ДКР №3.1 — Невизначенні інтеграли
Варіант 8

Давидчук Артем, ІО-41

Завдання №1

1. $\displaystyle\int \left(7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{(x-1)^4} + \frac{8}{x^3}\right) dx:$

$$\int \left(7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{(x-1)^4} + \frac{8}{x^3}dx\right) = 7\int x^2dx + 3\int \frac{dx}{x} - \int \sqrt[5]{(x-1)^4}dx + 8\int x^{-3}dx = \frac{7}{3}x^3 + 3\ln|x| - \frac{5}{9}\sqrt[5]{(x-1)^9} - \frac{4}{x^2} +$$
$$+ C$$

2. $\displaystyle\int \cos(7x+3)dx:$

$$\int \cos(7x+3)dx = \frac{1}{7}\sin(7x+3) + C$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}:$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln|2x + \sqrt{4x^2+3}| + C\right) = \frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2+3}| + C$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+7}:$

$$\int \frac{dx}{2x^2+7} = \int \frac{dx}{(x\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{7}}\right) + C\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{2}{7}}\right) + C$$

5. $\displaystyle\int e^{1-6x^2}xdx:$

$$\int e^{1-6x^2}xdx = e\int e^{-6x^2}xdx = \frac{e}{2}\int e^{-6x^2}d(x^2) = -\frac{e}{12}\int e^{-6x^2}d(-6x^2) = -\frac{e}{12}\cdot e^{-6x^2} + C = -\frac{e^{1-6x^2}}{12} + C$$

6. $\displaystyle\int \sin^6(3x)\cos(3x)dx:$

$$\int \sin^6(3x)\cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int \sin^6(3x)d(\sin(3x)) = \frac{\sin^7(3x)}{21} + C$$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}dx:$

$$\int \frac{\sqrt{\ln^3(x+3)}}{x+3}dx = \int \frac{\ln^{1.5}(x+3)}{x+3}dx = \int \ln^{1.5}(x+3)d(\ln(x+3)) = \frac{\ln^{2.5}(x+3)}{2.5} + C = \frac{2}{5}\sqrt{\ln^5(x+3)} + C$$

8. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x} dx$:

$$\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 3x}}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^{0.4} 3x}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3} \int (\operatorname{tg}^{0.4} 3x) d(\operatorname{tg} 3x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\operatorname{tg}^{1.4} 3x}{1.4} + C \right) = \frac{5}{21} \sqrt[5]{\operatorname{tg}^7 3x} + C$$

9. $\int e^{2-4x} dx$:

$$\int e^{2-4x} dx = e^2 \int e^{-4x} dx = -\frac{e^2}{4} \int e^{-4x} d(-4x) = -\frac{e^2}{4} \cdot e^{-4x} + C = -\frac{e^{2-4x}}{4} + C$$

10. $\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$:

$$\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{\arccos^{0.5} 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (\arccos^{0.5} 2x) d(\arccos 2x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\arccos^{1.5} 2x}{1.5} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{\arccos^3 2x} + C$$

11. $\int \frac{xdx}{2x^2 - 7}$:

$$\int \frac{xdx}{2x^2-7} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2x^2-7} d(2x^2-7) = \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2-7)}{2x^2-7} = \frac{1}{4} \ln|2x^2-7| + C$$

12. $\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx$:

$$\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{x}+x)^2} d(\sqrt{x}+x) = \int (\sqrt{x}+x)^{-2} d(\sqrt{x}+x) = \frac{(\sqrt{x}+x)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\sqrt{x}+x} + C$$

Завдання №2

1. $\int \left(\arcsin \frac{x}{5}\right) dx$:

$\int \left(\arcsin \frac{x}{5}\right) dx = \int \left(x^0 \cdot \arcsin \frac{x}{5}\right) dx;$ Звідси $u = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right);$ тоді $du = d\left(\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx,$ а

$dv = x^0 dx; v = \int x^0 dx = x;$ Тому ми можемо застосуванти формулу інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int \left(x^0 \cdot \arcsin \frac{x}{5}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx = x \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) - \int -\frac{1}{\sqrt{25-x^2}} d(\sqrt{25-x^2}) = x \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) +$$

$+ \int (\sqrt{25-x^2})^{-1} d(\sqrt{25-x^2}) = x \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + \sqrt{25-x^2} + C.$ Додатково зазначу (хоч це випливає з означення первісної) так як $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$ штучно обмежена на проміжку $[-5; 5]$, то значить і первісна матиме сенс на цьому проміжку.

2. $\int (x \operatorname{arctg}(2x)) dx$:

$$\int (x \operatorname{arctg}(2x)) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{4x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{x^2}{4x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) + \int \frac{\frac{1}{4}(4x^2+1)}{4x^2+1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4(4x^2+1)}\right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{4x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \cdot$$

$\cdot \left(\int 1dx - \int \frac{dx}{4x^2+1} \right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + C \right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg}(2x) + C =$

$= \frac{1}{8} (\operatorname{arctg}(2x) \cdot (4x^2+1) - 2x) + C$

3. $\int x^2 \cos^2(x) dx$:

$\int x^2 \cos^2(x)dx; f = x^2, f' = 2x.g' = \cos^2(x); g = \int \cos^2(x)dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos(2x))dx = \frac{1}{2} \int dx +$

$+ \frac{1}{4} \int \cos(2x)d(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ Тоді за формулою інтегрування частинами ми отримаємо: $\int fg'dx = fg - \int f'gdx$

тобто $\int x^2 \cos^2(x)dx = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\sin(2x) - \int \left(x^2 + \frac{x}{2}\sin(2x) \right) dx; \int \left(x^2 + \frac{x}{2}\sin(2x) \right) dx = \int x^2dx + \int \frac{x}{2}\sin(2x)dx = \int x^2dx +$

$+ \frac{1}{2} \int x\sin(2x)dx; \int x\sin(2x)dx; f = x, f' = 1, g' = \sin(2x), g = \int \sin(2x)dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x)d(2x) = -\frac{1}{2}\cos(2x);$ тоді

$\int x\sin(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x)dx = -\frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4} \int \cos(2x)d(2x) = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x);$ тепер рухаємось

назад: $\int x^2dx = \frac{x^3}{3};$ тоді $\int \left(x^2 + \frac{x}{2}\sin(2x) \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) \right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x)$ тоді

$\int x^2\cos^2(x)dx = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\sin(2x) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x) \right) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\sin(2x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x) + C =$

$= \frac{x^3}{6} + \sin(2x) \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \right) + \frac{x}{4}\cos(2x) + C$

4. $\int (x+1)\cos(7x)dx$:

$\int (x+1)\cos(7x)dx; f = (x+1), g' = \cos(7x)$ Тоді за формулою інтегрування частинами ми отримаємо: $\int f(x)g'(x)dx =$

$= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx;\ g = \int \cos(7x)dx = \frac{1}{7} \int \cos(7x)d(7x) = \frac{1}{7}\sin(7x);\ f' = (x+1)' = 1$

$\int (x+1)\cos(7x)dx = \frac{1}{7}\sin(7x)(x+1) - \frac{1}{7} \int \sin(7x)d(7x) = \frac{1}{7}\sin(7x)(x+1) - \frac{1}{49} \int \sin(7x)d(7x) =$

$= \frac{7(x+1)\sin(7x) + \cos(7x)}{49} + C$

5. $\int (x+3)e^{-x}dx$:

$\int (x+3)e^{-x}dx;\ f = (x+3), g' = e^{-x};\ g = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x};$ Тоді:

$\int (x+3)e^{-x}dx = -e^{-x}(x+3) - \int -e^{-x}dx = -e^{-x}(x+3) - \int e^{-x}d(-x) = -e^{-x}(x+3) - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+4) + C$

6. $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)dx$:

$\displaystyle\int x\ln(x^2+1)dx; f=\ln(x^2+1), g'=x, g=\frac{x^2}{2}$; тоді за формулою інтегрування частинами ми отримаємо:

$\displaystyle\int x\ln(x^2+1)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)-\int\frac{x^3}{x^2+1}dx;$ перетворюю неправильний дріб на правильний діленням:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x & x \\ \cline{1-1} -x & \end{array}$$

Тобто $\displaystyle\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$ тоді $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int xdx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$, а останній інтеграл є інтегралом

вигляду $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,$ де $M=1, N=0, p=0$ і такий інтеграл можна знайти за формулою: $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=$

$\displaystyle=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ тобто $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$, а інтеграл

$\displaystyle\int xdx=\frac{x^2}{2};$ тоді фінальна первісна буде: $\displaystyle\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C=\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)\cdot(x^2+1)-x^2\right)+C$

Завдання №3

1. $\displaystyle\int\frac{2x^2+5}{x+1}dx$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 \quad\quad +5 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2x & 2x-2 \\ \cline{1-1} -2x+5 & \\ 2x+2 & \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

Тобто $\displaystyle\int\frac{2x^2+5}{x+1}dx=\int(2x-2)dx+7\int\frac{dx}{x+1}=2\int(x-1)d(x-1)+7\int\frac{d(x-1)}{x-1}=$

$\displaystyle=2\cdot\frac{(x-1)^2}{2}+7\ln|x+1|+C=(x-1)^2+7\ln|x+1|+C$

2. $\displaystyle\int\frac{x-5}{2x^2+x+1}dx$:

Тут $2x^2+x+1$ немає дійсних коренів. Зведу даний тричлен до нормованого вигляду $x^2+px+q:2x^2+x+1=$

$\displaystyle\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$; Тоді дріб $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{x-5}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ є дробом вигляду $\displaystyle\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; Звідси $M=1, N=-5, p=0.5$ Тоді

за формулою інтегрування елементарного дробу 3 типу матимемо: $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+$

$\displaystyle+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q};\int\frac{x-5}{2x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x-5}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}+\left(-5-\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right)\cdot$

$\displaystyle\cdot\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{d(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}-\frac{21}{8}\int\frac{d(x+\frac{1}{4})}{(x+\frac{1}{4})^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right|-\frac{21}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\right)+$

$+C;$ Так як підмодульний вираз завжди додатній, то модуль можемо прибрати. Тоді фінальна первісна матиме вигляд:

$\displaystyle\frac{1}{4}\ln\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)+C$

3. $\displaystyle\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx:$

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}=\frac{2\cdot(x^2+6x-3)}{(x+1)(x^2+8x+15)}=2\cdot\frac{(x+1)^2+4x-4}{(x+1)(x^2+8x+15)}=\frac{2(x+1)^2}{(x+1)(x^2+8x+15)}+\frac{2(4x-4)}{(x+1)(x^2+8x+15)}=$$

$=\dfrac{2x+2}{x^2+8x+15}+\dfrac{8x-8}{x^3+9x^2+23x+15}$; Тоді $\displaystyle\int\frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+8x+15}dx+\int\frac{8x-8}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx$

Дріб $\dfrac{2x+2}{x^2+8x+15}$ є елементарним дробом 3 типу. Звідси $M=2,N=2,p=8$ тоді $\displaystyle\int\frac{2x+2}{x^2+8x+15}dx=$

$$=\int\frac{d(x^2+8x+15)}{x^2+8x+15}dx-6\int\frac{dx}{x^2+8x+15}dx=\ln|x^2+8x+15|-6\int\frac{d(x+4)}{(x+4)^2-1^2}dx=\ln|x^2+8x+15|-3\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|+C$$

У знаменнику дробу $\dfrac{8x-8}{(x+1)(x^2+8x+15)}$ можна знайти корені $x^2+8x+15,$ а саме при $x_1=-5,x_2=-3$ тоді, за

теоремою Безу, я можу записати дріб у такому вигляді: $\dfrac{8x-8}{(x+1)(x^2+8x+15)}=\dfrac{8x-8}{(x+5)(x+3)(x+1)}$, а цей дріб у свою

чергу можу розкласти як $\dfrac{A}{x+5}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{x+1}$ далі зводитиму ліву частину до спільного знаменника:

$$\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+3)(x+1)+B(x+5)(x+1)+C(x+5)(x+3)}{(x+5)(x+3)(x+1)}=$$

$$=\frac{A(x^2+4x+3)+B(x^2+6x+5)+C(x^2+8x+15)}{(x+5)(x+3)(x+1)}=\frac{Ax^2+4Ax+3A+Bx^2+6Bx+5B+Cx^2+8Cx+15C}{(x+5)(x+3)(x+1)}=$$

$=\dfrac{(A+B+C)x^2+(4A+6B+5C)x+(3A+5B+15C)}{(x+5)(x+3)(x+1)}$; а це дріб у свою чергу дорівнює початокову дробу:

$\dfrac{(A+B+C)x^2+(4A+6B+5C)x+(3A+5B+15C)}{(x+5)(x+3)(x+1)}=\dfrac{8x-8}{(x+5)(x+3)(x+1)}$; Тоді

$(A+B+C)x^2+(4A+6B+5C)x+(3A+5B+15C)=8x-8$, а звідси випливає, що постає задача розв'язання СЛАР:

$\begin{cases}A+B+C=0\\4A+6B+5C=8\\3A+5B+15C=-8\end{cases}$ звідси: $A=-6,B=8,C=-2;$ Тому дріб $\dfrac{8x-8}{(x+5)(x+3)(x+1)}=-\dfrac{6}{x+5}+\dfrac{8}{x+3}-\dfrac{2}{x+1}$;

$$\int\frac{8x-8}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx=\int\left(-\frac{6}{x+5}+\frac{8}{x+3}-\frac{2}{x+1}\right)dx=-\int\frac{6}{x+5}dx+\int\frac{8}{x+3}dx-\int\frac{2}{x+1}dx=-6\int\frac{d(x+5)}{x+5}+$$

$+8\displaystyle\int\frac{d(x+3)}{x+3}-2\int\frac{d(x+1)}{x+1}=-6\ln|x+5|+8\ln|x+3|-2\ln|x+1|+C$; Тоді фінальна первісна матиме вигляд:

$$\int\frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+8x+15}dx+\int\frac{8x-8}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx=\ln|x^2+8x+15|-3\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|-6\ln|x+5|+$$

$$+8\ln|x+3|-2\ln|x+1|+C=\ln|x^2+8x+15|+5\ln|x+3|-3\ln|x+5|-2\ln|x+1|+C$$

4. $\displaystyle\int\frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx:$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad -4x+5 & x^3-x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2\ \ +x-1 & 1 \\ \cline{1-1} x^2-3x+4 & \end{array}$$

Тобто $\dfrac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}=1+\dfrac{x^2-3x+4}{(x^2-1)(x-1)}=1+\dfrac{x^2-3x+4}{(x+1)(x-1)^2}$

Тепер розкладемо дріб $\dfrac{x^2-3x+4}{(x+1)(x-1)^2}$ в суму елементарних дробів: $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$; Знайдемо коефіцієнти:

$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}=\dfrac{A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{x^2-3x+4}{(x+1)(x-1)^2}$; Звідси $A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)=$

$=x^2-3x+4=A(x^2-2x+1)+B(x^2-1)+C(x+1)=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-B+Cx+C=(A+B)x^2+(C-2A)x+A-$

$-B+C=x^2-3x+4$; Звідси я отримую СЛАР: $\begin{cases}A+B=1\\-2A+C=-3\\A-B+C=4\end{cases}$ звідси: $A=2, B=-1, C=1,$ тобто вираз

$\dfrac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}=1+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$; а значить $\displaystyle\int\frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx=\int dx+2\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$

$\displaystyle=\int dx+2\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=x+2\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$

5. $\displaystyle\int\frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx:$

$\dfrac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}=2\cdot\dfrac{x^2+4x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; Так як $x^2-4x+13$ немає дійсних коренів, то дріб $\dfrac{x^2+4x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)}$

можна розкласти на елементарні дроби: $\dfrac{x^2+4x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-4x+13}$; Знайду значення A, B та C:

$\dfrac{A(x^2-4x+13)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-4x+13)}=\dfrac{x^2+4x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; $A(x^2-4x+13)+(Bx+C)(x+1)=x^2+4x+10$; розкладаю:

$A(x^2-4x+13)+(Bx+C)(x+1)=Ax^2-4Ax+13A+Bx^2+(B+C)x+C=(A+B)x^2+(-4A+B+C)x+13A+C=$

$=x^2-4x+13$; звідси я отримую СЛАР та розв'язую її:

$\begin{cases}A+B=1\\-4A+B+C=2\\13A+C=10\end{cases}$ звідси: $A=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{1}{2}, C=\dfrac{7}{2},$ тобто дріб $\dfrac{x^2+4x+10}{(x+1)(x^2-4x+13)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+7}{x^2-4x+13}=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+7}{x^2-4x+13}\right)$; а значить $\dfrac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+7}{x^2-4x+13}$; тоді $\displaystyle\int\frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx=$

$\displaystyle=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{x+7}{x^2-4x+13}dx$; Інтеграл $\displaystyle\int\frac{x+7}{x^2-4x+13}dx$ є елементарним інтегралом 3 типу, якого $M=1, N=7, p=-4$

тоді за формулою: $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$; Тобто:

$\displaystyle\int\frac{x+7}{x^2-4x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13}+\left(7+\frac{4}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13}+9\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13}+9\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+3^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|+9\cdot\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+C=$

$\displaystyle\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|+3\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$;, а інтграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x+1}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C$; тоді фінальна первісна буде:

$\displaystyle\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|+3\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$

Завдання №4

1. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4(3x)dx:$

$$\int \operatorname{tg}^4(3x)dx = \int \operatorname{tg}^2(3x)dx \cdot \operatorname{tg}^2(3x)dx; \operatorname{tg}^2(3x) = \frac{1}{\cos^2(3x)} - 1 \text{ тоді } \int \operatorname{tg}^2(3x) \cdot \operatorname{tg}^2(3x)dx = \int \operatorname{tg}^2(3x) \cdot \left(\frac{1}{\cos^2(3x)} - 1\right) dx =$$

$$\int \operatorname{tg}^2(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} dx - \int \operatorname{tg}^2(3x)dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} d(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2(3x)d(3x) = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2(3x)d(\operatorname{tg}(3x)) -$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \int \left(\frac{1}{\cos^2(3x)} - 1\right) d(3x) = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2(3x)d(\operatorname{tg}(3x)) - \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\cos^2(3x)} + \frac{1}{3}\int d(3x) = \frac{1}{9}\operatorname{tg}^3(3x) - \frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x) + x + C$$

2. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx:$

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos^2(2x))(1 + \cos(2x))dx = -\frac{1}{8}\int (\cos^3(2x) + \cos^2(2x) - \cos(2x) - x)dx$$

$$\int (\cos^3(2x) + \cos^2(2x) - \cos(2x) - x)dx = \int \cos^3(2x)dx + \int \cos^2(2x)dx - \int \cos(2x)dx - \int xdx$$

$$\int \cos^3(2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos^3(2x)d(2x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2(2x)\sin(2x)}{3} + \frac{2}{3}\int \cos(2x)d(2x)\right) = \frac{\sin(2x)(2 + \cos^2(2x))}{6}$$

$$\int \cos^2(2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos^2(2x)d(2x) = \frac{\sin(2x)}{2}; \int dx = x; \text{ тоді: } \int \sin^2(x)\cos^4(x)dx = -\frac{\sin(2x)(2 + \cos^2(2x))}{48} - \frac{\sin(4x)}{64} - \frac{x}{16} +$$

$$+\frac{\sin(2x)}{16} + \frac{x}{8} + C = -\frac{4\sin(2x)(2 + \cos^2(2x)) + 3\sin(4x) + 12x - 12\sin(2x) - 24x}{192} + C =$$

$$= -\frac{\sin(6x) + 3\sin(4x) - 3\sin(2x) - 12x}{192} + C$$

3. $\displaystyle\int \sin^3(5x)dx:$

$$\int \sin(5x) \cdot \sin^2(5x)dx = \int \sin(5x) \cdot (1 - \cos^2(5x))dx = -\frac{1}{5}\int (1 - \cos^2(5x))d(\cos(5x)) = -\frac{1}{5}\int d(\cos(5x)) +$$

$$+\frac{1}{5}\int \cos^2(5x)d(\cos(5x)) = -\frac{\cos(5x)}{5} + \frac{\cos^3(5x)}{15} + C = \frac{-3\cos(5x) + \cos^3(5x)}{15} + C$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2(x)}:$

Формула подвійного кута косинуса: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, тоді $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2(x)} = \int \frac{dx}{2 + \cos(2x)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{2 + \cos(2x)};$

Застосвуємо універсальну тригонометричну підстановку: $t = \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{2}\right) = \operatorname{tg}(x)$, тоді $\cos(2x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, d(2x) = \frac{2dt}{1 + t^2}$ тоді

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{2 + \cos(2x)} = \int \frac{2dt}{1 + t^2} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

5. $\displaystyle\int \cos(x)\cos(7x)dx:$

$$\int \cos(x)\cos(7x)dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(-6x) + \cos(8x)\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos(-6x)dx + \frac{1}{2}\int \cos(8x)dx = -\frac{1}{12}\int \cos(-6x)d(-6x) +$$

$$+\frac{1}{16}\int\cos(8x)d(8x)=-\frac{\sin(-6x)}{12}+\frac{\sin(8x)}{16}+C=\frac{\sin(6x)}{12}+\frac{\sin(8x)}{16}+C$$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{3\cos(x)-4\sin(x)}:$

Проведу універсальну тригонометричну підстановку: $t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right),\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ тоді

$$\int\frac{dx}{3\cos(x)-4\sin(x)}=\int\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\frac{3(1-t^2)-8t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{-3t^2-8t+3}=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{8}{3}t-1}=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}\cdot$$

$$\cdot\ln\left|\frac{t+\frac{4}{3}-\frac{5}{3}}{t+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}\right|+C=-\frac{1}{5}\cdot\ln\left|\frac{t-\frac{1}{3}}{t+3}\right|+C=-\frac{1}{5}\cdot\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+3}\right|+C$$

Завдання №5

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}:$

Проведу заміну: $x=t^2,dx=d(t^2)=2tdt,t=\sqrt{x},$ тоді $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}=\int\frac{2tdt}{t^3-t}=2\int\frac{dt}{t^2-1^2}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$$

2. $\displaystyle\int\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx:$

$\displaystyle\int\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-0.5x+3}}dx,$ звідси $M=2,N=3,p=-0.5,$ тоді $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-0.5x+3}}dx=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{x^2-0.5x+3})}{\sqrt{x^2-0.5x+3}}+\frac{7}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-0.5x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot2\sqrt{x^2-0.5x+3}+\frac{7}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(x-0.25)}{\sqrt{(x-0.25)^2-\frac{\sqrt{47}}{16}}}=$$

$$=\sqrt{2x^2-x+6}+\frac{7}{2\sqrt{2}}\ln\left|x-0.25+\sqrt{x^2-0.5x+3}\right|+C$$

3. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}dx:$

Проведу заміну: $x=\sin(t),dx=\cos(t)dt,t=\arcsin(x),$ тоді $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}dx=-\int\sin^3(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt=-\int\sin^2(t)\cdot$

$$\cdot\sin(t)\cdot\cos^2(t)dt=-\int\sin^2(t)\cos^2(t)d(\cos(t))=-\int(1-\cos^2(t))\cos^2(t)d(\cos(t))=$$

$$-\int(\cos^2(t)-\cos^4(t))d(\cos(t))=-\int\cos^2(t)+\int\cos^4(t)d(\cos(t))=-\frac{\cos^3(t)}{3}+\frac{\cos^5(t)}{5}+C=-\frac{\cos^3(\arcsin(x))}{3}+$$

$$+\frac{\cos^5(\arcsin(x))}{5}+C$$

4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}:$

Проведу заміну: $x=t^6,t=\sqrt[6]{x},dx=d(t^6)=6t^5dt,$ тоді $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}=\int\frac{6t^5}{t^3-t}dt=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt;$ знайду правильний дріб:

$$\begin{array}{r|l} t^4 & t^2-1 \\ \cline{2-2} -t^4+t^2 & t^2+1 \\ \cline{1-1} t^2 & \\ -t^2+1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Тобто $6\int \frac{t^4}{t^2-1}dt = 6\int \left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 6\int t^2dt + 6\int dt + \int \frac{1}{t^2-1}dt = 2t^3+6t+$

$$+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C$$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$:

Проведу заміну: $x+1=\frac{1}{t}, x=\frac{1}{t}-1, dx=-\frac{dt}{t^2}, t=\frac{1}{x+1}$, тоді $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}} =$

$$-\int \frac{dt}{t^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{t}-1+1\right)\sqrt{-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t-1}} = -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{5}}{2}}} = -\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t-1}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-1}\right| + C$$

6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}dx$:

$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}dx = \left(1+x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{31}{15}}dx$ звідси $a=1, b=1, m=-\frac{31}{15}, n=\frac{4}{5}, p=\frac{1}{3}$ і звідси задовільняє умову: $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$:

$\left(-\frac{31}{15}+1\right)\cdot\frac{5}{4}+\frac{1}{3} = -1\in\mathbb{Z}$ тоді робимо таку заміну: $x^{-\frac{4}{5}}+1=t^3; t=\left(1+x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}; x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{5}{4}}; dx=-\frac{15}{4}\left(t^3-1\right)^{-\frac{9}{4}}\cdot$

$\cdot t^2dt$, тоді $\left(1+x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{31}{15}}dx = -\frac{15}{4}\cdot\left(1+\left(\left(\left(t^3-1\right)^{-\frac{5}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\left(t^3-1\right)^{-\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{31}{15}}\left(t^3-1\right)^{-\frac{9}{4}}t^2dt = -\frac{15}{4}\cdot$

$$\cdot\left(1+\left(t^3-1\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(t^3-1\right)^{\frac{31}{12}}\cdot\left(t^3-1\right)^{-\frac{9}{4}}t^2dt = -\frac{15}{4}\left(1+\left(t^3-1\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}t^2dt = -\frac{15}{4}\left(\left(1+\left(t^3-1\right)^{-1}\right)\cdot\left(t^3-1\right)\right)^{\frac{1}{3}}\cdot$$

$\cdot t^2dt = \left(t^3-1+1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot -\frac{15}{4}t^2dt = t\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)t^2dt = -\frac{15}{4}\cdot t^3dt$; Тобто $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}dx = \int -\frac{15}{4}\cdot t^3dt = -\frac{15}{4}\cdot\frac{t^4}{4}+C =$

$$= -\frac{15}{16}\cdot t^4 + C = -\frac{15}{16}\cdot\left(\left(1+x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^4 + C = -\frac{15}{16}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^4} + C$$