Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра загальної фізики

Лабораторна робота №2/1

«Вивчення законів динаміки обертального руху за допомогою маятника обербека»

Виконав: студент 1 курсу
ФІОТ, гр. ІО-41
Давидчук А. М.
Залікова книжка № 4106

Перевірив
Колган В.В.

Київ-2025

Тема: «Вивчення законів динаміки обертального руху за допомогою маятника обербека».

Мета: Експериментально перевірити основне рівняння обертального руху твердого тіла (зв'язок між моментом сили та прискоренням обертання). Визначити момент інерції системи «маятник Обербека» у різних конфігураціях розташування вантажів.

Прилади та устаткування: Маятник Обербека, набір тягарців, електронний секундомір, штангенциркуль, масштабна лінійка.

Теоретичні відомості:

Маятник Обербека, призначений для дослідження законів обертального руху, являє собою циліндричну муфту, у яку вгвинчено під прямим кутом один до одного чотири жорсткі стрижні. По цих стрижнях можна переміщувати та закріплювати у потрібному положенні чотири вантажі однакової маси m_0, що дозволяє змінювати момент інерції системи. На муфту насаджено два шківи (4) різних радіусів r_1 та r_2, на один з яких намотана тонка нитка з закріпленим на кінці тягарцем (1) маси m. В разі руху тягарця m нитка розмотується, а маятник Обербека прискорено обертається (рис.2.1).

Поступальний рух тягарця m можна описати за допомогою другого закону Ньютона, який у проекції на вертикальну вісь можна записати у вигляді

$$mg - T = ma \tag{2.1}$$

де T – сила натягу нитки.

Обертальний рух маятника Обербека можна описати за допомогою основного рівняння динаміки обертального руху, яке у проекції на горизонтальну вісь, що збігається з віссю блока, можна записати у вигляді

$$Tr - M = I(a/r) \tag{2.2}$$

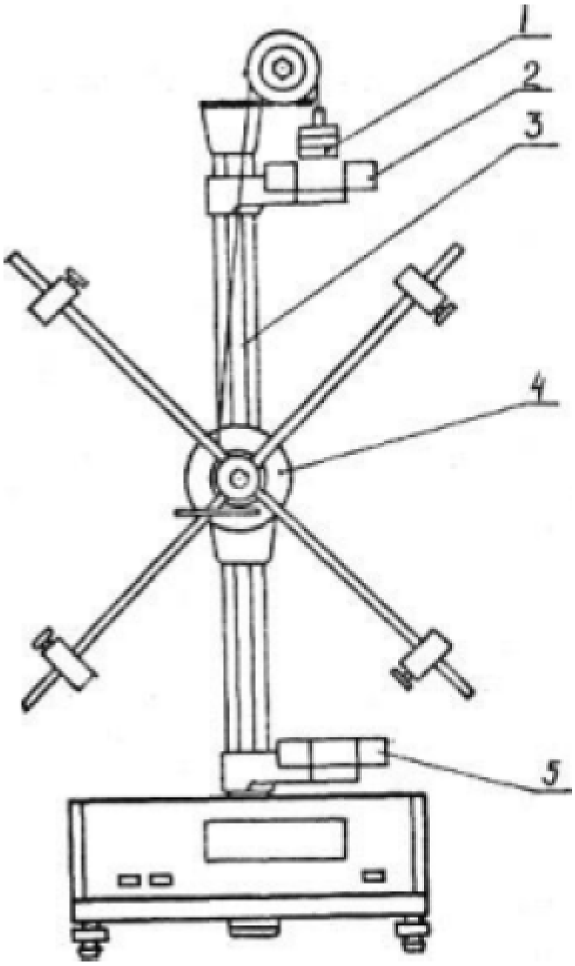
де I – момент інерції маятника Обербека; Mr – момент сили тертя, r – радіус шківа.

З рівнянь (2.1) та (2.2) отримаємо прискорення a тягарця m

$$a = \frac{r(mgr - M)}{I + mr^2} \tag{2.3}$$

Формулу (2.3) можна спростити у тому випадку, коли маса тягарця m значено менше від маси маятника. За цієї умови маємо:

$$a = \frac{r(mgr - M)}{I} \tag{2.4}$$



(Маятник Обербека, рисунок)

З виразів (2.3) та (2.4) випливає, що за столого моменту сил тертя M_T, рух тягарця відбувається рівноприскорено і, отже, прискорення a його руху може бути експериментальноо визначене при вимірах часу t, за який тягарець проходить відстань h:

$$a = \frac{2h}{t^2} \tag{2.5}$$

Час руху тягарця у даній роботі вимірюється електронним секундоміром, який приводиться у дію під час проходження тягарцем оптичної осі верхнього фотодатчика (2), закріпленого біля початкового положення тягарця на спеціальному кронштейні. Відлік часу припиняється у разі проходження тягарцем оптичної осі нижнього фотодатчика (5). Висота падіння тягарця визначається за шкалою, Рис.2.1 нанесеною на стояк (3) експериментальної установки, за різницею положень оптичних осей верхнього та нижнього фотодатчиків.

<u>Порядок роботи (початок практичної частини):</u>

1. **Підготовка маятника:** Встановив чотири вантажі однакової маси на стрижнях маятника, щоб він був у рівновазі.
2. **Намотування нитки:** Обернув маятник проти годинникової стрілки й намотав нитку на шків із меншим радіусом r_1. Підняв тягарець у верхнє положення над верхнім фотодатчиком.
3. **Увімкнення та вимір h:** Увімкнув установку («Сеть») і виміряв відстань h між верхнім і нижнім фотодатчиком.
4. **Вимірювання часу:** Скинув покази секундоміра («Сброс»), натиснув «Пуск» і зафіксував час t падіння тягарця між фотодатчиками.
5. **Збір даних для різних мас:** Повторив п.4 із різними масами m, записав t, r_1, m і h.
6. **Перехід на інший шків:** Поміняв шків на більший радіус r_2 і аналогічно провів серію вимірів часу t.
7. **Завершення досліду:** Вимкнув установку, обчислив прискорення $a = \frac{2h}{t^2}$, кутове прискорення $\beta = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2}$ і момент сили $M = m(g - a)r$.
8. **Обробка результатів:** Побудував графік $M(\beta)$ для обох r.
9. **Оцінка результатів:** Оцінив похибку результатів вимірювань (за вказівкою викладача).

Таблиці:

<table>
<tr><td colspan="6">Менший момент інерції маятника</td></tr>
<tr><td colspan="6">r_1=0,021 м</td></tr>
<tr><td>h, мм</td><td>m, кг</td><td>t, с</td><td>$< t >$, с</td><td>β, $1/c^2$</td><td>M, Н · м</td></tr>
<tr><td rowspan="9">400</td><td rowspan="3">0,0538</td><td>3,60</td><td rowspan="3">3,59</td><td rowspan="3">2,96</td><td rowspan="3">0,010</td></tr>
<tr><td>3,63</td></tr>
<tr><td>3,53</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,0959</td><td>2,37</td><td rowspan="3">2,40</td><td rowspan="3">6,56</td><td rowspan="3">0,018</td></tr>
<tr><td>2,39</td></tr>
<tr><td>2,45</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,1349</td><td>1,98</td><td rowspan="3">1,97</td><td rowspan="3">9,77</td><td rowspan="3">0,025</td></tr>
<tr><td>1,95</td></tr>
<tr><td>1,97</td></tr>
</table>

Більший момент інерції маятника					
r_2=0,021 *м*					
h, м	m, кг	t, с	$< t >$, с	β, $1/c^2$	M, Н · м
0,4	0,0538	7,36	7,38	0,70	0,010
		7,41			
		7,37			
	0,0959	4,23	4,16	2,19	0,018
		4,14			
		4,11			
	0,1349	3,26	3,3	3,53	0,025
		3,32			
		3,31			

Менший момент інерції маятника					
r_1=0,042 *м*					
h, м	m, кг	t, с	$< t >$, с	β, $1/c^2$	M, Н · м
0,4	0,0538	1,58	1,6	7,49	0,020
		1,60			
		1,61			
	0,0959	1,18	1,16	13,80	0,036
		1,14			
		1,17			
	0,1349	0,98	0,97	20,24	0,051
		0,97			
		0,96			

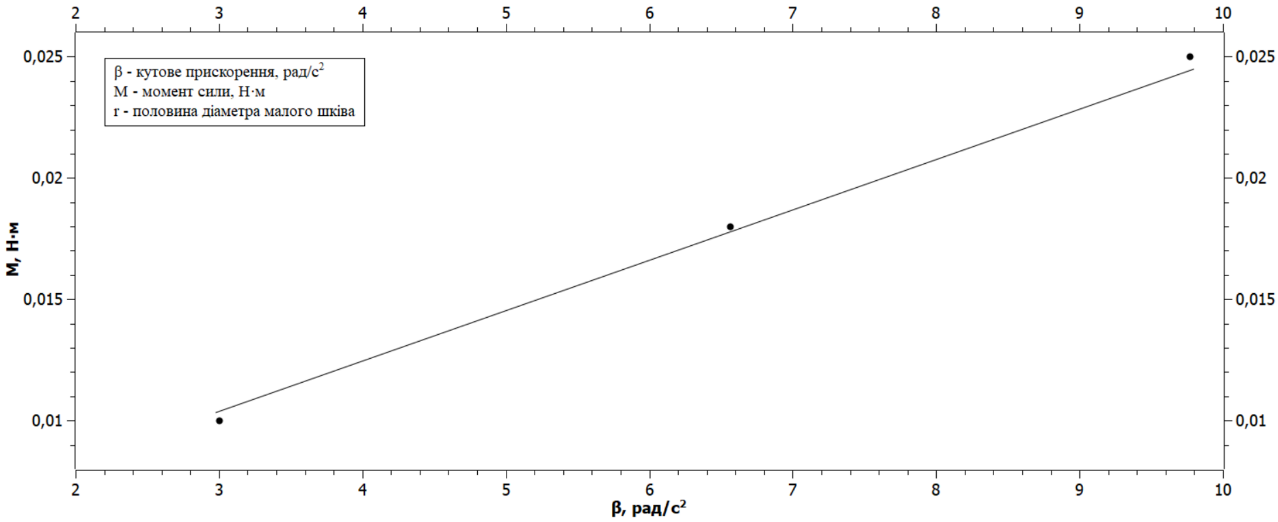
Більший момент інерції маятника					
r_2=0,042 *м*					
h, м	m, кг	t, с	$< t >$, с	$\beta,\ 1/c^2$	M, Н · м
0,4	0,0538	2.76	2,73	2,52	0,020
		2,68			
		2,74			
	0,0959	1,88	1,86	5,42	0,036
		1,84			
		1,87			
	0,1349	1,50	1,52	8,35	0,051
		1,53			
		1,52			

Розрахунки виконував за допомогою Python скрипта:

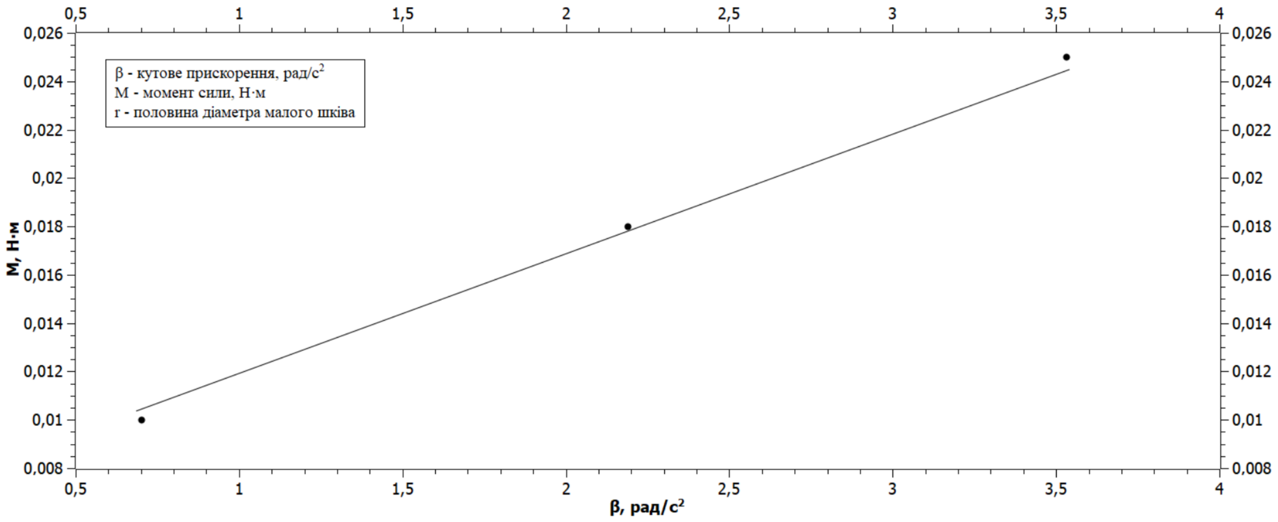
```
H = 0.4 # висота h в метрах
G = 9.81 # прискорення вільного падіння

while True:

    """Ввід даних:"""
    mass = float(input("маса m: ")) # маса в кг
    r = float(input("радіус r: ")) # радіус в метрах
     t_data = [float(x) for x in (input("виміри t: ").split(","))] # 3 виміри
t в секундах

    """Розрахунок даних:"""
    t_midd = sum(t_data)/len(t_data) # середнє арифметичне значення t
    beta = 2*H/(r*t_midd**2) # бета -- кутове прискорення
    a = beta*r # a -- прискорення
    m = mass * (G - a) * r # M -- момент сили

    """Вивід результатів:"""
     print(f"<t> = {t_midd:.2f} c, beta = {beta:.2f} рад/с², a = {a:.2f} м/с²,
M = {m:.2f} Н*кг")
```

Обробка результатів (графіки залежностей $M(\beta)$)

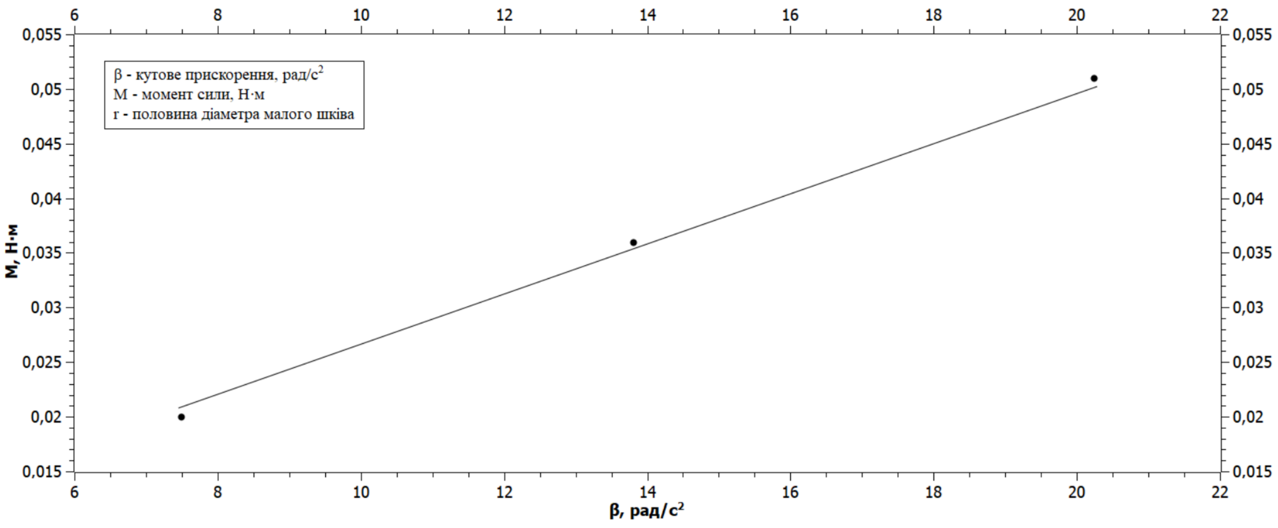
Графік залежності M(β), при меншому моменті інерції маятника, та радіусом r=0,021м

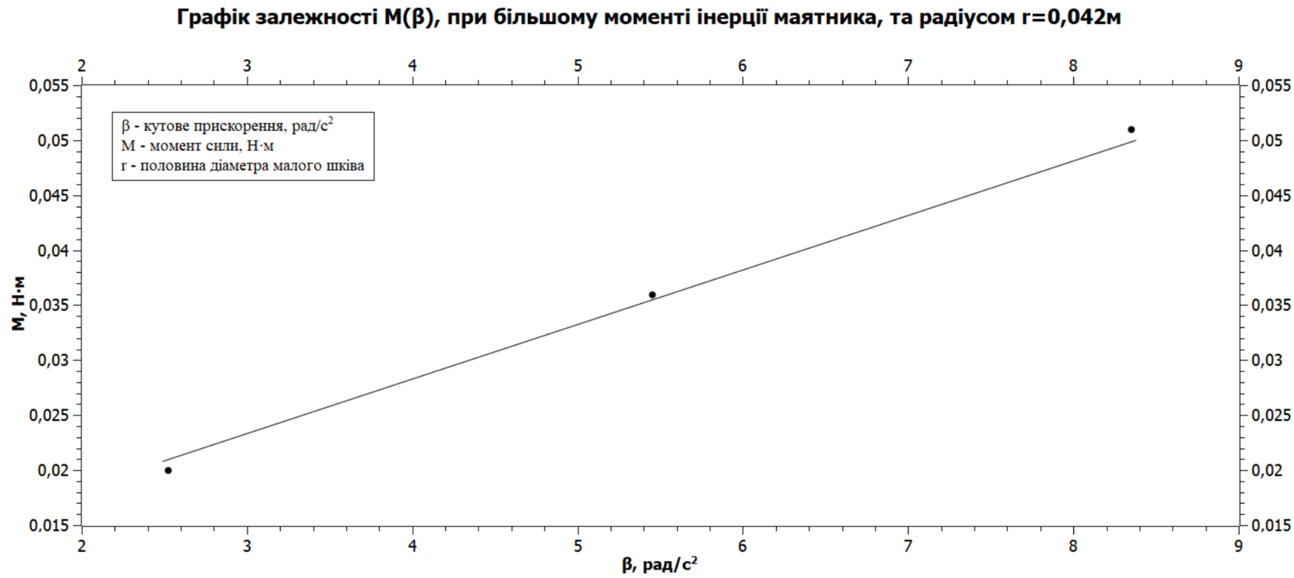


Графік залежності M(β), при більшому моменті інерції маятника, та радіусом r=0,021м



Графік залежності M(β), при меншому моменті інерції маятника, та радіусом r=0,042м





Оцінка результатів

Вимірюватимемо абсолютну та відносні похибки t, β, M:

Через те, що значення t отримувалось прямим виміром (за допомогою мілісекундоміра маятника), то дисперсію похибки ми можемо порахувати за такою формулою:

$$S_{(t)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} (<T> - t_i)^2}{n(n-1)}}$$

Через те, що у нас наборів даних 4 (4 таблиці), а порахувати похибку потрібно для всіх даних, я додатково обчислю $< T >$, яке є середнім арифметичним всіх середніх значень $< t >$.

$S_{(t)} = 0,29$ с та $< T > = 2{,}72$ с

Цей результат я отримав за допомогою Python скрипта:

```
t_middle_array = [



    3.59, 2.4, 1.97,

    7.38, 4.16, 3.3,

    1.6, 1.16, 0.97,

    2.73, 1.86, 1.52

]
```

```
t_array = [

    3.6, 3.63, 3.53, 2.37, 2.39, 2.45, 1.98, 1.95, 1.97,

    7.36, 7.41, 7.37, 4.23, 4.14, 4.11, 3.26, 3.32, 3.31,

    1.58, 1.6, 1.61, 1.18, 1.14, 1.17, 0.98, 0.97, 0.96,

    2.76, 2.68, 2.74, 1.88, 1.84, 1.87, 1.5, 1.53, 1.52

]

k = 12 # кількість tсер в t_middle_array

n = 36 # кількість t в t_array

T_middle = sum(t_middle_array)/k # середнє значення t_middle_array

print(f"T_middle: {T_middle:.2f}")

sum = 0

"""Обчислення дисперсії"""

for i in range(n): sum += (T_middle - t_array[i])**2

sum = (sum/(n*(n-1)))**(0.5)

print(f"result: {sum:.2f}")
```

```
PS C:\Users\artem\OneDrive\Desktop> py absolute_problem1.py
T_middle: 2.72
result: 0.29
```

Але щоб знайти абсолютну похибку, потрібно отриманий результат дисперсії помножити на коефіцієнт Стьюдента, який в даній лабораторній при $n = 36$ вимірювань та $\alpha = 0,9$ дорівнює $t_{\alpha, n} = 1,3$:

$\epsilon_t = 1,3 \cdot 0,29 = 0,377$ с

Тоді відносна похибка, буде дорівнювати:

$\varepsilon_t = \frac{\epsilon_t}{<T>} \cdot 100\% = \frac{0,377\ \text{с}}{2,72\ \text{с}} \cdot 100\% = 13,86\ \%$

Для β та M формула абсолютної та відносної похибок буде інша, адже ці значення були отримані за допомогою непрямих вимірів. Так як єдине значення, яке у нас змінюється, це t, а g, h, r – константи, то ми можемо спростити загальну формулу для розрахунку абсолютної похибки непрямих вимірювань, коли лише один літерал у формулі є змінною, а інші – константами:

$$S_y = |\frac{df}{dt}|S_t$$

Абсолютна похибка для β:

$\beta = \frac{2h}{rt^2}$, звідси $\frac{d}{dt}(\frac{2h}{rt^2}) =- \frac{4h}{rt^3}$

Тоді $S_\beta = | - \frac{4h}{rt^3}|S_t = \frac{4h}{r<t>^3}S_t$, де $< t >$ = 2,72 с, S_t = 0,29 с, а за r ми маємо покласти середнє арифметичне з двох значень: $r_1 = 0,021$ м, $r_2 = 0,042$ м, тобто $r = \frac{0,021 \text{ м} + 0,042 \text{ м}}{2} = 0,0315$ м; тоді $S_\beta \approx 0,73\ 1/c^2$. Розрахунки:

```
Python 3.13.0 (tags/v3.13.0:60403a5, Oct  7 2024, 09:38:07) [MSC v.1941 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> h = 0.4
>>> r = 0.0315
>>> t = 2.72
>>> St = 0.29
>>> Sb = 4*h*St/(r*t**3)
>>> Sb
0.7319825277285076
>>> |
```

Звідси $\epsilon_\beta = 1,3 \cdot 0,73$ с $= 0,949\ 1/c^2$

Відносна похибка для β:

Так як функція β це унарна функція (залежить тільки від t), значить відносну похибку непрямих вимірів можна спростити до:

$\varepsilon_\beta = |\frac{d(\ln(\beta))}{dt}|S_t \cdot 100\%$, знайдемо спочатку $\ln(\beta)$: $\ln(\beta) = \ln(\frac{2h}{rt^2}) = \ln(2h) - \ln(r) - 2\ln(t)$, а $\frac{d(\ln(\beta))}{dt}$ в цьому випадку буде дорівнювати $- 2\frac{1}{t}$; Тоді $\varepsilon_\beta = | - 2\frac{1}{<t>}|S_t \cdot 100\%$, покладаючи за $t =< t >$; Підставляємо та отримаємо, що $\varepsilon_\beta \approx 2,13\%$:

```
Python 3.13.0 (tags/v3.13.0:60403a5, Oct  7 2024, 09:38:07) [MSC v.1941 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> t = 2.72
>>> St = 0.29
>>> e = abs(-2*St*100/t)
>>> e
2.13235294117647
```

Абсолютна похибка для M:

$M = m(g - \beta r)r$ або $M = m(g - \frac{2h}{t^2})r$, що також залежить від змінної t, тож продиференціюємо: $\frac{dM}{dt} = mr\frac{d}{dt}(g - \beta r) =- mr^2\frac{d}{dt}(-\frac{4h}{rt^3}) = \frac{4mhr}{t^3}$, отже

$S_M = \frac{4mhr}{<t>^3}S_t$, покладаючи за $t =< t >$; Масу m, ми також знайдемо як середнє арифметичне 3 мас: $m = \frac{0{,}0538\text{ кг} + 0{,}0959\text{ кг} + 0{,}1349\text{ кг}}{3} \approx 0,095$ кг. Тоді підставимо все в S_M та отримаємо, що $S_M \approx 0,000069$ кг. Розрахунки:

```
Python 3.13.0 (tags/v3.13.0:60403a5, Oct  7 2024, 09:38:07) [MSC v.1941 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> m = 0.095
>>> h = 0.4
>>> t = 2.72
>>> St = 0.29
>>> r = 0.0315
>>> Sm = 4*m*h*r*St/(t**3)
>>> Sm
6.899941799816812e-05
```

Звідси $\epsilon_M = 1,3 \cdot 0,000069\ \text{Н} \cdot \text{кг} = 0,0000897\ \text{Н} \cdot \text{кг}$

Відносна похибка для M:

Так як функція M також унарна (залежить тільки від t), значить відносну похибку непрямих вимірів для M можна спростити до:

$\varepsilon_M = |\frac{d(\ln(M))}{dt}|S_t \cdot 100\%$; знайдемо $\ln(M)$: $\ln(M) = \ln(mr) + \ln(g - \frac{2h}{t^2})$; Відповідно $\frac{d(\ln(M))}{dt} = \frac{1}{g - \frac{2h}{t^2}} \cdot \frac{d}{dt}(g - \frac{2h}{t^2}) = \frac{4h/t^3}{g - \frac{2h}{t^2}}$; Отже $\varepsilon_M = |\frac{4h/t^3}{g - \frac{2h}{t^2}}|S_t =$

$\varepsilon_M = |\frac{4h/<t>^3}{g - \frac{2h}{<t>^2}}|S_t$, покладаючи за $t =< t >$; Підставляємо та отримаємо, що $\varepsilon_M \approx 0,24\%$:

```
Python 3.13.0 (tags/v3.13.0:60403a5, Oct  7 2024, 09:38:07) [MSC v.1941 64 bit (AMD64)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> h = 0.4
>>> St = 0.29
>>> t = 2.72
>>> g = 9.81
>>> e = abs((4*h/(t**3))/(g - (2*h/(t**2))))*St*100
>>> e
0.23765988577010352
```

Висновок:

У роботі було експериментально досліджено динаміку обертального руху за допомогою маятника Обербека. Отримані результати дозволили:

- Визначити кутове прискорення (β) та момент сили (*M*): За допомогою трьох вимірювань часу падіння тягарця для кожного набору даних було обчислено середній час $< t >$. Далі, використовуючи формулу $\beta = 2h/(rt^2)$, було розраховано кутове прискорення для різних конфігурацій системи (відповідно до різних значень радіусів шківів). Аналогічно, за формулою $M = m(g - a)r$, де $a = \beta r$, визначено момент сили, що діє на маятник.
- Побудовано графіки залежності M(β): Графічне представлення залежності моменту сили від кутового прискорення для різних конфігурацій вантажів дозволило встановити лінійну залежність, що підтверджує основне рівняння обертального руху ($M = I \cdot \beta$). Схожість графіків свідчить про достовірність теоретичної моделі та послідовність і повторюваність результатів;
- Обчислено похибки вимірювань:

  $\epsilon_t = 0,377$ с, $\epsilon_\beta = 0,949 \ \ 1/c^2$, $\epsilon_M = 0,0000897$ Н · кг

  $\varepsilon_t = 13,86$ %, $\varepsilon_\beta = 2,13\%$, $\varepsilon_M \approx 0,24\%$

Контрольні питання

1. *Визначити момент сили та момент імпульсу відносно деякої точки та осі.*

- **Момент сили** (або обертальний момент) відносно точки/осі визначається як векторний добуток $r \times F$, де r — радіус-вектор від точки обертання до точки прикладання сили, а F — вектор сили. За модулем це можна записати як $M = rFsin\alpha$, де α — кут між r та F.
- **Момент імпульсу** (або кутовий момент) матеріальної точки з масою m відносно осі обертання дорівнює $L = r \times (mv)$. Якщо тіло обертається з кутовою швидкістю ω, то для твердої системи можна використовувати $L = I\omega$, де I — момент інерції.

2. *Записати основний закон динаміки обертального руху.*
Основний закон динаміки обертального руху формулюється так:

$$\sum M = \frac{dL}{dt} \quad \text{або} \quad \sum M = I\beta,$$

де $\sum M$ — рівнодійна (алгебраїчна сума) моментів усіх сил, L — момент імпульсу, I — момент інерції, β — кутове прискорення.

3. *Сформулювати і записати закон збереження моменту імпульсу для системи матеріальних точок.*
Закон збереження моменту імпульсу (кутового моменту) стверджує: Якщо рівнодійна зовнішніх моментів сил відносно деякої осі дорівнює нулю, то повний момент імпульсу системи матеріальних точок відносно цієї осі залишається сталим.

Математично:

$$\sum M_{\text{зовн}} = 0 \Longrightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \Longrightarrow L = const$$

4. *Розказати про призначення та конструкцію маятника Обербека.*

- **Призначення:** Маятник Обербека використовується для дослідження законів обертального руху та експериментального визначення моменту інерції тіла.
- **Конструкція:** Являє собою циліндричну муфту (вісь обертання), до якої під прямим кутом прикріплені чотири жорсткі стрижні. На цих стрижнях закріплюються вантажі однакової маси, положення яких можна змінювати, тим самим змінюючи момент інерції системи. На вісь також насаджено шків (або два шківи різних радіусів), на який намотується нитка з додатковим тягарцем. При падінні тягарця нитка розмотується і надає

маятнику обертання з певним кутовим прискоренням.

5. *Як теоретично обчислити момент інерції маятника Обербека?*
Теоретично момент інерції можна знайти як суму моментів інерції всіх частин:

$I_{\text{система}} = I_{\text{основи}} + \sum I_{\text{вантажів}}$

- $I_{\text{основи}}$ — момент інерції центральної частини (муфти, осі тощо), який зазвичай вказується або вимірюється окремо.
- Для **кожного вантажу**, що вважається матеріальною точкою, $I = mr^2$, де r — відстань від осі обертання до вантажу. Якщо на стрижнях 4 вантажі, сумарний внесок від них буде $I_{\text{вантажів}} = \sum m_i r_i^2$.

6. *Вивести формулу для визначення прискорення руху тягарця.*

Найкоротший спосіб отримати **прискорення** a тягарця (нехтуючи опором повітря):

1. Для тягарця маси m: $mg - T = ma$.
2. Для маятника з моментом інерції I: $Tr - M_{\text{тертя}} = I\frac{a}{r}$.

Звідси після підстановок і спрощень виходить:

$$a = \frac{r(mgr - M_{\text{тертя}})}{I + mr^2}$$

Якщо моментом сил тертя $M_{\text{тертя}}$ знехтувати, формула стає ще простішою:

$$a \approx \frac{mgr^2}{I + mr^2}$$

7. *Як експериментально визначити момент інерції маятника Обербека?*

1. Виміряти кутове прискорення β маятника при відомому моменті сили M.
2. Побудувати графік залежності $M(\beta)$ або ж безпосередньо зняти декілька точок (β_i, M_i).
3. За основним законом динаміки обертального руху $M = I\beta + M_{\text{тертя}}$. Екстраполюючи графік або використовуючи метод найменших квадратів, можна визначити:
   - **Коефіцієнт пропорційності** (кутовий коефіцієнт прямої) — це і є I.

- **Перетин із віссю ординат** (за $\beta = 0$) дає момент сил тертя $M_{\text{тертя}}$.

8. *Як експериментально визначити основний закон динаміки обертального руху?*

- Зафіксувати різні значення моменту сили M (наприклад, змінюючи масу тягарця або радіус шківа).
- Виміряти для кожного значення M відповідне кутове прискорення β.
- Побудувати залежність $M(\beta)$. Якщо отримана залежність лінійна та проходить близько до теоретично очікуваної прямої, то це підтверджує справедливість закону $M = I\beta + (\text{тертя})$.

9. *Як експериментально визначити момент інерції вантажів на стрижнях маятника Обербека?*

1. Вимкнути або мінімізувати вплив додаткових елементів (наприклад, мати лише «голий» маятник без вантажів), виміряти його момент інерції I_0.
2. Закріпити вантажі на певній відстані r від осі обертання та виміряти сумарний момент інерції $I_{\text{заг}}$.
3. Різниця $\Delta I = I_{\text{заг}} - I_0$ буде дорівнювати моменту інерції саме вантажів. Залежно від розташування вантажів, можна підтвердити формулу $I_{\text{вантажів}} = \sum m_i r_i^2$ або знайти r_i для кожного вантажу.