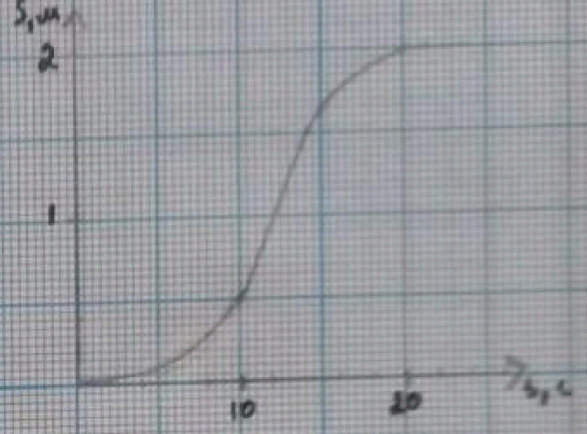
Домашня робота №1

Павидзук А. М. 10-4

Задача 1.7



Умова: точка рухається вздовж прямої в один бік. На рисунку показаний графік пройденого нею шляху s в залежності від часу t.

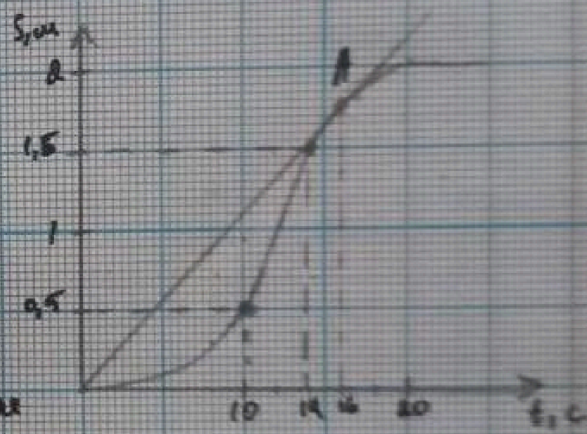
Знайти:

а. $v_{ср}$ – середню швидкість

б. v_{max} – максимальну швидкість

в. момент часу t_0, коли миттєва швидкість = середній швидкості за перші t_0 секунд

Вирішення:



а. З графіку видно, що точка рухалась протягом 20с, пройшовши 2м. Цієї інформації нам вистачить щоб порахувати $v_{ср}$: $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{2м}{20с} = 0,1$ м/с

б. Максимальна швидкість там, де значення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ – найбільше, але так як Δt – більш дискретне значення, яке не схильне до "швидкої" зміни, тому в нам допоможе дуже швидке збільшення ΔS: між 10с та 14 адже на цьому проміжку графік являється прямою. Тут: $\Delta S = 1,5м - 0,5м = 1м$, $\Delta t = 14с - 10с = 4с$

Отже $v_{max} = \frac{1м}{4с} = 0,25$ м/с

в. Час t_0 повинен бути таким, щоб $v_{митт.} = v_{ср.}$, тобто потрібно підібрати такe t_0, щоб дотична в цій точці на графіку виходила з початкового значення s, тобто через початок координат – це як наслідок теореми Лагранжа про середнє значення. Судячи з малюнку, що точка A задовільняє цю умову, тобто $t_0 = 16$ с.

Відповідь: $v_{ср} = 0,1$ м/с, $v_{max} = 0,25$ м/с, $t_0 = 16$ с

Задача 1.8

Умова: радіус вектор точки відносно початку координат змінюється з часом згідно із законом $\vec{r}(t) = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, де α і β – постійні, $\vec{i}$ та $\vec{j}$ орти осей x і y. Знайти:

а) залежність від часу швидкості та прискорення та модулів цих величин;

б) рівняння траєкторії точки $y(x)$

в) залежність від часу кута φ між векторами $\vec{v}$ та $\vec{w}$.

Вирішення:

а. Швидкість $\vec{v}(t)$ та прискорення $\vec{w}(t)$ можна знайти з рівняння $\vec{r}(t)$ придиференціювавши його по t:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j})' = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j}$$

$$\vec{w}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (\alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j})' = 2\beta\vec{j} = const$$

Їх модулі:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\alpha^2 + (2\beta t)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$$

$$|\vec{w}(t)| = \sqrt{0^2 + (2\beta)^2} = \sqrt{(2\beta)^2} = 2|\beta|;$$ модуль, тому що β є постійною, але невідомо, якого знаку

б. Щоб знайти рівняння траєкторії точки $y(x)$, потрібно з рівняння $\vec{r}(t)$ виразити $x(t)$ та $y(t)$, а потім виразити t в $x(t)$:

Так як $\vec{r}(t) = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, то $x(t) = \alpha t$, $y(t) = \beta t^2$.
$x(t) = \alpha t$ або $x = \alpha t \Rightarrow t = \frac{x}{\alpha}$, звідси $y = \beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2$, тобто
$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2}x^2$

в. Щоб знайти кут φ, можна скористатись формулою скалярного добутку векторів $\vec{v}$ та $\vec{w}$: $\cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}$,

звідси $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right)$; Знайдемо $\vec{v}\cdot\vec{w}$:

$\vec{v} = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j}$; $\vec{w} = 2\beta\vec{j} = 0\vec{i} + 2\beta\vec{j}$, звідси $\vec{v}\cdot\vec{w} =$

$= \alpha\cdot 0 + 2\beta t\cdot 2\beta = 4\beta^2 t$; $|\vec{v}| = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$, $|\vec{w}| = 2|\beta|$,

тоді: $\varphi = \arccos\left(\frac{4\beta^2 t}{2|\beta|\cdot\sqrt{\alpha^2+4\beta^2t^2}}\right) = \arccos\left(\frac{2\beta t}{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2t^2}}\right)$, беручи

до уваги знак β.

Відповідь: $\vec{v}(t) = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j}$, $\vec{w}(t) = 2\beta\vec{j}$, $|\vec{v}| = \sqrt{\alpha^2+4\beta^2t^2}$,

$|\vec{w}| = 2|\beta|$, $y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2}x^2$, $\varphi(t) = \arccos\left(\frac{2\beta t}{\sqrt{\alpha^2+4\beta^2t^2}}\right)$

Задача 1.9

Умова: частинка рухається за законом $v = v_0 - bs$

Знайти: $s(t)$, $v(t)$

Вирішення:

Задача зводиться до того, щоб знайти $s(t)$, а потім за допомогою диференціювання знайти $v(t)$. З даної задачі вважатимемо, що v_0 та b — сталі величини, а $s(0) = 0$. Також відомо, що $v = \frac{ds}{dt}$, а значить ми можемо провести заміну: $\frac{ds}{dt} = v_0 - bs$ і звідси виразимо dt: $dt = \frac{ds}{v_0 - bs}$, а потім проінтегруємо обидві частини рівняння, щоб позбутися диференціала:

$$\int dt = \int \frac{ds}{v_0 - bs} = \int \frac{-\frac{d(v_0 - bs)}{b}}{v_0 - bs} = -\frac{1}{b}\int \frac{d(v_0 - bs)}{v_0 - bs} =$$

$= -\frac{1}{b}\ln|v_0 - bs| + C_1$, а $\int dt = t + C_2$; Тобто рівняння еквівалентне: $-\frac{1}{b}\ln|v_0 - bs| + C_1 = t + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{b}\ln|v_0 - bs| = t + C_3$, де $C_3 = C_2 - C_1$; Далі помножу обидві частини на $-b$:

$\ln|v_0 - bs| = -bt + C_4$, де $C_4 = -bC_3$; Позбудусь логарифма: $|v_0 - bs| = e^{-bt + C_4}$; $|v_0 - bs| = e^{-bt}\cdot e^{C_4}$, звідси $e^{C_4} > 0$; також позбудемось модуля: $v_0 - bs = \pm e^{C_4}\cdot e^{-bt}$ і тут застосуємо рівність $s(0) = 0$ $(t = 0)$: $v_0 - b\cdot 0 = \pm e^{C_4}\cdot e^{-b\cdot 0} \Rightarrow v_0 = \pm e^{C_4}$, і тут є 2 випадки: $v_0 < 0$ та $v_0 > 0$, тому будемо розглядати ці випадки окремо.

I; $v_0 > 0 \Rightarrow e^{C_4} = v_0$; тобто $v_0 - bs = v_0 e^{-bt}$, звідси $s = \frac{v_0}{b}(1 - e^{-bt})$, а $v = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{v_0}{b}(1 - e^{-bt})\right)' = \frac{v_0}{b}(1 - e^{-bt})' =$

$= \frac{v_0}{\cancel{b}}\cdot \cancel{-b}\cdot(-e^{-bt}) = v_0 e^{-bt}$

II; $v_0 < 0 \Rightarrow -e^{C_4} = v_0$; тобто $v_0 - bs = -v_0 e^{-bt}$, звідси

$s = \frac{v_0}{6}\left(e^{-6t}+1\right)$, а $v = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{v_0}{6}\left(e^{-6t}+1\right)\right)' = \frac{v_0}{6}\cdot\left(e^{-6t}+1\right)' =$

$= \frac{v_0}{\cancel{6}} \cdot -\cancel{6} \cdot e^{-6t} = -v_0 e^{-6t}$

Відповідь: якщо $v_0 > 0$: $s(t) = \frac{v_0}{6}\left(1-e^{-6t}\right)$, $v(t) = v_0 e^{-6t}$

якщо $v_0 < 0$: $s(t) = \frac{v_0}{6}\left(e^{-6t}+1\right)$, $v(t) = -v_0 e^{-6t}$

Задача 1.10

Умова: залежність координати x від часу t дається рівняння $x = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2 м/с$, $B = 3 м/с^2$ і $C = 4 м/с^3$. Знайти:

а) залежність швидкості v і прискорення w від часу;

б) відстань S, яка пройдена тілом, швидкість v і прискорення w тіла через час $t=2 с$ після початку руху.

Розв'язання:

а. Швидкість $\vec{v}(t)$ можна знайти продиференціювавши x по t, а прискорення $\vec{w}(t)$ – продиференціювавши v по t:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt} = (At - Bt^2 + Ct^3)' = A - 2Bt + 3Ct^2$$

$$w(t) = \frac{dv}{dt} = (A - 2Bt + 3Ct^2)' = -2B + 6Ct$$

Або підставивши значення A, B, C:

$$v(t) = 2 - 6t + 12t^2, \quad w(t) = -6 + 24t$$

б. Для початку знайдемо x, при $t=0$: $x(0) = 0$, і при $t=2$ (x_2):

$x(2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 4 - 12 + 32 = 24 м$. Тепер з огляду на те, що тіло може розвернутись, ми маємо знайти такі t, при якому відбудеться "розворот", тобто коли $v(t)=0$: $v(t) = 2 - 6t + 12t^2 = 12t^2 - 6t + 2$. Дискримінант = $(-6)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2 = 36 - 96 = -60 < 0$, тобто рівняння $12t^2 - 6t + 2 = 0$ немає дійсних коренів, тобто розвороту не відбувалось, а значить S просто дорівнює $\Delta x = x_2 - x_1 = 24 - 0 = 24 м$

Тепер знаходимо $v(t)$ та $w(t)$ при $t=2$:

$$v(2) = 2 - 6 \cdot 2 + 12 \cdot 2^2 = 2 - 12 + 48 = 38 \ м/с$$

$$w(2) = -6 + 24 \cdot 2 = -6 + 48 = 42 \ м/с^2$$

Відповідь: $v(t) = 2 - 6t + 12t^2$, $w(t) = -6 + 24t$, $S = 24$ м, $w(2) = 42$ м/с^2, $v(2) = 38$ м/с.