ДКР №3.2 — Визначенні інтеграли
Варіант 8

Давидчук Артем, ІО-41

Завдання №1

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx:$

Тут можна побачити, що $d(x+\sqrt{x}) = (1/2\sqrt{x}+1)dx$, тоді

$\displaystyle\int_1^4 \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx = \int_1^4 \frac{d(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})^2} = \int_1^4 (x+\sqrt{x})^{-2}d(x+\sqrt{x}) = -\frac{1}{x+\sqrt{x}}\bigg|_1^4$ тоді за формулою Ньютона-Лейбніца

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\bigg|_a^b = F(b)-F(a);$ тоді $\displaystyle -\frac{1}{x+\sqrt{x}}\bigg|_1^4 = -\frac{1}{4+\sqrt{4}} - \left(-\frac{1}{1+\sqrt{1}}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

2. $\displaystyle\int_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)dx:$

$\displaystyle\int_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)dx;$ Використовуватиму метод інтегрування частинами: $\displaystyle\int_b^a f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\bigg|_b^a - \int_b^a f'(x)g(x)dx$

В нашому випадку: $\displaystyle f = \ln^2(x-1), g' = (x-1)^3, g = \frac{(x-1)^4}{4}, f' = \frac{2\ln(x-1)}{x-1}$ тоді згідно за формулою:

$\displaystyle\int_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)dx = \ln^2(x-1)\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \ln(x-1)(x-1)^3dx,$ так само зробимо із залишковим інтегралом:

$\displaystyle\int_2^3 \ln(x-1)(x-1)^3dx;$ тут $\displaystyle f = \ln(x-1), g' = (x-1)^3, g = \frac{(x-1)^4}{4}, f' = \frac{1}{x-1}$ тоді $\displaystyle\int_2^3 \ln(x-1)(x-1)^3dx = \ln(x-1)\cdot$

$\displaystyle\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_2^3 - \frac{1}{4}\int_2^3 (x-1)^3dx = \ln(x-1)\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_2^3 - \frac{1}{4}\int_2^3 (x-1)^3d(x-1) = \ln(x-1)\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_2^3 - \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_2^3 =$

$\displaystyle\frac{(x-1)^4}{4}\left(\ln(x-1)-\frac{1}{4}\right)\bigg|_2^3$ тоді фінальний визначений інтеграл буде дорівнювати: $\displaystyle\int_2^3 (x-1)^3\ln^2(x-1)dx =$

$\displaystyle = \ln^2(x-1)\cdot\frac{(x-1)^4}{4}\bigg|_2^3 - \frac{(x-1)^4}{4}\left(\ln(x-1)-\frac{1}{4}\right)\bigg|_2^3 = \frac{(x-1)^4}{4}\left(\ln^2(x-1)-\frac{1}{2}\left(\ln(x-1)-\frac{1}{4}\right)\right)\bigg|_2^3 =$

$\displaystyle\frac{(x-1)^4}{4}\left(\ln^2(x-1)-\frac{\ln(x-1)}{2}+\frac{1}{8}\right)\bigg|_2^3 = \frac{(3-1)^4}{4}\left(\ln^2(2)-\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{8}\right) - \frac{(2-1)^4}{4}\left(\ln^2(1)-\frac{\ln(1)}{2}+\frac{1}{8}\right) = 4\ln^2(2)-2\ln(2)+$

$\displaystyle+\frac{1}{2}-\frac{1}{32} = 4\ln^2(2)-2\ln(2)+\frac{15}{32}$

3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\cos(x)dx:$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)dx = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)d(2x); f = x, g' = \sin(2x), g = \int\sin(2x)d(2x) = -\cos(2x); f' = 1$

$$\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(2x)d(2x) = \frac{1}{4}\left(-x\cos(2x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)d(2x)\right) = \left(-\frac{1}{4}x\cos(2x) + \frac{1}{8}\sin(2x)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4}\pi\cos(2\pi) + \frac{1}{8}\sin(2\pi) -$$

$$-\left(-\frac{1}{4}(-\pi)\cos(-2\pi) + \frac{1}{8}\sin(-2\pi)\right) = -\frac{\pi}{4} + 0 - \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} 2^4\sin^4(x)\cos^4(x)dx$:

$$\int_0^{\pi} 2^4\sin^4(x)\cos^4(x)dx = \int_0^{\pi}(2\sin(x)\cos(x))^4dx = \int_0^{\pi}\sin^4(2x)dx;\ \ \sin^4(2x) = \left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1-\cos(4x)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(1-2\cos(4x)+\cos^2(4x));\ \ \cos^2(4x) = \frac{1+\cos(8x)}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos(8x));\ \text{тобто}\ \frac{1}{4}(1-2\cos(4x)+\cos^2(4x)) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-2\cos(4x)+\frac{1}{2}(1+\cos(8x))\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(8x);\ \text{тобто}\ \int_0^{\pi} 2^4\sin^4(x)\cos^4(x)dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos(8x)\right)dx = \frac{3}{8}\int_0^{\pi}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(4x)dx + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos(8x)dx = \frac{3}{8}x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\cos(4x)d(4x) +$$

$$+ \frac{1}{64}\int_0^{\pi}\cos(8x)d(8x) = \frac{3}{8}x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{8}\sin(4x)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{64}\sin(8x)\Big|_0^{\pi} = \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(8x)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}$$

5. $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$:

$$(x-1)(x+2) = x^2+x-2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2;\ \text{тобто}\ \int_4^5\frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int_4^5\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|\Bigg|_4^5 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_4^5 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{4}{7}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{6}\right| = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{7}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{4}{7}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{7}\right)$$

6. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$:

$\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{x\sqrt{1-x^2}}{x^7}dx$; Зроблю заміну $x=\sin(t), dx = d(\sin(t)) = -\cos(t)dt,$ а також відбувається

"трансформування" границь визначеного інтегралу: $\begin{array}{c|c|c} x & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2}\end{array}$ з формули $t = \arcsin(x)$, тоді $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx =$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sqrt{1-\sin^2(t)}}{\sin^6(t)}\cos(t)dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(t)}{\sin^6(t)}dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}\cdot\frac{1}{\sin^2(t)}\cdot\frac{1}{\sin^2(t)}dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^2(t)\cdot(1+\mathrm{ctg}^2(t))d(\mathrm{ctg}(t)) =$$

$$-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{ctg}^2(t)+\mathrm{ctg}^4(t))d(\mathrm{ctg}(t)) = -\left(\frac{\mathrm{ctg}^3(t)}{3} + \frac{\mathrm{ctg}^5(t)}{5}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{\mathrm{ctg}^3(\frac{\pi}{2})}{3} + \frac{\mathrm{ctg}^5(\frac{\pi}{2})}{5}\right) - \left(-\left(\frac{\mathrm{ctg}^3(\frac{\pi}{4})}{3} + \frac{\mathrm{ctg}^5(\frac{\pi}{4})}{5}\right)\right) =$$

$$-\left(\frac{0}{3}+\frac{0}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4}$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+5x+4} = \int_1^2 \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \int_1^2 \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}\right|\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{6}\right| - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2}{5}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

8. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx$:

$\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx = \int_0^{\ln(2)} (e^x)^0\cdot\sqrt{e^x-1}dx;$ Звідси ми можемо застосувати теорему Чебишова. А саме у виразі $(e^x)^0\cdot$

$\cdot\sqrt{e^x-1}dx$ — це вираз типу $x^m(a+bx^n)^p$ де $m=0, n=1, a=-1, b=1, p=\dfrac{1}{2}$ і виходить така рівність: $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{0+1}{1}=1\in\mathbb{Z}$, тоді робиться така заміна: $t^2=e^x-1, t=\sqrt{e^x-1}, x=\ln(t^2+1), dx=d(\ln(t^2+1))=\dfrac{2t}{t^2+1}dt$, а також

відбувається "трансформування" границь визначеного інтегралу: $\begin{array}{c|c|c} x & \ln(2) & 0 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}$ з формули $t=\sqrt{e^x-1}$ тоді

$\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt;$ Перетворимо неправильний дріб на правильний дріб: $\begin{array}{r|l} 2t^2 & t^2+1 \\ \cline{2-2} -\,2t^2-2 & 2 \\ \hline -\,2 & \end{array}$ тоді

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt = \int_0^1\left(2-\frac{2}{t^2+1}\right)dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1\frac{dt}{t^2+1} = 2x\Big|_0^1 - 2\operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 = (2x-2\operatorname{arctg}(x))\Big|_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}$$

Завдання №2

1. $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$:

$$\int_4^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}} = \lim_{b\to\infty}\int_4^b\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}; \int_4^b\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}} = \int_4^b\frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx = \int_4^b\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+1}}dx+$$

$$+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-3}} = \frac{1}{2}\int_4^b\frac{d(x^2-4x+1)}{\sqrt{x^2-4x+1}} + 2\int_4^b\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-3}} = \sqrt{x^2-4x+1}\Big|_4^b + 2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|\Bigg|_4^b =$$

$$\left(\sqrt{x^2-4x+1}+2\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|\right)\Bigg|_4^b = \sqrt{b^2-4b+1}+2\ln\left|b-2+\sqrt{b^2-4b+1}\right| -$$

$-\left(\sqrt{4^2-4\cdot4+1}+2\ln\left|4-2+\sqrt{4^2-4\cdot4+1}\right|\right) = \sqrt{b^2-4b+1}+2\ln\left|b-2+\sqrt{b^2-4b+1}\right|-1-2\ln(3)$ тоді границя буде

$$\lim_{b\to\infty}\int_4^b\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}} = \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b^2-4b+1}+2\ln\left|b-2+\sqrt{b^2-4b+1}\right|-1-2\ln(3)\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b^2-4b+1}+2\ln\left|b-2+\sqrt{b^2-4b+1}\right|\right)-1-2\ln(3) = \lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{(b-2)^2-3}+2\ln\left|b-2+\sqrt{(b-2)^2-3}\right|\right)-1-$$

$$-2\ln(3) = \sqrt{(\infty-2)^2-3}+2\ln\left|\infty-2+\sqrt{(\infty-2)^2-3}\right|-1-2\ln(3) = \infty+2\ln(\infty)-1-2\ln(3) = \infty+\infty-1-2\ln(3) = \infty$$

а це означає, що інтеграл $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ є розбіжним

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$:

Підінтегральний вираз невизначений при $x = 1,$ тобто у верхній межі. Такий інтеграл буде еквівалентним такому виразу

$$\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1+\delta} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}; \int_0^{1+\delta} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{1+\delta} \frac{d(x^2)}{\sqrt{1^2-\left(x^2\right)^2}} = \arcsin\left(x^2\right)\Big|_0^{1+\delta} = \arcsin\left((1+\delta)^2\right) - \arcsin(0) =$$

$$= \arcsin\left((1+\delta)^2\right);\text{ тоді } \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1+\delta} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\delta\to 0}\arcsin\left((1+\delta)^2\right) = \arcsin\left((1+0)^2\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2};$$ Також хочу зазначити,

що значення такого інтегралу $\displaystyle\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$ буде дуже-дуже сильно наближеним до числа $\dfrac{\pi}{2}$, а не чітко йому дорівнювати