# Домашня Контрольна Робота №2

Виконав: ІО-41 Давидчук Артем

## Завдання №1

1-3:

1) $$y = \log_8\left(\sqrt[3]{x^7} - 4x^6 + \frac{4}{(x-1)^5}\right) = \log_8\left(x^{\frac{7}{3}} - 4x^6 + 4(x-1)^{-5}\right);$$

$$y' = \frac{1}{\left(x^{\frac{7}{3}} - 4x^6 + 4(x-1)^{-5}\right)\ln 8} \cdot \left(x^{\frac{7}{3}} - 4x^6 + 4(x-1)^{-5}\right)' = \frac{\frac{7\sqrt[3]{x^4}}{3} - 24x^5 - \frac{20}{(x-1)^6}}{\left(\sqrt[3]{x^7} - 4x^6 + \frac{4}{(x-1)^5}\right)\ln 8}$$

2) $$y = e^{\arcsin(3x)\cdot ch(2x)} + \cos(\ln 7);$$

$$y' = \left(e^{\arcsin(3x)\cdot ch(2x)}\right)' = e^{\arcsin(3x)\cdot ch(2x)} \cdot \left(\arcsin(3x)\cdot ch(2x)\right)' = e^{\arcsin(3x)\cdot ch(2x)} \cdot \left(2\arcsin(3x)\cdot sh(2x) + \frac{3ch(2x)}{\sqrt{1-9x^2}}\right)$$

3) $$y = \frac{th^3(3x-7)}{\sin x^2}; \quad y' = y\cdot(\ln y)' = y\cdot\left(\ln\frac{th^3(3x-7)}{\sin x^2}\right)'; \quad \cancel{th}$$

$$\left(\ln\frac{th^3(3x-7)}{\sin x^2}\right)' = \ln\left(th^3(3x-7)\right)' - \ln(\sin x^2)';$$

$$\cancel{=} \frac{9}{th(3x-7)\cdot ch^2(3x-7)} = \frac{18}{2\,sh(3x-7)\cdot ch(3x-7)} = \frac{18}{\cancel{2}\,sh(6x-14)}; \quad \ln(\sin x^2)' = 2x\,ctg\,x^2$$

$$y' = \frac{th^3(3x-7)}{\sin x^2}\cdot\left(\frac{18}{sh(6x-14)} - 2x\,ctg\,x^2\right)$$

4-5:

4)

$y = ctg\,x^{arctg\,x}$; Нехай $\alpha = ctg(x)$; $\beta = arctg\,x$, а $\alpha(1)$, $\beta(1)$ відповідно їх константи. Тоді

$$(\alpha^{\beta})' = (\alpha(1)^{\beta})' + (\alpha^{\beta(1)})'$$

$$(\alpha(1)^{\beta})' = \alpha(1)^{\beta} \cdot \ln(\alpha(1)) \cdot \beta' = ctg\,x^{arctg\,x} \cdot \ln ctg\,x \cdot \frac{1}{1+x^2}; \quad (\alpha^{\beta(1)})' = \beta(1) \cdot \alpha^{\beta(1)-1} \cdot \alpha' =$$

$$= -arctg(x) \cdot ctg(x)^{arctg\,x} \cdot \frac{1}{ctg\,x \cdot \sin^2 x}$$

$$y' = ctg\,x^{arctg\,x} \cdot \ln ctg\,x \cdot \frac{1}{1+x^2} - arctg\,x \cdot ctg\,x^{arctg\,x} \cdot \frac{1}{ctg\,x \cdot \sin^2 x} = ctg\,x^{arctg\,x}\left(\frac{\ln ctg\,x}{1+x^2} - \frac{2arctg\,x}{\sin 2x}\right)$$

5) $$y = \frac{\sin^2 x \cdot \sqrt{ctg\,x} \cdot arcctg^3 x}{\sqrt[4]{\arccos^3 x} \cdot \sqrt[7]{cth^6 x} \cdot sh^4 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot ctg^{\frac{1}{2}} x \cdot arcctg^3 x}{\arccos^{\frac{3}{4}} x \cdot cth^{\frac{6}{7}} x \cdot sh^4 x} = y;$$

$$y' = y \cdot (\ln y)' = y \cdot \left(\ln \frac{\sin^2 x \cdot ctg^{\frac{1}{2}} x \cdot arcctg^3 x}{\arccos^{\frac{3}{4}} x \cdot cth^{\frac{6}{7}} x \cdot sh^4 x}\right)' =$$

$$= y \cdot (\ln \sin^2 x' + \ln ctg^{\frac{1}{2}} x' + \ln arcctg^3 x' - \ln \arccos^{\frac{3}{4}} x' - \ln cth^{\frac{6}{7}} x' - \ln sh^4 x') = y \cdot (2 \ln \sin x' + \frac{1}{2} \ln ctg\,x' + 3 \ln arcctg\,x' -$$

$$- \frac{3}{4} \ln \arccos x' - \frac{6}{7} \ln cth\,x' - 4 \ln sh\,x') =$$

$$= y \cdot \left(2 ctg\,x - \frac{1}{2\cos x \sin x} - \frac{3}{(1+x^2)\,arcctg\,x} + \frac{3}{4\sqrt{1-x^2}\,\arccos x} + \frac{6}{7ch\,x \cdot sh\,x} - 4cth\,x\right) =$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot \sqrt{ctg\,x} \cdot arcctg^3 x}{\sqrt[4]{\arccos^3 x} \cdot \sqrt[7]{cth^6 x} \cdot sh^4 x} \cdot \left(2ctg\,x - \csc(2x) - \frac{3}{(1+x^2)\,arcctg\,x} + \frac{3}{4\sqrt{1-x^2}\,\arccos x} + \frac{12}{7} csch(2x) - 4cth(x)\right)$$

6:

$$y = \frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(10x-x^3)\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\frac{x}{2}; \quad y' = \frac{1}{4}\left((10x-x^3)\sqrt{4-x^2}\right)' +$$

$$+ 6\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}\left((10x - \right.}$$

$$= \frac{1}{4}\left((10-3x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{x(10x-x^3)}{\sqrt{4-x^2}}\right) + \frac{6}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4x^4-32x^2+40}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{x^4-8x^2+10}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$$

# Завдання №2

1:

$$y = \frac{5}{x-4}; \quad x_0 = 3$$

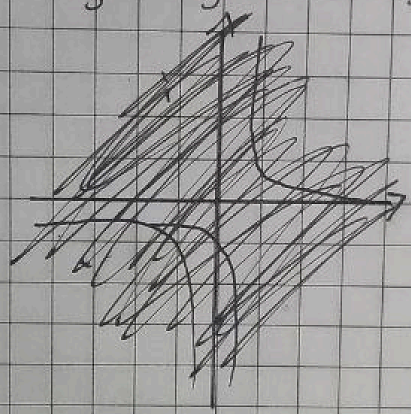
$$y(x_0) = \frac{5}{3-4} = -5$$

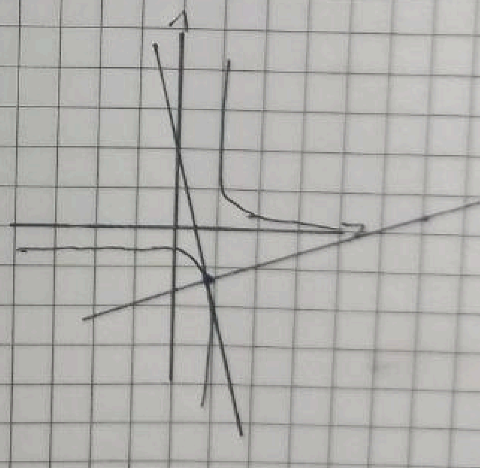
$$y' = -\frac{5}{(x-4)^2}; \quad y'(x_0) = -\frac{5}{(3-4)^2} = -5$$

$$y_{дот} = -5 - 5(x-3) = -5 - 5x + 15 = 10 - 5x$$

$$y_н = -5 - \frac{1}{-5}(x-3) = -5 + \frac{1}{5}(x-3) = -5 + \frac{x}{5} - \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{x}{5} - \frac{28}{5} = \frac{x-28}{5}$$





2:

$$L: \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} ; \quad t_0 = \frac{\pi}{6} ;$$

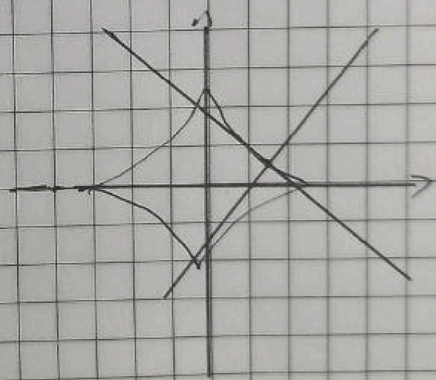
$$y(t_0) = 4\sin^3\frac{\pi}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x(t_0) = 4\cos^3\frac{\pi}{6} = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{4\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$y'_x = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{12\sin^{\cancel{2}} t\cdot\cancel{\cos t}}{-12\cos^2 t\cdot\cancel{\sin t}} = -\operatorname{tg} t;\quad y_x'(t_0) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y_{дот} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} = 2 - \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$y_н = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + x\sqrt{3} - \frac{9}{2} = x\sqrt{3} - 4$$



3:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad ; M_0(\sqrt{3}; \frac{1}{2})$$

$$\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)' = 0$$

$$\left(\frac{1}{4}x^2\right)' + (y^2)' = 0$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x}{2} + 2y \cdot y' = 0$$

$$2y \cdot y' = -\frac{x}{2} \quad | \cdot 2$$

$$4y \cdot y' = -x$$

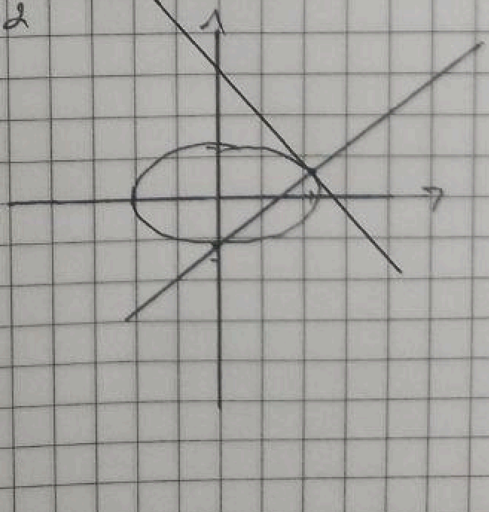
$$y' = -\frac{x}{4y} \; ; \; y'(x_0) = -\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_{дот} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} - x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} =$$

$$= 2 - \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) = \frac{1}{2} + x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - 2 =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}$$



# Завдання №3

$$t:\begin{cases} x=\dfrac{2t}{t^3+1} \\ y=\dfrac{2t^2}{t^3+1}\end{cases};\quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t};\quad y'_t=\left(\frac{2t^2}{t^3+1}\right)'=2\cdot\left(\frac{t^2}{t^3+1}\right)'=2\cdot\frac{-t^4+2t}{(t^3+1)^2}$$

$$x'_t=\left(\frac{2t}{t^3+1}\right)'=2\cdot\left(\frac{t}{t^3+1}\right)'=2\cdot\frac{-2t^3+1}{(t^3+1)^2}$$

$$y'_x=\frac{\cancel{2}\cdot\dfrac{-t^4+2t}{\cancel{(t^3+1)^2}}}{\cancel{2}\cdot\dfrac{-2t^3+1}{\cancel{(t^3+1)^2}}}=\frac{-t^4+2t}{-2t^3+1};\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'}{x'_t};\quad (y'_x)'=$$

$$=\left(\frac{-t^4+2t}{-2t^3+1}\right)'=\frac{(-4t^3+2)(-2t^3+1)+6t^2(-t^4+2t)}{(-2t^3+1)^2}=$$

$$=\frac{8t^6-8t^3+2-6t^6+12t^3}{(-2t^3+1)^2}=\frac{2t^6+4t^3+2}{(-2t^3+1)^2};$$

$$y''_{xx}=\frac{\cancel{2}t^6+\overset{2}{\cancel{4}}t^3+\cancel{2}}{(-2t^3+1)^2}\cdot\frac{(t^3+1)^2}{\cancel{2}\cdot(-2t^3+1)}=\frac{t^6+2t^3+1}{(-2t^3+1)^2}\cdot\frac{(t^3+1)^2}{(-2t^3+1)}=$$

$$=\frac{(t^3+1)^4}{(-2t^3+1)^3}$$

$$y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'}{x'_t};\quad (y''_{xx})'=\left(\frac{(t^3+1)^4}{(-2t^3+1)^3}\right)'=$$

$$=\frac{12t^2(t^3+1)^3\cdot(-2t^3+1)^3+18t^2\cdot(-2t^3+1)^2\cdot(t^3+1)^4}{(-2t^3+1)^6}=$$

$$=\frac{(t^3+1)^3\,\cancel{(-2t^3+1)^2}\cdot(12t^2\cdot(-2t^3+1)+18t^2(t^3+1))}{(-2t^3+1)^{\cancel{6}\,4}}=$$

$$=\frac{(t^3+1)^3\cdot(-6t^2(t^3-5))}{(-2t^3+1)^4};$$

$$y'''_{xxx}=\frac{(t^3+1)^3\cdot(-\overset{3}{\cancel{6}}t^2(t^3-5))}{(-2t^3+1)^4}\cdot\frac{(t^3+1)^2}{\cancel{2}\cdot(-2t^3+1)}=$$

$$=\frac{(t^3+1)^5\cdot(-3t^2(t^3-4))}{(-2t^3+1)^5}=-3t^2(t^3-5)\cdot\left(\frac{t^3+1}{-2t^3+1}\right)^5$$

Завдання №4

$$y = (x-1)^2 \cdot \ln(x-1); \quad y^{(25)} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^{k} \cdot (x-1)^{2\,(n-k)} \cdot \ln(x-1)^{(k)}$$

Тепер я знайду закономірність значень похідних функції $(x-1)^2 \cdot \ln(x-1)$ відносно $n$;

$$((x-1)^2)' = 2(x-1)$$

$$((x-1)^2)'' = (2(x-1))' = 2$$

$$((x-1)^2)''' = 2' = 0$$

$$((x-1)^2)^{IV} = 0' = 0$$

$$\vdots$$

$$(x-1^2)^{(n)} = 0$$

Тобто сенс матиме лише коли похідна у нас при $(x-1)^2$ менша дорівнює 2; тобто

$25 - k \le 2$

$-k \le 2 - 25$

$-k \le -23$

$k \ge 23$; і тоді як $n \ge k$, то $n \ge k \ge 23$ : $25 \ge k \ge 23$, тобто

буду брати $k$ з проміжку $[23; 25]$;

$$\ln(x-1)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}$$

$$y^{(25)} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^{k} \cdot (x-1)^{2\,(n-k)} \cdot \ln(x-1)^{(k)} = \sum_{k=23}^{25} C_{25}^{k} \cdot (x-1)^{2\,(n-k)} \cdot \ln(x-1)^{(k)} =$$

$$= C_{25}^{23} \cdot ((x-1)^2)'' \cdot \ln(x-1)^{(23)} + C_{25}^{24} \cdot ((x-1)^2)' \cdot \ln(x-1)^{(24)} + C_{25}^{25} \cdot (x-1)^2 \cdot \ln(x-1)^{(25)} = 300 \cdot \cancel{2(x-1)}\, 2 \cdot \frac{(-1)^{22} \cdot 22!}{(x-1)^{23}} +$$

$$+ 25 \cdot 2(x-1) \cdot \frac{(-1)^{23} \cdot 23!}{(x-1)^{24}} + 1 \cdot (x-1)^2 \cdot \frac{(-1)^{24} \cdot 24!}{(x-1)^{25}} =$$

$$= \frac{600 \cdot 22!}{(x-1)^{23}} - \frac{50\cancel{(x-1)} \cdot 23!}{(x-1)^{23}} + \frac{\cancel{(x-1)^2} \cdot 24!}{(x-1)^{23}} =$$

$$= \frac{600 \cdot 22! - 50 \cdot 23! + 24!}{(x-1)^{23}} = \frac{22!\,(600 - 50 \cdot 23 + 23 \cdot 24)}{(x-1)^{23}} =$$

$$= \frac{22! \cdot 2}{(x-1)^{23}} = 2 \cdot \frac{22!}{(x-1)^{23}}$$

Завдання №5

$$y = 5\cdot(x-4)^{-1}$$

1) $$y' = \left(\frac{5}{x-4}\right)' = 5\cdot\left((x-4)^{-1}\right)' = -5\cdot(x-4)^{-2} =$$

$$= -\frac{5}{(x-4)^2}; \quad dy = -\frac{5}{(x-4)^2}\,dx$$

$$y'' = -5\cdot\left((x-4)^{-2}\right)' = -5\cdot(-2)\cdot(x-4)^{-3} = \frac{10}{(x-4)^3};$$

$$d^2y = \frac{10}{(x-4)^3}\,dx^2$$

$$y''' = 10\cdot\left((x-4)^{-3}\right)' = -\frac{30}{(x-4)^4}; \quad d^3y = -\frac{30}{(x-4)^4}\,dx^3$$

$$y^{(n)} = 5\cdot\left(\frac{1}{x-4}\right)^{(n)}; \quad \left(\frac{1}{x-4}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-4)^{n+1}};$$

$$y^{(n)} = \frac{5\cdot(-1)^n\cdot n!}{(x-4)^{n+1}}; \quad d^ny = \frac{5\cdot(-1)^n\cdot n!}{(x-4)^{n+1}}\,dx^n$$

2) $d^3 f(x_0)$, $x_0 = 3$;

$$d^3y = -\frac{30}{(x-4)^4}\,dx^3; \quad d^3y(x_0) = \frac{-30}{(3-4)^4}\,dx^3 = -30\,dx^3$$

або $$d^3y \approx y'''(x_0)(x-x_0) = -30(x-3) = 90-30x$$

# Завдання №6

1:

1) $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arctg} x^{\operatorname{tg} x} = 0^0$

$\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arctg} x^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x}$

$\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x = 0 \cdot \infty$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$;

$\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\infty}{\infty}$;

Перевірка на застосування правила Бернуллі-Лопіталя; $(\operatorname{ctg} x)' \neq 0$ в проколотому околі $x_0 = 0$; $\lim\limits_{x \to +0} \ln \operatorname{arctg} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{ctg} x = \infty$, тоді

$\lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{arctg} x'}{\operatorname{ctg} x'} =$

$= -\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin^2 x}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$; Знову можна застосувати:

$= -\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin 2x}{2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1} = -\frac{0}{1} = 0.$

$e^0 = 1$; $\lim\limits_{x \to +0} \operatorname{arctg} x^{\operatorname{ctg} x} = 1$

2:

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{tg^2 x}$ $\qquad x_0=0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$(tg^2 x)' = 2tg\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2tg\,x}{\cos^2 x}$$

$$(tg^2 x)'' = \frac{2-\sin 2x}{\cos^4 x}$$

$$f(x_0) = tg^2(0) = 0 \qquad k=2$$

$$f'(x_0) = \frac{2tg(0)}{\cos^2(0)} = 0$$

$$f''(x_0) = \frac{2-\sin 2\cdot 0}{\cos^4 0} = 2;$$

Розклад $tg^2(x) = 0 + \dfrac{0}{1!}\cdot x + \dfrac{2}{2!}(x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$

$$\frac{\ln(1+x)-x}{tg^2 x} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x}}{x^2+o(x^2)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}x^2}{2x^2} = -\frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

Завдання №7

$$\tilde{P}_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x) = \tilde{P}_n(x) + r_n(x)$$

$r_n(x)$ за Лагранжем: $r_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$$\tilde{P}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f(x) = \tilde{P}_1 + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$$

$$\tilde{P}_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 = \tilde{P}_1(x) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$f(x) = \tilde{P}_2(x) + \frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)^3$; $f(x) = \frac{5}{x-4}$; $x_0 = 3$

$f'(x) = -\frac{5}{(x-4)^2}$; $f''(x) = \frac{10}{(x-4)^3}$; $f'''(x) = -\frac{30}{(x-4)^4}$

$f(x_0) = -5$; $f'(x_0) = -5$; $f''(x_0) = -10$; $f'''(c) = -\frac{30}{(c-4)^4}$;

$\tilde{P}_1(x) = -5 - 5(x-3) = -5 - 5x + 15 = 10 - 5x$;

$$f(x) = 10 - 5x + \frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{2}(c-4)^3}(x-3)^2 = 10 - 5x + \frac{5}{(c-4)^3}(x-3)^2$$

$$\tilde{P}_2(x) = 10 - 5x - \frac{10}{2}(x-3)^2 = 10 - 5x - 5(x-3)^2 =$$

$$= 10 - 5x - 5(x^2 - 6x + 9) = -5x^2 + 25x - 35$$

$$f(x) = \tilde{P}_2(x) + \frac{f'''(c)}{3!}(x-3)^3 = -5x^2 + 25x - 35 - \frac{\cancel{30}\,5}{(c-4)^4 \cdot \cancel{3!}}(x-3)^3 =$$

$$= -5x^2 + 25x - 35 - \frac{5}{(c-4)^4}(x-3)^3$$

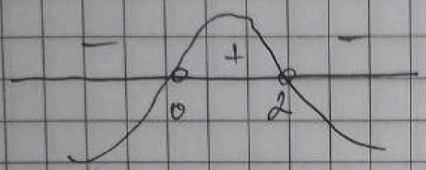
де $c \in (x_0; x)$, якщо $x > x_0$, або $c \in (x; x_0)$, якщо $x < x_0$

# Завдання №8

1:

$f(x) = 3x^2 - 2 - x^3$ ; $D_f = R$

$f'(x) = 6x - 3x^2$; $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$ або $x_2 = 2$




; Проміжки монотонності

Зростає: $(0;2)$

Спадає: $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Локальний min:

$x_{min} = 0$; $y_{min} = -2$

Локальний max:

$x_{max} = 2$; $y_{max} = 2$

Так як $f(x)$ визначена на ~~проміжку~~ (інтервалі) $(-\infty;+\infty)$, то підставлю крайні межі (яких тут і не існує) у вираз.

З виразу $3x^2 - 2 - x^3$ видно, що "швидше" змінюється $x^3$, тобто він має головну "силу" цього виразу, а тому при $x \to \infty$ ми можемо знехтувати іншими доданками цього рівняння:

$3x^2 - 2 - x^3 \approx -x^3$ при $x \to \infty$;

$-\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = -\infty$; $-\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$, тобто

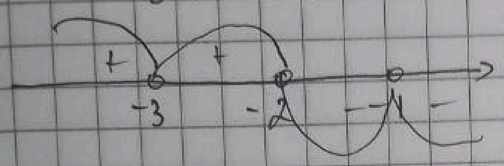
глобальний max, глобальний min не видно.

2:

$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2+4x+3}$, $D_f = R$

$f'(x) = -\left((x^2+4x+3)^{\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}(x^2+4x+3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+4) =$

$= -\dfrac{2x+4}{3\sqrt[3]{x^2+4x+3}}$; $x = -2$, $x \neq -3$, $x \neq -1$




Проміжки монотонності:

Зростає $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$

Спадає $(-2; -1) \cup (-1; +\infty)$

local min: не існ.

local max:

$x_{max} = -2$, $y_{max} = 2$

Тепер розглянемо границі інтервалу на якому $f(x)$ визначена: $(-\infty; +\infty)$. Тоді у виразі $1 - \sqrt[3]{x^2-4x+3}$ при $x \to \infty$ можна спростити:

$1 - \sqrt[3]{x^2-4x+3} \approx 1 - \sqrt[3]{x^2}$ при $x \to \infty$; Тоді

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - \infty = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - \infty = -\infty$

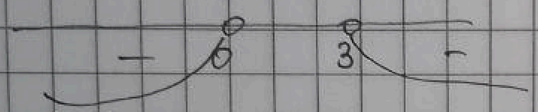
Звідси можна зробити висновок, що local max являється і global max

3:

$f(x) = 3\ln\frac{x}{x-3} - 1$; $\frac{x}{x-3} > 0$; $D_f = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$f'(x) = 3\cdot\left(\ln\frac{x}{x-3}\right)' = 3\cdot\frac{x-3}{3}\cdot\left(\frac{x}{x-3}\right)' = -\frac{9}{x(x-3)}$

$x \neq 3$, $x \neq 0$, але вони не входять в $D_f$, а тому вони не можуть бути т. екстремуму




Монотонність $f(x)$:

Спадає: $D_f$

Зростає: $\varnothing$

local min, local max не існує.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3\ln\frac{x}{x-3} - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3\ln\frac{1}{1-\frac{3}{x}} - 1 = 3\ln 1 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3\ln\frac{1}{1-\frac{3}{x}} - 1 = 3\ln 1 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0-} 3\ln\frac{x}{x-3} - 1 = 3\ln\frac{-0{,}0001}{-3{,}0001} - 1 = 3\ln 0{,}00001 - 1 =$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3+} 3\ln\frac{x}{x-3} - 1 = 3\ln\frac{3{,}0001}{0{,}0001} - 1 \to +\infty$

Тобто і global min та global max не існує.

Завдання №9

$y = -(2x+3)\cdot e^{2x+4} = -e^4\cdot(2x+3)\cdot e^{2x}$; $x \in R$

$y' = -e^4\cdot\left((2x+3)\cdot e^{2x}\right)' =$

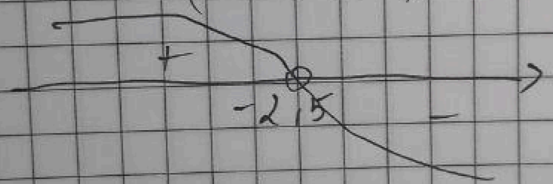
$= -e^4\cdot\left(2\cdot e^{2x} + e^{2x}\cdot 2(2x+3)\right) = -e^4\cdot 2\cdot e^{2x}(1+2x+3) =$

$= -2\cdot e^4\cdot e^{2x}\cdot(2x+4)$, $x \in R$

$y'' = -2\cdot e^4\cdot\left(e^{2x}\cdot(2x+4)\right)' = -2\cdot e^4\cdot 2\cdot e^{2x}\cdot(2x+5) =$

$= -4\cdot e^{2x+4}\cdot(2x+5)$ $x \in R$

$-4\cdot e^{2x+4}\cdot(2x+5) = 0$; $2x+5=0$; $x = -2{,}5$




$(-\infty; -2{,}5)$ — опуклість донизу

$(-2{,}5; +\infty)$ — опуклість доверху

$-2{,}5$ — т. перегину

Завдання №10

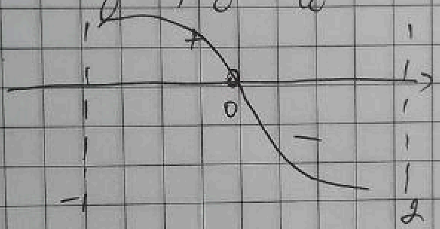
$y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$ на відрізку $[-1;2]$

$y(-1) = 3 - (-1) - \dfrac{4}{(-1+2)^2} = 4 - 4 = 0$

$y(2) = 3 - 2 - \dfrac{4}{(2+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$y' = \left(3 - x - 4(x+2)^{-2}\right)' = -1 + \dfrac{8}{(x+2)^3}$

$x \neq -2$, $x = 0$, але $x = -2$ не входить в заданий проміжок, тому розглядуємо тільки $x = 0$




$y(0) = 3 - \dfrac{4}{4} = 2$

local min:

$x_{min} = -1$; $y_{min} = 0$

local max:

$x_{max} = 0$; $y_{max} = 2$

# Завдання №11

$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}; \quad x \neq 1$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{(1,0001)^2}{\text{нм}} = \text{нб} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{(0,9999)^2}{\text{нм}} = +\infty$$, а значить

Вертикальна асимптота: $x = 1$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2 x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^3 - 2x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0; \quad k = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1; \quad y = b = 1;$$

Горизонтальна асимптота:

$$y = 1$$

Завдання №12

1:

1)

$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ; 1. $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ; $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x-1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ ;

$f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$

Ні парна, ні непарна, не періодична

3. $x \neq 1$ ; $\lim\limits_{x\to 1+} y = \lim\limits_{x \to 1-} y = +\infty$ ; $x = 1$ – т. II роду нескінченного розриву;

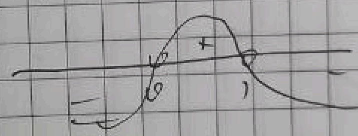
Вертикальна асимптота: $x = 1$;

Горизонтальна асимптота: $y = 1$ (з попередніх прикладів)

4. $y' = \left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right)' = 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)' =$

$= -\frac{2x}{(x-1)^3}$ ; $x = 0$ ; $x \neq 1$ – не в $D_f$

Зростає: $(0; 1)$



Спадає: $(-\infty; 0) \cup$

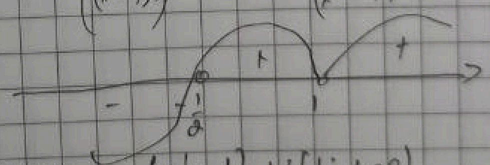
$\cup (1; +\infty)$

Локал min:

$x_{min} = 0$ ; $y_{min} = 0$ ;

Локал max: $\nexists$

5. $y'' = -2 \left(\frac{x}{(x-1)^3}\right)' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$ ; $x = -\frac{1}{2}$ ; $x = 1$



Перегин донизу: $(-\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$

Перегин доверху: $(-\infty; -\frac{1}{2})$ ; т. перегину: $x = -\frac{1}{2}$

6. $0 = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ; $x = 0$ ; $y = \frac{0}{(0-1)^2} = 0$ ; $A(0;0)$ –

– т. перетину з осями Ox та Oy, тобто поч. координат

2:

$y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$; 1. $x \in R$

2. $f(-x) = -(-2x+3)e^{-2x+4}$; $-f(x) = (2x+3)e^{2x+4}$

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$;

Ні парна, ні непарна, не періодична

3. Точок розриву не спостерігається

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-(2x+3)e^{2(x+2)}}{x} = -\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) \cdot e^{2(x+2)} = -\infty$

$-\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) \cdot e^{2(x+2)} = 0$; $k = 0$

$b = -\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+3) \cdot e^{2(x+2)} = -\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+3}{e^{-2(x+2)}} = \frac{\infty}{\infty}$ +

+ можна використати правило Бернуллі-Лопіталя

$b = -\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(2x+3)'}{(e^{-2(x+2)})'} = -\lim \frac{2}{-2 \cdot e^{-2(x+2)}} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-2(x+2)}} = 0$; $k = 0$; $b = 0$; $y = 0$

Горизонтальна асимптота: $y = 0$

4. $y' = -4 \cdot e^{2(x+2)} \cdot (x+2)$; $x = -2$

Зростає:
$(-\infty; -2)$


Спадає:
$(-2; +\infty)$; local max: $x_{max} = -2$, $y_{max} = 1$

local min: $\nexists$

5. $y'' = -4 \cdot e^{2(x+2)} \cdot (2x+5)$, $x = -2,5$


Опукла донизу:
$(-\infty; -2,5)$

Т. перегину: $x = -2,5$

Опукла доверху:
$(-2,5; +\infty)$

6. $0 = -(2x+3) \cdot e^{2(x+2)}$; $(2x+3) = 0$; $x = -1,5$

$y = -(2 \cdot 0 + 3) \cdot e^{2(0+2)} = -3 \cdot e^4$; $A(-1,5; 0)$ – з $Ox$,

$B(0; -3 \cdot e^4)$ – з $Oy$

3_1:

$y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$; $\sin x - \cos x \neq 0$; $\sin x \neq \cos x$; тому:

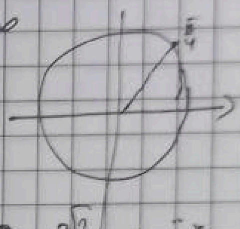
1. $D_f = \{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$; $f(-x) = \frac{1}{\sin(-x) - \cos(-x)} = -\frac{1}{\sin(x) + \cos(x)}$

$f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$; Ні парна, ні непарна, періодична з $T = 2\pi$

3. Розриви $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1}{\sin x - \cos x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}+} \frac{1}{\sin x - \cos x} = +\infty$




якщо $x \to \frac{\pi}{4}-$, то $x$ трохи менший за $\frac{\pi}{4}$, а це значить, що $\sin x$ буде трохи менший за $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos x$ трохи більший за $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а їх різниця буде $-$ми; $\frac{1}{-\text{ми}} = -\infty$; При $x \to \frac{\pi}{4}+$ ситуація протилежна: $\sin x$ більший, $\cos x$ менший, а їх різниця $+$ми; $\frac{1}{+\text{ми}} = +\infty$; А це значить, що точки $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ є т. II роду нескінченного розриву, а значить

Вертикальні асимптоти: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(\sin x - \cos x)\, x} = \frac{1}{c \cdot \infty}$ — не існує, бо $c$ — число не відоме і є рядом $[0; \infty]$, тому:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sin x - \cos x} = \frac{0}{c} = 0.$

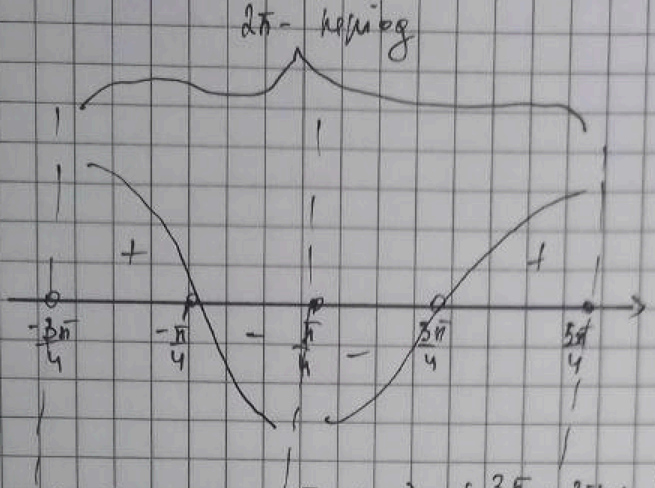
$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sin x - \cos x} = \frac{1}{c}$ — не існує, бо $c$ — число не відоме, а значить похилих асимптот (і горизонтальних) не існує

4. $y' = -\frac{\cos x + \sin x}{(\sin x - \cos x)^2}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\cos x = -\sin x$

для точок $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, то $x$ має бути від'ємним, тобто $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо проміжок в один період $2\pi$:

3_2:




Зростає: $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n \in Z$

Спадає: $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right), n \in Z$

або $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}+2\pi n\right\}, n \in Z$

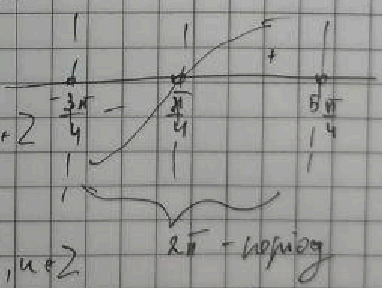
Local min: $x_{min} = \frac{3\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$

$y_{min} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Local max: $x_{max} = -\frac{\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$

$y_{max} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{-\sqrt{2}} \mid \cdot\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $y'' = \frac{3+\sin 2x}{(\sin x-\cos x)^3}$; $x \neq \frac{\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$




Опукла доверху:

$\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right), n \in Z$

Опукла донизу:

$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n \in Z$

Точки перегину $x = \frac{\pi}{4}+2\pi n$ не входить в $D_f$, але умовно її можна вважати такою

6. $0 = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ – не існує; $y = \frac{1}{\sin 0 - \cos 0} = -1$

$A(0; -1)$ – перетин з $Oy$.

Графіки трьох функцій: