ДКР, Математика, Давидчук Артем, ІО-41

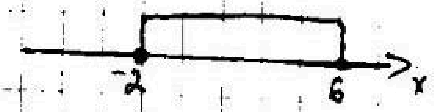
Завдання №1:

№1

$A = \{x \in R \mid |x-2| \leq 4\} = [-2; 6]$

$B = \{x \in R \mid |x| > 2\} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

A:

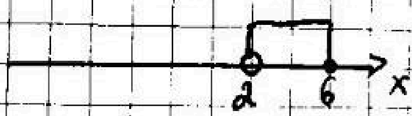


B:

$A \cup B$:

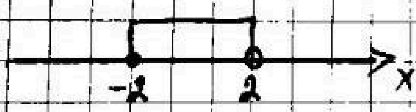
$x \in R$

$A \cap B$:



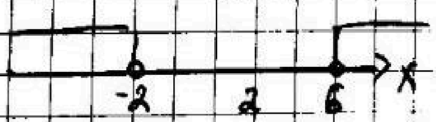
$x \in (2; 6]$

$A \setminus B$:



$x \in [-2; 2)$

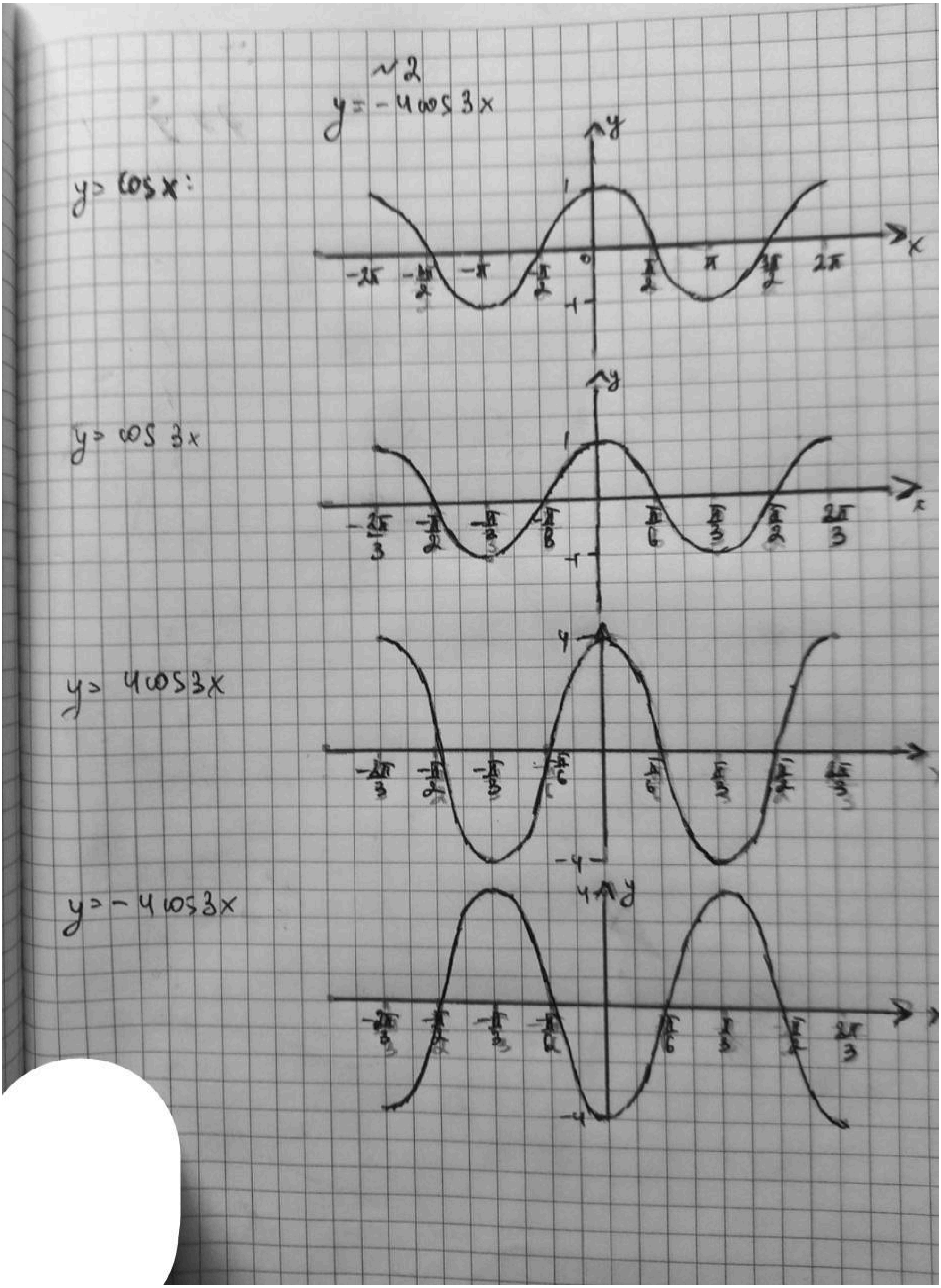
$B \setminus A$:



$x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$

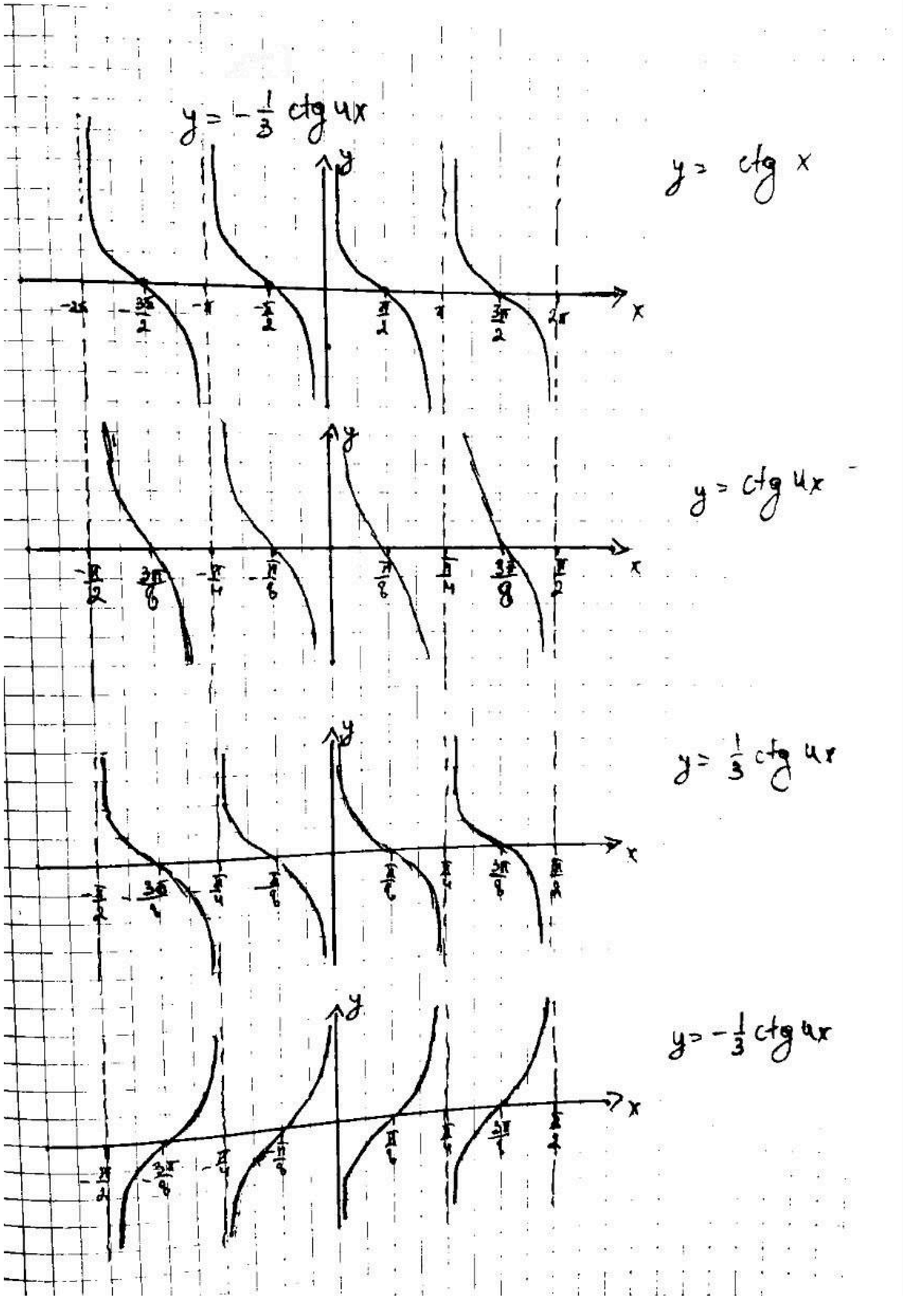
$\sup A = 6, \ \inf A = -2, \ \max A = 6, \ \min A = -2.$

Завдання №2 (1):



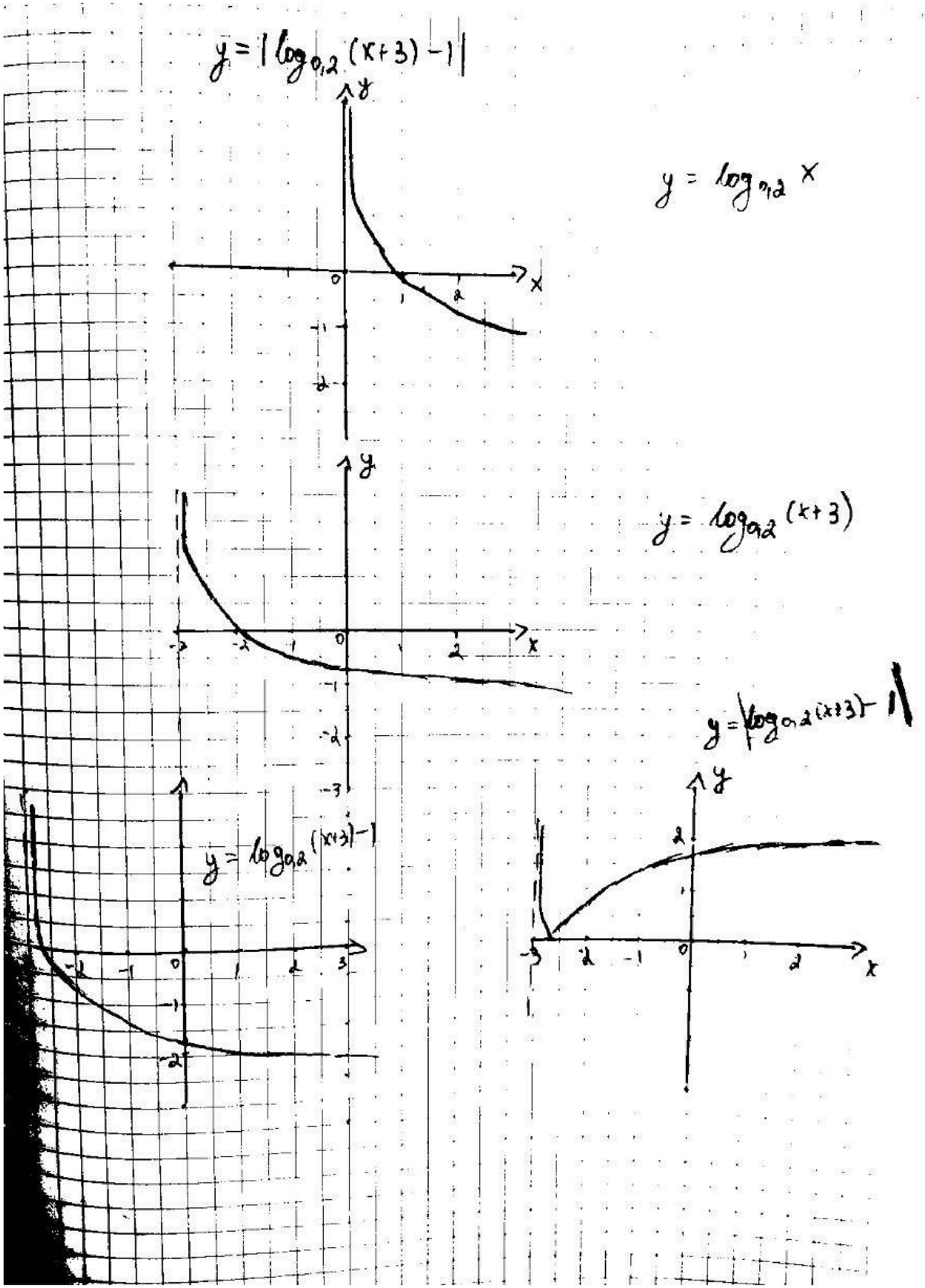
Період функції = $\frac{2\pi}{3}$

(2):

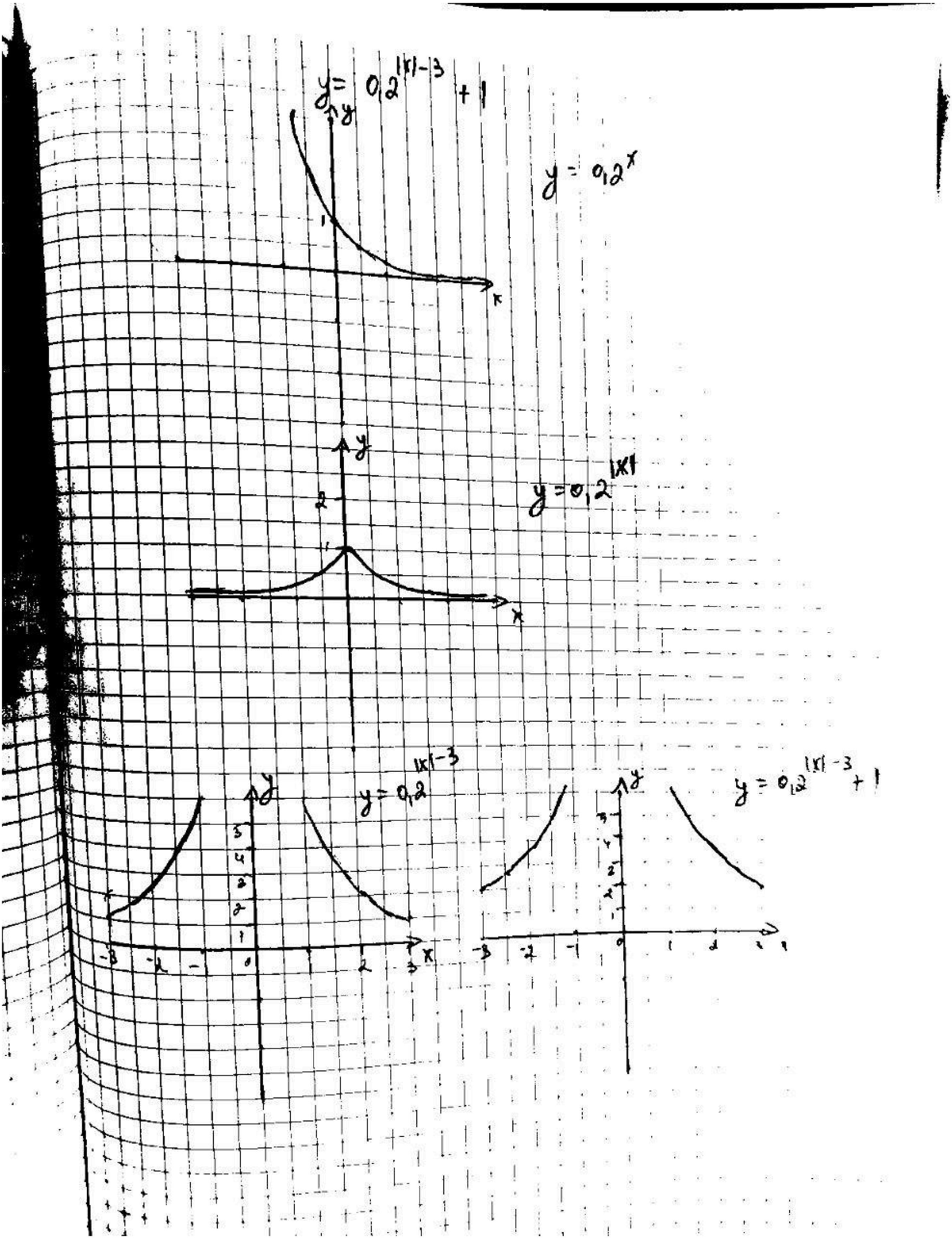


Період функції = $\frac{\pi}{4}$

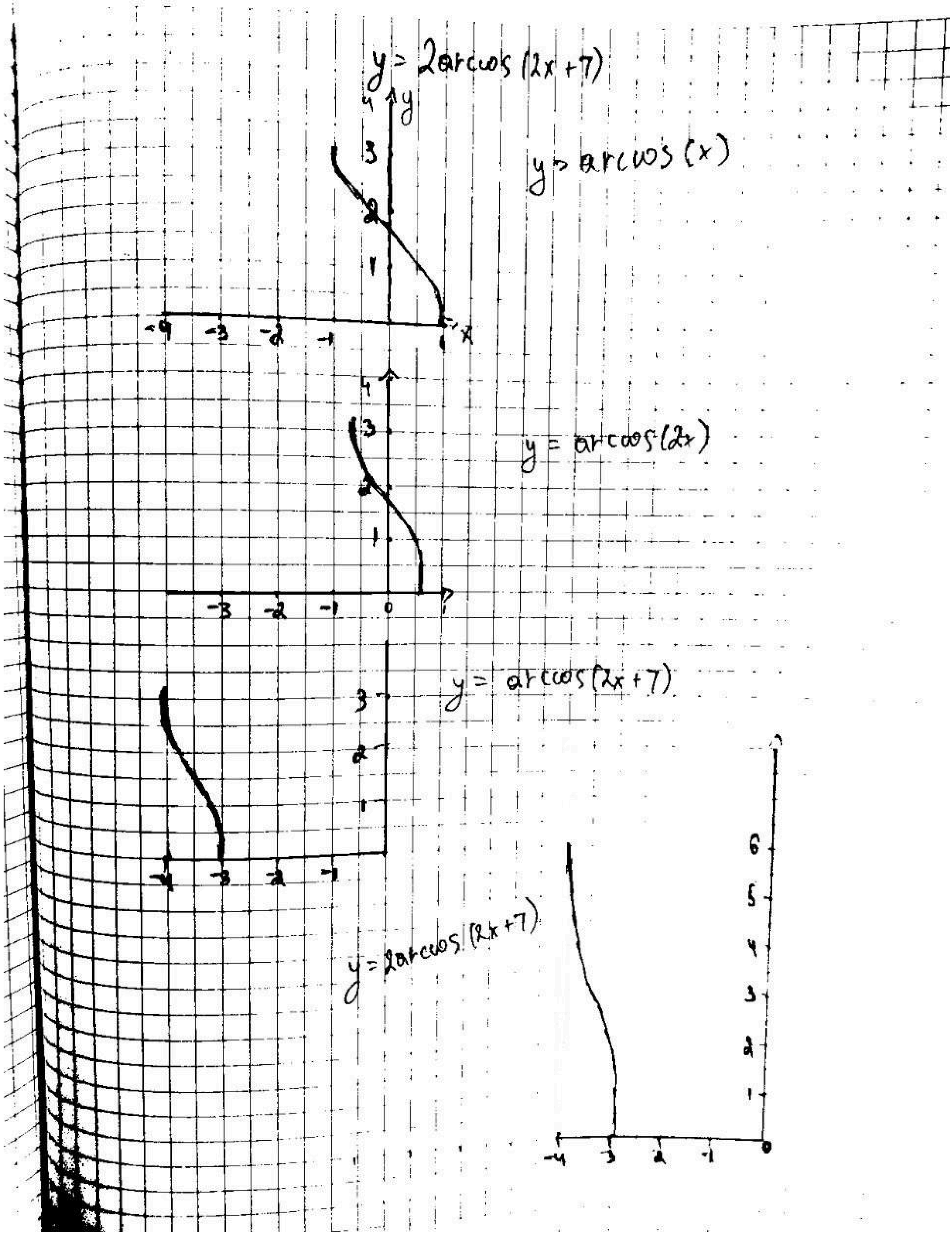
(3):



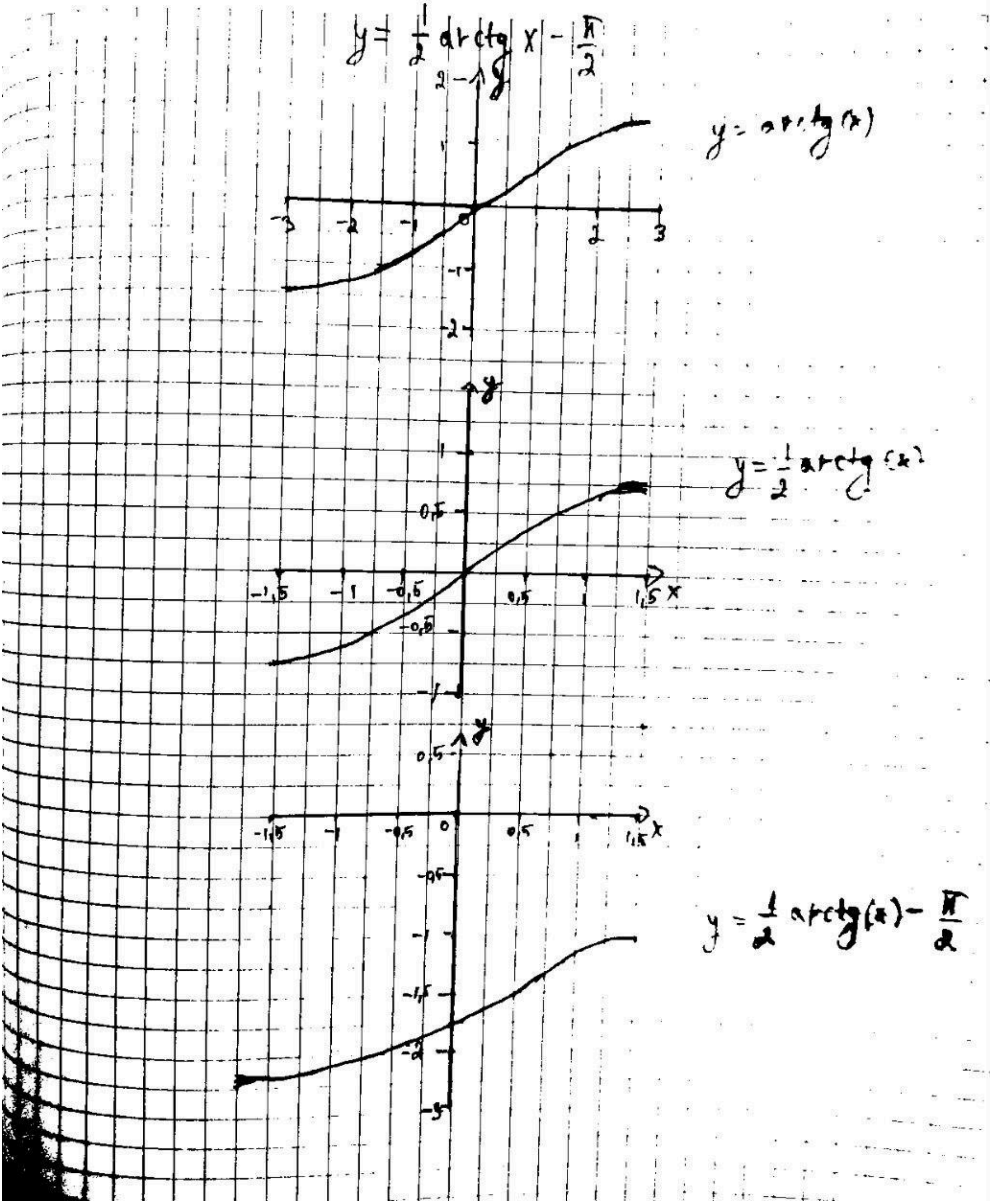
(4):



(5):



(6):


$y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arctg}(x)$
$y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)$
$y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{2}$

Завдання №3

$y = 2 - |x+1|$ на проміжку $[-5; 2)$; $T(y) = 7$

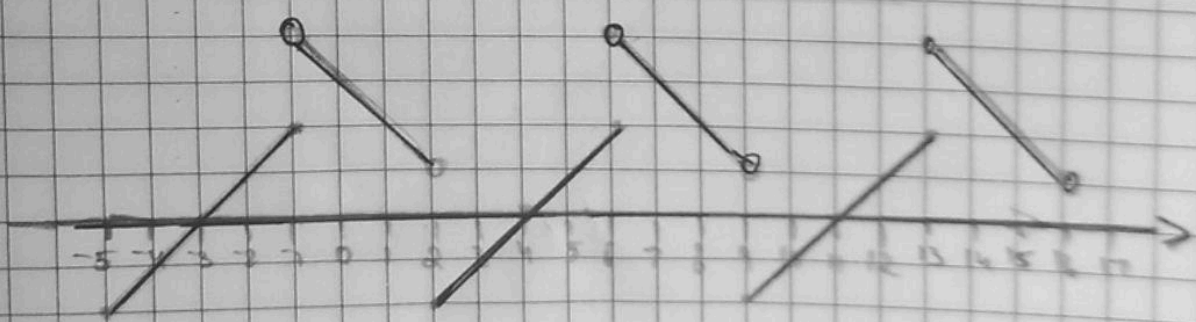
$f(17) = f(17-7) = f(10) = f(10-7) = f(3)$

$f(-13) = f(-13+7) = f(-6) = f(-6+7) = f(1)$

$f(3) = 2 - |3+1| = 2 - |4| = 2 - 4 = -2$

$f(1) = 2 - |1+1| = 2 - |2| = 2 - 2 = 0$

$4f(17) - 3f(-13) = 4f(3) - 3f(1) = 4 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 = -8$



Завдання №4

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N(\varepsilon)\ \left|\frac{4n-3}{2n+1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{4n-3}{2n+1}-2^{\backslash 2n+1}\right|<\varepsilon;\quad \left|\frac{4n-3-2(2n+1)}{2n+1}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{\cancel{4n}-3-\cancel{4n}-2}{2n+1}\right|<\varepsilon;\quad \left|\frac{-5}{2n+1}\right|<\varepsilon;$$

$$\frac{5}{2n+1}<\varepsilon;\ \left|\cdot 2n+1;\quad 5<\varepsilon(2n+1)\ \right|:\varepsilon$$

$$\frac{5}{\varepsilon}<2n+1;\quad \frac{5}{\varepsilon}-1<2n;\quad \frac{\frac{5}{\varepsilon}-1}{2}<n;$$

$$N(\varepsilon)=\left[\frac{\frac{5}{\varepsilon}-1}{2}\right]$$

Завдання №5

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n\cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-6)^n - 5^{n+1}}{5^n - (-6)^{n+1}} \Big| : (-6)^{n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(-6)^n}{(-6)^{n+1}} - \frac{5^{n+1}}{(-6)^{n+1}}}{\frac{5^n}{(-6)^{n+1}} - \frac{(-6)^{n+1}}{(-6)^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-6)^{n-n-1} - \left(-\frac56\right)^{n+1}}{\left(-\frac56\right)^n\cdot\left(-\frac16\right) - 1} =$

$= \dfrac{(-6)^{-1} - 0}{0\cdot\left(-\frac16\right) - 1} = \dfrac{-\frac16}{-1} = \dfrac16.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n+3}}{\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3+n^2}} \Big| \cdot \dfrac{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+n^2}}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+n^2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n+3}\left(\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+n^2}\right)}{\cancel{n^3}+n-\cancel{n^3}-n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^4+3n^3+9n^2+3n}+\sqrt{9n^4+12n^3+3n^2}}{-n^2+n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\sqrt{9+\frac3n+\frac9{n^2}+\frac3{n^3}} + \cancel{n^2}\sqrt{9+\frac{12}{n}+\frac3{n^2}}}{\cancel{n^2}\left(-1+\frac1n\right)} =$

$= \dfrac{\sqrt9+\sqrt9}{-1} = \dfrac{3+3}{-1} = -6$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$; $S = \dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \dfrac{1+3n-2}{2}\cdot n =$

$= \dfrac{3n-1}{2}\cdot n = \dfrac{3n^2-n}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5n^4+n+1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2-n)}{2\sqrt{5n^4+n+1}} \Big| \cdot \dfrac{\sqrt{5n^4+n+1}}{\sqrt{5n^4+n+1}}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n^2-n)\sqrt{5n^4+n+1}}{2(5n^4+n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(3n^2-n)\sqrt{5+\frac1{n^3}+\frac1{n^4}}}{10n^4+2n+2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4\left(3-\frac1n\right)\sqrt{5+\frac1{n^3}+\frac1{n^4}}}{10n^4+2n+2} \Big| : n^4$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(3-\frac1n\right)\sqrt{5+\frac1{n^3}+\frac1{n^4}}}{10+\frac2{n^3}+\frac2{n^4}} = \dfrac{3\sqrt5}{10}$

Завдання №6

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8} = \dfrac{3\cdot 4+2\cdot 2+1}{8-8} = \dfrac{12+4+1}{0} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{3}{x^5}-1}{\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}+\frac{5}{x^6}} = \dfrac{-1}{0} = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+3x+1}{\sqrt{3x+4}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right]; \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+3x+1}{\sqrt{3x+4}-1} \Big| \cdot \dfrac{\sqrt{3x+4}+1}{\sqrt{3x+4}+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(2x^2+3x+1)(\sqrt{3x+4}+1)}{3x+4-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2\cancel{(x+1)}(x+\frac{1}{2})(\sqrt{3x+4}+1)}{3\cancel{(x+1)}} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(2x+1)\sqrt{3x+4}+1}{3} = \dfrac{-1\cdot 2}{3} = -\dfrac{2}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x+1}\right)^{5x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]; \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}\right)^{5x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{5x} = \infty$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4} = [1^\infty];$ Тоді $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)(x-4)}; \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}-1\right)(x-4) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4}{x-1}\right)\cdot(x-4) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-16}{x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-\frac{16}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{4}{1} = 4; \ e^4$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4x}) = [\infty-\infty];$

$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4x} \Big| \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4x}};$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4-x^2+4x}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+4}{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{4}{x}}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+4}{x(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \dfrac{4}{1+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Завдання №7

$$\lim_{x\to\lambda}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^3-x^2-8x+12}; \quad \lambda \in \{-\infty, -3, 2, +\infty\}$$

$\lambda=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^3-x^2-8x+12}=[\infty-\infty]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{1-\frac{1}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{12}{x^3}}=\frac{1}{1}=1$$

$\lambda=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^3-x^2-8x+12}=[\infty-\infty];$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{1-\frac{1}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{12}{x^3}}=\frac{1}{1}=1;$$

$\lambda=-3$

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^3-x^2-8x+12}=\left[\frac{0}{0}\right];$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}(x+5)}{(x-2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}=\lim_{x\to-3}\frac{x+5}{x-2}=\frac{-3+5}{-3-2}=-\frac{2}{5}=-0.4$$

$\lambda=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^3-x^2-8x+12}=\left[\frac{0}{0}\right]; \quad \lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}(x+5)}{(x-2)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+5}{x-2}=\frac{2+5}{0}=\infty;$$

Завдання №8

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\arcsin 2x}-1}{1-\cos(2x)} \cdot \frac{\log_5(1-2tg^9 x)}{\sqrt[7]{1+x^8}-1} =$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin 2x}{2x^2}\cdot -\left(\frac{2tg^9x\cdot 7}{\ln 5\cdot x^8}\right)\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2x}{2x^2}\cdot\left(-\frac{2x^9\cdot 7}{\ln 5\cdot x^8}\right)\right) =$

$= -\lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{2x}\cdot 2x^9\cdot 7}{\cancel{2x^2}\cdot\ln 5\cdot \cancel{x^8}} = -\frac{14}{\ln(5)}$

2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x-\sin 3x}$; $x\to\pi$; $x-\pi\to\pi-\pi$; $x-\pi\to0$; $t=x-\pi$;
$t\to0$; $x=t+\pi$;

$\lim\limits_{t\to0}\frac{e^\pi-e^{t+\pi}}{\sin 5(t+\pi)-\sin 3(t+\pi)} = \lim\limits_{t\to0}\frac{e^\pi(1-e^t)}{\sin(5t+5\pi)-\sin(3t+3\pi)} =$

$= \lim\limits_{t\to0}\frac{e^\pi(1-e^t)}{\sin 3t-\sin 5t} = -\lim\limits_{t\to0}\frac{e^\pi(e^t-1)}{\sin 3t-\sin 5t} = -\lim\limits_{t\to0}\frac{e^\pi\cdot \cancel{t}}{-2\cancel{t}} = \frac{e^\pi}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi x+7\pi)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-7x)}{-\sin\pi x} =$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{-7\cancel{x}}{-\pi\cancel{x}} = \frac{7}{\pi}$

4) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln(\cos x)}} = [1^\infty]$; $\log$: $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln(\cos x)}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 3x-1)\cdot\frac{1}{\ln(\cos x)}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\ln(\cos x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{9x^2}{\ln(1-\sin^2 x)\cdot\frac{1}{2}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{18x^2}{\ln(1-\sin^2 x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{18x^2}{-\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right]$;

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{18\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}}$; $e^{-18} = \frac{1}{e^{18}}$

Завдання №9

$\alpha(x) = x^2 - 4x - 5\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \beta(x) = x$

$; \ x \to 0$

$\gamma(x) = -4x$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 4x - 5\sqrt[5]{x^2}}{-4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right];$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2} - 4x - \cancel{x^2} - 4}{-4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4(x+1)}{-4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty;$

Тоді $\gamma(x) = o(\alpha(x))$, при $x \to x_0$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 4x - 5\sqrt[5]{x^2}}{x^k}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{-5\sqrt[5]{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{-x^2 - 4} = \dfrac{0}{-4} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4x}{-5\sqrt[5]{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4x}{-(x^2+4)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2+4} = 0$

Тоді і $x^2 - 4x - 5\sqrt[5]{x^2}$ можу замінити на $-5\sqrt[5]{x^2}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5\sqrt[5]{x^2}}{x^k} = -5 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\frac{2}{5}}}{x^k}; \quad x^k = x^{\frac{2}{5}}; \ k = \dfrac{2}{5}$

$x^2 - 4x - 5\sqrt[5]{x^2} \sim -5\sqrt[5]{x^2} \quad x \to 0$

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 - 4x - 5x^{\frac{2}{5}}}{x^k} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} - 5x^{-\frac{8}{5}}\right)}{x^k} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x^{2-k}\left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{\sqrt[5]{x^8}}\right) = x^{2-k} \cdot 1; \quad x^{2-k} = x^0;$

$x^{2-k} = x^0; \ 2 - k = 0; \ k = 2;$

$x^2 - 4x - 5\sqrt[5]{x^2} \sim x^2, \quad x \to \infty$

Завдання №10 (1):

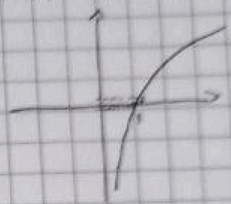
$f(x) = \frac{1}{\log_3|x-2|} + 1$; $x \neq 3, x \neq 1$

$x \neq 3$;

$x \to 3-$

$\begin{cases} x \to 3 \\ x < 3 \end{cases}$; Нехай $x = 2,999$; Тоді $x-2 = 2,999-2 = 0,9999$; $|x-2| = 0,9999$

$\log_3 0,9999 = -\text{нм}$; $\frac{1}{\log_3 0,999} = -\text{нв}$;



$\frac{1}{\log_3 0,9999} + 1 = -\text{нв}$.

$\lim_{x \to 3-} \frac{1}{\log_3|x-2|} + 1 = -\infty$

$x \to 3+$

$\begin{cases} x \to 3 \\ x > 3 \end{cases}$; Нехай $x = 3,00001$; Тоді $x-2 = 1,00001$; $|x-2| = 1,00001$; Тоді $\log_3|x-2| = +\text{нм}$;

$\frac{1}{\log_3|x-2|} = +\text{нв}$; $\frac{1}{\log_3|x-2|} + 1 = +\text{нв}$;

$\lim_{x \to 3+} \frac{1}{\log|x-2|} + 1 = \infty$; $\nexists f(3)$; $\lim_{x \to 3+} \neq \lim_{x \to 3-}$; Тоді точка $x = 3$

II роду нескінченного розриву.

$x \neq 1$

$x \to 1-$

$\begin{cases} x \to 1 \\ x < 1 \end{cases}$; $x = 0,9999$; Тоді $x-2 = -1,0001$; $|x-2| = 1,0001$; $\log_3|x-2| = +\text{нм}$;

$\frac{1}{\log_3|x-2|} = +\text{нв}$; $\frac{1}{\log_3|x-2|} + 1 = +\text{нв}$.

$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{\log|x-2|} + 1 = \infty$

$x \to 1+$

$\begin{cases} x \to 1 \\ x > 1 \end{cases}$; $x = 1,0001$; $x-2 = -0,9999$; $|x-2| = 0,9999$; $\log_3|x-2| = -\text{нм}$;

$\frac{1}{\log_3|x-2|} = -\text{нв}$; $\frac{1}{\log_3|x-2|} + 1 = -\text{нв}$;

$\lim_{x \to 1+} \frac{1}{\log_3|x-2|} + = -\infty$; $\nexists f(1)$; $\lim_{x \to 1+} \neq \lim_{x \to 1-}$; Тоді точка $x = 1$

II роду нескінченного розриву

Завдання №10 (2):

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x+1, & 0\le x\le 4\\ x+3, & x>4\end{cases};\quad x\neq 0,\ x\neq 4 \text{ - підозрілі}$$

$x\neq 0$;

$x\to 0-$

$\left(\begin{matrix}x\to 0\\ x<0\end{matrix}\right)$; Нехай $x=-0,0001$; Тоді $1-x=1-(-0,0001)=1,00001\approx 1$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$

$x\to 0+$

$\left(\begin{matrix}x\to 0\\ x>0\end{matrix}\right)$; Нехай $x=0,0001$; Тоді $1+x=1+0,00001=1,0001\approx 1$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$; $f(0)=1=\lim\limits_{x\to 0+}=\lim\limits_{x\to 0-}$; Існує неперервність в точці $x=0$. Немає розриву

$x\neq 4$

$x\to 4-$

$\left(\begin{matrix}x\to 4\\ x<4\end{matrix}\right)$; Нехай $x=3,9999$; $x+1=3,9999+1=4,9999\approx 5$

$\lim\limits_{x\to 4-} f(x)=5$

$x\to 4+$

$\left(\begin{matrix}x\to 4\\ x>4\end{matrix}\right)$; Нехай $x=4,00001$; $x+3=4,00001+3=7,00001\approx 7$;

$\lim\limits_{x\to 4+}=7$; $f(4)=5$; $\lim\limits_{x\to 4-}\neq\lim\limits_{x\to 4+}$; Тоді точка $x=4$

I роду розриву зі стрибком $|7-5|=2$.

Завдання №10 (3):

$f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2$; Дослідити в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$;

$x_1 = 3$; Так як $x = 3$ ніде не грає вирішальної чи важливої ролі з якого боку ми доходимо до неї, що ми можемо просто підставити це число;

$\lim\limits_{x \to 3} 5^{\frac{1}{x-4}} - 2 = 5^{-1} - 2 = 0,2 - 2 = -1,8$; $f(3) = -1,8$; Розриву в точці $x = 3$ немає

$x_2 = 4$;

$x \to 4-$

$\begin{pmatrix} x \to 4 \\ x < 4 \end{pmatrix}$; Нехай $x = 3,999$; $x - 4 = -0,0001 = -\text{нч}$; $\frac{1}{x-4} = -\text{нв}$;

$5^{\frac{1}{x-4}} = 0$; $5^{\frac{1}{x-4}} - 2 = -2$;

$\lim\limits_{x \to 4-} 5^{\frac{1}{x-4}} - 2 = -2$

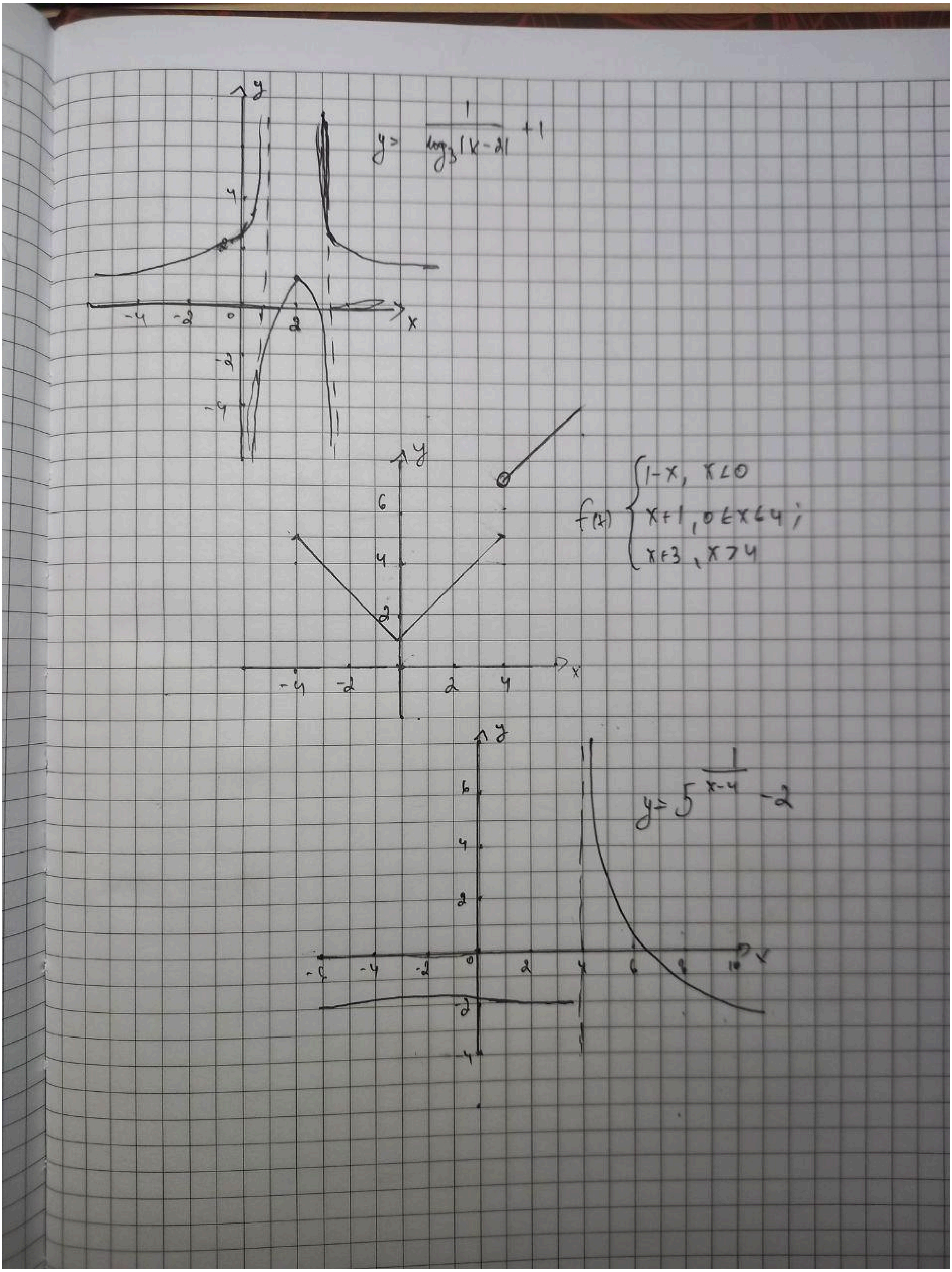
$x \to 4+$

$\begin{pmatrix} x \to 4 \\ x > 4 \end{pmatrix}$; Нехай $x = 4,0001$; $x - 4 = 0,0001 = +\text{нч}$; $\frac{1}{x-4} = +\text{нв}$; $5^{\frac{1}{x-4}} = +\text{нв}$.

$5^{\frac{1}{x-4}} - 2 = +\text{нв}$;

$\lim\limits_{x \to 4+} 5^{\frac{1}{x-4}} - 2 = +\infty$; $\nexists f(4)$; $\lim\limits_{x \to 4+} f(x) = +\infty$; Тоді точка $x_2 = 4$ є точкою розриву II роду, нескінченного розриву;

Завдання №10 (Схематичні графіки):

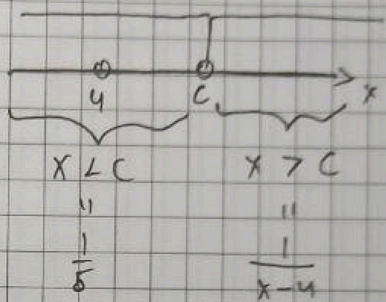


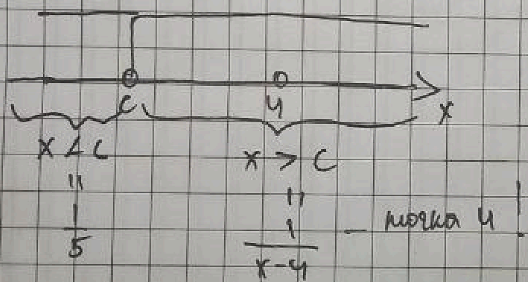
Завдання №11

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & x<c \\ \frac{1}{x-4}, & x>c\end{cases};\quad x\neq 4;$$

Виберемо випадок, коли підозрілих точок буде лише одна точка — точка c. Тобто знайдемо такі значення параметра c, при яких зникає невизначеність при $x=4$;

Ми бачимо, що при інтервалі $c \in (4;\infty)$ у нас зникає невизначеність $x=4$, а при $(-\infty;4)$ — виникає:





Цікавий випадок, коли $c=4$; Його я також окремо розгляну, подивимось що вийде. Тобто ми розглядаємо три варіанти $c \in (-\infty;4)$, $c=4$, $c \in (4;\infty)$

I випадок; $c \in (-\infty;4)$; $x \neq c$, $x\neq 4$

$\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \frac{1}{5}$; $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \frac{1}{c-4}$; — Нескінченності ні від чого при довільному c не буде при проміжку $c \in (-\infty;4)$; Тому ця границя буде дорівнювати числу, тоді: точка $x=c$ — є точкою I роду зі стрибком $\left|\frac{1}{c-4}-\frac{1}{5}\right| = \left|\frac{9-c}{5(c-4)}\right|$

$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4-}\frac{1}{x-4} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4+}\frac{1}{x-4} = \infty;$$

Тобто $x=4$ є точкою II роду і нескінченного розриву.

II випадок. $c=4$; $x=c=4$ – підозріла точка

$\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4-} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4+} \frac{1}{x-4} = -\infty$;

Тоді точка $x=c=4$ є точкою II роду, нескінченного розриву

III випадок. $c \in (4; \infty)$, $x=c$

$\lim\limits_{x\to c-} f(x) = \frac{1}{5}$

$\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \frac{1}{c-4}$ – тут при $c \in (4;\infty)$ не буде рівним ∞, тому дріб $\frac{1}{c-4}$ буде якимось числом, а значить що точка $x=c$ є точкою I роду зі стрибком $\left|\frac{1}{c-4} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{9-c}{5(c-4)}\right|$. І тут помічаємо цікаву річ у стрибку, а саме коли $c=9$, що стрибок дорівнює 0, тобто точка $x=c$, при $c=9$ стає точкою I роду усувного розриву, тому виділимо ще один випадок, коли $c=9$.

$\lim\limits_{x\to 9-} f(x) = \frac{1}{5}$; $\lim\limits_{x\to 9+} = \frac{1}{5}$; $\nexists f(9)$. $\lim\limits_{x\to 9-} = \lim\limits_{x\to 9+}$. Тоді дійсно, $x=c=9$ є точкою I роду усувного розриву.

Резюме:

- При $c \in (-\infty; 4)$
  1. $x=4$; II рід, нескінченного розриву
  2. $x=c$; I рід, неусувного розриву; стрибок $= \left|\frac{9-c}{5(c-4)}\right| = -\frac{9-c}{5(c-4)}$
- При $c=4$
  1. $x=c=4$; II рід, нескінченного розриву
- При $c=9$
  1. $x=c=9$; I рід, усувного розриву
- При $c \in (4; \infty) \setminus \{9\}$
  1. $x=c$; I рід, неусувного розриву; стрибок $= \left|\frac{9-c}{5(c-4)}\right|$