Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра обчислювальної техніки

Вища математика

Модульна контрольна робота

«Частина 1. Диференціальне та інтегральне обчислення функції однієї змінної»

Виконав:
студент групи ІО-41
Давидчук А. М.
Залікова книжка № 4108

Київ-2024

№1 перша частина:

№1

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5}{7x^3+x^2+4}=\frac{2}{7}$; степені в чисельнику і в зн. однакові;

б) $\lim_{x\to-3}\frac{2x+6}{x^2-2x-15}=\lim_{x\to-3}\frac{2\cdot(x+3)}{(x+3)(x-5)}=\lim_{x\to-3}\frac{2}{x-5}=-\frac{1}{4}$

в) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+25}+5}{\sqrt{x^2+25}+5}=$

$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+9-9)\cdot(\sqrt{x^2+25}+5)}{(x^2+25-25)\cdot(\sqrt{x^2+9}+3)}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}\cdot(\sqrt{x^2+25}+5)}{\cancel{x^2}\cdot(\sqrt{x^2+9}+3)}=$

$=\frac{\sqrt{25}+5}{\sqrt{9}+3}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

г) $\lim_{x\to0}\frac{tg\,x+tg\,2x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin2x}{\cos2x}+\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\sin2x+\sin x\cdot\cos2x}{\cos x\cdot\cos2x\cdot\sin3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot2x\cdot\frac{\sin2x}{2x}+\cos2x\cdot x\cdot\frac{\sin x}{x}}{\cos x\cdot\cos2x\cdot3x\cdot\frac{\sin3x}{3x}}$; де $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, тоді

$\lim_{x\to0}\frac{2x\cos x+x\cos2x}{3x\cdot\cos x\cdot\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x+\cos2x}{3\cos x\cdot\cos2x}=\frac{2+1}{3\cdot1\cdot1}=1$

д) $\lim_{x\to0}(\cos5x+\sin2x)^{ctg\,3x}=[1^\infty]=e^{\lim_{x\to0}(\cos5x+\sin2x-1)\cdot ctg\,3x}$

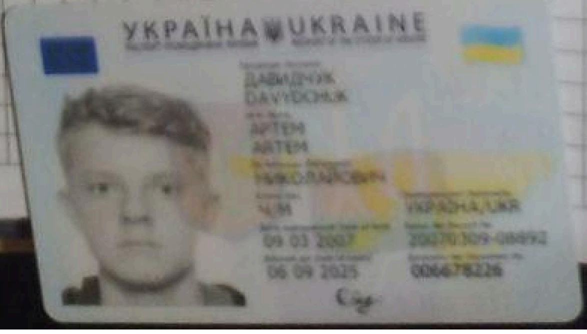
$\lim_{\cos5x\to1}(\cos5x+\sin2x-1)\cdot ctg\,3x=\lim_{x\to0}\frac{\cos3x\cdot(\cos5x+\sin2x-1)}{\sin3x}=$

$=\lim_{x\to0}\cos3x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos5x+\sin2x-1}{\sin3x}$, куди $\cos5x\approx1-\frac{(5x)^2}{2}+O(x^2)$;

$\sin2x\approx2x+O(x^2)$; $\sin3x\approx3x$; тоді

$\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{25x^2}{2}+2x-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-25x^2+4x}{2}}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\cdot\frac{-25x+4}{2}}{3\cancel{x}}=\frac{\frac{4}{2}}{3}=\frac{2}{3}$

Тоді $\lim_{x\to0}(\cos5x+\sin2x)^{ctg\,3x}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$



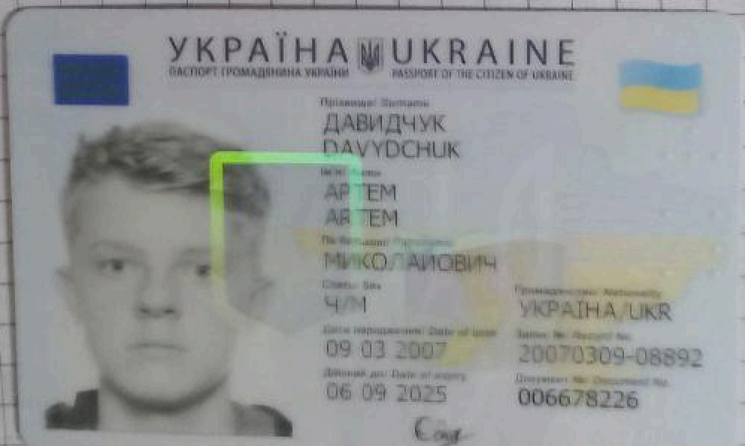
№1 друга частина:

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}\right)^{2x-x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right)^{2x-x^3} = [1^\infty]$, тоді

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}\right)^{2x-x^3} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}-1\right)\cdot(2x-x^3)}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}-1\right)\cdot(2x-x^3) = \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{3x^3-6x}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = -3.$

Тобто $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}\right)^{2x-x^3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$



$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3-1}-1\right)\cdot(2x-x^3)$

№2

а) $y = x^{\arcsin 2x}$;

$y = x^{\arcsin 2x} = e^{\ln(x^{\arcsin 2x})} = e^{\arcsin(2x)\ln x}$;

$y' = \left(e^{\arcsin(2x)\ln x}\right)' = e^{\arcsin(2x)\cdot\ln x}\cdot\left(\arcsin(2x)\cdot\ln x\right)' =$

$= e^{\arcsin 2x\cdot\ln x}\cdot\left(\frac{2\ln x}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{\arcsin 2x}{x}\right) = x^{\arcsin 2x}\cdot\left(\frac{2\ln x}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{\arcsin 2x}{x}\right)$

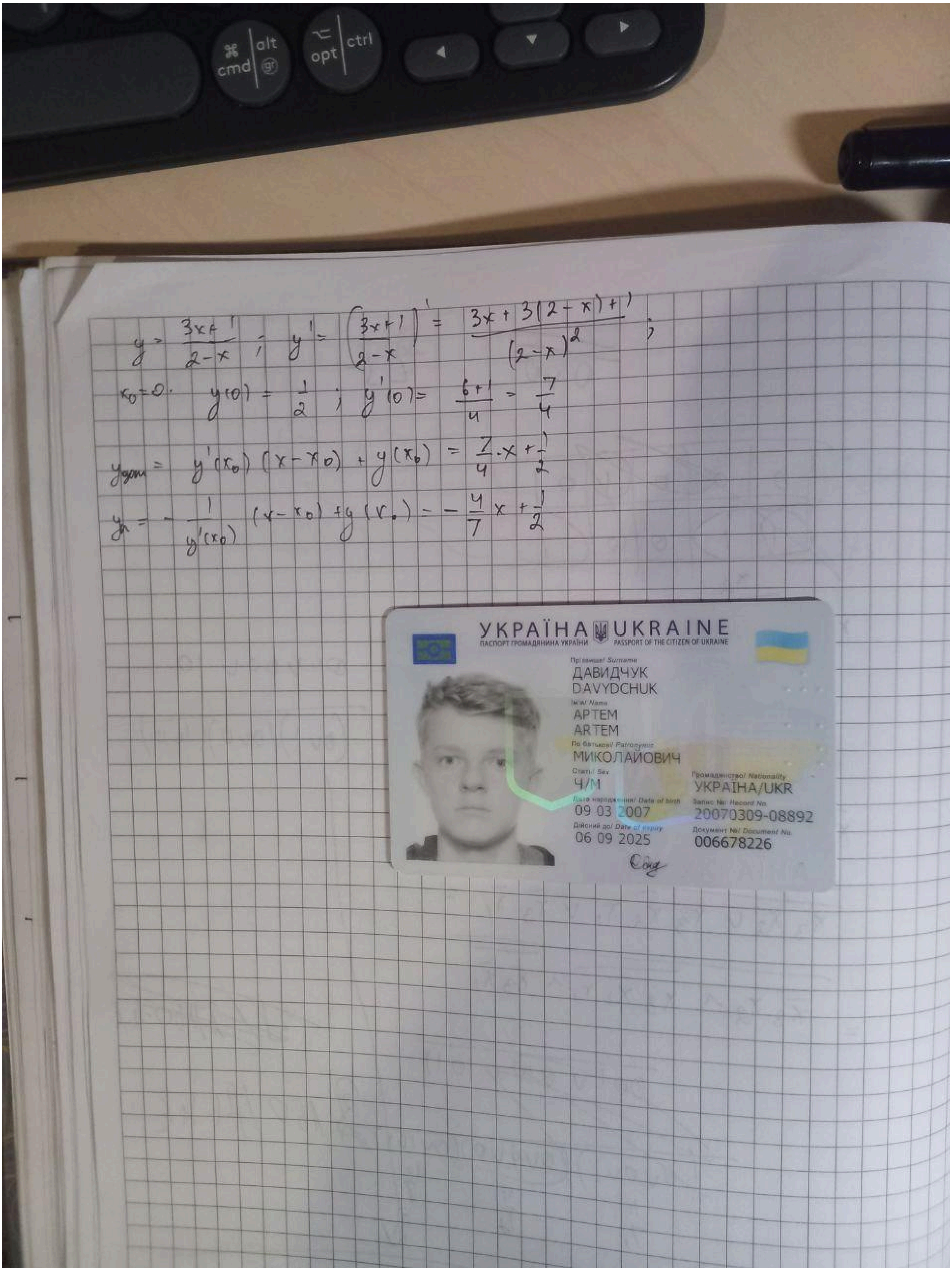
б) $y = tg\,x\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$; $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}}\cdot -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1+2x^2)^2}}$

$y' = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\right)}{\cos^2 x} - \frac{2x\,tg(x)}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{1+2x^2}}}$

$\sqrt[3]{(1+2x^2)^2}$

№3



$y = \frac{3x+1}{2-x}$; $y' = \left(\frac{3x+1}{2-x}\right)' = \frac{3x+3(2-x)+1}{(2-x)^2}$;
$x_0 = 0$. $y(0) = \frac{1}{2}$; $y'(0) = \frac{6+1}{4} = \frac{7}{4}$
$y_{дот} = y'(x_0)(x-x_0) + y(x_0) = \frac{7}{4} \cdot x + \frac{1}{2}$
$y_н = -\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0) + y(x_0) = -\frac{4}{7}x + \frac{1}{2}$
УКРАЇНА UKRAINE
ПАСПОРТ ГРОМАДЯНИНА УКРАЇНИ PASSPORT OF THE CITIZEN OF UKRAINE
Прізвище/ Surname
ДАВИДЧУК
DAVYDCHUK
Ім'я/ Name
АРТЕМ
ARTEM
По батькові/ Patronymic
МИКОЛАЙОВИЧ
Стать/ Sex
Ч/М
Громадянство/ Nationality
УКРАЇНА/UKR
Дата народження/ Date of birth
09 03 2007
Запис №/ Record No.
20070309-08892
Дійсний до/ Date of expiry
06 09 2025
Документ №/ Document No.
006678226

№4

$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y(x_0) = -\frac{\ }{7}x+\frac{\ }{2}$

а) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x+1} =$; $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, тоді

$= \int \frac{dx}{3\sin^2 x+2}$; $\sin x = \frac{tg\, x}{\cos x}$; $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}$; $\cos^2 x = tg^2+1$, тоді

$\int \frac{dx}{3\sin^2 x+2} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{5tg^2 x+2}\,dx = \int \frac{d(tg\, x)}{5tg^2 x+2} = \int \frac{\sqrt{2}\cdot d\left(\frac{\sqrt5}{\sqrt2}tg\, x\right)}{\sqrt5\left(2\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\cdot tg\, x+2\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,tg\, x\right)}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,tg^2 x+1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot arctg\left(\frac{\sqrt5}{\sqrt2}tg\, x\right)$

б) $\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int_4^5 \frac{dx}{(x+2-3)(x+2)} =$

$= \int_4^5 \frac{d(x+2)}{(x+2-3)(x+2)} = \int_4^5 \frac{d(x+2)}{\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\cdot(x+2)^2} =$

$= \int_4^5 \frac{1}{3}\cdot\frac{d\left(1-\frac{3}{x+2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x+2}\right)} = \frac{\ln\left|1-\frac{3}{x+2}\right|}{3}\Big|_4^5 =$

$= \frac{\ln\left|1-\frac{3}{7}\right|}{3} - \frac{\ln\left|1-\frac{3}{6}\right|}{3} = \frac{\ln\frac{4}{7}-\ln\frac{1}{2}}{3}$

№5

$$\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\delta\to 0} \int_0^{1+\delta} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$\int_0^{1+\delta}\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{1+\delta}\frac{d(x^2)}{\sqrt{1^2-(x^2)^2}} = \arcsin(x^2)\Big|_0^{1+\delta} = \arcsin((1+\delta)^2) - \arcsin(0) =$$

$$= \arcsin((1+\delta)^3);\ \text{тоді}\ \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1+\delta}\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\delta\to 0}\arcsin((1+\delta)^3) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$