

Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра обчислювальної техніки

## **Лабораторна робота №4**

на тему «Мінімізація частково визначених функцій»

з дисципліни “Комп’ютерна логіка. Частина 1”

Виконав:

*Давидчук А. М.*

Факультет ФІОТ

Група ІО-41

Номер варіанту № 4108

Перевірив

*Верба О.А.*

**Тема:** Мінімізація частково визначених функцій.

**Мета:** Вивчення методів мінімізації частково визначених функцій, аналітичного одержання множини ТДНФ, дослідження параметрів комбінаційних схем.

### Виконання роботи

Мій варіант 4108, що у двійковому коді 0001 0000 0000 1100, тому  $h_9 = 0, h_8 = 0, h_7 = 0, h_6 = 0, h_5 = 0, h_4 = 1, h_3 = 1, h_2 = 0, h_1 = 0$ . Тому мій варіант таблиці істинності для 4 функцій буде:

$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	-	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	-	-
0	1	1	1	-	-	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	-	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Часова затримка логічних елементів:

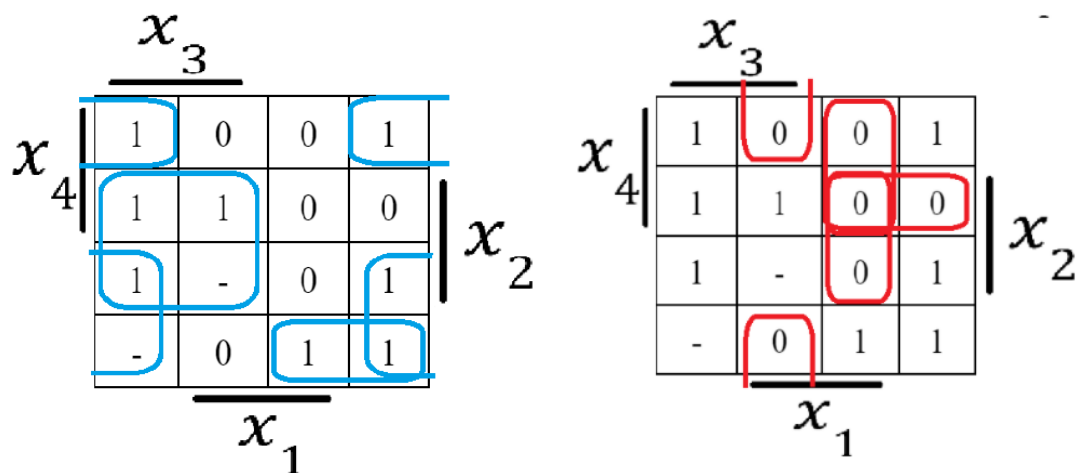
4І-НЕ – 10

4І – 14

2І – 12

2АБО – 12

## Мінімізація за допомогою діаграм Вейча ( $f_1$ )



Звідси МДНФ:

$$f_{\text{МДНФ}} = \overline{x_4} \overline{x_1} \vee x_3 x_2 \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \vee x_4 \overline{x_2} \overline{x_1}$$

Звідси МКНФ:

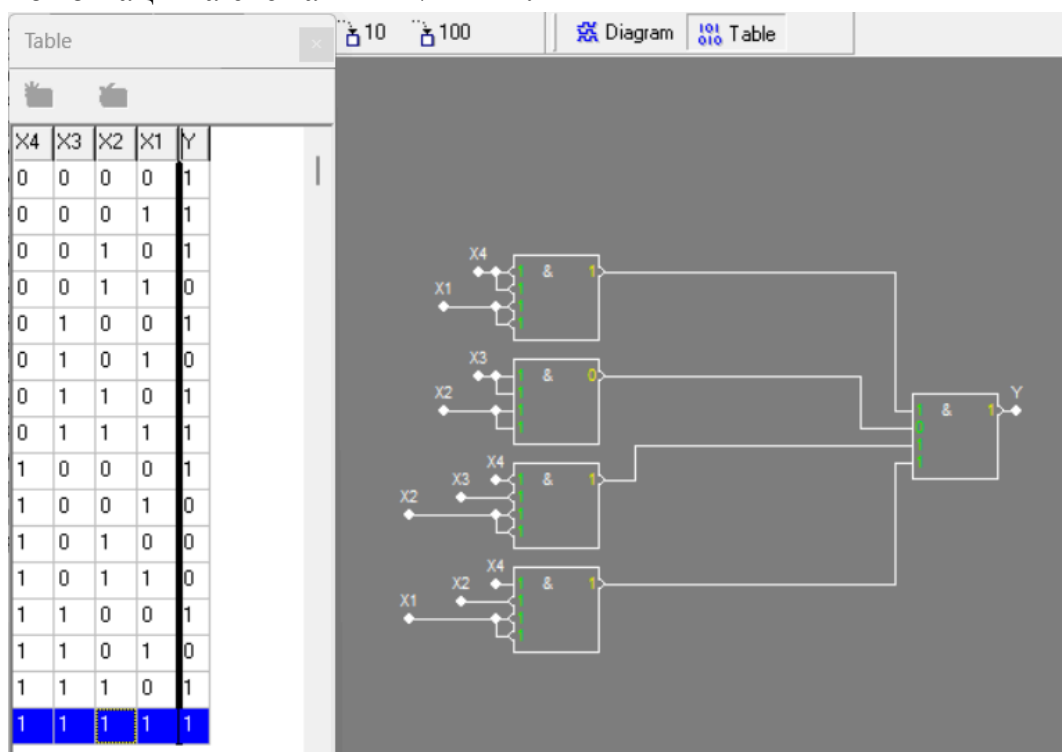
$$f_{\text{МКНФ}} = (\overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1})(\overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_1})(x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})(\overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_2})$$

Нормальні форми І-НЕ/І-НЕ з МДНФ, І-НЕ/І з МКНФ та відразу операторні з елементним базисом 4І-НЕ та 4І:

$$f_{4\text{І-НЕ}/4\text{І-НЕ}} = \overline{\overline{x_4} \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} x_2 \wedge \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \wedge x_4 \overline{x_2} \overline{x_1}}$$

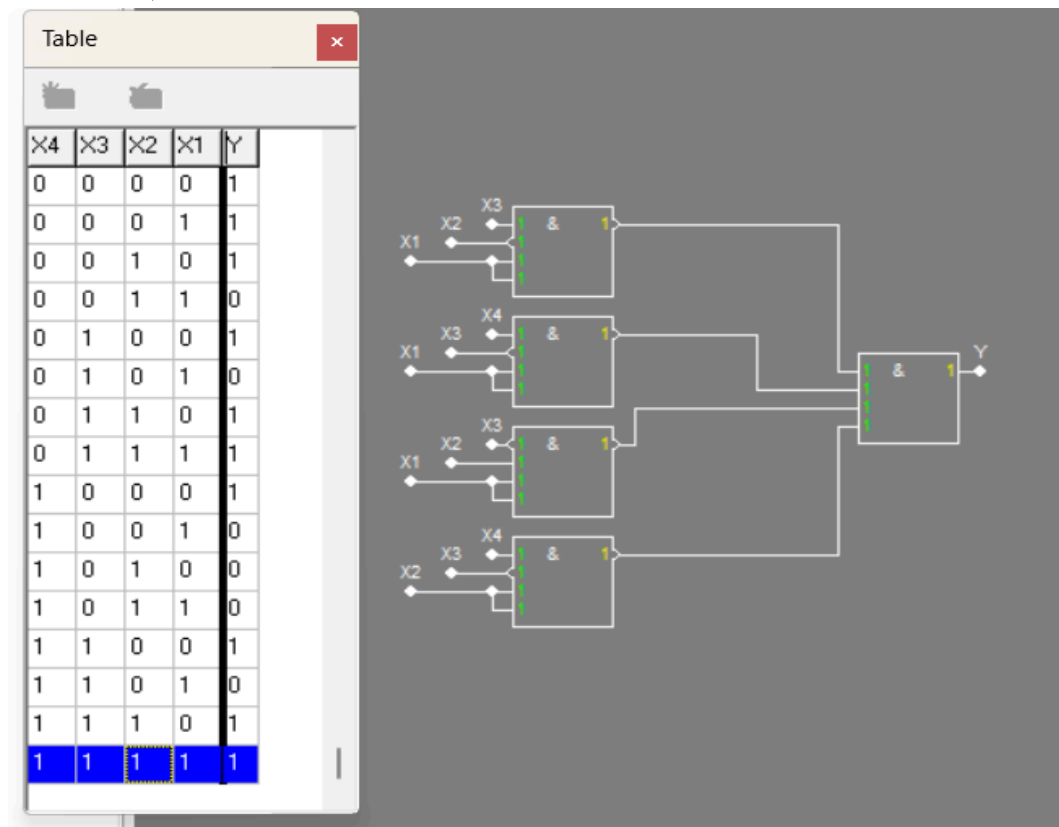
$$f_{4\text{І-НЕ}/4\text{І}} = \overline{x_3 x_2 x_1 \wedge x_4 \overline{x_3} x_1 \wedge x_3 x_2 x_1 \wedge x_4 \overline{x_3} x_2}$$

Комбінаційна схема 4І-НЕ/4І-НЕ:



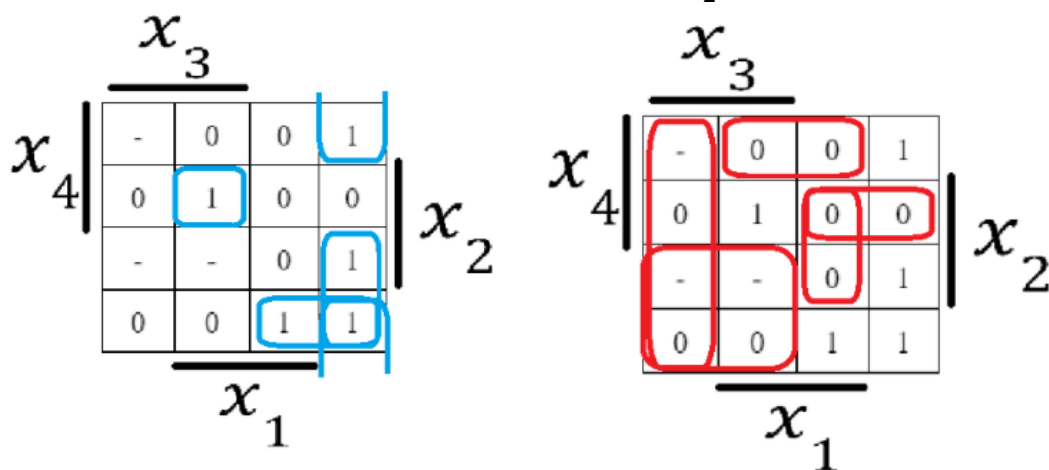
Складність за Квайном: 20; Часова складність:  $2 \cdot 10 = 20$

Комбінаційна схема 4І-НЕ/4І:



Складність за Квайном: 20; Часова складність:  $10+14 = 24$

## Мінімізація за допомогою діаграм Вейча ( $f_2$ )



Звідси МДНФ:

$$f_{\text{МДНФ}} = x_4 x_3 x_2 x_1 \vee \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1} \vee \overline{x_4} \overline{x_3} x_2$$

Звідси МКНФ:

$$f_{\text{МКНФ}} = (\overline{x_3} \vee x_1)(x_4 \vee \overline{x_3})(\overline{x_4} \vee x_2 \vee \overline{x_1})(\overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1})$$

Нормальні форми І-НЕ/І-НЕ з МДНФ та І-НЕ/І з МКНФ

$$f_{\text{І-НЕ/І-НЕ}} = \overline{\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}} \wedge \overline{\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1}} \wedge \overline{\overline{x_4} \overline{x_3} x_2}}$$

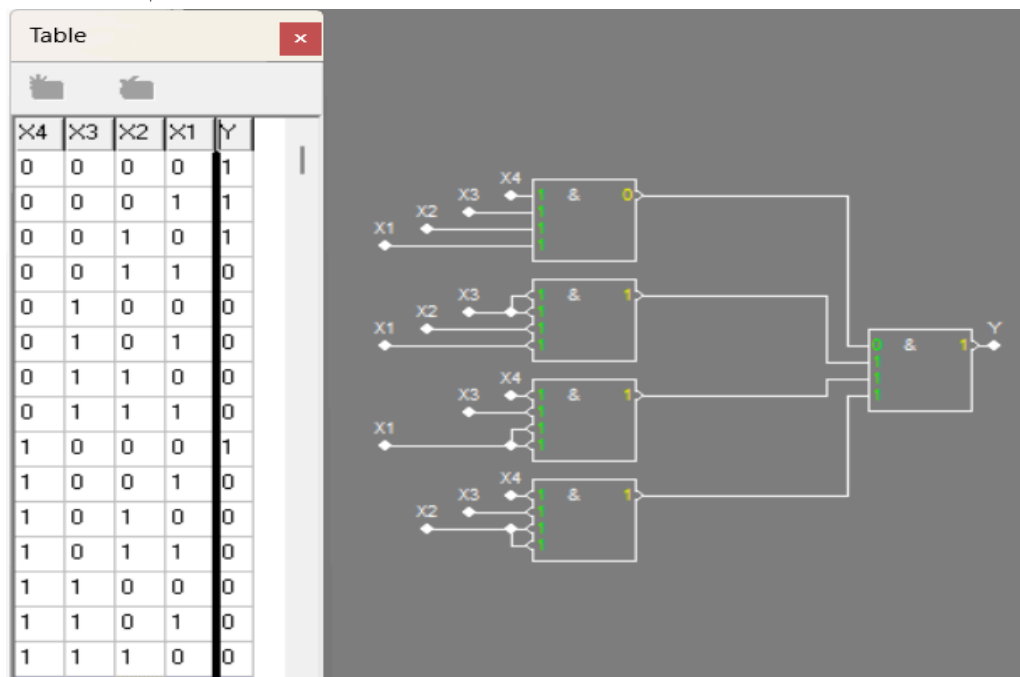
$$f_{\text{І-НЕ/І}} = \overline{x_3 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3 x_2} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

Операторна форми 4І-НЕ/4І-НЕ та 4І-НЕ/4І:

$$f_{\text{4І-НЕ/4І-НЕ}} = \overline{\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1}} \wedge \overline{\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1}} \wedge \overline{\overline{x_4} \overline{x_3} x_2}}$$

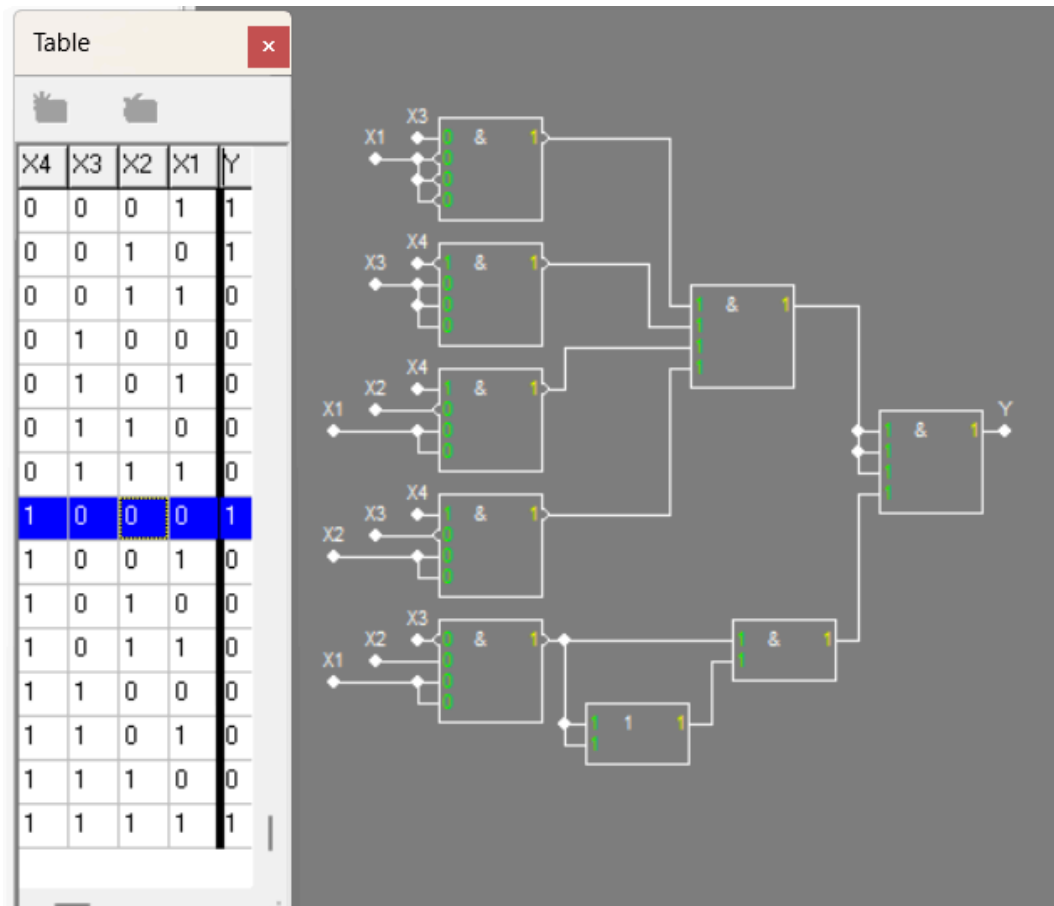
$$f_{\text{4І-НЕ/4І}} = (\overline{x_3 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3 x_2}) \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

Комбінаційна схема 4І-НЕ/4І-НЕ:



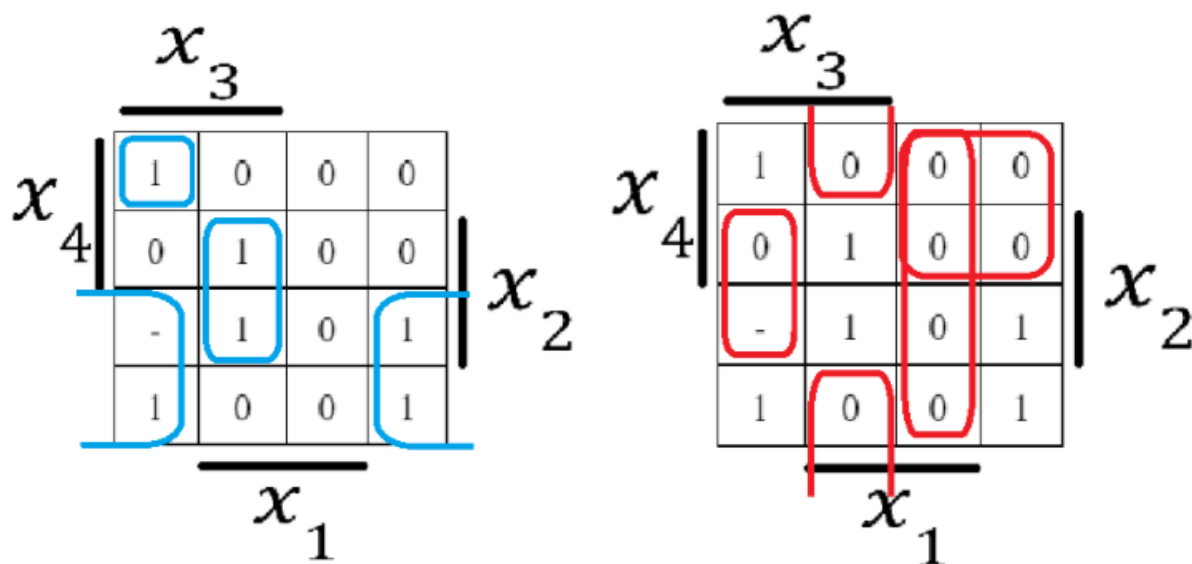
Складність за Квайном: 20; Часова складність:  $2 \cdot 10 = 20$

Комбінаційна схема 4І-НЕ/4І:



Складність за Квайном:  $7 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 32$ ; Часова складність:  $10 + 2 \cdot 12 + 14 = 48$

## Мінімізація за допомогою діаграм Вейча ( $f_3$ )



Звідси МДНФ:

$$f_{\text{МДНФ}} = \overline{x_4} \overline{x_1} \vee x_3 x_2 x_1 \vee x_4 x_3 \overline{x_2} \overline{x_1}$$

Звідси МКНФ:

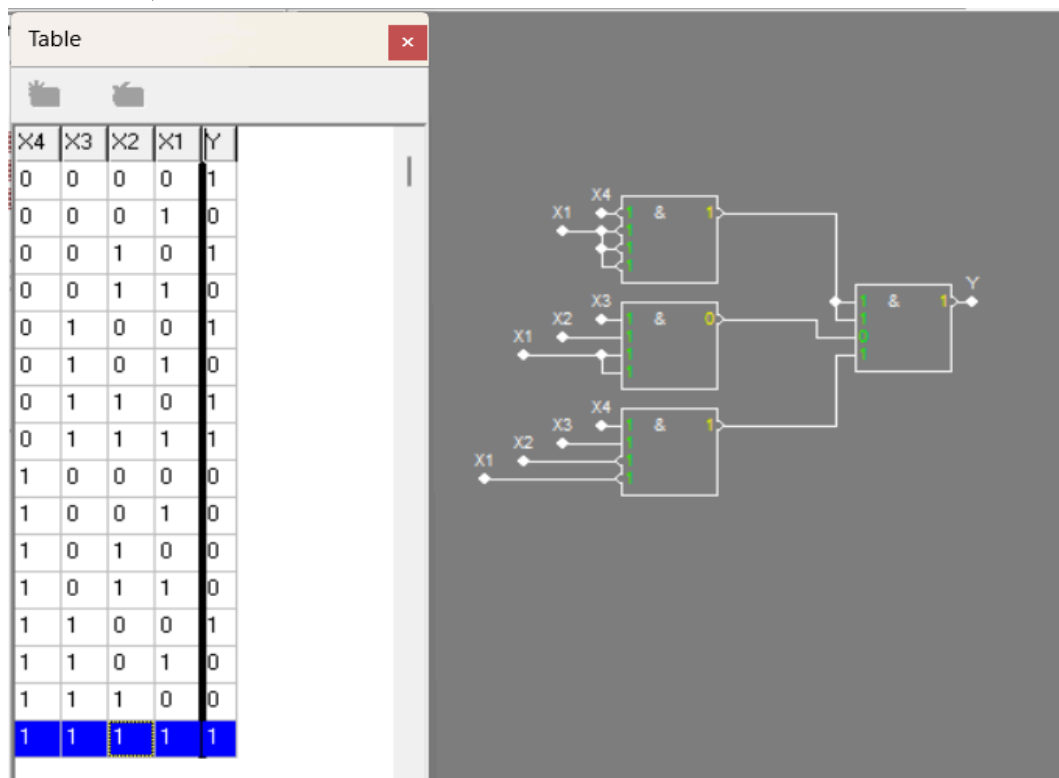
$$f_{\text{МКНФ}} = (x_3 \vee \overline{x_1})(\overline{x_4} \vee x_3)(\overline{x_3} \vee x_2 \overline{x_1})(\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1)$$

Нормальні форми І-НЕ/І-НЕ з МДНФ та І-НЕ/І з МКНФ та відразу операторні з елементним базисом 4І-НЕ та 4І:

$$f_{4\text{І-НЕ}/4\text{І-НЕ}} = \overline{\overline{x_4} \overline{x_1} \wedge x_3 x_2 x_1 \wedge x_4 x_3 \overline{x_2} \overline{x_1}}$$

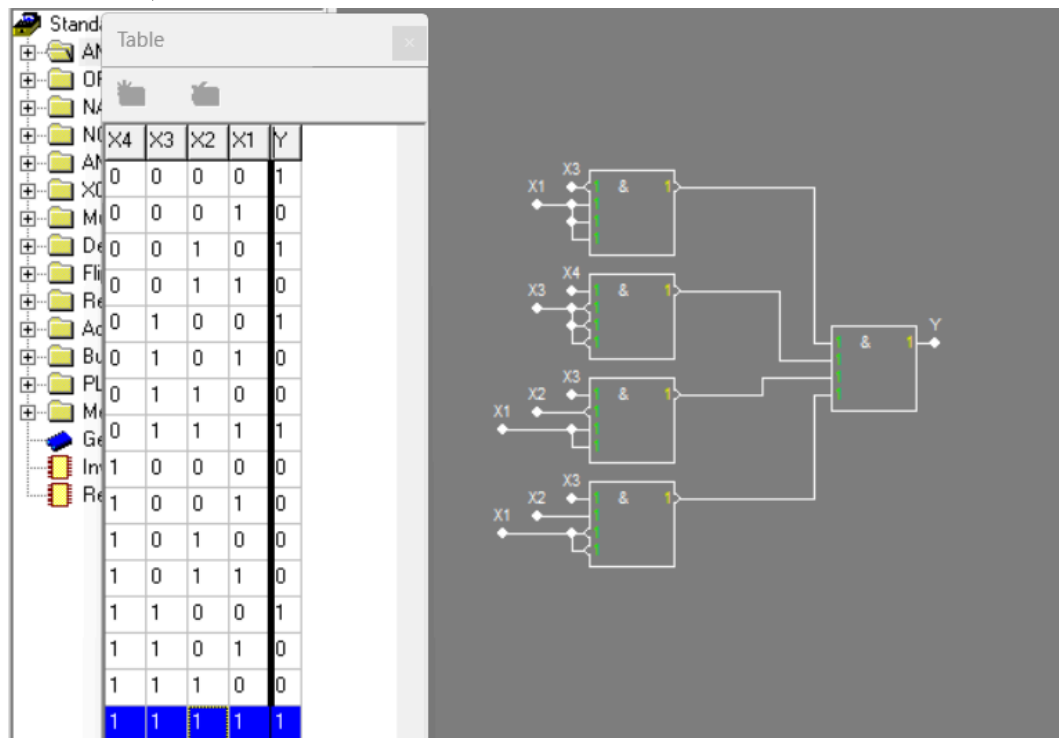
$$f_{4\text{І-НЕ}/4\text{І}} = \overline{x_3 x_1 \wedge x_4 x_3 \wedge x_3 x_2 x_1 \wedge x_3 x_2 x_1}$$

Комбінаційна схема 4І-НЕ/4І-НЕ:



Складність за Квайном: 16; Часова складність:  $2 \cdot 10 = 20$

Комбінаційна схема 4І-НЕ/4І:



Складність за Квайном: 20; Часова складність:  $10 + 14 = 24$



## Мінімізація за Квайном ( $f_1, f_2, f_3$ ) – МДНФ:

ДДНФ трьох функцій (дужками обведені “невизначені” набори):

$$f_1 = 0 \vee 1 \vee 2 \vee (4) \vee 6 \vee (7) \vee 8 \vee 12 \vee 14 \vee 15$$

$$f_2 = 0 \vee 1 \vee 2 \vee (6) \vee (7) \vee 8 \vee (12) \vee 15$$

$$f_3 = 0 \vee 2 \vee 4 \vee (6) \vee 7 \vee 12 \vee 15$$

Після поглинань та склеювань ми отримуємо ТДНФ:

$$\overline{x_3} \overline{x_2} \{1\}$$

$$\overline{x_4} \overline{x_1} \{1, 3\}$$

$$\overline{x_2} \overline{x_1} \{1\}$$

$$\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} \{1, 2\}$$

$$x_3 x_2 x_1 \{2, 3\}$$

$$x_4 x_2 \overline{x_1} \{2, 3\}$$

$$\overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \{2\}$$

$$x_3 x_2 \overline{x_1} \{3\}$$

І всі імпліканти являються ядрами, тому це МДНФ

Операторна форма МДНФ  $f_1$  в елементному базисі 4I-HE/4I-HE:

$$f_{4I-HE/4I-HE} = \overline{\overline{x_3 x_2} \wedge \overline{\overline{x_4 x_1} \wedge \overline{\overline{x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_4 x_3 x_2}}}}}$$

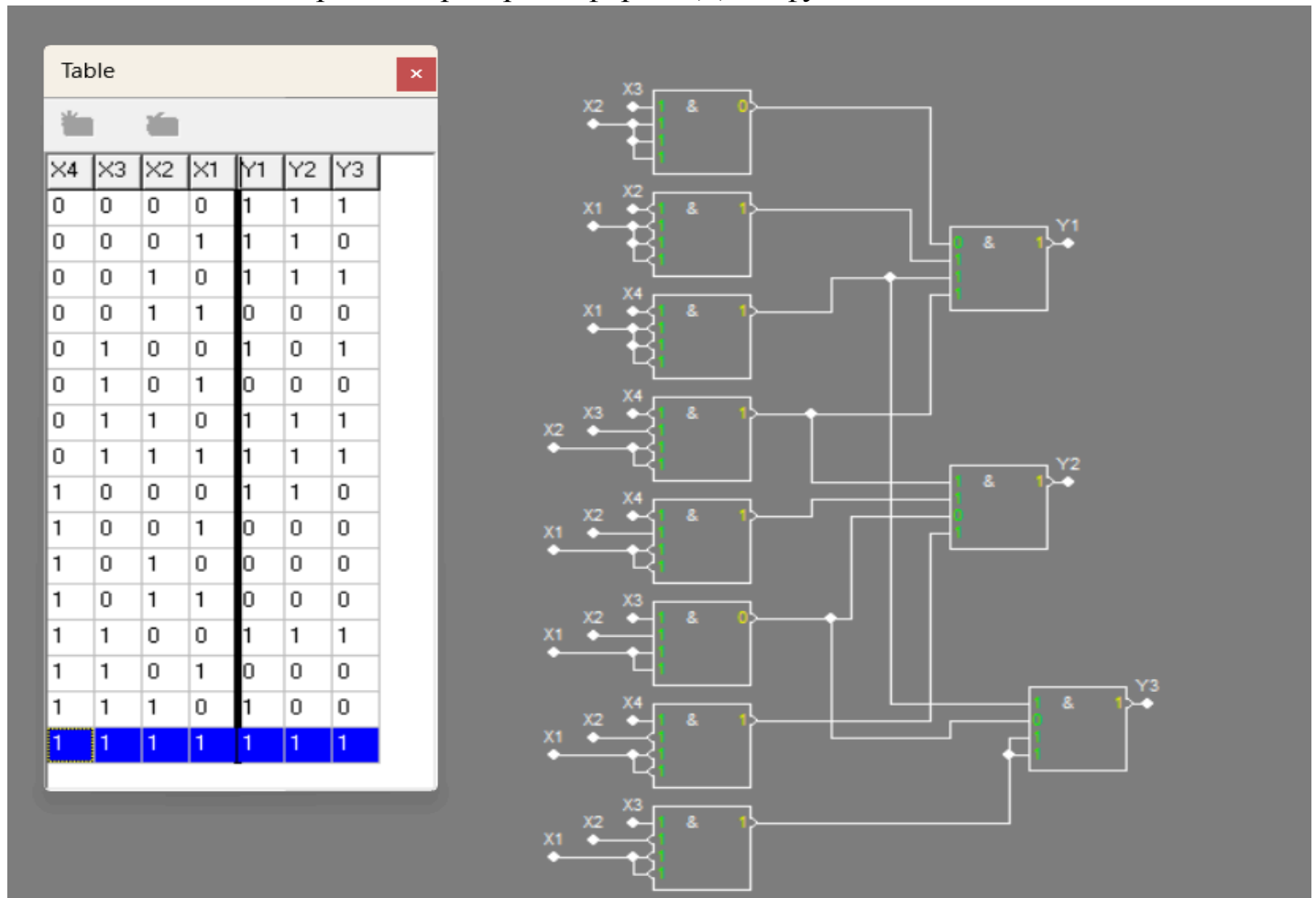
Операторна форма МДНФ  $f_2$  в елементному базисі 4I-HE/4I-HE:

$$f_{4I-HE/4I-HE} = \overline{\overline{x_3 x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_4 x_3 x_2}}}}}$$

Операторна форма МДНФ  $f_3$  в елементному базисі 4I-HE/4I-HE:

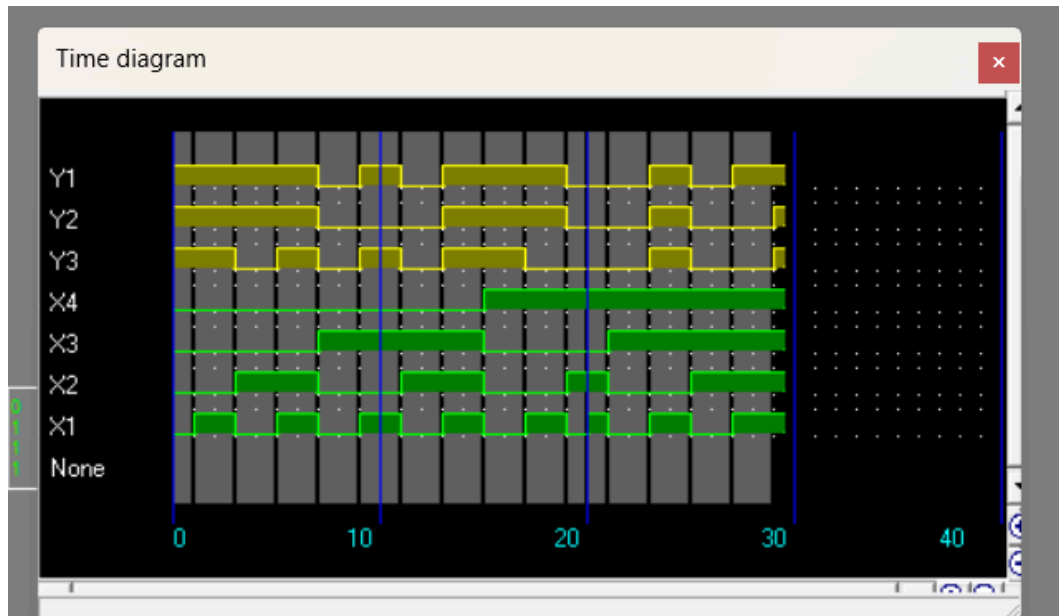
$$f_{4I-HE/4I-HE} = \overline{\overline{x_3 x_2 x_1} \wedge \overline{\overline{x_4 x_1} \wedge \overline{\overline{x_3 x_2 x_1}}}}$$

Комбінаційна схема трьох операторних форм МДНФ функцій:



Складність за Квайном:  $11 \cdot 4 = 44$

Часова складність: 29



## Мінімізація за Квайном ( $f_1, f_2, f_3$ ) – МКНФ:

ДКНФ тьох функцій функцій (дужками обведені “невизначені” набори):

$$f_1 = 3 \wedge (4) \wedge 5 \wedge (7) \wedge 9 \wedge 10 \wedge 11 \wedge 13$$

$$f_2 = 3 \wedge 4 \wedge 5 \wedge (6) \wedge (7) \wedge 9 \wedge 10 \wedge 11 \wedge (12) \wedge 13 \wedge 14$$

$$f_3 = 1 \wedge 3 \wedge 5 \wedge (6) \wedge 8 \wedge 9 \wedge 10 \wedge 11 \wedge 13 \wedge 14$$

Після поглинань та склеювань ми отримуємо ТКНФ:

$$x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \{1\}$$

$$x_4 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \{1\}$$

$$\overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_2} \{1\}$$

$$\overline{x_4} \vee x_2 \vee \overline{x_1} \{1, 2\}$$

$$x_4 \vee \overline{x_3} \{2\}$$

$$\overline{x_3} \vee x_2 \{2\}$$

$$x_3 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \{2\}$$

$$\overline{x_4} \vee \overline{x_2} \vee x_1 \{2\}$$

$$\overline{x_4} \vee x_3 \{3\}$$

$$x_3 \vee \overline{x_1} \{3\}$$

$$x_2 \vee \overline{x_1} \{3\}$$

$$\overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1 \{3\}$$

І всі імпліканти являються ядрами, тому це МКНФ

Операторна форма МКНФ  $f_1$  в елементному базисі 4I-HE/4I:

$$f_{4I-HE/4I} = \overline{x_4 x_3 x_2} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3 x_2} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1}$$

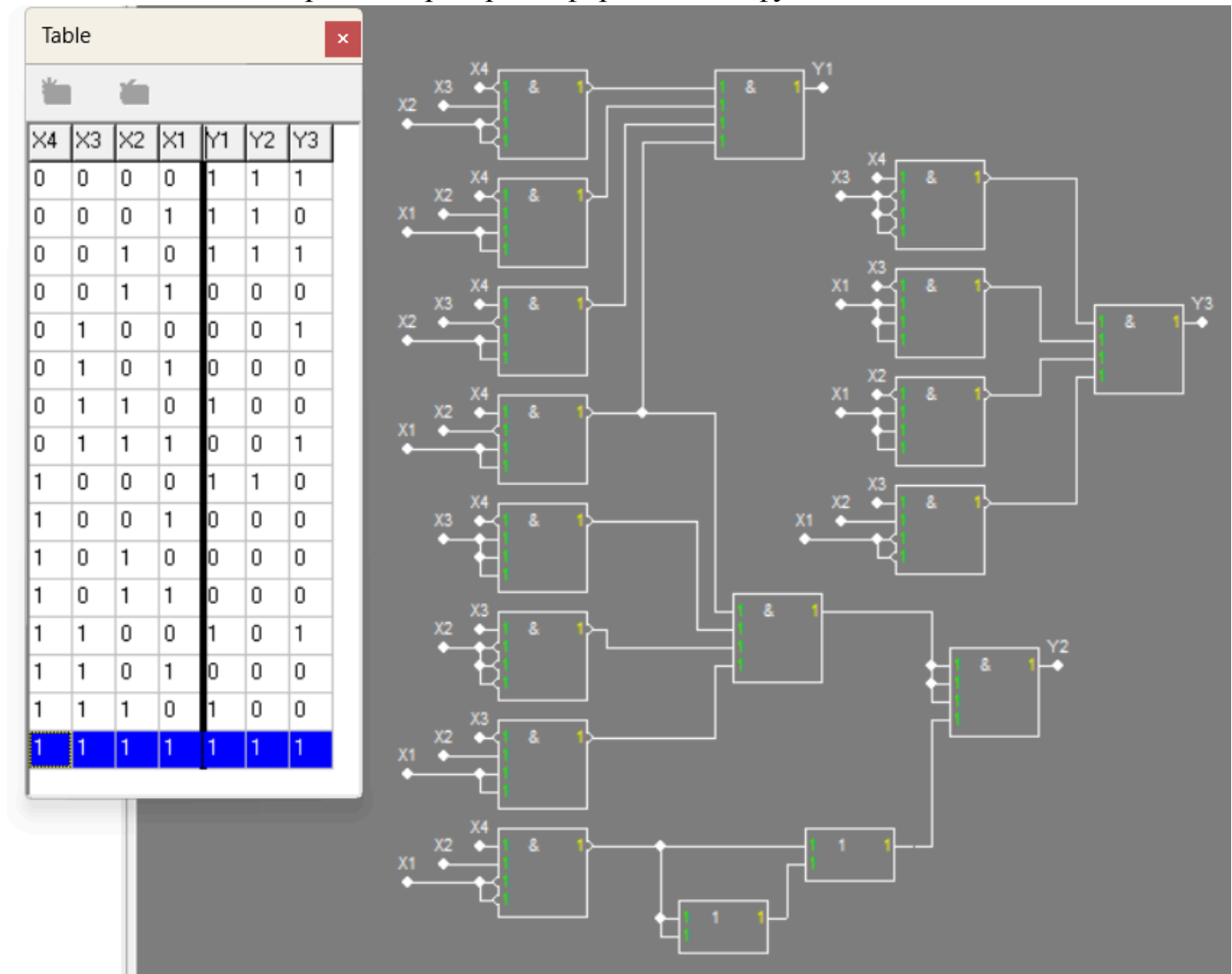
Операторна форма МКНФ  $f_2$  в елементному базисі 4I-HE/4I:

$$f_{4I-HE/4I} = (\overline{x_4 x_3} \wedge \overline{x_3 x_2} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1}) \wedge \overline{x_4 x_2 x_1}$$

Операторна форма МКНФ  $f_3$  в елементному базисі 4I-HE/4I:

$$f_{4I-HE/4I} = \overline{x_4 x_3} \wedge \overline{x_3 x_1} \wedge \overline{x_2 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

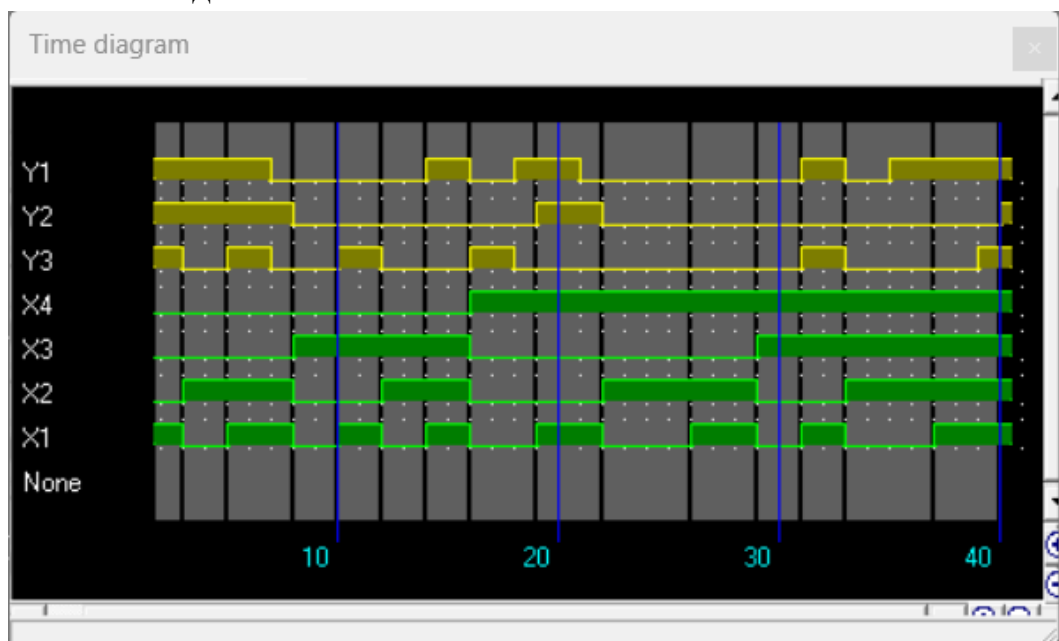
Комбінаційна схема трьох операторних форм МКНФ функцій:



Складність за Квайном (якщо рахувати схему функції  $f_3$  з іншими двома одним цілим):

$$16 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 68$$

Часова складність: 40



### Мінімізація за методом Квайя – Мак-Класкі заперечень $(f_1, f_2, f_3)$ – МДНФ:

Нехай  $\overline{f_1} = y_1, \overline{f_2} = y_2, \overline{f_3} = y_3$

Так як у нас відбувається мінімізація заперечень функцій, то відповідна таблиця істинності матиме вигляд:

$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	-	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	-	-
0	1	1	1	-	-	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	-	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Звідси ДДНФ всіх трьох функцій буде (дужками обведені “невизначені” набори):

$$y_1 = 3 \vee (4) \vee 5 \vee (7) \vee 9 \vee 10 \vee 11 \vee 13$$

$$y_2 = 3 \vee 4 \vee 5 \vee (6) \vee (7) \vee 9 \vee 10 \vee 11 \vee (12) \vee 13 \vee 14$$

$$y_3 = 1 \vee 3 \vee 5 \vee (6) \vee 8 \vee 9 \vee 10 \vee 11 \vee 13 \vee 14$$

Після поглинань та склеювань ми отримуємо ТДНФ:

101X {1}  
 1X01 {1, 2}  
 0X11 {1}  
 010X {1}  
 01XX {2}  
 X10X {2}  
 1X10 {2}  
 X011 {2}  
 10XX {3}  
 X0X1 {3}  
 XX01 {3}  
 X110 {3}

І всі імпліканти являються ядрами, тому це МДНФ

Операторна форма МДНФ  $y_1$  в елементному базисі 4I-HE/4I-HE:

$$f_{4I-HE/4I-HE} = \overline{x_4 x_3 x_2} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3 x_2}$$

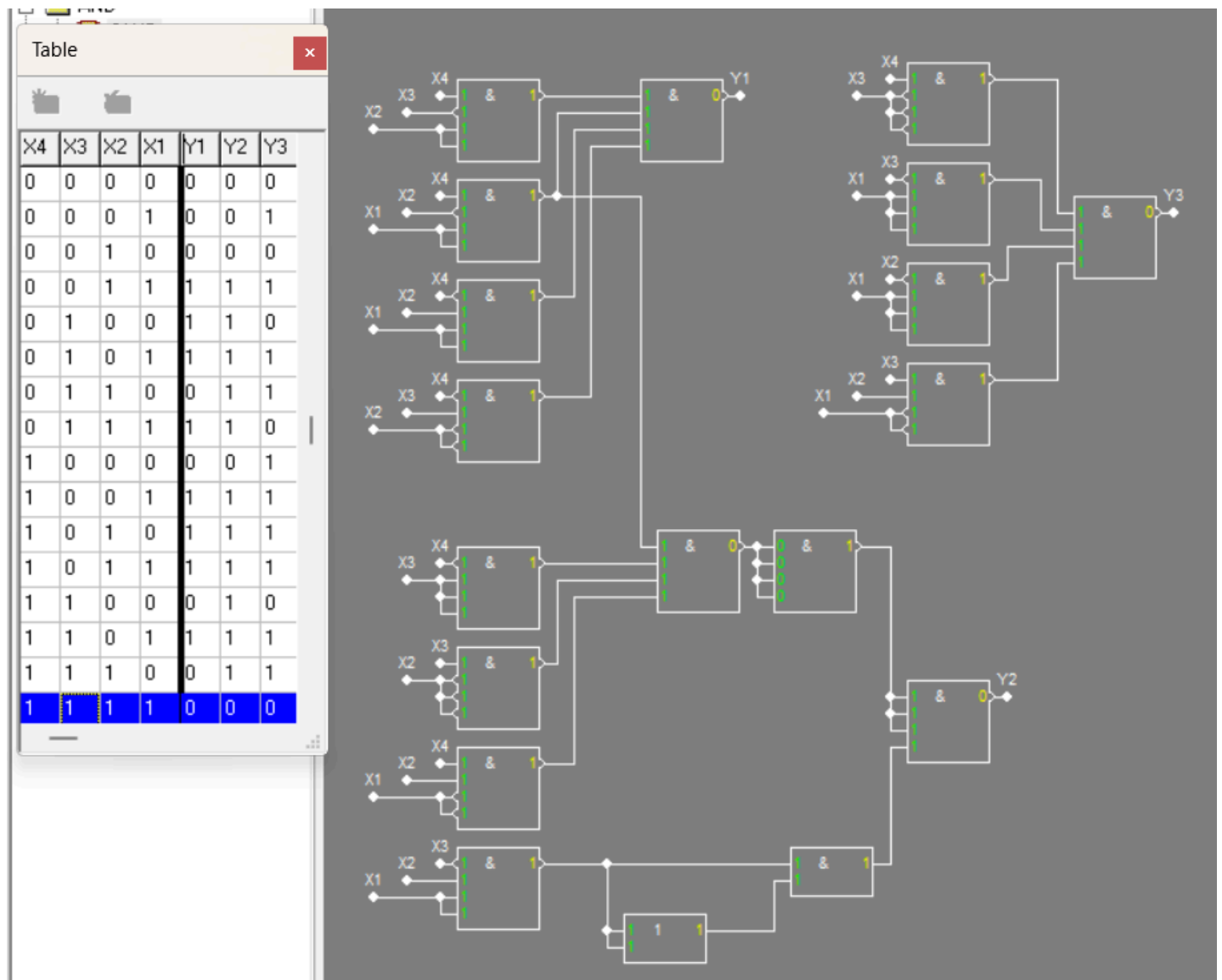
Операторна форма МДНФ  $y_2$  в елементному базисі 4I-HE/4I-HE:

$$f_{4I-HE/4I-HE} = \overline{x_4 x_3} \wedge \overline{x_3 x_2} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

Операторна форма МДНФ  $y_3$  в елементному базисі 4I-HE/4I-HE:

$$f_{4I-HE/4I-HE} = \overline{x_4 x_3} \wedge \overline{x_3 x_1} \wedge \overline{x_2 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

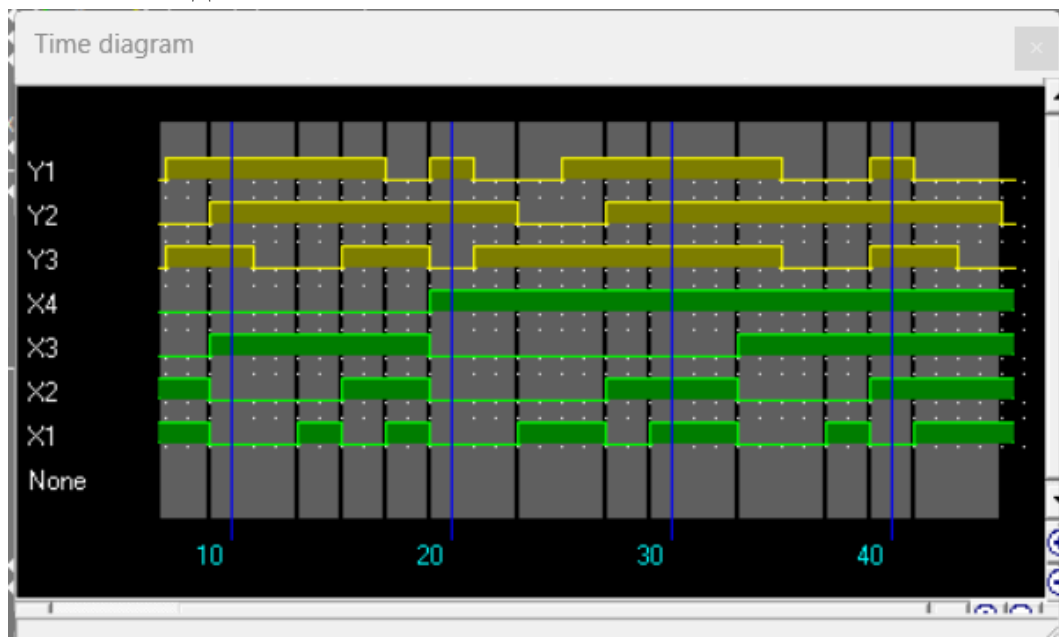
Комбінаційна схема трьох операторних форм МДНФ функцій:



Складність за Квайном (якщо рахувати схему функції  $y_3$  з іншими двома одним цілим):

$$17 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 72$$

Часова складність: 45



## Мінімізація за методом Квайя – Мак-Класкі заперечень ( $f_1, f_2, f_3$ ) – МКНФ:

ДКНФ трьох функцій (дужками обведені “невизначені” набори):

$$y_1 = 0 \wedge 1 \wedge 2 \wedge (4) \wedge 6 \wedge (7) \wedge 8 \wedge 12 \wedge 14 \wedge 15$$

$$y_2 = 0 \wedge 1 \wedge 2 \wedge (6) \wedge (7) \wedge 8 \wedge (12) \wedge 15$$

$$y_3 = 0 \wedge 2 \wedge 4 \wedge (6) \wedge 7 \wedge 12 \wedge 15$$

Після поглинань та склеювань ми отримуємо ТКНФ:

$$1 \vee X \vee X \vee 1 \{1, 3\}$$

$$X \vee X \vee 1 \vee 0 \{1\}$$

$$1 \vee 1 \vee 1 \vee X \{1, 2\}$$

$$X \vee 0 \vee 0 \vee X \{1\}$$

$$1 \vee X \vee 0 \vee 1 \{2\}$$

$$0 \vee X \vee 1 \vee 1 \{2\}$$

$$X \vee 0 \vee 0 \vee 0 \{2, 3\}$$

$$X \vee 0 \vee 1 \vee 1 \{3\}$$

І всі імпліканти являються ядрами, тому це МКНФ

Операторна форма МКНФ  $y_1$  в елементному базисі 4І-НЕ/4І:

$$f_{4I-NE/4I} = \overline{x_4 x_1} \wedge \overline{x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_3 x_2} \wedge \overline{x_3 x_2}$$

Операторна форма МКНФ  $y_2$  в елементному базисі 4І-НЕ/4І:

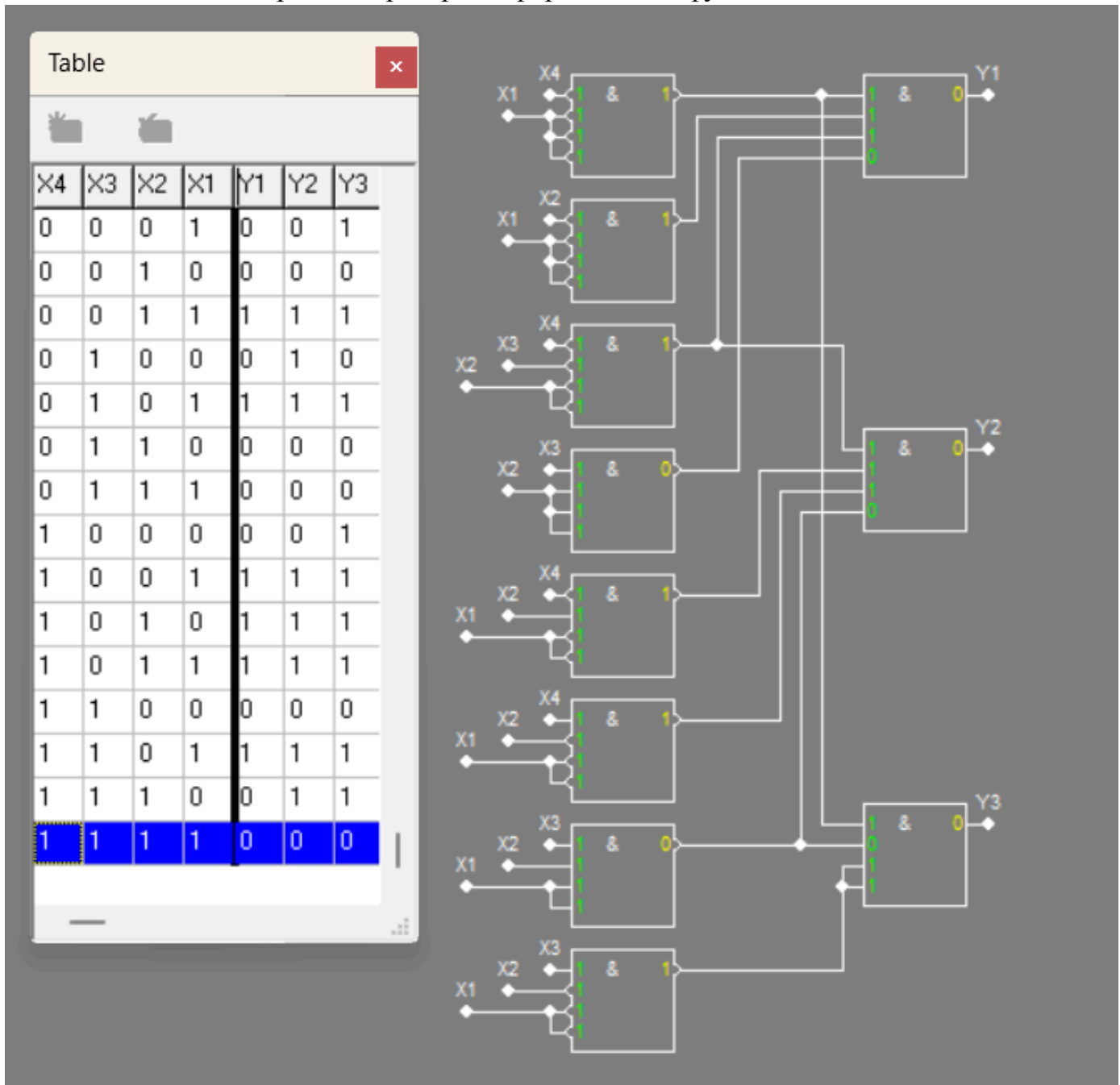
$$f_{4I-NE/4I} = \overline{x_4 x_3 x_2} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_4 x_2 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

Операторна форма МКНФ  $y_3$  в елементному базисі 4І-НЕ/4І:

$$f_{4I-NE/4I} = \overline{x_4 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1} \wedge \overline{x_3 x_2 x_1}$$

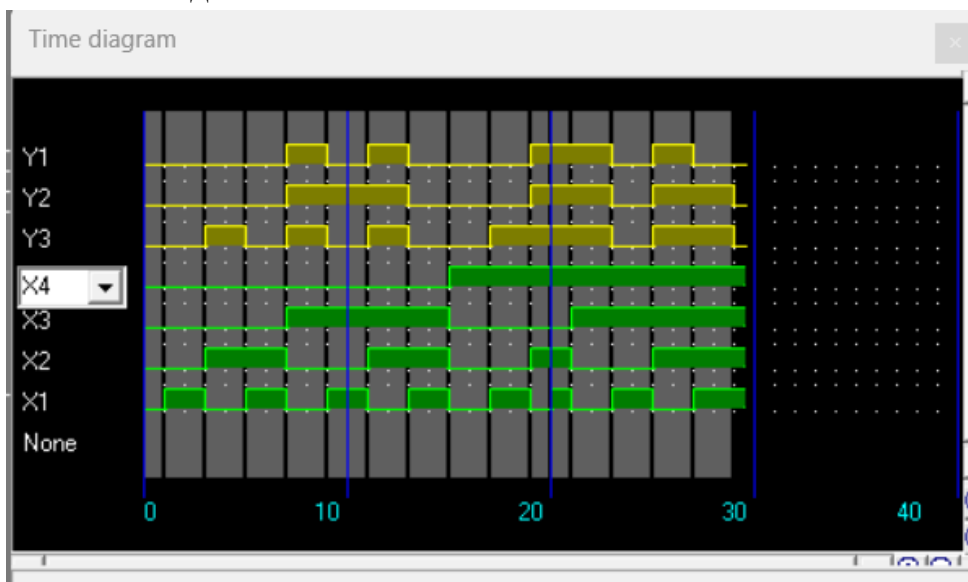


Комбінаційна схема трьох операторних форм МКНФ функцій:



Складність за Квайном:  $11 \cdot 4 = 44$

Часова складність: 29



**Висновок:**

Я провів окрему мінімізацію трьох функцій методом діаграм Вейча, добув МДНФ та МКНФ кожної, нормальні форми, операторні форми та комбінаційні схеми. В одній з якої застосував фільтр задля “глушіння” блукаючого сигналу. Також я провів спільну мінімізацію трьох функцій методом Квайна, але вирішив не показувати сам процес через надмірність інформації – знайшов МДНФ, МКНФ і побудував відповідні операторні представлення в комбінаційних схемах. А також провів спільну мінімізацію заперечень трьох функцій методом Квайна – Мак-Класкі – знайшов МДНФ та МКНФ і побудував відповідні операторні представлення в комбінаційних схемах. Додатково також представив таблицю істинності для нових функцій. Набув навичок роботи з часовою діаграмою та фільтрування сигналів, а також побудова “спільних” схем для декількох функцій.

## Контрольні питання

1. В чому складається особливість мінімізації частково визначених функцій?

У тому, що ми ладні самі обирати, яке значення має бути замість прочерку задля покращення процесу мінімізації

2. Схарактеризувати основні етапи спільної мінімізації систем частково визначених перемикальних функцій.

Випишуємо константи і індекси до них (номера функцій)

Проводимо склеювання для тих конститuentів, який мають ненульових перетинів індексів

Провести поглинання та зібрати до купи всі інші константи чи імпліканти, які не були склеєні

Побудувати таблицю покриття та визначити МДНФ

3. Як одержати операторні форми представлення функцій?

Знайти нормальну форму, а потім вже знайти форму, обмежену на кількість входів

4. Чим пояснюється можливість виникнення збоїв комбінаційних схем?

Тим, що деякі шляхи комбінаційної схеми мають різну складність: проблема “тонок”

5. Як оцінити апаратні витрати і швидкодію комбінаційних схем?

Апаратні витрати можна оцінити за допомогою параметрів складності та часових складностей всіх можливих комбінаційних схем та обрати найоптимальнішу

6. Як забезпечити заданий коефіцієнт розгалуження елементів по виходу при побудові комбінаційних схем з багатьма виходами?

Використовуючи наступні формули:

$$X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_m = (X_1 \cdot \dots \cdot X_g) \cdot \dots \cdot (X_s \cdot \dots \cdot X_m);$$

$$X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_m = (X_1 \vee \dots \vee X_g) \vee \dots \vee (X_s \vee \dots \vee X_m);$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_m} = \overline{(X_1 \cdot \dots \cdot X_g) \cdot \dots \cdot (X_s \cdot \dots \cdot X_m)};$$

$$\overline{X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_m} = \overline{(X_1 \vee \dots \vee X_g) \vee \dots \vee (X_s \vee \dots \vee X_m)},$$

де  $g \leq p$  і  $m - s + 1 \leq p$ .

7. Як усунути короточасні помилкові сигнали на виходах комбінаційної схеми при перехідних процесах?

“Поставити” фільтри в ті шляхи, де відбуваються збої (можна визначити, за малою складністю відносно інших шляхів комбінаційної схеми).

8. Поясніть етапи знаходження мінімального покриття функції методом Петрика.

Спершу ми прирівнюємо всі імпліканти до великих латинських літер

Далі ми пишемо умову покриття для кожної конституенти шляхом того, що ми “записуємо” диз’юнкцію всіх імплікант, які покривають цю конституенту. Наприклад якусь конституенту одночасно покривають дві імпліканти А і В, тоді умова покриття цієї конституенти буде  $A \vee B$ .

Далі ми записуємо всі ці умови в один вираз, між якими стоїть кон’юнкція.

Далі ми всіма способами спрощуємо, поглинаємо, склеюємо і отримуємо ТДНФ.

9. Що є вихідними даними для використання метода Петрика?

Вхідні дані – імпліканти, а також інформація про покриття цієї імпліканти.