Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра обчислювальної техніки

Лабораторна робота №5.2

«Визначення прискорення вільного падіння з допомогою фізичного маятника»

Виконав: студент 1 курсу
ФІОТ, гр. ІО-41
Давидчук А. М.
Залікова книжка № 4106

Перевірив
Колган В.В.

Київ-2025

Тема: «Визначення прискорення вільного падіння з допомогою фізичного маятника».

Мета: експериментальне визначення прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника та аналіз похибок вимірювань.

Прилади та устаткування: Установка для вивчення прискорення оборотного маятника з фотоелектричним датчиком для заміру відліку часу і числа коливань, лінійка.

Теорія методу та описання експериментальної установки:

Фізичний маятник являє собою тверде тіло, яке може коливатись відносно нерухомої горизонтальної осі під дією сили тяжіння. Рух такого тіла можна описати, використовуючи основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла в проєкції на вісь обертання:

$$M = I\beta,$$

де I – момент інерції маятника відносно осі підвісу, β – кутове прискорення, M – алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил відносно осі підвісу. Нехай центр мас маятника знаходиться у точці C на відстані a від осі обертання маятника O. Тоді на відхилений від положення рівноваги маятник масою m діє момент сили тяжіння:

$$M = -mga\sin\alpha$$

Знак "-" у записаній формулі відображає той факт, що момент сили намагається повернути маятник у положення рівноваги, тобто зменшити кут α відхилення маятника від положення рівноваги. Таким чином, знехтувавши силами тертя та опору рухові маятника та використавши основне рівняння динаміки обертального руху, дістанемо:

$$I\beta = -mga\sin\alpha \tag{5.1}$$

Для малих відхилень від положення рівноваги $\sin\alpha \approx \alpha$, отже рівняння (5.1) можна записати у вигляді:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mga\,\alpha = 0 \tag{5.2}$$

Безпосередньою підстановкою можна переконатись у тому, що розв'язком рівняння (5.2) є функція:

$$\alpha = \alpha_0\cos\omega t \tag{5.3}$$

де α_0 – початковий кут відхилення маятника, $\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$ – власна циклічна частота гармонічних коливань маятника. Беручи до уваги формулу (5.3), можна зробити висновок про те, що при малих відхиленнях від положення рівноваги фізичний маятник здійснює гармонічні коливання, частота яких залежить від маси маятника, моменту інерції маятника відносно осі підвісу та відстані від цієї осі до центра мас маятника. Враховуючи зв'язок між частотою ω та періодом T коливань, період коливань фізичного маятника можна записати у вигляді

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \tag{5.4}$$

Позначимо через I_0 момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через центр мас C і паралельна до осі підвісу. Згідно теореми Штейнера: $I = I_0 + ma^2$. Тоді маємо:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} \qquad (5.5)$$

З цього графіка випливає, що при $T > T_{min}$ одне і те ж значення періоду коливань досягається при двох різних значеннях відстані a. Записуючи формулу (5.5) для двох збіжних значень періоду коливань маятника, матимемо:

$$\frac{I_0 + ma_1^2}{mga_1} = \frac{I_0 + ma_2^2}{mga_2}$$

Звідси $I_0 = ma_1a_2$, тоді

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}} \qquad (5.6)$$

Формулою (5.6) можна користуватись для експериментального визначення прискорення вільного падіння g. Змінюючи відстань a між центром мас маятника і його віссю підвісу, необхідно побудувати графік залежності $T(a)$, з якого визначити значення відстаней a_1 та a_2, для яких період коливань T має одне і те саме значення. Тоді прискорення вільного падіння можна визначити за формулою:

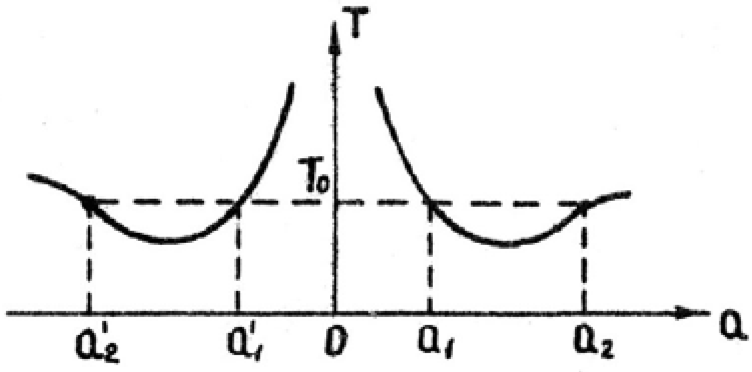
$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(a_1 + a_2) \qquad (5.7)$$

Другий спосіб визначення прискорення вільного падіння зв'язаний з вимірюванням приведеної довжини фізичного маятника. Приведеною довжиною фізичного маятника е довжина такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань відповідного фізичного маятника. З порівняння формул для періодів коливань фізичного та математичного маятників видно, що приведена довжина фізичного маятника $l_{\text{пр.}} = I/ma$.

Визначити приведену довжину фізичного маятника найзручніше з допомогою оборотного маятника.

Оборотний маятник, який є одним з видів фізичного маятника, являє собою сталевий стрижень, на якому по різні боки від центру мас розташовані два масивні тягарці B_1 та B_2, переміщуючи які вздовж стрижня можна в досить широких межах змінювати період коливань. На стрижні також закріплені дві опорні призми O_1 та O_2, за допомогою яких маятник можна підвісити на опору у двох положеннях: "прямому" та “обернутому”, тобто він має дві осі підвісу по різні боки від центру мас.

Враховуючи можливість підвісу маятника у таких двох точках, графік залежності $T = T(a)$ оборотного маятника має дві симетричні гілки, які відповідають положенню точки підвісу по різні боки від центру мас:



З графіка видно, що з кожного боку від центра мас маятника існує по два положення опорних призм, у яких періоди коливань маятника збігаються. Якщо при переміщенні тягарів по стрижню вдасться знайти таке положення тягаря, при якому періоди коливань маятника на обох опорних призмах однакові, але при цьому $a_1 \neq a_2$, то період коливань маятника:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (5.8)$$

де $L = a_1 + a_2$ – відстань між опорними призмами маятника. У цьому випадку, як випливає з формули (5.8), приведена довжина фізичного маятника дорівнює відстані L між опорними призмами й, отже

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2} \qquad (5.9)$$

Для визначення прискорення вільного падіння у даній роботі застосовується експериментальна установка, що складається з вертикального стояка, на верхньому кінці якого закріплений кронштейн, до якого за допомогою опорної призми (5) підвішений фізичний (оборотний) маятник, що являє собою сталевий стрижень (4) з двома тягарцями (3). Тягарці та опорні призми можна переміщувати вздовж стрижня і закріплювати у потрібному положенні за допомогою гвинтів. Положення тягарців визначається за шкалою, що нанесена на стрижні. У нижній частині стояка розташований кронштейн з фотоелектричним датчиком (2), який подає сигнал закінчення відліку часу і числа періодів коливань на цифровий мілісекундомір, розташований на передній панелі блока приладів (1).

Порядок роботи (початок практичної частини):

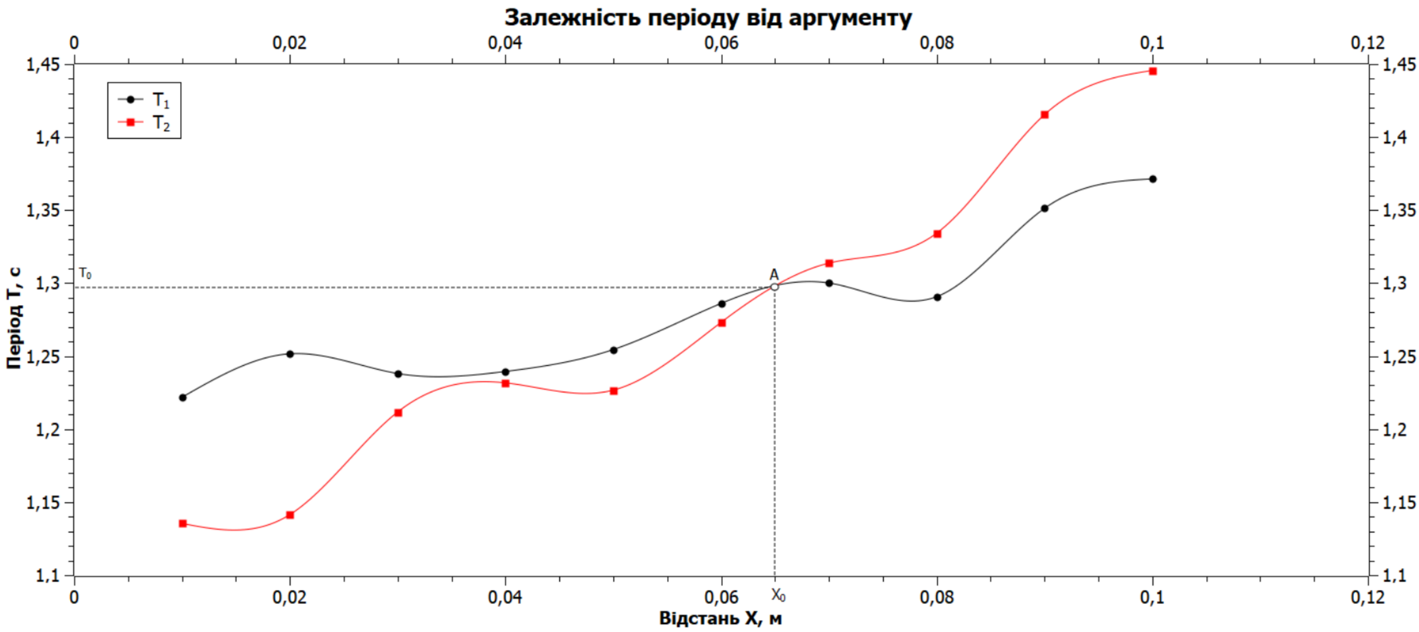
Відстань між точками підвісу маятника дорівнює L = 400 мм = 0,4 м = const.
Проводитиму заміри часу t_1 10 коливнь при такому положенні: тягарець B_1 знаходиться біля кінця стрижня, а тягарець B_2 – між серединою стрижня та опорною призмою O_2 і поступово змінюватиму положення тягарця B_1 на ΔX = 10 мм при кожному вимірюванні. Та t_2 – перевернувши маятник і підвісити на кронштейні за допомогою другої опорної призми, змінюючи положення B_1 так само, як і при t_1. Значення T_1, T_2 я отримав із загальновідомої формули обчислення періоду коливань: $T = \frac{t}{N}$, де t – час N коливань, N – кількість коливань. Всі результати t_1 та t_2 отримані в симуляторі LabMech.

Таблиця результатів вимірювань:

№ досліду	X, *м*	t_1, *с*	T_1, *с*	t_2, *с*	T_2, *с*
1	0,01	12,218	1,2218	11,354	1,1354
2	0,02	12,516	1,2516	11,414	1,1414
3	0,03	12,381	1,2381	12,117	1,2117
4	0,04	12,395	1,2395	12,317	1,2317
5	0,05	12,545	1,2545	12,267	1,2267
6	0,06	12,861	1,2861	12,731	1,2731
7	0,07	13,001	1,3001	13,137	1,3137
8	0,08	12,907	1,2907	13,342	1,3342
9	0,09	13,512	1,3512	14,154	1,4154
10	0,1	13,714	1,3714	14,457	1,4457

$T_i = \frac{t_i}{N_i}$, але з урахуванням того, що $N_i = const = 10$, то можу замінити це формулою: $T_i = \frac{t_i}{10}$. Обчислювання кожного періоду тут показувати немає сенсу, тому що в даній лабораторній роботі кількість розглядуваних коливань дорівнює 10, тому період вираховується дуже просто з відповідного значення t: потрібно просто перемістити десяткову кому в значенні t лівіше на одну цифру.

На основі цієї таблиці, я побудую графік двох функцій T_1 та T_2 та знайду їх точку перетину $A(T_0;\ x_0)$:



Де точка A має приблизні координати (1,29699; 0,06495), тобто $T_0 = 1,29699$

Щоб порахувати прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника, можна використати формулу (5.9):

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2}$$

Підставимо значення, та отримаємо результат:

$$g = \frac{4 \cdot 3{,}141592^2 \cdot 0{,}4}{1{,}29699^2} = \frac{4 \cdot 9{,}8696 \cdot 0{,}4}{1{,}682183} = \frac{15{,}79136}{1{,}682183} \approx 9{,}38742 \text{ м/с}^2$$

Тепер настав час оцінювати випадкову та систематичну похибки. Для оцінки абсолютної похибки, я маю порівняти своє значення з істинним значенням прискорення вільного падіння. Через те, що це являється значенням const і воно є загальновідоме наперед, то я можу взяти його з довідників, і нехай воно буде дорівнювати $g_{іст} = 9{,}80665 \text{ м/с}^2$

Звідси абсолютна похибка буде:

$\Delta g = g - g_{іст} = 9{,}38742 \text{ м/с}^2 - 9{,}80665 \text{ м/с}^2 = -0{,}4192 \text{ м/с}^2$

А модуль (абсолютне значення) похибки буде: $|\Delta g| = |-0{,}4192 \text{ м/с}^2| = 0{,}4192 \text{ м/с}^2$

Звідси відносна похибка буде дорівнювати:

$$\delta = \left|\frac{\Delta g}{g_{іст}}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{-0{,}4192 \text{ м/с}^2}{9{,}80665 \text{ м/с}^2}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{-0{,}4192}{9{,}80665}\right| \cdot 100\% \approx$$

$$\approx |-0{,}042| \cdot 100\% = 0{,}042 \cdot 100\% = 4{,}2\%$$

Систематичну похибку в даній лабораторній роботі порахувати неможливо через відсутність паспортних даних оборотного маятника та лінійки.

Висновок

У ході лабораторної роботи було експериментально визначено прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника. Виконані вимірювання та розрахунки дозволили отримати значення прискорення вільного падіння, яке наближене до табличного значення: $g = 9{,}80665\ м/с^2$. Під час аналізу випадкової похибки, було визначено абсолютну похибку $\Delta g = -0{,}4192\ м/с^2$ та відносну $\delta = 4{,}2\%$. В ході виконання навчився оперувати даними, аналізувати результати вимірювань та набув теоретичних навичок.

Контрольні питання

1. *Розповісти про гармонічні коливання та їх основні характеристики. Як перетворюється енергія при гармонічних коливаннях?*

Гармонічні коливання описуються законом $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Основні характеристики:

- Амплітуда A
- Період $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Частота $f = \frac{1}{T}$

Перетворення енергії: кінетична та потенціальна енергії періодично переходять одна в одну, а повна енергія (за ідеальних умов) залишається сталою.

2. *Сформулювати теорему Штейнера та навести приклади її використання.*

$I = I_C + md^2$, де I – момент інерції навколо довільної осі; I_C – момент інерції навколо паралельної осі, що проходить через центр мас; m – маса тіла; d – відстань між цими осями.

Приклад застосування: обчислення моменту інерції фізичного маятника відносно осі, що не збігається з центром мас.

3. *Дати визначення поняття фізичного маятника. Вивести формулу періоду коливань фізичного маятника.*

Фізичний маятник – будь-яке тверде тіло, що може обертатися навколо горизонтальної осі.

Візьмемо основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла в проєкції на вісь обертання:

$$M = I\beta,$$

де M – сумарний момент зовнішніх сил відносно осі, I – момент інерції маятника відносно цієї осі, а β – кутове прискорення $\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$. Припустимо, що центр мас маятника розташований у точці C на відстані a (горизонтальний «ричаг») від осі обертання O. Якщо маятник відхилити від положення рівноваги на невеликий кут α, то сила тяжіння mg створює момент відносно осі:

$$M = -mga\sin\alpha$$

Знак «мінус» означає, що момент сили тяжіння завжди повертає маятник **до** положення рівноваги, прагнучи зменшити кут α

Оскільки $M = I\beta$ і $M = -mga\sin\alpha$, одержую:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mga\sin\alpha$$

Це – диференціальне рівняння руху маятника, в якому немає сил тертя чи опору (ідеалізація). Припускаючи, що кут α малий, тож $\sin\alpha \approx \alpha$. Після такої заміни, або як кажуть, апроксимації, рівняння набирає вигляду:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mga\,\alpha = 0$$

Відомо, що розв'язок такого рівняння – гармонічні коливання з власною (кутовою) частотою:

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

Тоді розв'язок можна записати як $\alpha(t) = \alpha_0\cos\omega t$ та оскільки $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то:

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$, що і є формула для періоду коливань фізичного маятника при малих відхилень.

4. *Дати визначення приведеної довжини фізичного маятника. Від чого залежить її величина?*

Приведена довжина $L_{\text{прив}}$ – це така довжина математичного маятника, що має той самий період, що й фізичний маятник. Вона виражається формулою: $L_{\text{прив}} = \frac{I}{mh}$, звідси видно, що вона залежить від моменту інерції I та відстані h від осі до центру мас.

5. *Який маятник називається оборотним? Які основні властивості оборотного маятника?*

Це маятник, який можна підвішувати за дві різні точки (осі), причому періоди коливань при підвішуванні за обидві точки можуть бути однаковими. Основні властивості: використовується для високоточного вимірювання g, дає однаковий період при двох підвісках, дозволяє обходити складні розрахунки центру мас і I.

6. *Як теоретично підрахувати момент інерції оборотного маятника? Які параметри установки для цього потрібно знати?*

Потрібно оперувати такими даними:

- Відстані від осей підвішування до центру мас (або між собою)
- Періоди T_1 і T_2 коливань при кожній підвісці
- Маса маятника m

Використовують формули для фізичного маятника:

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh_1}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh_2}}$

Розв'язуючи систему, знаходимо I

7. *Як виміряти прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника?*

1. Виміряти період T
2. Знати I, m і h (або знайти експериментально/розрахунково)
3. Із формули $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ виразити $g = \frac{4\pi^2 I}{mhT^2}$

8. *Як виміряти прискорення вільного падіння за допомогою фізичного маятника?*

У випадку маятника Кетера часто роблять так, щоб періоди при двох підвісках були однакові. Тоді відстань між точками підвішування дорівнює приведеній довжині $L_{\text{прив}}$

Формула для g: $g = \frac{4\pi^2 L_{\text{прив}}}{T^2}$, де T – загальний (однаковий) період при обох підвісках, а $L_{\text{прив}} = d$ – відстань між осями.