ФІ Давидчук ФЗ 2

# № 2.5

Умова: Повітряна куля починає підніматися із Землі. Швидкість її руху (підйому) постійна і дорівнює $v_0$. Завдяки вітру, куля набуває горизонтальної компоненти швидкості $v_x = ay$, де $a$ – постійна, $y$ – висота підйому. Знайти: а) величини зносу кулі $x(y)$; б) повного, тангенціального, нормального прискорень кулі.

Розв'язок:

а. Запишемо рівняння руху по вертикалі: $y = v_0 t$, звідси $t = \frac{y}{v_0}$. Горизонтальне зміщення $x$ можна знайти за допомогою інтегрування: $x = \int v_x dt = \int ay\,dt$; підставимо $y = v_0 t$:
$x = \int a(v_0 t)\,dt = a v_0 \int t\,dt = a v_0 \frac{t^2}{2} + C$. Якщо повітряна куля "починає" підніматися із Землі, то при $t=0$, $x=0$, а звідси й $C=0$, отже $x(t) = a v_0 \frac{t^2}{2}$; щоб знайти $x(y)$, ми зробимо заміну $t = \frac{y}{v_0}$: $x(y) = a v_0 \frac{\left(\frac{y}{v_0}\right)^2}{2} = \frac{a}{2v_0} y^2$

б. Повне прискорення – векторна сума нормального та тангенціального прискорень. Так як $x(y)$ є параболою, значить траєкторія руху є криволінійною, а значить нормальне прискорення являється ненульовим.
$|w| = \sqrt{w_t^2 + w_n^2}$; знайдемо $w_t$: $w_t = \frac{dv}{dt}$, де $v$ – повна швидкість, яка дорівнює $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_x^2 + v_0^2} = \sqrt{(ay)^2 + v_0^2}$, тепер виконаємо заміну $y = v_0 t$: $v = \sqrt{(av_0 t)^2 + v_0^2}$; тоді $w_t = \frac{d}{dt} \cdot$
$\cdot \sqrt{(av_0 t)^2 + v_0^2} = \frac{(av_0)^2 \cdot t}{\sqrt{(av_0 t)^2 + v_0^2}}$; тепер знайдемо $w_n$:
$w_n = \frac{v^2}{R}$, але тут виникає проблема знаходження $R$, тому можна піти іншим шляхом. Повне прискорення можна знайти зі

допомогою векторної суми векторів прискорення за x, y та z:

$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$, але за умовою задачі $w_z = 0$, тому $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$,

де $w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(ay)}{dt} = \frac{d(av_0 t)}{dt} = av_0$, $w_y = \frac{d(v_y)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} = 0$,

тобто $w = \sqrt{(av_0)^2 + 0} = av_0$; звідси $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} =$

$$= \sqrt{(av_0)^2 - \left(\frac{(av_0)^2 t}{\sqrt{(av_0 t)^2 + v_0^2}}\right)^2} = \sqrt{(av_0)^2 - \frac{(av_0)^4 t^2}{(av_0 t)^2 + v_0^2}} = \sqrt{(av_0)^2\left(1 - \frac{(av_0 t)^2}{(av_0 t)^2 + v_0^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{(av_0)^2\left(1 - \frac{(at)^2}{(at)^2+1}\right)} = av_0\sqrt{\frac{(at)^2+1}{(at)^2+1} - \frac{(at)^2}{(at)^2+1}} = av_0\sqrt{\frac{(at)^2+1-(at)^2}{(at)^2+1}} =$$

$$= av_0\sqrt{\frac{1}{(at)^2+1}} = \frac{av_0}{\sqrt{(at)^2+1}};$$

$av_0$ — добуток не від'ємний, тому що якби $a<0$, то $v_x = ay$ ставала б меншою, зі збільшенням $y$, що у реальному світі виглядає не логічним, адже в такому б випадку вітер би "гальмував" кулю.

Відповідь: $x(y) = \frac{a}{2v_0}y^2$, $w = av_0$, $w_\tau = \frac{(av_0)^2 t}{\sqrt{(av_0 t)^2 + v_0^2}}$, $w_n = \frac{av_0}{\sqrt{(at)^2+1}}$

# № 2.6

Умова: Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут його повороту залежить від часу як $\varphi = \beta t^2$ де $\beta = 0,2$ рад/$c^2$.

Знайти:

а. повне прискорення $w$ точки на ободі колеса в момент $t = 2,5 c$, якщо швидкість точки в цей момент $v = 0,25$ м/с.

Розв'язок:

Повне прискорення $w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$; так як рух по криволінійний рух, значить $w_n$ – є доцентровим прискоренням, що можна знайти за формулою: $\omega^2 R$, де $\omega$ – кутова швидкість, $R$ – радіус. $w_\tau$ розраховується за формулою $\varepsilon R$, де $\varepsilon$ – кутове прискорення. Знайдемо $w_n$: $w_n = \omega^2 R$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\beta t^2)}{dt} = 2\beta t$; $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(2\beta t)}{dt} = 2\beta$; Також ми знаємо залежність лінійної швидкості з кутовою: $v = \omega R$, звідси $R = \frac{v}{\omega}$; ~~R~~ або $R = \frac{v(t)}{\omega(t)}$; знайдемо $R$ при $t = 2,5c$: $v(2,5) = 0,25$ м/с (з умови), $\omega(2,5) = 2 \cdot 0,2 \cdot 2,5 = 1$. тоді $R = \frac{0,25}{1} = 0,25$ м; Звідси $w_n = 1 \cdot 0,25 = 0,25 \frac{м}{c^2}$; $w_\tau = 2\beta R = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,25 = 0,1 \frac{м}{c^2}$; Звідси $w = \sqrt{0,1^2 + 0,25^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{116}{1600}} = \sqrt{\frac{29}{400}} = \frac{\sqrt{29}}{20}$ м/$c^2$ $\approx 0,27 \frac{м}{c^2}$

Відповідь: $w = \frac{\sqrt{29}}{20}$ м/$c^2$ $\approx 0,27 \frac{м}{c^2}$

## № 2.7

Умова: Камінь кинули горизонтально зі швидкістю $v_x = 10$ м/с.

Знайти: радіус кривизни $R$ траєкторії каменю через час $t_2 = 3$ с після початку руху.

Розв'язок:

Радіус кривизни траєкторії в будь-якій точці визначається за загальною формулою: $R = \frac{(v_x^2 + v_y^2)^{\frac{3}{2}}}{|v_x a_y - v_y a_x|}$, де $v_x$ і $v_y$ – складові швидкості, $a_x$ і $a_y$ – складові прискорення; В даній задачі горизонтальна складова швидкості постійна: $v_x = 10$ м/с, а вертикальна швидкість змінюється за законом: $v_y = gt$, де $g$ – прискорення вільного падіння; $a_x = 0$, тому що $v_x = const$, $a_y = g$ тоді в знаменнику вийде: $|v_x a_y - v_y a_x| = |10 \cdot g - gt \cdot 0| = |10g| = 10g$; тоді $R = \frac{(10^2 + (gt)^2)^{\frac{3}{2}}}{10g}$, ~~а~~; $t_1 = t_2 - t_0$, але так як в умові сказано: "після початку руху", що $t_0 = 0$; $t_1 = t_2 = 3$ с, а значить $R(3) = \frac{(100 + 9g^2)^{\frac{3}{2}}}{10g} \approx \frac{(100 + 9 \cdot 96,231)^{\frac{3}{2}}}{98,1} \approx$

$$\approx \frac{\sqrt[2]{966^3}}{98,1} \approx \frac{30034,6}{98,1} \approx 306,2 \text{ м}$$

Відповідь: $R \approx 306,2$ м