R_4 + R_5} \right) \\ U_i &= 250 * \left(\frac{335}{335 + 150} - \frac{150}{150 + 245 + 600} \right) \\ U_i &= 134,991\,97\text{ V} \end{aligned}$$

2.3 Výpočet hodnot proudu I_{R_3} a napětí U_{R_3}

Nyní máme vypočítané hodnoty pro napětí U_i a odpor R_i . Můžeme tedy vypočítat hodnoty proudu I_{R_3} a napětí U_{R_3} :

$$I_{R_3} = \frac{U_i}{R_i + R_3} = \frac{134,991\,97}{230,995\,182 + 625} = 0,157\,701\,788 \doteq \underline{\underline{0,157\,7\text{ A}}}$$

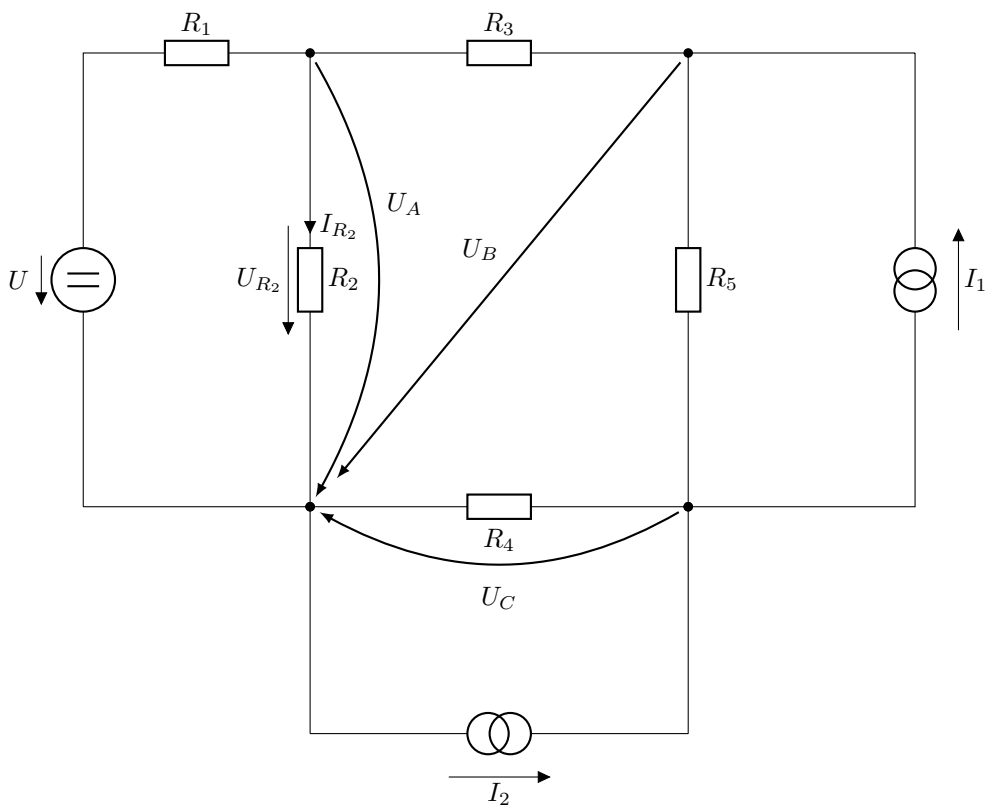
$$U_{R_3} = R_3 * I_{R_3} = 625 * 0,157\,701\,788 = 98,563\,618 \doteq \underline{\underline{98,563\,6\text{ V}}}$$

3 Příklad 3 – Metoda uzlových napětí

Zadání: Stanovte napětí U_{R_2} a proud I_{R_2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
D	115	0,6	0,9	50	38	48	37	28

Tabulka 3: Zadané hodnoty



Obrázek 27: Zadaný obvod

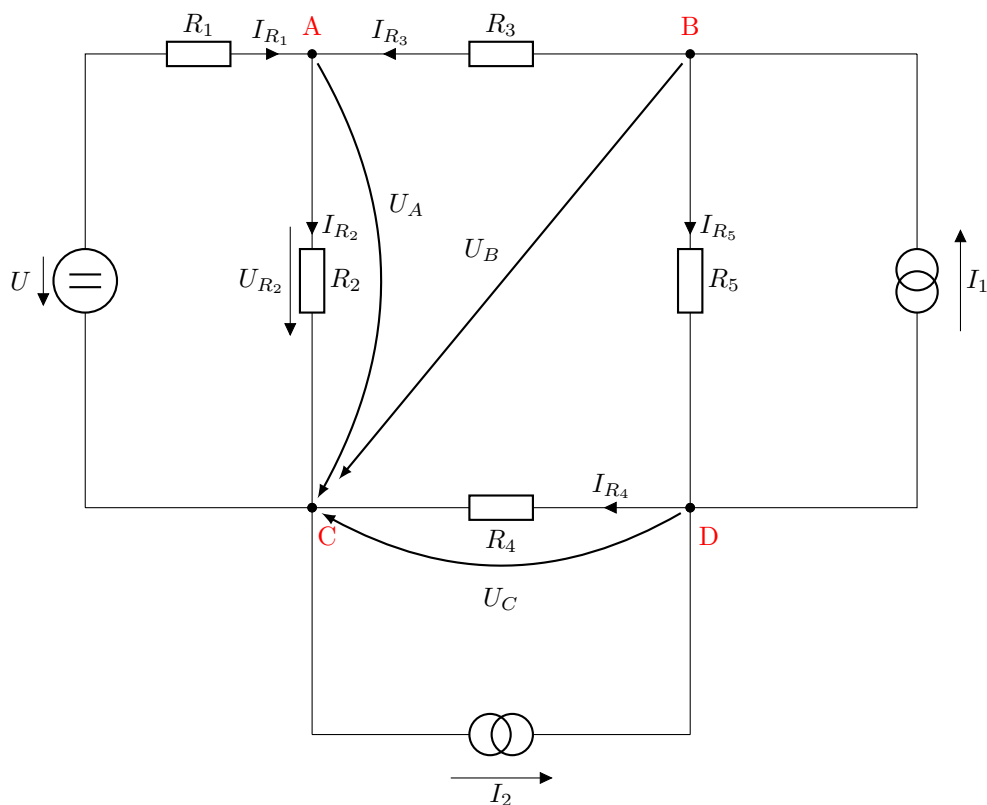
3.1 Vyjádření vztahů mezi jednotlivými proudy obvodu

Jednotlivé vztahy mezi proudy v obvodu vyjádříme pomocí I. Kirchhoffova zákona pro uzly A, B a D. Uzel C bude pro nás sloužit jako referenční uzel:

$$A : I_{R_1} + I_{R_3} - I_{R_2} = 0$$

$$B : I_1 - I_{R_3} - I_{R_5} = 0$$

$$D : I_2 + I_{R_5} - I_{R_4} - I_1 = 0$$



Obrázek 28: Zadaný obvod s označenými uzly a proudy

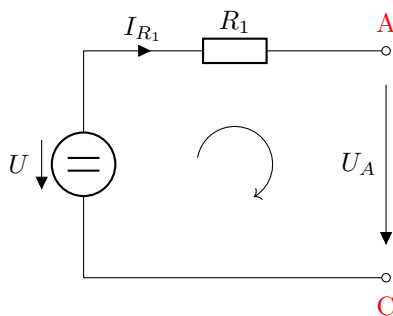
3.2 Vytvoření náhradních obvodů

Dále si vytvoříme náhradní obvody pro určení vztahů pro jednotlivé proudy obvodu.

Určení proudu I_{R_1} :

$$R_1 * I_{R_1} + U_A - U = 0$$

$$I_{R_1} = \frac{U - U_A}{R_1}$$

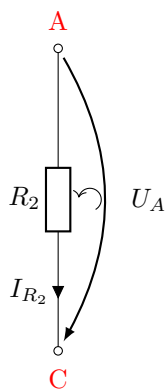


Obrázek 29: Náhradní obvod pro určení proudu I_{R_1}

Určení proudu I_{R_2} :

$$R_2 * I_{R_2} - U_A = 0$$

$$I_{R_2} = \frac{U_A}{R_2}$$

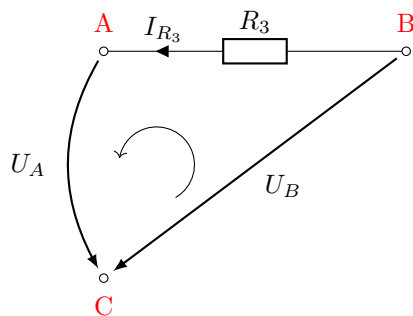


Obrázek 30: Náhradní obvod pro určení proudu I_{R_2}

Určení proudu I_{R_3} :

$$R_3 * I_{R_3} + U_A - U_B = 0$$

$$I_{R_3} = \frac{U_B - U_A}{R_3}$$

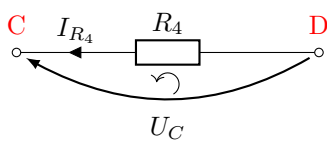


Obrázek 31: Náhradní obvod pro určení proudu I_{R_3}

Určení proudu I_{R_4} :

$$R_4 * I_{R_4} - U_C = 0$$

$$I_{R_4} = \frac{U_C}{R_4}$$



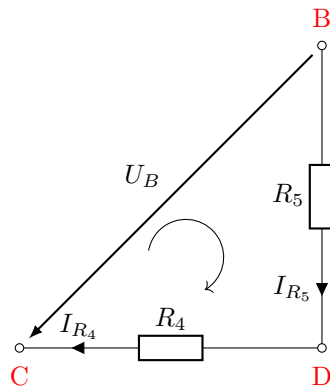
Obrázek 32: Náhradní obvod pro určení proudu I_{R_4}

Určení proudu I_{R_5} :

$$R_5 * I_{R_5} + R_4 * I_{R_4} - U_B = 0$$

$$I_{R_5} = \frac{U_B - R_4 * I_{R_4}}{R_5} = \frac{U_B - R_4 * \frac{U_C}{R_4}}{R_5}$$

$$I_{R_5} = \frac{U_B - U_C}{R_5}$$



Obrázek 33: Náhradní obvod pro určení proudu I_{R_3}

3.3 Výpočet hodnoty napětí U_{R_2} a proudu I_{R_2}

Nejprve dosadíme do vyjádřených vztahů mezi proudy vztahy pro jednotlivé proudy:

$$A : \frac{U - U_A}{R_1} + \frac{U_B - U_A}{R_3} - \frac{U_A}{R_2} = 0$$

$$B : I_1 - \frac{U_B - U_A}{R_3} - \frac{U_B - U_C}{R_5} = 0$$

$$C : I_2 + \frac{U_B - U_C}{R_5} - \frac{U_C}{R_4} - I_1 = 0$$

Upravíme rovnice:

$$R_2 * R_3 * (U - U_A) + R_1 * R_2 * (U_B - U_A) - R_1 * R_3 * U_A = 0$$

$$R_3 * R_5 * I_1 - R_5 * (U_B - U_A) - R_3 * (U_B - U_C) = 0$$

$$R_4 * R_5 * I_2 + R_4 * (U_B - U_C) - R_5 * U_C - R_4 * R_5 * I_1 = 0$$

Dosadíme číselné hodnoty a upravíme rovnice na potřebný tvar:

$$38 * 48 * (115 - U_A) + 50 * 38 * (U_B - U_A) - 50 * 48 * U_A = 0$$

$$48 * 28 * 0,6 - 28 * (U_B - U_A) - 48 * (U_B - U_C) = 0$$

$$37 * 28 * 0,9 + 37 * (U_B - U_C) - 28 * U_C - 37 * 28 * 0,6 = 0$$

$$209\,760 - 1\,824 * U_A + 1\,900 * U_B - 1\,900 * U_A - 2\,400 * U_A = 0$$

$$806,4 - 28 * U_B + 28 * U_A - 48 * U_B + 48 * U_C = 0$$

$$932,4 + 37 * U_B - 37 * U_C - 28 * U_C - 621,6 = 0$$

$$\begin{aligned}
-6\,124 * U_A + 1\,900 * U_B + 209\,760 &= 0 & / : 8 \\
28 * U_A - 76 * U_B + 48 * U_C + 806,4 &= 0 & / : 4 \\
37 * U_B - 65 * U_C + 370,8 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-765,5 * U_A + 237,5 * U_B &= -26\,220 \\
7 * U_A - 19 * U_B + 12 * U_C &= -201,6 \\
37 * U_B - 65 * U_C &= -310,8
\end{aligned}$$

Získali jsme tři rovnice o třech neznámých. Nyní si sestavíme maticovou rovnici:

$$\begin{pmatrix} -765,5 & 237,5 & 0 \\ 7 & -19 & 12 \\ 0 & 37 & -65 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26\,220 \\ -201,6 \\ -310,8 \end{pmatrix}$$

Dále si určíme hodnoty determinantů:

$$\begin{aligned}
|D| &= \begin{vmatrix} -765,5 & 237,5 & 0 \\ 7 & -19 & 12 \\ 0 & 37 & -65 \end{vmatrix} = \\
&= [-765,5 * (-19) * (-65)] + (7 * 37 * 0) + (0 * 237,5 * 12) - \\
&- [0 * (-19) * 0] - [12 * 37 * (-765,5)] - (-65 * 237,5 * 7) = \\
&= -945\,392,5 + 0 + 0 + 0 + 339\,882 + 108\,062,5 = \\
&= -497\,448
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|D_1| &= \begin{vmatrix} -26\,220 & 237,5 & 0 \\ -201,6 & -19 & 12 \\ -310,8 & 37 & -65 \end{vmatrix} = \\
&= [-26\,220 * (-19) * (-65)] + (-201,6 * 37 * 0) + (-310,8 * 237,5 * 12) - \\
&- [0 * (-19) * (-310,8)] - [12 * 37 * (-26\,220)] - [-65 * 237,5 * (-201,6)] = \\
&= -32\,381\,700 - 885\,780 + 11\,641\,680 - 3\,112\,200 = \\
&= -24\,738\,000
\end{aligned}$$

Vypočítáme si hodnotu napětí U_A :

$$U_A = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{-24\,738\,000}{-497\,448} = 49,729\,821 \text{ V}$$

Hodnota napětí U_{R_2} je stejná, jako hodnota napětí U_A , tedy:

$$U_{R_2} = U_A = 49,729\,821 \text{ V} \doteq \underline{\underline{49,729\,8 \text{ V}}}$$

Hodnotu proudu I_{R_2} vypočítáme pomocí Ohmova zákona:

$$I_{R_2} = \frac{U_A}{R_2} = \frac{49,729\,821}{38} = 1,308\,68 \doteq \underline{\underline{1,308\,7 \text{ A}}}$$

4 Příklad 4 – Metoda smyčkových proudů

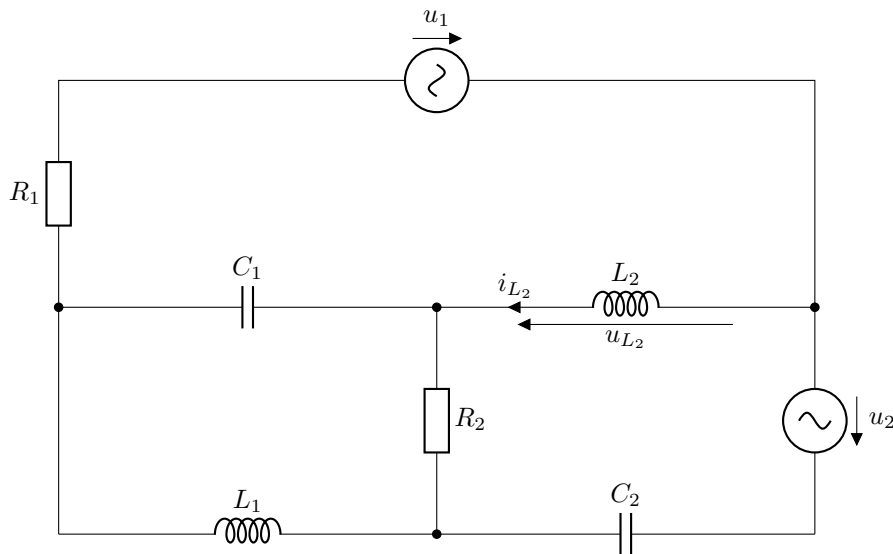
Zadání: Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 * \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 * \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} * \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
H	65	60	10	10	160	75	155	70	95

Tabulka 4: Zadané hodnoty



Obrázek 34: Zadaný obvod

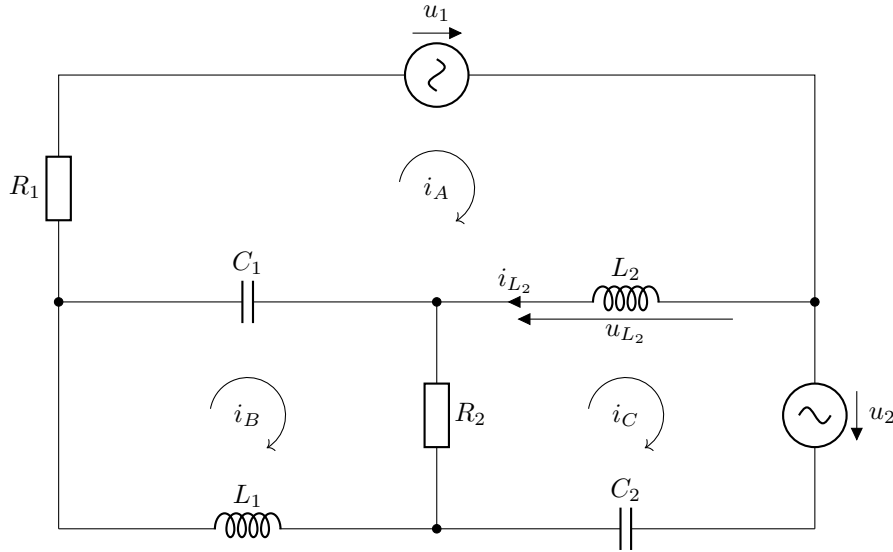
4.1 Výpočet úhlové frekvence

Nejprve si spočítáme úhlovou frekvenci:

$$\omega = 2\pi f = 2 * 95 * \pi = 190\pi \frac{rad}{s}$$

4.2 Určení smyčkových proudů

Dále si určíme smyčkové proudy a jejich směr:



Obrázek 35: Obvod s vyznačenými smyčkovými proudy

Poté sestavíme rovnice pro jednotlivé smyčky:

$$i_A : R_1 * I_A + Z_{L_2} * (I_A - I_C) + Z_{C_1} * (I_A - I_B) + U_1 = 0$$

$$i_B : Z_{C_1} * (I_B - I_A) + R_2 * (I_B - I_C) + Z_{L_1} * I_B = 0$$

$$i_C : Z_{C_2} * I_C + R_2 * (I_C - I_B) + Z_{L_2} * (I_C - I_A) + U_2 = 0$$

4.3 Sestavení maticové rovnice

Sestavíme maticovou rovnici:

$$\begin{pmatrix} R_1 + Z_{L_2} + Z_{C_1} & -Z_{C_1} & -Z_{L_2} \\ -Z_{C_1} & Z_{C_1} + R_2 + Z_{L_1} & -R_2 \\ -Z_{L_2} & -R_2 & Z_{C_2} + R_2 + Z_{L_2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Dále dosadíme do maticové rovnice jednotlivé vztahy:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = \omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C} * \begin{pmatrix} -j \\ -j \end{pmatrix} = \frac{-j}{\omega C} = -jX_C$$

$$Z_L = j\omega L = jX_L$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_2 + \frac{-j}{\omega C_1} & \frac{-j}{\omega C_1} & -j\omega L_2 \\ \frac{-j}{\omega C_1} & \frac{-j}{\omega C_1} + R_2 + j\omega L_1 & -R_2 \\ -j\omega L_2 & -R_2 & \frac{-j}{\omega C_2} + R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_1} & \frac{j}{\omega C_1} & -j\omega L_2 \\ \frac{j}{\omega C_1} & \frac{j}{\omega C_1} + R_2 + j\omega L_1 & -R_2 \\ -j\omega L_2 & -R_2 & \frac{-j}{\omega C_2} + R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Poté dosadíme číselné hodnoty:

$$\begin{pmatrix} 10 + 33,959\,21j & 10,808\,485j & -44,767\,695j \\ 10,808\,485j & 10 + 84,695\,932j & -10 \\ -44,767\,695j & -10 & 10 + 20,834\,621j \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -65 \\ 0 \\ -60 \end{pmatrix}$$

4.4 Určení hodnot determinantů a proudů I_A a I_C

Nyní si určíme hodnoty jednotlivých determinantů:

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} 10 + 33,959\,21j & 10,808\,485j & -44,767\,695j \\ 10,808\,485j & 10 + 84,695\,932j & -10 \\ -44,767\,695j & -10 & 10 + 20,834\,621j \end{vmatrix} = \\ &= [(10 + 33,959\,21j) * (10 + 84,695\,932j) * (10 + 20,834\,621j)] + \\ &+ [(10,808\,485j) * (-10) * (-44,767\,695j)] + \\ &+ [(-44,767\,695j) * (10,808\,485j) * (-10)] - \\ &- [(-44,767\,695j) * (10 + 84,695\,932j) * (-44,767\,695j)] - \\ &- [(-10) * (-10) * (10 + 33,959\,21j)] - \\ &- [(10 + 20,834\,621j) * (10,808\,485j) * (10,808\,485j)] = \\ &= \underline{-41\,951,139\,104 + 122\,805,400\,952j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_A| &= \begin{vmatrix} -65 & 10,808\,485j & -44,767\,695j \\ 0 & 10 + 84,695\,932j & -10 \\ -60 & -10 & 10 + 20,834\,621j \end{vmatrix} = \\ &= [(-65) * (10 + 84,695\,932j) * (10 + 20,834\,621j)] + \\ &+ [(0) * (-10) * (-44,767\,695j)] + \\ &+ [(-60) * (10,808\,485j) * (-10)] - \\ &- [(-44,767\,695j) * (10 + 84,695\,932j) * (-60)] - \\ &- [(-10) * (-10) * (-65)] - \\ &- [(10 + 20,834\,621j) * (10,808\,485j) * (0)] = \\ &= \underline{342\,197,995\,913 - 88\,970,385\,45j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D_C| &= \begin{vmatrix} 10 + 33,959\,21j & 10,808\,485j & -65 \\ 10,808\,485j & 10 + 84,695\,932j & 0 \\ -44,767\,695j & -10 & -60 \end{vmatrix} = \\ &= [(10 + 33,959\,21j) * (10 + 84,695\,932j) * (-60)] + \\ &+ [(10,808\,485j) * (-10) * (-65)] + \\ &+ [(-44,767\,695j) * (10,808\,485j) * (0)] - \\ &- [(-65) * (10 + 84,695\,932j) * (-44,767\,695j)] - \\ &- [(0) * (-10) * (10 + 33,959\,21j)] - \\ &- [(-60) * (10,808\,485j) * (10,808\,485j)] = \\ &= \underline{406\,019,722\,925 - 93\,266,571\,7j} \end{aligned}$$

$$I_A = \frac{|D_A|}{|D|} = \frac{342\,197,995\,913 - 88\,970,385\,45j}{-41\,951,139\,104 + 122\,805,400\,952j} = -1,501\,19 - 2,273\,69j\text{A}$$

$$I_C = \frac{|D_C|}{|D|} = \frac{406\,019,722\,925 - 93\,266,571\,7j}{-41\,951,139\,104 + 122\,805,400\,952j} = -1,691\,498 - 2,728\,377j\text{A}$$

4.5 Výpočet $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2}

Nejprve vypočítáme hodnotu proudu I_{L_2} :

$$I_{L_2} = I_A - I_C = (-1,501\,19 - 2,273\,69j) - (-1,691\,498 - 2,728\,377j) = 0,190\,308 + 0,454\,687j\text{A}$$

Dále vypočítáme hodnotu napětí U_{L_2} :

$$U_{L_2} = I_{L_2} * Z_{L_2} = (0,190\,308 + 0,454\,687j) * (44,767\,695j) = -20,355\,289 + 8,519\,651j\text{V}$$

Nyní již můžeme vypočítat hodnotu $|U_{L_2}|$ (amplituda napětí na cívce L_2):

$$|U_{L_2}| = \sqrt{(-20,355\,289)^2 + (8,519\,651)^2} = 22,066\,314 \doteq \underline{\underline{22,066\,3\text{ V}}}$$

Nakonec vypočítáme fázový posuv φ_{L_2} :

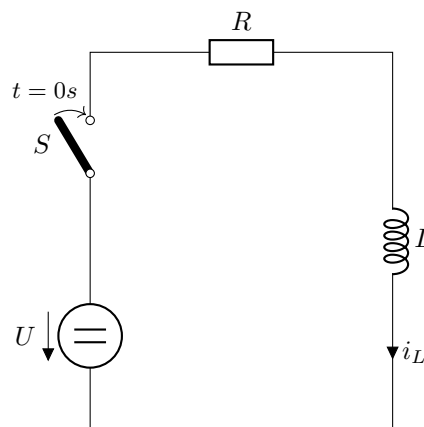
$$\varphi_{L_2} = \arctan\left(\frac{\text{im}(U_{L_2})}{\text{re}(U_{L_2})}\right) = \arctan\left(\frac{8,519\,651}{-20,355\,289}\right) = -0,396\,392 \doteq \underline{\underline{-0,396\,4\text{ rad}}}$$

5 Příklad 5 – Diferenciální rovnice

Zadání: V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[s]$ sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
E	40	30	40	11

Tabulka 5: Zadané hodnoty



Obrázek 36: Zadaný obvod

5.1 Sestavení diferenciální rovnice prvního řádu

Nejprve si vyjádříme vztahy platící v zadaném obvodu:

$$i_L = \frac{u_R}{R} \quad (i = i_L = i_R)$$

$$u_R + u_L - U = 0$$

$$i'_L = \frac{u_L}{L}$$

Dále si zavedeme počáteční podmínku:

$$i_L(0) = 11\text{A}$$

Nyní využijeme vyjádřené vztahy a sestavíme si diferenciální rovnici prvního řádu pro i'_L :

$$Ri_L + Li'_L = U$$

$$i'_L = \frac{1}{L} * (U - Ri_L)$$

5.2 Analytické řešení

Očekávané řešení:

$$i_L(t) = K(t) * e^{\lambda t}$$

Řešíme charakteristické rovnice ($i'_L = \lambda$, $i_L = 1$):

$$R + L\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{4}{3}$$

Dosadíme λ do očekávaného řešení:

$$i_L(t) = K(t) * e^{\lambda t}$$

$$i_L(t) = K(t) * e^{-\frac{R}{L}t}$$

Dále provedeme derivaci získané rovnice:

$$i'_L = K'(t) * e^{-\frac{R}{L}t} + K(t) * \left(-\frac{R}{L}\right) * e^{-\frac{R}{L}t}$$

Nyní dosadíme získané rovnice do námi sestavené diferenciální rovnice:

$$Ri_L + Li'_L = U$$

$$R * K(t) * e^{-\frac{R}{L}t} + L * \left(K'(t) * e^{-\frac{R}{L}t} + K(t) * \left(-\frac{R}{L}\right) * e^{-\frac{R}{L}t}\right) = U$$

$$R * K(t) * e^{-\frac{R}{L}t} + L * K'(t) * e^{-\frac{R}{L}t} + L * K(t) * \left(-\frac{R}{L}\right) * e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$R * K(t) * e^{-\frac{R}{L}t} + L * K'(t) * e^{-\frac{R}{L}t} - R * K(t) * e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$L * K'(t) * e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$K'(t) * e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{L}$$

$$K'(t) = \frac{U}{L} * e^{\frac{R}{L}t}$$

Nyní známe $K'(t)$. Potřebujeme však zjistit $K(t)$, proto rovnici zintegrujeme:

$$K(t) = \int \frac{U}{L} * e^{\frac{R}{L}t} dt$$

$$K(t) = \frac{U * e^{\frac{R}{L}t}}{R} + k$$

Dosadíme $K(t)$ do očekávaného řešení:

$$i_L(t) = \left(\frac{U * e^{\frac{R}{L}t}}{R} + k\right) * e^{\lambda t}$$

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + k * e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1)$$

Dále dosadíme počáteční podmínku $i_L(0) = 11\text{A}$:

$$11 = \frac{U}{R} + k * e^{-\frac{R}{L}0}$$

$$11 = \frac{U}{R} + k$$

$$k = 11 - \frac{U}{R}$$

Dosadíme k do rovnice (1):

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + k * e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + \left(11 - \frac{U}{R}\right) * e^{-\frac{R}{L}t}$$

Nyní dosadíme číselné hodnoty:

$$i_L(t) = \frac{40}{40} + \left(11 - \frac{40}{40}\right) * e^{-\frac{40}{30}t}$$

Hledaná rovnice tedy je:

$$i_L(t) = 1 + 10 * e^{-\frac{4}{3}t}$$

5.3 Zkouška

a)

$$t = 0\text{s} : \quad i_L(0) = \frac{U}{R} + 11 - \frac{U}{R} = 11$$

b) Dosadíme i_L a i'_L do diferenciální rovnice prvního řádu a upravíme:

$$Ri_L + Li'_L = U$$

$$i_L(t) = \frac{U}{R} + \left(11 - \frac{U}{R}\right) * e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i'_L(t) = -\left(11 - \frac{U}{R}\right) * \frac{R}{L} * e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$R * \left[\frac{U}{R} + \left(11 - \frac{U}{R}\right) * e^{-\frac{R}{L}t} \right] + L * \left[-\left(11 - \frac{U}{R}\right) * \frac{R}{L} * e^{-\frac{R}{L}t} \right] = U$$

$$U + R * \left(11 - \frac{U}{R}\right) * e^{-\frac{R}{L}t} - R * \left(11 - \frac{U}{R}\right) * e^{-\frac{R}{L}t} = U$$

$$U = U$$

$$0 = 0$$

6 Výsledky

Příklad	Varianta zadání	Výsledek
1	H	$I_{R_6} = 0,0821 \text{ A}$ $U_{R_6} = 71,4187 \text{ V}$
2	E	$I_{R_3} = 0,1577 \text{ A}$ $U_{R_3} = 98,5636 \text{ V}$
3	D	$I_{R_2} = 1,3087 \text{ A}$ $U_{R_2} = 49,7298 \text{ V}$
4	H	$ U_{L_2} = 22,0663 \text{ V}$ $\varphi_{L_2} = -0,3964 \text{ rad}$
5	E	$i_L(t) = 1 + 10 * e^{-\frac{4}{3}t}$

Tabulka 6: Tabulka s výsledky