



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES DE DZYALOSHINSKII-MORIYA EN EL ESPECTRO DE ONDAS DE ESPÍN DE LÁMINAS FERROMAGNÉTICAS DELGADAS

Tesis de Grado presentada por

Sr. David Ignacio Cortés Ortuño

como requisito parcial para optar al grado de

Magíster en Ciencias, Mención Física

Profesor Guía

Dr. Pedro Miguel Landeros Silva

Valparaíso - Chile

2013

TÍTULO DE LA TESIS:

INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES DE DZIALOSHINSKII-MORIYA EN EL ESPECTRO DE ONDAS DE ESPÍN DE LÁMINAS FERROMAGNÉTICAS DELGADAS

AUTOR:

DAVID IGNACIO CORTÉS ORTUÑO

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el Grado de Magíster en Ciencias, Mención Física de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Pedro Landeros Silva

Universidad Técnica Federico Santa María

Dr. Pedro Orellana Dinamarca

Universidad Técnica Federico Santa María

Dr. Alvaro Núñez Vásquez

Universidad de Chile

Valparaíso, Chile. 2013

Dedicado a mis padres.

AGRADECIMIENTOS

Es importante para mí destacar en este espacio, a todos los que de alguna forma, me han apoyado para poder concluir este trabajo, el cual ha sido un gran desafío en el plan de Magíster, y me ha llevado a lograr grandes objetivos que tenía considerados al comenzar mis estudios. Primero que todo, quisiera mencionar a mi familia ya que, a pesar de que es grande la distancia que me separa de algunos de ellos, siempre han sido una fuente constante de ánimo para continuar y concretar mis proyectos. Quiero distinguir además, a mi hermano, con quien he podido confiar en que las dificultades no son insuperables y por la gran compañía que me ha otorgado a lo largo de estos años. También, quisiera agradecer a mi profesor tutor, Pedro Landeros, con quien la experiencia de trabajar ha sido muy enriquecedora. El constante apoyo en todo ámbito académico y la cercanía para poder discutir en investigación, ha facilitado en gran medida la realización de mis proyectos personales. Haber trabajado junto con él en magnetismo, me ha dado grandes motivaciones, y ahora se ha convertido en uno de mis intereses, por lo que será el área en la cual continuaré mis futuros estudios. Además, quiero mencionar a mi primer tutor, David Laroze, con quien aun mantengo comunicación. Me ha guiado en varias de mis decisiones, me ha recomendado a lo largo de mi carrera y fue el inspirador para que pudiera comenzar este postgrado. No puedo dejar de mencionar, a todos mis amigos, en especial, a los que han sido más cercanos estos años, el Omar, Diego S., el Gepo, la Romi, el ES y el Rob, quienes han sido imprescindibles para poder disfrutar y poder mantener la felicidad, junto a sus compañías, ya que las grandes experiencias de vida son igual de importantes para querer crecer como persona. Hay varios más que no he nombrado, pero han sido en igual medida un gran aporte en algún momento de mi vida.

Por último, agradezco la gran ayuda que me aportaron la UTFSM, con sus proyectos (PIIC) y becas internas; CONICYT, con la Beca de Magíster, y el Proyecto FB0807 de CEDENNA, como apoyos continuos para financiar e incentivar mis estudios.

David

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el estudio de la dinámica de espines en sistemas magnéticos ha sido de gran importancia, ya que gracias a diversas técnicas, como la Resonancia Ferromagnética (FMR) o la Dispersión de Luz de Brillouin (BLS), ha sido posible caracterizar sus propiedades, entre las cuales podemos nombrar las frecuencias o campos de resonancia, anchos de línea, anisotropías del material, etc. En este contexto, uno de los sistemas de interés han sido las láminas (films) magnéticas delgadas, las cuales presentan una serie de fenómenos nuevos (e.g. dispersión de dos magnones) y cuyo estudio ha estado orientado principalmente en su aplicación en la grabación magnética de datos.

Este trabajo está centrado en describir este tipo de sistemas. Específicamente, trataremos con láminas ferromagnéticas muy delgadas que presenten algún tipo de asimetría en su estructura cristalográfica o en la superficie. Esto genera nuevas interacciones entre espines, en adición a las usuales en este tipo de sistemas (entiéndase, anisotropías, interacciones de intercambio o dipolares o interacción frente a un campo externo), y las cuales se conocen como interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya. A causa de este nuevo fenómeno, se inducirán cambios en el espectro de ondas de espín y en las susceptibilidades dinámicas en el ferromagneto.

Para introducir el tema, en las primeras secciones del primer capítulo se expondrá la teoría general, en la que hablaremos del formalismo teórico (micro-magnetismo) con el cual abordaremos el problema y donde se describirán las interacciones presentes en estos sistemas ferromagnéticos. También, se dará una breve descripción de las ondas de espín, las cuales son el medio por el cual caracterizamos las propiedades del sistema y, debido a que en las últimas secciones se tratará con susceptibilidades dinámicas y frecuencias y campos de resonancia, incluimos una sección dedicada a la técnica de FMR junto con un ejemplo sencillo, que dejará más claro, aparte de la técnica en sí mismo, la forma en que podrían excitarse estos sistema para obtener ondas de espín y cómo responden frente a esto, lo cual se describe a través del espectro de absorción del material.

En las secciones siguientes, ya se abordará el problema a través del formalismo adoptado (en nuestro caso, con el hamiltoniano), para un sistema en forma general, sin incluir aun las interacciones de Dzyaloshinskii–Moriya explícitamente. Luego, en el segundo capítulo, se utilizarán los resultados anteriores para aplicarlos directamente a los sistemas asimétricos y dar a conocer el espectro de ondas de espín del sistema, el espectro de absorción y la influencia de estas interacciones adicionales en la lámina ferromagnética. Finalmente, los cálculos detallados expuestas en cada sección, estarán en los apéndices respectivos. El sistema de unidades adoptado para los cálculos a lo largo de todo el trabajo, será el cgs.

Por último, es importante destacar que el tema de este trabajo, dio lugar a una publicación [D. Cortés-Ortuño and P. Landeros, *Influence of the Dzyaloshinskii–Moriya interaction on the spin-wave spectra of thin films*, J. Phys.: Condens. Matter **25**:156001,2013].

ÍNDICE GENERAL

Índice general	vii
1 Micromagnetismo	9
1.1. Energías del sistema	12
1.1.1. Energía de Intercambio (Exchange energy)	12
1.1.2. Energía Dipolar	14
1.1.3. Energía de Anisotropía	15
1.1.4. Energía de Zeeman	16
1.2. Interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya	16
1.3. Ondas de espín	18
1.4. Resonancia Ferromagnética (FMR)	19
1.5. Susceptibilidad y Frecuencia de Resonancia de un Elipsoide	20
1.6. Modelo Teórico	23
1.6.1. Lámina ferromagnética	24
1.6.2. El Hamiltoniano	26
1.6.3. Dinámica del sistema y relación de dispersión	27
1.6.4. Susceptibilidad dinámica	28
2 Influencia de las Interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya en el espectro de ondas de espín	31
2.1. Energía de las IDM	32
2.2. Relación de dispersión de las ondas de espín	33
2.3. Invariantes para superficies de baja dimensionalidad	36
2.3.1. Arreglo cuadrado bcc(001)	36
2.3.2. Arreglo bcc(110)	37
2.4. Susceptibilidades dinámicas	39
2.5. Resultados para un sistema de Siliciuro de Manganeso (MnSi)	39
2.6. Espectro de absorción para un sistema de Fe/W(110)	45
2.7. Conclusiones	48

3 Apéndices	50
3.1. Energía de Intercambio	50
3.2. Frecuencia de resonancia de un elipsoide ferromagnético	53
3.3. Anisotropía en el plano	54
3.4. Dinámica del sistema	55
3.5. Energía de las IDM	57
3.6. Invariantes para una red cuadrada bcc(001)	57
3.7. Invariantes para una red bcc(110)	58
Bibliografía	60

MICROMAGNETISMO

Al describir un sistema, las propiedades magnéticas que lo caracterizan se deben casi completamente al movimiento orbital y al espín de los electrones, los cuales generan lo que se conoce como *momento magnético*, que es una cantidad pseudo vectorial y mide la tendencia del objeto a orientarse con un campo magnético. De acuerdo a esto, es posible distinguir a los materiales en dos grupos, aquellos que poseen un momento magnético permanente y aquellos que no lo tienen; esto último, se debe a que en ciertos materiales, el momento magnético debido al movimiento orbital de los electrones se cancela mutuamente con el que provoca el espín, lo que origina un momento magnético nulo en los átomos. Este fenómeno ocurre en la mayoría de los materiales y se conoce como *diamagnetismo*. En cambio, en otros sistemas, la cancelación es incompleta y los átomos poseen un momento permanente. En este caso, los materiales pueden clasificarse entre los que poseen un grado de ordenamiento a largo alcance, bajo cierta temperatura crítica, que se se conocen como: ferromagnetos, antiferromagnetos y ferrimagnetos, dependiendo de cómo se alinean sus espines¹; y aquellos que no poseen esta organización. Nosotros nos centraremos en los ferromagnetos, los que poseen un momento permanente y cuyos espines se alinean de forma paralela bajo una temperatura crítica, conocida como Temperatura de Curie. En la Figura 1.1 se muestra un esquema con las distintas clasificaciones que acabamos de nombrar.

¹Nos referimos a espines porque en la mayoría de los ferromagnetos, la contribución al momento magnético del movimiento orbital, es muy pequeño.

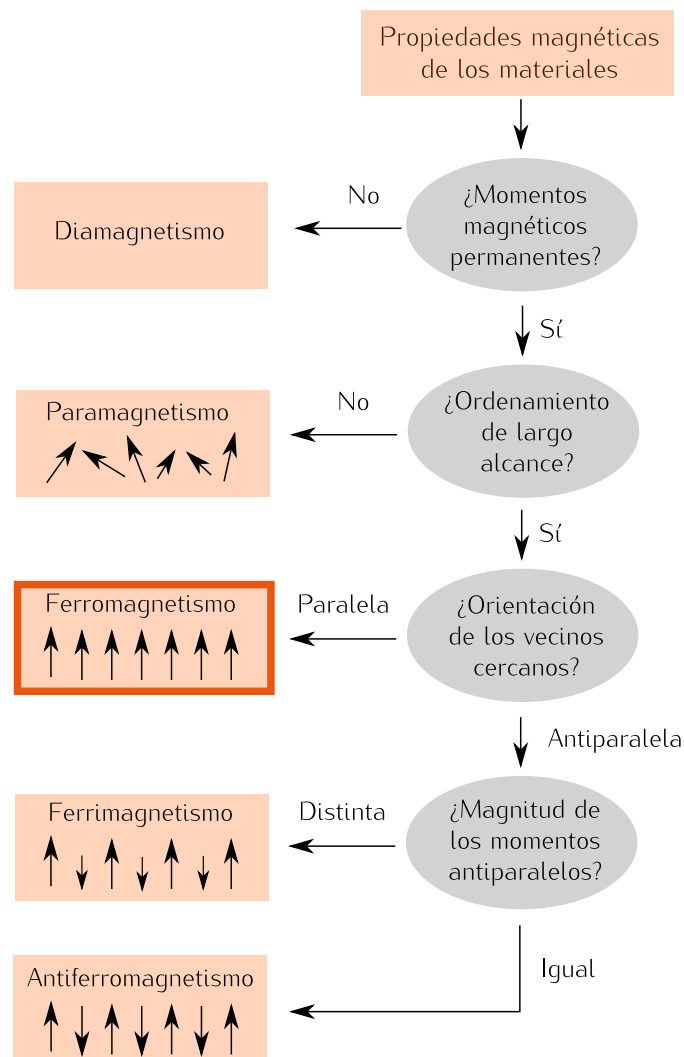


Figura 1.1: Clasificación de los materiales según sus propiedades magnéticas (adaptado de la referencia [1]).

El ferromagnetismo tiene su fundamento en la mecánica cuántica, donde el hecho de que los espines se ordenen en forma paralela, en ausencia de campo magnético y bajo cierta temperatura, viene de la interacción entre éstos (conocida como interacción de intercambio), y se describe usualmente mediante el Hamiltoniano de Heisenberg. Resolver este sistema en forma exacta, debido al gran número de átomos es imposible ya en la teoría cuántica, de forma que uno inevitablemente debe recurrir a alguna aproximación. Entonces, una forma de abordar el problema, es utilizando la teoría del *micromagnetismo*, que consiste en considerar los espines como vectores clásicos y el medio como un continuo. Esta idea comenzó con los trabajos de Weiss (1907), quien trató de explicar estructuras de dominios introduciendo la idea de un campo molecular, responsable de

la orientación de la magnetización. Más tarde, Heisenberg (1928) y Dirac (1928), justificaron este campo molecular a través de la mecánica cuántica, como un campo de intercambio que tiende a alinear los espines, explicando el fenómeno de ferromagnetismo. Esto abrió las puertas hacia una teoría mesoscópica del magnetismo, que vinculara la teoría fenomenológica de los campos electromagnéticos de Maxwell, y la mecánica cuántica. El primer intento por analizar estados magnéticos inhomogéneos, se deben a Bloch (1932), pero el paso definitivo hacia una teoría continua del magnetismo, ocurrió en el año 1935 con una publicación de Landau y Lifshitz, considerando estructuras de paredes que separaban dominios antiparalelos, y fue desarrollada alrededor de 1940 por Brown, en una serie de trabajos que establecieron la perspectiva moderna del micromagnetismo [2, 3].

Básicamente, lo que vamos a considerar, será la magnetización como un pseudo vector $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ ² que depende de las posiciones espaciales $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y temporal t , en una distribución continua.

El enfoque principal del micromagnetismo se basa en aproximar las energías del sistema, que serán funciones de esta magnetización continua $\mathbf{M}(\mathbf{x})$; y luego minimizarlas, de manera de obtener las estructuras de la magnetización estática. En general, es muy complicado poder obtener una configuración de la magnetización de esta forma, la cual sea realmente un mínimo, por lo que hay técnicas de asumir una estructura para $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ mediante ciertos parámetros. Con esto, es posible estudiar campos de nucleación o modos de reversión. En nuestro caso, nos centraremos en calcular la energía de un sistema de geometría simple, que será una película magnética delgada, la cual se saturará con un campo magnético externo y luego será llevada al desequilibrio con una pequeña perturbación (un campo de microondas). Con esto, obtendremos el Hamiltoniano del sistema y se utilizará para poder calcular propiedades de las ondas de espines en el material.

Otra forma de abordar el micromagnetismo, es directamente a través de la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG)³

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \frac{g}{M} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

en la que γ es el radio giromagnético y g la constante de amortiguamiento de Gilbert (damping). Esta ecuación ilustra la evolución temporal del sistema a través de la dinámica de los momentos magnéticos \mathbf{M} y nos permite encontrar los mínimos considerando condiciones de equilibrio. Una técnica que utiliza fundamentalmente esta ecuación de movimiento y que ha tenido alto revuelo en los últimos

²Esencialmente, la aproximación podría verse como promediar el valor de los espines del sistema en celdas unitarias de volumen y hacerlas infinitesimalmente pequeñas. Es decir, si en el sitio j tenemos el espín \mathbf{S}_j , introducimos el vector magnetización como $\mathbf{M}(\mathbf{x}_j) = \bar{N} \mu_B \tilde{g} \mathbf{S}_j$, con $\bar{N} = N/V$, como el número de espines (N) en el volumen de una celda unitaria (V), μ_B el magnetón de Bohr y \tilde{g} como el factor de Landé. En el límite infinitesimal, $\mathbf{M}(\mathbf{x}_j)/|\mathbf{M}(\mathbf{x}_j)| \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x})/M(\mathbf{x})$.

³Esta ecuación es posible obtenerla a mediante un tratamiento semi-clásico a partir de la dinámica de momentos angulares [4] con la ecuación de Heisenberg.

años, son las simulaciones micromagnéticas ya que, en estos tiempos, han sido mucho más accesibles las máquinas con alta capacidad computacional, lo cual nos proporciona otra herramienta para visualizar los problemas.

En las próximas secciones se describirán las energías involucradas en un sistema ferromagnético y su correspondiente expresión en la aproximación micromagnética. En principio, se deben considerar siempre las energías de intercambio, la magnetostática y la de anisotropía. En caso de haber un campo externo se tendrá una energía de Zeeman. Además de éstos términos, dedicaremos una sección a discutir la energía de las interacciones asimétricas, conocidas como interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya, que sólo se presentan en determinadas clases de materiales. Es bueno señalar que el campo efectivo asociado a estas interacciones se puede calcular como

$$\mathbf{H} = -\frac{\delta w}{\delta \mathbf{M}} = -\left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{M}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial w}{\partial \dot{\mathbf{M}}} \right) - \nabla \cdot \frac{\partial w}{\partial (\nabla \mathbf{M})} \right) \quad (1.2)$$

en que w es la densidad de energía, que depende de $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, correspondiente a cierta interacción del sistema.

1.1. Energías del sistema

1.1.1. Energía de Intercambio (Exchange energy)

La interacción de intercambio es la responsable del ferromagnetismo y su origen no tiene análogo clásico. Fundamentalmente, es un efecto cuántico que ocurre a causa al traslape de las funciones de ondas de electrones vecinos, la cual es antisimétrica, de forma que la energía electrostática se reduce cuando sus espines son paralelos. Entonces, esta configuración es más estable y los espines tienden a alinearse. Una forma de describir este fenómeno en una red (lattice) de átomos, es a través del Hamiltoniano de Heisenberg

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j,$$

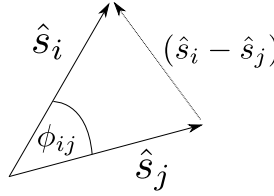
donde \mathbf{S}_i se refiere al espín total del i -ésimo sitio del arreglo. J_{ij} es la integral de intercambio y hasta ahora, calcularla de primeros principios, no ha dado resultados muy precisos. Esta interacción es de corto alcance, por lo que generalmente J_{ij} se toma como un parámetro J que se ajusta con datos experimentales, frecuentemente midiendo ondas de espín, y la suma en j se realiza solo a vecinos cercanos. Para obtener una expresión en el límite micromagnético, consideramos los espines como vectores clásicos. En un material homogéneo, la longitud de los espines se conserva, por lo que la expresión nos queda

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = -S^2 \sum_{i,j} J_{ij} \hat{s}_i \cdot \hat{s}_j = -S^2 J \sum_{i,j} \cos \phi_{ij},$$

donde hemos denotado \hat{s}_i al vector unitario en la dirección de \mathbf{S}_i , $S = |\mathbf{S}_i|$ y ϕ_{ij} es el ángulo que forman los espines i, j . Debido a que la interacción de intercambio favorece el alineamiento paralelo entre los espines, los ángulos que forman varían lentamente, así que los consideramos pequeños, de manera que

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} \simeq -S^2 J \sum_{i,j} \left(1 - \frac{\phi_{ij}^2}{2} \right).$$

El primer término que se obtiene de esta expresión, es una constante, por lo que podemos redefinir la energía y evitarlo en los próximos cálculos. Un tratamiento más elegante y matemático de las próximas derivaciones, se puede encontrar en la referencia [5]. Nosotros utilizaremos la de [3], la cual es más geométrica, y los detalles los dejamos para el Apéndice 3.1. Este análisis será necesario también, cuando queramos deducir expresiones micromagnéticas para el intercambio asimétrico (Interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya), ya que el procedimiento es similar.



De la regla del coseno, podemos ver que

$$\phi_{ij} \simeq |\hat{s}_i - \hat{s}_j|.$$

Entonces, recordando que la suma en j es a vecinos cercanos, \mathbf{S}_j representarán los espines desplazados en el arreglo del cristal, en una cantidad vectorial $\boldsymbol{\epsilon}_j$ respecto a la posición del espín \mathbf{S}_i , con $|\boldsymbol{\epsilon}_j| \ll 1$. Así, denotando $\hat{s}_i = \hat{s}(\mathbf{x}_i)$, obtenemos

$$\hat{s}_j = \hat{s}(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\epsilon}_j) \approx \hat{s}(\mathbf{x}_i) + (\boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \nabla) \hat{s}(\mathbf{x}_i).$$

Luego

$$|\hat{s}_i - \hat{s}_j|^2 = (\boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \nabla \hat{s}_i)^2,$$

por lo que

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = -\frac{S^2 J}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ \text{vecinos}}} (\boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \nabla \hat{s}_i)^2.$$

Ahora, relacionando \hat{s}_i como la dirección del momento magnético $\mathbf{M}_i/|\mathbf{M}_i|$, realizando la suma a primeros vecinos en la red correspondiente, contando el número efectivo de átomos por sitio c y tomando el límite al continuo (ver Apéndice 3.1), podemos deducir una expresión para el hamiltoniano o energía de intercambio

$$E_{\text{ex}} = \frac{A}{M_s^2} \int_V \{(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2\} dV, \quad (1.3)$$

donde $A = JS^2c/a$ es la constante de intercambio del material, c depende de la geometría de la red y a es la longitud de una celda unitaria.

1.1.2. Energía Dipolar

También conocida como energía magnetostática o demagnetizante, viene de la interacción directa entre momentos dipolares. Esta interacción, a diferencia de la de intercambio, es de largo alcance, pero es mucho menor en magnitud, por lo que es apreciable generalmente en sistemas de mayor dimensión. Su expresión discreta es

$$E_{\text{dip}} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{h}_i$$

donde $\boldsymbol{\mu}_i = \tilde{g}\mu_B \mathbf{S}_i$ es un dipolo magnético en un sitio i de un arreglo y \mathbf{h}_i se refiere al campo debido a todos los demás en el sitio i . La suma es sobre todos los sitios del sistema. Es posible a partir de esta expresión, llevarla al límite micromagnético considerando una esfera físicamente pequeña⁴ en el sitio i en torno a un dipolo, de manera que dentro de ésta, debido a la fuerte interacción de intercambio, los momentos se consideren como constantes y fuera de esta esfera, se toman los momentos como la distribución macroscópica $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Entonces, el campo \mathbf{h}_i se puede escribir como

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{H}' - \left(-\frac{4\pi}{3}\mathbf{M}\right) + \mathbf{h}'_i$$

donde \mathbf{H}' es el campo fuera de la esfera y $\mathbf{h}'_i = \sum_j \left\{ \frac{1}{r_{ij}^3} \left(3 \frac{\mathbf{r}_{ij}(\mathbf{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{\mu}_j)}{r_{ij}^2} - \boldsymbol{\mu}_j \right) \right\}$ es la expresión discreta del campo dipolar dentro de la esfera. Con la aproximación, esta última suma se anula [3] y el término con \mathbf{M} no lo consideramos por ser una constante, de forma que nos queda la expresión conocida para la energía magnetostática

$$E_{\text{dip}} = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}'(\mathbf{r}) dV. \quad (1.4)$$

El campo \mathbf{H}' es posible calcularlo a través de las ecuaciones de Maxwell, y podemos encontrarlo mediante un potencial U , tal que $\mathbf{H}' = -\nabla U$. Hay dos caminos posibles para obtener U : resolver una ecuación de Poisson con condiciones de borde [3]

$$\nabla^2 U = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M},$$

⁴Que sea menor a la constante a la *longitud de exchange*, que es la longitud a la que \mathbf{M} tiende a cambiar, y lo suficientemente grande para que sea mayor a la longitud de una celda unitaria (o constante de la red) del material.

o integrar directamente la expresión

$$U = - \left\{ \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int_S \frac{\hat{n} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right\},$$

en que las integrales van sobre el sistema magnético y \hat{n} es normal a las superficies correspondientes.

Es importante señalar que en el caso de que la magnetización sea constante, es posible escribir

$$\mathbf{H}' = -4\pi\tilde{N} \cdot \mathbf{M}$$

donde \tilde{N} se conoce como tensor demagnetizante y, si los ejes de un elipsoide a considerar, coinciden con los ejes de referencia, se cumple que $\text{Tr}[\tilde{N}] = 1$. De esta forma se puede escribir, con V como el volumen del sistema,

$$E_{\text{dip}} = 2\pi V (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2) \quad N_x + N_y + N_z = 1$$

1.1.3. Energía de Anisotropía

Si uno observa el hamiltoniano de Heisenberg, se puede ver que es isotrópico, es decir, los espines tienden a alinearse paralelamente, pero no hay una dirección específica en que deban hacerlo. Entonces, de acuerdo a evidencias experimentales, se planteó un nuevo término de energía, conocida como energía de anisotropía, que explica la tendencia de los sistemas magnéticos a tener direcciones preferenciales (llamadas ejes de anisotropía) para las cuales la magnetización \mathbf{M} tiende a alinearse, ya que se han observado ciertos sistemas que quedan magnetizados en determinadas orientaciones aún en ausencia de campo magnético.

Hay distintas formas de anisotropías, la más común se conoce como *anisotropía magnetocristalina* y tiene su origen en el acoplamiento espín-órbita. Su forma depende de la geometría cristalográfica del material y la expresión matemática puede ser deducida a través de una expansión de la energía libre del sistema considerando determinadas operaciones de simetría [6]. Las anisotropías más frecuentes de este tipo son las *uniaxiales* y las *cúbicas*. A lo largo de este trabajo solo consideraremos anisotropías uniaxiales, que se leen

$$E_u = -\frac{K_u}{M_s} \int_V (\mathbf{M} \cdot \hat{u})^2 dV, \quad (1.5)$$

donde \hat{u} es un vector unitario que indica la dirección del eje de anisotropía y K_u es la constante de anisotropía, la cual se obtiene de datos experimentales, ya que el cálculo de primeros principios no han dado resultados muy certeros. Notar acá que si $K_u > 0$, el sistema favorece el hecho de estar alineado a lo largo del eje de anisotropía, por lo que en este caso se conoce como *eje fácil* (*easy-axis*). En cambio, si la constante es negativa, para minimizar la energía, el sistema se

tiende a magnetizar en dirección perpendicular a este eje, y se tendría un *plano fácil* (*easy-plane*) de simetría, de forma que el eje se conocería como *eje difícil* de anisotropía o *hard-axis*.

Otra forma de anisotropía, es la *anisotropía de forma*, que viene de las interacciones dipolares y es básicamente la expresión que se describió para \mathbf{M} constante en la energía magnetostática. Este nombre es a causa de la dependencia con la forma del material, lo cual está considerado en el tensor demagnetizante, y su expresión es similar a una anisotropía uniaxial..

También podemos encontrar *anisotropías de superficie*, cuya expresión es análoga a la uniaxial. Menos usuales son las *anisotropías magnetoelásticas*, inducidas por la aplicación de estrés sobre el sistema, o efectos como la *magnetostricción*.

1.1.4. Energía de Zeeman

Esta se origina de la energía potencial de los momentos magnéticos de un cuerpo en presencia de un campo magnético externo. Entonces, si tenemos un campo \mathbf{H}_e aplicado al sistema, la energía de Zeeman tiene la expresión en el continuo

$$E_Z = - \int_V \mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}_e dV. \quad (1.6)$$

1.2. Interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya

En los últimos años, diversos estudios experimentales han comprobado la existencia de *interacciones asimétricas* entre los átomos magnéticos de ciertos materiales, a diferencia del intercambio simétrico que explicamos anteriormente. Este fenómeno, ya había sido propuesto hace 50 años por Dzyaloshinskii [7, 8], para explicar el ferromagnetismo débil; y desarrollado teóricamente por Moriya [9], realizando correcciones de espín-órbita relativistas al hamiltoniano de estos sistemas. Estas nuevas interacciones de intercambio entre espines, conocidas como las *interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya* (IDM), en principio se presentan en materiales antiferromagnéticos, pero también surgen en cristales de geometría no-centrosimétrica (como el MnSi, clasificado como helimagneto) o en láminas muy delgadas, de unas pocas monocapas [10, 11, 12], debido a la ausencia de simetría de inversión en la superficie o interfaz (estudios recientes se han realizado en sistemas de una o dos monocapas de Fe/W(110) [11, 12]). Además de adicionar un término de energía extra al sistema, las interacciones de DM dan origen a nuevos fenómenos, como la estabilización de estructuras quirales (helicoidales) o asimetrías en el espectro de ondas de espín del material. Este último efecto será el que discutiremos en el próximo capítulo.

Es posible tratar este fenómeno de forma discreta, donde el hamiltoniano se expresa de la forma

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j,$$

en que la suma en j , así como en el caso del intercambio, se realiza a primeros vecinos. Expresiones para el vector de Dzyaloshinskii \mathbf{D}_{ij} en determinadas geometrías, se pueden encontrar en la referencia [13], donde hay un tratamiento detallado, y su efecto es el de rotar ligeramente los espines en un pequeño ángulo. Pero nosotros estamos interesados en el límite micromagnético, por lo que requerimos de un método en el continuo. En este caso, la energía de DM es posible escribirla como [7, 8, 14]

$$E_{\text{DM}} = \int_V w_{\text{DM}} dV, \quad (1.7)$$

en que w_{DM} es una suma de términos conocidos como *Invariantes de Lifshitz* [14, 15] $\mathcal{L}_{ij}^{(k)}$, que son expresiones lineales en la primera derivada espacial de la magnetización⁵, es decir

$$\mathcal{L}_{ij}^{(k)} = M_i \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_k} \right) - M_j \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right).$$

Las formas funcionales de \mathcal{L} y, por lo tanto, de la energía, están determinadas por la geometría cristalográfica de los materiales en consideración, los cuales son no-centrosimétricos o carecen de alguna simetría; y serán una combinación de estos invariantes, los cuales irán multiplicados por algún coeficiente constante que depende del material. Una de las sumas de invariantes más estudiadas recientemente, es la de sistemas con la clase de simetría (o grupo puntual) T , y es posible escribirla en término de expresiones usuales

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{yx}^{(z)} + \mathcal{L}_{xz}^{(y)} + \mathcal{L}_{zy}^{(x)}) = \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{M}).$$

De acuerdo a esto, la expresión de la densidad de energía es $w_{\text{DM}} = \lambda_{\text{DM}} \mathcal{L}$, donde λ_{DM} es la constante propia del material y tiene unidades de longitud. La estructura de \mathcal{L} para otras geometrías, reportadas en la literatura y que podrían tener más de una constante, las resumimos en la Tabla 1.1, en términos de la clase del cristal o grupo puntual.

⁵La invarianza es respecto a las operaciones de simetría del grupo puntual que se esté analizando [16, 17]. Una idea teórica puede encontrarse en las referencias [17, 18], donde se realiza un estudio de la energía de cristales líquidos, bajo consideraciones de simetrías. En este caso, se buscan invariantes al expandir la energía libre en término de combinaciones de escalares de una cantidad relevante, de la cual depende la energía.

Clase de Simetría	Densidad de energía w_{DM}
T	$\lambda_{\text{DM}} (\mathcal{L}_{xz}^{(y)} + \mathcal{L}_{zy}^{(x)} + \mathcal{L}_{yx}^{(z)})$
C_{nv}	$\lambda_{\text{DM}} (\mathcal{L}_{zy}^{(z)} + \mathcal{L}_{xy}^{(x)})$
D_{2d}	$\lambda_{\text{DM}} (\mathcal{L}_{zy}^{(x)} + \mathcal{L}_{xy}^{(z)})$
D_n	$\lambda_{\text{DM}}^{(1)} (\mathcal{L}_{zy}^{(x)} - \mathcal{L}_{xy}^{(z)}) + \lambda_{\text{DM}}^{(2)} (\mathcal{L}_{zx}^{(y)})$
C_n	$\lambda_{\text{DM}}^{(1)} (\mathcal{L}_{zy}^{(z)} + \mathcal{L}_{xy}^{(x)}) + \lambda_{\text{DM}}^{(2)} (\mathcal{L}_{zy}^{(x)} - \mathcal{L}_{xy}^{(z)})$

Tabla 1.1: Invariantes de Lifshitz para diferentes grupos puntuales.

1.3. Ondas de espín

Las ondas de espín se definen como excitaciones colectivas o elementales de un magneto que se encuentra ordenado, o como perturbaciones de los espines de un material magnético ordenado, que se propagan en cierta dirección. Del punto de vista de cuasi-partículas, las ondas de espín corresponden a *magnones*, los cuales son modos bosónicos con cuantos de energía definidos.

En el límite micromagnético, la representación matemática de las ondas de espín es la misma que la de las ondas regulares, así que las caracterizamos mediante un vector de onda \mathbf{k} (asociada a una longitud de onda λ) y una frecuencia propia Ω del modo excitado.

Para ilustrar este fenómeno, graficamos debajo una cadena de espines en un ferromagneto, las cuales forman una onda de espín al ser perturbados del estado fundamental. En esta representación semiclásica, se puede ver la onda de espín como una excitación en que la fase de precesión varía linealmente de sitio a sitio [1].

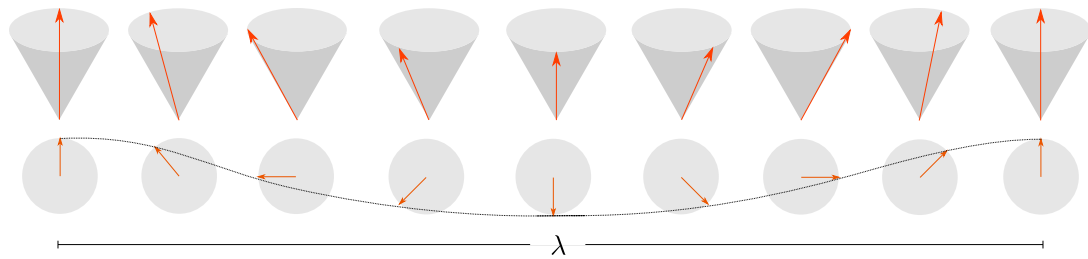


Figura 1.2: Representación de una onda de espín en un ferromagneto, la cual se caracteriza con una longitud de onda λ .

Hay diversas formas de describir teóricamente las ondas de espín en un sistema ferromagnético. Por ejemplo, existe el formalismo de Holstein-Primakoff donde, a través de un tratamiento mecánico cuántico, se representa a los operadores de espín en términos de los operadores de subida y bajada de un oscilador armónico, los que a su vez describen operadores bosónicos de creación y aniquilación.

Nuestra forma de abordar este problema [19], se encuentra en el límite micromagnético, por lo que haremos uso de la teoría macroscópica, considerando la magnetización como un campo $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ [20] y transformándola al espacio de Fourier para obtener $\mathbf{M}(\mathbf{k})$; esto, con la restricción de que $ka \ll 1$ (a como la constante de red bajo consideración). Luego, estos vectores clásicos se promueven a operadores, utilizando el formalismo de Holstein-Primakoff, y se obtienen reglas de conmutación para los operadores de magnetización [21]. A partir de acá, es posible deducir la dinámica de los espines a través de la ecuación de movimiento de los operadores (ecuación de Heisenberg) y encontrar las frecuencias propias de los modos de ondas de espín. Para ello, es necesario conocer el Hamiltoniano del sistema y expandirlo hasta segundo orden en término de las componentes de la magnetización dinámica (que resulta de la perturbación externa al sistema, más detalles se describirán a lo largo del trabajo), lo cual es similar a linealizar la ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert (ecuación (1.1)).

Es importante señalar que la frecuencia de las ondas de espín dependerá del campo efectivo \mathbf{H}_{eff} actuando en el sistema. Cuando estamos en un rango de vectores de onda pequeños, o longitudes de onda muy grandes, la interacción que domina en el sistema es la dipolar, lo que puede explicarse con el hecho de que el desfase entre espines será muy pequeño y la interacción de intercambio será casi nula. En cambio, a medida que las longitudes de onda son cada vez más pequeñas (vectores de onda grandes), el desfase entre vecinos es considerable y la interacción de intercambio ya no se puede despreciar.

1.4. Resonancia Ferromagnética (FMR)

Resonancia Ferromagnética (Ferromagnetic Resonance) es una técnica de espectroscopía que se utiliza para medir propiedades magnéticas (como anchos de línea, constantes de anisotropía, constantes de damping, etc.) a través del análisis del movimiento precesional de los espines en muestras ferromagnéticas.

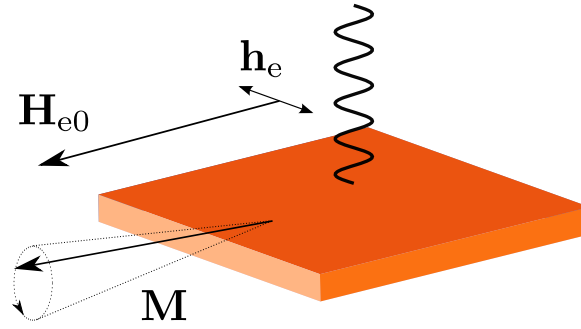


Figura 1.3: Diagrama de los campos involucrados en la técnica de resonancia ferromagnética, los cuales inducen el movimiento precesional de la magnetización del sistema.

En esta técnica, un campo magnético constante es aplicado a un sistema ferromagnético, lo suficientemente fuerte como para saturarlo, y luego se inyecta un pequeño campo de microondas o de radiofrecuencia, por lo que los momentos magnéticos comenzarán a precesar coherentemente en torno a su posición de equilibrio con la misma frecuencia y fase. La *resonancia* ocurrirá cuando la frecuencia del campo magnético alternante, el cual se aplica transversal a la magnetización del sistema, es igual a frecuencia de precesión de los espines. La frecuencia de este modo uniforme se denomina frecuencia de resonancia ferromagnética (ferromagnetic resonance frequency) y puede considerarse como una onda de espín con longitud de onda infinita o vector de onda nulo ($\mathbf{k} = 0$). En este caso, todos los espines son paralelos y la contribución de la energía de intercambio es cero.

1.5. Susceptibilidad y Frecuencia de Resonancia de un Elipsoide Ferromagnético

Para ilustrar el fenómeno de resonancia y la descripción de ondas de espín en el modo con $\mathbf{k} = 0$, presentamos un ejemplo sencillo, el cual consiste en un elipsoide ferromagnético saturado con un campo magnético y llevado al desequilibrio bajo un campo de microondas. El problema se abordará a través de la ecuación de LLG en la aproximación de macroespín, es decir, consideramos todos los momentos girando con la misma frecuencia y fase.

En el régimen de FMR, la energía de intercambio es constante, por lo que el campo asociado es nulo y, por simplificación, no consideraremos anisotropía. Por lo tanto, en equilibrio, el campo efectivo será

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{e0} - \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{M},$$

donde \mathbf{H}_{e0} es un campo magnético externo, que lo consideraremos en la dirección \hat{z} y lo suficientemente fuerte como para saturar el sistema, por lo que $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 =$

$M_s \hat{z}$ (M_s como la magnetización de saturación), y \tilde{N} es el tensor demagnetizante, el cual es simétrico.

Para analizar la frecuencia de resonancia, llevamos al sistema al desequilibrio bajo un pequeño campo magnético alterno y transversal $\mathbf{h}_e(\mathbf{r}; t)$ (campo de microondas), de forma que debemos hacer $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_{e0} + \mathbf{h}_e(t)$ y $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(t)$. Así, podemos escribir

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(t)$$

con $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{e0} - \tilde{N} \cdot \mathbf{M}_0$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_e - \tilde{N} \cdot \mathbf{m}$ (válido sólo para oscilaciones uniformes de la magnetización dinámica \mathbf{m} [22]), $|\mathbf{h}_e| \ll |\mathbf{H}_{e0}|$ y $|\mathbf{m}| \ll |\mathbf{M}_0|$ (al ser \mathbf{h}_e transversal, éste y \mathbf{m} sólo llevan componentes en \hat{x} e \hat{y}). Ahora reemplazamos en la ecuación de LLG (ecuación (1.1), los detalles de los cálculos se encuentran en el Apéndice 3.2) para linealizarla, descartamos los términos de segundo orden en \mathbf{m} y \mathbf{h} y, como $|\mathbf{m}|$ es pequeño, aproximamos $|\mathbf{M}_0| = M_0 \approx M_s$ (términos de orden $\mathcal{O}(\mathbf{m}^2)$ se descartan ya que sólo queremos los que son lineales en \mathbf{m}). Luego,

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h} - \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{e0} + \gamma \mathbf{m} \times \tilde{N} \cdot \mathbf{M}_0 + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}.$$

Como consideramos un campo oscilante, las componentes dinámicas tendrán una dependencia armónica: $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}e^{-i\omega t}$. Además, recordando que $\mathbf{H}_{e0} = H_{e0}\hat{z}$ y $\mathbf{M}_0 = M_s\hat{z}$, llegamos a dos ecuaciones, las cuales podemos escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \omega_x + ig\omega & i\omega - \omega_s \\ -i\omega - \omega_s & \omega_y + ig\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix} = \gamma M_s \begin{pmatrix} h_{ex} \\ h_{ey} \end{pmatrix}.$$

Aquí, $\omega_s = -\gamma M_s N_{xy}$ (\tilde{N} es simétrica, entonces $N_{xy} = N_{yx}$), $\omega_{x,y} = \omega_H - \gamma M_s N_z + \gamma M_s N_{x,y}$ y $\omega_H = \gamma H_{e0}$.

La estructura de la ecuación anterior es de la forma $\tilde{\chi}^{-1} \cdot \mathbf{m} = \gamma M_s \mathbf{h}$. Nos interesa encontrar el tensor de susceptibilidad dinámica $\tilde{\chi}$ (la respuesta del sistema frente a un campo externo), de forma que, al invertir la matriz correspondiente, nos queda, normalizando

$$\tilde{\chi} = \frac{[\omega_0^2 - \omega^2 + ig\omega(\omega_x + \omega_y)]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2(\omega_x + \omega_y)^2} \begin{pmatrix} \omega_y - ig\omega & \omega_s - i\omega \\ \omega_s + i\omega & \omega_x - ig\omega \end{pmatrix},$$

donde $\omega_0 = \omega_x\omega_y - \omega_s^2$. Es directo entonces, obtener una de las componentes diagonales

$$\chi_{xx} = \frac{[(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_y + g^2\omega^2(\omega_x + \omega_y)] - ig\omega[(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_y(\omega_x + \omega_y)]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2(\omega_x + \omega_y)^2},$$

cuya parte imaginaria $\Im[\chi_{xx}]$, es la que se adquiere usualmente en forma experimental y representa la absorción del sistema. Es posible analizar esta función barriendo el campo externo o la frecuencia. Generalmente, en forma experimental, se realiza la primera, ya que es más fácil fijar una frecuencia que ir variándola. Gráficamente, $\Im[\chi_{xx}]$ como función del campo, tiene la estructura de una curva lorentziana, lo cual se ilustra en la Figura 1.4. El punto donde la absorción es máxima $\Im[\chi_{xx}]_{\text{res}}$, es donde ocurre Resonancia Ferromagnética, y se conoce como campo resonante. Además, mostramos el *ancho de línea* ΔH , que se define como la diferencia de campo entre los puntos donde $\Im[\chi_{xx}] = \Im[\chi_{xx}]_{\text{res}}/2$.

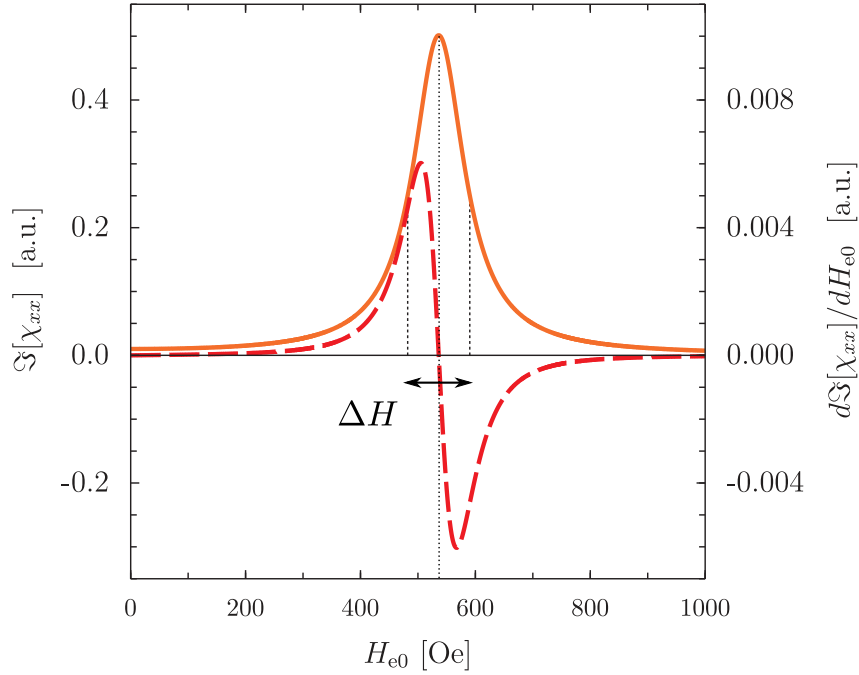


Figura 1.4: Gráfica del espectro de absorción de una esfera ferromagnética de Fe, en función del campo externo. El espectro está dado por la parte imaginaria de la componente diagonal χ_{xx} de la susceptibilidad (línea continua), junto con su respectiva derivada respecto al campo externo (línea cortada), donde se puede apreciar en forma más precisa el punto donde ocurre la resonancia, el cual se sitúa en $H_{e0} = 536.21$ Oe.

También, de la susceptibilidad, podemos obtener la frecuencia de resonancia, donde la absorción del sistema es máxima

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \omega_x \omega_y - \omega_s^2.$$

Un caso simple ocurre cuando los ejes del sistema coinciden con los ejes de simetría del material, de manera que el tensor demagnetizante \tilde{N} es diagonal, o sea $N_{xy} = 0$. En este contexto, la expresión para la frecuencia de resonancia será

$$\omega^2 = \gamma [H_{e0} + M_s(N_x - N_z)] [H_{e0} + M_s(N_y - N_z)],$$

y es la reconocida Fórmula de Kittel [23]. Podemos notar que acá no existe una dependencia en el vector de onda \mathbf{k} , ya que no entra en juego el campo efectivo de la interacción de intercambio y hemos tomado en cuenta el caso con vector de onda nulo (FMR). Tampoco hay una dependencia en los campos creados por la magnetización dinámica \mathbf{m} .

Si quisiéramos estudiar ondas de espín con vectores de onda distintos de cero, ya no podemos negar el campo de intercambio porque habrá un desfase entre los espines vecinos y la magnetización dinámica ahora tendrá una dependencia espacial. Este caso no lo desarrollaré, pero la idea es expresar la magnetización dinámica como una suma de ondas planas, es decir,

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}; t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{m}(\mathbf{k}; t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

y el campo efectivo ahora tendrá una componente extra debido a esta interacción entre vecinos, de la forma

$$\mathbf{H}_{\text{ex}} \sim \nabla^2 \mathbf{M}.$$

Un análisis más detallado nos revelaría que la relación de dispersión aquí dependerá de un término proporcional a k^2 debido a la interacción de intercambio, la cual es la que dominará para vectores de onda muy grandes (o longitudes de onda pequeñas) [1, 24]. En este caso, es posible obtener la fórmula de Herring-Kittel, que depende, entre varios factores, de la dirección de la onda de espín respecto a los ejes de referencia en el elipsoide [24].

La inclusión de anisotropía en estos sistemas es directa, ya que basta con considerar el campo efectivo de esta interacción. En las próximas secciones, la idea general es, igualmente, obtener una relación de dispersión, tomando en cuenta todas las interacciones.

En el caso de incluir completamente los efectos demagnetizantes de la magnetización dinámica, lo cual en este ejemplo sencillo no se hizo, sería posible apreciar una bajada inicial de la curva (pendiente negativa) de la relación de dispersión (frecuencia dependiente de k) en el rango de vectores de onda pequeños a causa de un término lineal en \mathbf{k} , por lo que existen modos degenerados con el modo de FMR [25, 26].

En los próximos desarrollos no haremos uso explícito de la ecuación de LLG sino que, como mencionamos anteriormente, empezaremos los cálculos a través del hamiltoniano del sistema bajo estudio, utilizando el formalismo de Kubo de teoría de respuesta lineal [25, 27, 19].

1.6. Modelo Teórico

Como habíamos señalado brevemente en las secciones anteriores, el formalismo que utilizaremos para analizar este problema, será el hamiltoniano, es decir,

realizaremos los análisis directamente a través de la energía del sistema. Posteriormente, se realizará un tratamiento mecánico cuántico para obtener la dinámica de los espines y la correspondiente relación de dispersión. Además, se utilizará la teoría de respuesta lineal para analizar las susceptibilidades dinámicas y con ello, el espectro de absorción de la lámina ferromagnética [19].

Preferimos esta forma de abordar el problema porque, además de tener la mayoría de las energías calculadas en las referencias [25, 27], la energía dipolar de la magnetización dinámica está completamente desarrollada en el límite de un film delgado, y ese cálculo no es trivial. De esta forma, nosotros sólo debemos agregar el término de DM correspondiente al Hamiltoniano y generalizar el cálculo de los espectros de ondas de espín.

La otra forma de analizar este sistema, es directamente a través de la ecuación de LLG (1.1), con un procedimiento análogo al de la Sección 1.5. La mayor complicación surge al calcular los campos dipolares de la magnetización dinámica. Esta metodología ha sido desarrollada en la referencia [28], donde se estudia el rol de la transferencia de espín (a bajas densidades de corriente) en la respuesta de FMR de una película ferromagnética. En tal caso, se debe agregar a la ecuación de LLG el término de espín-torque y luego linealizarla. Estos cálculos, sin embargo, solo describen el caso de FMR, es decir, para $k = 0$. Por lo tanto, en nuestra situación, tendríamos que extender estos resultados para $k \neq 0$ y agregar el término de campo de las IDM. Este término, para la clase de simetría T , por ejemplo, se puede derivar directamente de la densidad de energía $w_{\text{DM}} = \lambda_{\text{DM}} \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \mathbf{M})$, a través de la ecuación (1.2), lo cual da

$$\mathbf{H}^{\text{DM}} = -2\lambda_{\text{DM}} (\nabla \times \mathbf{M}).$$

Luego se debe incorporar a la ecuación de LLG y linealizar con el procedimiento usual, teniendo en cuenta la geometría del problema.

1.6.1. Lámina ferromagnética

En esta sección vamos a definir en forma general el sistema que consideraremos en los dos próximos capítulos y la cual es utilizada en las referencias [25, 27]. De acuerdo a la Figura 1.5, analizamos una lámina ferromagnética delgada de espesor d y de área L^2 . Utilizaremos dos sistemas de referencia: XYZ , que está orientado según la magnetización \mathbf{M} , y xyz que está fijo con el plano de la lámina. El sistema se satura mediante el campo \mathbf{H}_0 que forma un ángulo ϕ_H con el plano de la película, por lo que

$$\mathbf{H}_0 = \hat{z}H_0 \cos \phi_H + \hat{y}H_0 \sin \phi_H,$$

con H_0 como la magnitud del campo. Éste es lo suficientemente fuerte para que la magnetización en equilibrio \mathbf{M}_0 sea uniforme y se encuentre en el plano yz junto con el campo aplicado, formando un ángulo ϕ_M con el plano del film, así

$$\mathbf{M}_0 = M_s \hat{Z} = \hat{z}M_s \cos \phi_M + \hat{y}M_s \sin \phi_M,$$

donde M_s es la magnetización de saturación.

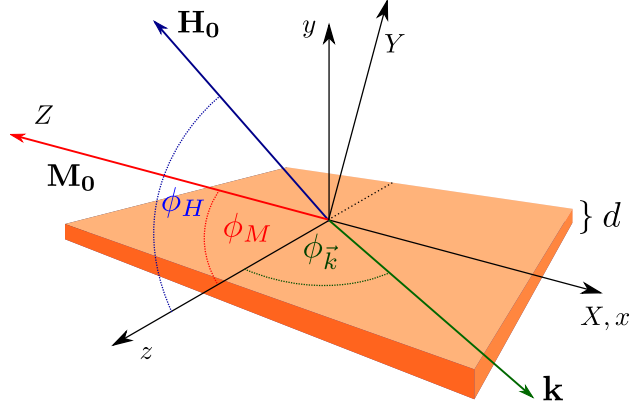


Figura 1.5: Sistema de referencia

El ángulo de equilibrio de la magnetización ϕ_M podemos determinarlo de dos formas. Una es minimizando la energía del sistema en equilibrio respecto a éste ángulo. La otra, que consideraremos acá, es utilizar la condición de equilibrio $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_i = 0$, con \mathbf{H}_i como el campo interno, y estará dado por las contribuciones dipolares y de anisotropía. Notar que el intercambio, al ser \mathbf{M}_0 uniforme, no contribuye. Así mismo, en caso de que tuviéramos las interacciones de DM, ya que son proporcionales a la derivada espacial de \mathbf{M} . Luego, el campo interno estará dado por

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 - \hat{y} 4\pi M_s \sin \phi_M + \hat{y} H_u \sin \phi_M, \quad (1.8)$$

donde $H_u = 2K_u/M_s$ es el campo asociado a la anisotropía uniaxial, con el eje difícil perpendicular al plano de la lámina (en caso de requerir un eje fácil de anisotropía, basta con hacer $K_u < 0$). El segundo término viene de las interacciones dipolares, y se ve fácilmente tomando en cuenta los tensores demagnetizantes, por lo que, según nuestro sistema de referencia, $N_y = 1$. De acuerdo a lo anterior, y denotando $M_{\text{eff}} = H_u + 4\pi M_s$, la condición de equilibrio queda

$$\sin(\phi_H - \phi_M) = \frac{M_{\text{eff}}}{2} \sin 2\phi_M$$

A continuación, para analizar la dinámica de la magnetización y considerar las ondas de espín, sometemos al sistema a un pequeño *campo transversal de microondas* \mathbf{h} , lo cual hará que \mathbf{M} se desvíe levemente de su posición de equilibrio. Como el film es delgado, solo consideramos las componentes de la magnetización

en el plano, de forma que podemos escribirla como una parte estática más una dinámica según

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}; t) = M_Z \hat{Z} + \mathbf{m}(\mathbf{r}; t)$$

en que $\mathbf{m}(\mathbf{r}; t) = m_X(x, z; t)\hat{X} + m_Y(x, z; t)\hat{Y}$ es la magnetización transversal promediada en el espesor del film, \mathbf{r} se refiere a un vector en el plano, y $m \ll M_s$. De esta relación, podemos deducir que

$$M_Z = \sqrt{M_s^2 - m^2} = M_s - \frac{1}{2M_s}m^2 + \dots$$

Luego, a segundo orden, tenemos

$$M_x = m_x \quad (1.9)$$

$$M_y = M_Z \sin \phi_M + m_Y \cos \phi_M \quad (1.10)$$

$$M_z = M_Z \cos \phi_M - m_Y \sin \phi_M \quad (1.11)$$

Será necesario también, considerar la transformada de Fourier de la magnetización dinámica

$$m_{X,Y}(\mathbf{r}; t) = \frac{1}{\sqrt{L^2 d}} \sum_{\mathbf{k}} m_{X,Y}(\mathbf{k}; t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.12)$$

donde \mathbf{k} se refiere al vector de onda con componentes en el plano y L^2 es el área del film. Notar que $m_{X,Y}^*(\mathbf{k}, t) = m_{X,Y}(-\mathbf{k}, t)$. También será útil la relación

$$\frac{1}{L^2} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dx dz = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (1.13)$$

1.6.2. El Hamiltoniano

Para obtener el hamiltoniano total del sistema, debemos considerar todas las contribuciones de energía provenientes de las interacciones que especificamos anteriormente, de forma que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_d + \mathcal{H}_Z + \mathcal{H}_a + \mathcal{H}_e$$

donde cada término, de izquierda a derecha, son el de la energía dipolar, la de Zeeman, la de anisotropía y la de intercambio. Para este sistema, los términos están calculados en la referencia [27]. En caso de que tuviéramos interacciones de DM, hay que agregar al hamiltoniano un término extra \mathcal{H}_{DM} , lo cual se especificará en el capítulo respectivo.

La idea general, es escribir el hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2M_s} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \mathcal{W}_X(\mathbf{k}) m_X^*(\mathbf{k}; t) m_X(\mathbf{k}; t) + \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}) m_Y^*(\mathbf{k}; t) m_Y(\mathbf{k}; t) \right. \\ \left. + \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k}) m_X^*(\mathbf{k}; t) m_Y(\mathbf{k}; t) + \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k}) m_Y^*(\mathbf{k}; t) m_X(\mathbf{k}; t) \right\} \quad (1.14)$$

y obtener los coeficientes que acompañan a las componentes de la magnetización dinámica, que contienen los aportes de todas las interacciones. Para lograr esto, uno calcula la energía del sistema como se mostró en la Sección 1.1, en término de las magnetizaciones $m_{X,Y}(\mathbf{r}; t)$ (dependiente de las coordenadas espaciales) hasta segundo orden. Luego transformarlas en Fourier según la ecuación (1.12) y simplificarlas utilizando (1.13) para obtener la forma deseada. En el Apéndice 3.3 se realiza el cálculo para una anisotropía con eje en el plano, donde se explicita el procedimiento anterior.

De acuerdo a la referencia [27], las expresiones para los coeficientes sin las IDM, con una anisotropía con eje perpendicular al plano de la película, son

$$\mathcal{W}_X = H_0 \cos(\phi_H - \phi_M) - M_{\text{eff}} \sin^2 \phi_M + 4\pi M_s F(kd) \sin^2 \phi_{\mathbf{k}} + Dk^2$$

$$\mathcal{W}_Y = H_0 \cos(\phi_H - \phi_M) + M_{\text{eff}} \cos(2\phi_M) - 4\pi M_s F(kd) [\cos(2\phi_M) \\ + \sin^2 \phi_{\mathbf{k}} \sin^2 \phi_M] + Dk^2$$

$$\mathcal{W}_{XY} = -4\pi M_s F(kd) \sin(\phi_{\mathbf{k}}) \cos \phi_{\mathbf{k}} \sin \phi_M$$

$$\mathcal{W}_{YX} = -4\pi M_s F(kd) \sin \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_{\mathbf{k}} \sin \phi_M$$

donde $F(x) = 1 - (1 - e^{-x})/x$ y $D = 2A/M_s$ es el denominado *exchange stiffness*. Observemos que en este caso $\mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k}) = \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})$, pero el caso general, consideraremos $\mathcal{W}_{XY}^*(\mathbf{k}) = \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})$, que será válido cuando tengamos IDM.

1.6.3. Dinámica del sistema y relación de dispersión

Nuestro objetivo ahora es analizar la dinámica del sistema y encontrar la frecuencia del movimiento precesional de los momentos magnéticos. De esta forma podremos obtener la relación de dispersión de las ondas de espín.

Entonces, promovemos las componentes de la magnetización dinámica $\mathbf{m}(\mathbf{k})$ a operadores, que satisfacen determinadas reglas de conmutación [25, 21, 20]

$$[m_{X,Y}(\mathbf{k}), m_{X,Y}(\mathbf{k}')] = [m_{X,Y}(\mathbf{k}), m_{X,Y}^*(\mathbf{k}')] = 0$$

$$[m_{X,Y}(\mathbf{k}), m_{Y,X}(\mathbf{k}')] = \pm i\mu_0 M_s \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}$$

$$[m_{X,Y}(\mathbf{k}), m_{Y,X}^*(\mathbf{k}')] = \pm i\mu_0 M_s \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

Luego, la ecuación de movimiento para la magnetización estará dada por la ecuación de Heisenberg

$$i\hbar\dot{m}_{X,Y}(\mathbf{k}) = [m_{X,Y}(\mathbf{k}), \mathcal{H}].$$

Usando el hecho de que cuando hacemos $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, debemos cambiar el ángulo $\phi_{\mathbf{k}}$ por $\phi_{\mathbf{k}} + \pi$; y que $\hbar\gamma = -\mu_0$, llegamos a un par de ecuaciones (detalles en el Apéndice 3.4)

$$\dot{m}_X(\mathbf{k}) = -\gamma \{ \mathcal{W}_Y(\mathbf{k})m_Y(\mathbf{k}) + \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})m_X(\mathbf{k}) \} \quad (1.15)$$

$$\dot{m}_Y(\mathbf{k}) = \gamma \{ \mathcal{W}_X(\mathbf{k})m_X(\mathbf{k}) + \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k})m_Y(\mathbf{k}) \} \quad (1.16)$$

las cuales podemos escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_X \\ \dot{m}_Y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\mathcal{W}_{YX} & -\mathcal{W}_Y \\ \mathcal{W}_X & \mathcal{W}_{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Ya que estamos considerando un sistema sometido a un campo de microondas armónico, proponemos $m_{X,Y}(\mathbf{k}; t) = \mathcal{M}_{X,Y}(\mathbf{k})e^{-i\Omega t}$ para encontrar sus modos normales. Entonces, reemplazando esta solución en la ecuación (1.17), obtendremos una ecuación característica para Ω , las cuales serán las frecuencias propias de estos modos. Luego, resolviéndola, llegamos a una relación de dispersión para las ondas de espín:

$$\Omega_{\pm}(\mathbf{k}) = \gamma \left\{ -\Im[\mathcal{W}_{XY}] \pm \sqrt{\mathcal{W}_X\mathcal{W}_Y - \Re[\mathcal{W}_{XY}]^2} \right\}. \quad (1.18)$$

Esta relación es general y es válida siempre que $\mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k}) = \mathcal{W}_{YX}^*(\mathbf{k})$. Si no hay IDM, la parte imaginaria se anula y obtenemos la relación usual de la referencia [27]. La discusión se dejará para los capítulos correspondientes.

1.6.4. Susceptibilidad dinámica

Es posible deducir una expresión para las susceptibilidades dinámicas del sistema analizando las ecuaciones de movimiento de los espines, como en el caso anterior. Así, obtendremos expresiones que nos darán información del espectro de absorción del film. Para lograr esto, utilizaremos la teoría de respuesta lineal, de donde evaluaremos las funciones respuesta definidas como [27]

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}; t) = \frac{i}{\hbar} \Theta(t) \left\langle \left[m_{\alpha}(\mathbf{k}; t), m_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}; 0) \right] \right\rangle \quad (1.19)$$

donde $\alpha, \beta = X, Y$ y $\Theta(t)$ es la función paso de Heaviside. Será necesario la transformada de Fourier de estas funciones, cuyas expresiones son

$$S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}; \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}; t) e^{i\Omega t} dt. \quad (1.20)$$

Asumiendo que estamos en un régimen donde el campo de microondas es lo suficientemente débil, las funciones respuesta $S_{\alpha\beta}$ representan efectivamente las susceptibilidades del sistema ($m_\alpha(\mathbf{k}; \Omega) = S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}; \Omega)h_\beta$), las cuales dependen de la frecuencia y del vector de onda [27].

Con esto en mente, podemos derivar las funciones respuesta

$$i\hbar \frac{\partial S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \hbar \Omega S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t), \quad (1.21)$$

de manera que al realizar la derivación al lado derecho de la igualdad en la ecuación (1.19), hará más directo los cálculos.

Tomando en cuenta el *damping* del sistema, debemos introducirlo en la ecuación de la dinámica de los momentos:

$$\frac{\partial m_\alpha(\mathbf{k}; t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [m_\alpha(\mathbf{k}; t), \mathcal{H}(t)] + \frac{g}{M_s} \epsilon_{\alpha\mu\nu} M_\mu \frac{\partial M_\nu}{\partial t}, \quad (1.22)$$

en donde $\epsilon_{\alpha\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita y g es la constante de damping adimensional. Entonces, derivando la ecuación (1.19) y considerando la relación (1.21), obtenemos

$$\begin{aligned} \hbar \Omega S_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t) &= \delta(t) \left\langle \left[m_\beta^\dagger(\mathbf{k}, 0), m_\alpha(\mathbf{k}, t) \right] \right\rangle \\ &+ \frac{i}{\hbar} \Theta(t) \left\langle \left[[m_\alpha(\mathbf{k}, t), \mathcal{H}(t)], m_\beta^\dagger(\mathbf{k}, 0) \right] \right\rangle \\ &- \frac{g}{\hbar M_s} \Theta(t) \epsilon_{\alpha\mu\nu} \left\langle \left[M_\mu(\mathbf{k}, t) \frac{\partial M_\nu(\mathbf{k}, t)}{\partial t}, m_\beta^\dagger(\mathbf{k}, 0) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ahora la evaluación es directa si queremos S_{XX} y S_{YX} , cuyas expresiones están relacionadas. Empleando las reglas de conmutación de los momentos, conseguimos un par de ecuaciones

$$(\Omega + i\gamma \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})) S_{XX}(\mathbf{k}; t) = -i\gamma \widetilde{\mathcal{W}}_Y(\mathbf{k}) S_{YX}(\mathbf{k}; t) \quad (1.24)$$

$$(\Omega - i\gamma \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k})) S_{YX}(\mathbf{k}; t) = -i\gamma M_s \delta(t) + i\gamma \widetilde{\mathcal{W}}_X(\mathbf{k}) S_{XX}(\mathbf{k}; t) \quad (1.25)$$

en las cuales

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{X,Y}(\mathbf{k}) = \mathcal{W}_{X,Y}(\mathbf{k}) - \frac{ig\Omega}{\gamma}.$$

Aplicando ahora la ecuación (1.20) para que las funciones respuesta sean dependientes de la frecuencia, llegamos a las expresiones para las cuatro componentes del tensor de susceptibilidad, dependientes de la frecuencia y los vectores de onda:

$$S_{XX}(\mathbf{k}; \Omega) = \frac{\gamma^2 M_s \widetilde{\mathcal{H}}_Y(\mathbf{k})}{\widetilde{\Omega}(\mathbf{k})^2 - \Omega^2}, \quad (1.26)$$

$$S_{YX}(\mathbf{k}; \Omega) = \frac{i\gamma M_s (\Omega + i\gamma \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k}))}{\widetilde{\Omega}(\mathbf{k})^2 - \Omega^2} \quad (1.27)$$

$$S_{YY}(\mathbf{k}; \Omega) = \frac{\gamma^2 M_s \widetilde{\mathcal{W}}_X(\mathbf{k})}{\widetilde{\Omega}(\mathbf{k})^2 - \Omega^2} \quad (1.28)$$

$$S_{XY}(\mathbf{k}; \Omega) = -\frac{i\gamma M_s (\Omega - i\gamma \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k}))}{\widetilde{\Omega}(\mathbf{k})^2 - \Omega^2} \quad (1.29)$$

donde hemos definido

$$\widetilde{\Omega}(\mathbf{k})^2 = \gamma^2 \widetilde{\mathcal{W}}_Y(\mathbf{k}) \widetilde{\mathcal{W}}_X(\mathbf{k}) - \gamma^2 |\mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k})|^2 + 2\gamma\Omega \Im[\mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})]. \quad (1.30)$$

Finalmente, el espectro de absorción se encontrará en la parte imaginaria de las funciones respuesta, que representan la susceptibilidad del sistema. Así que, tomando en cuenta las definiciones de $\widetilde{\mathcal{W}}_X$ y $\widetilde{\mathcal{W}}_Y$ e insertándolas en la ecuación (1.30), podemos racionalizar $S_{XX}(\mathbf{k}; \Omega)$ para separar la parte real y la imaginaria. Luego, la parte imaginaria de la función $S_{XX}(\mathbf{k}; \Omega)$ será

$$\Im[S_{XX}(\mathbf{k}, \Omega)] = \frac{\gamma M_s (\gamma \Lambda(\mathbf{k}) \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}) - g\Omega \xi(\mathbf{k}))}{[\Omega(\mathbf{k})^2 - \Omega^2 + 2\gamma \Im[\mathcal{W}_{XY}](\Omega(\mathbf{k}) - \Omega)]^2 + (\gamma g\Omega)^2 \Lambda(\mathbf{k})^2} \quad (1.31)$$

en que

$$\xi(\mathbf{k}) = \Omega(\mathbf{k})^2 - \Omega^2 + 2\gamma \Im[\mathcal{W}_{XY}](\Omega(\mathbf{k}) - \Omega) - (g\Omega)^2 \quad (1.32)$$

y

$$\Lambda(\mathbf{k}) = g\Omega \gamma (\mathcal{W}_X(\mathbf{k}) + \mathcal{W}_Y(\mathbf{k})). \quad (1.33)$$

INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES DE DZYALOSHINSKII-MORIYA EN EL ESPECTRO DE ONDAS DE ESPÍN

Este capítulo está dedicado a describir la influencia que tienen las IDM en el espectro de ondas de espín de una película ferromagnética delgada. El modelo teórico fue descrito en el Capítulo 1, por lo que haremos uso de sus resultados.

Investigaciones recientes en este tipo de sistemas, han reportado la influencia de las IDM en el espectro de ondas de espín en una o dos monocapas de Fe sobre W(110). Por ejemplo, Udvardi *et al.* predijeron una asimetría en la relación de dispersión de las ondas de espín asumiendo una estructura quiral para la magnetización de una monocapa de Fe, a través de un modelo discreto apropiado para la red cristalina del Fe/W(110), pero sin considerar un campo externo o interacciones dipolares [11]. También, Costa et al. desarrollaron una teoría, la cual estima completamente los acoplamientos espín-órbita de las excitaciones colectivas de espín en una y dos monocapas de Fe, observando un término lineal en la relación de dispersión, así como asimetrías en el espectro de absorción de las ondas de espín [12].

En nuestro caso, consideramos un film saturado bajo un campo externo, por lo que nuestra teoría difiere un poco con los trabajos citados anteriormente. A pesar de esto, nuestro modelo toma en cuenta las interacciones dipolares y, como discutiremos más adelante, se observarán resultados que concuerdan con los otros reportes, como la existencia de un término lineal en la relación de dispersión de las ondas de espín y el corrimiento de las frecuencias y campos de resonancia. Además, extendemos nuestros resultados a diferentes clases de simetría a través de los Invariantes de Lifshitz [14, 15], los cuales nos permiten probar que el espectro de ondas de espín dependerá del grupo puntual del material que estemos

considerando. Por último, para hacer referencia a sistemas delgados reportados recientemente, deducimos expresiones en el límite micromagnético para los invariantes de Lifshitz asociados a la geometría de la superficie de láminas de baja dimensionalidad.

2.1. Energía de las IDM

Como se dijo anteriormente, cuando hay IDM, debemos agregar al hamiltoniano del sistema un término de energía \mathcal{H}_{DM} , que describe el intercambio asimétrico entre los espines. Para discutir los resultados, nos centraremos en una combinación de invariantes en particular, que corresponde al grupo puntual (o clase de simetría) T , el cual se puede encontrar en sistemas de MnSi. La expresión matemática de la densidad de energía en nuestra descripción del problema, es de la forma $w_{\text{DM}} = \lambda_{\text{DM}} \left(\mathcal{L}_{xz}^{(y)} + \mathcal{L}_{zy}^{(x)} + \mathcal{L}_{yx}^{(z)} \right)$ [14, 15]. Por lo tanto, debemos calcular

$$\mathcal{L} = M_x \frac{\partial M_z}{\partial y} - M_z \frac{\partial M_x}{\partial y} + M_z \frac{\partial M_y}{\partial x} - M_y \frac{\partial M_z}{\partial x} + M_y \frac{\partial M_x}{\partial z} - M_x \frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad (2.1)$$

lo cual haremos con las ecuaciones (1.10). Dejando términos de hasta segundo orden en las componentes dinámicas de la magnetización \mathbf{m} , nos quedamos con

$$\mathcal{L} \approx M_s \frac{\partial m_Y}{\partial x} + M_s \sin \phi_M \frac{\partial m_X}{\partial z} + m_Y \cos \phi_M \frac{\partial m_X}{\partial z} - m_X \cos \phi_M \frac{\partial m_Y}{\partial z}. \quad (2.2)$$

En el límite de un film muy delgado como habíamos establecido inicialmente, las componentes dinámicas de la magnetización solo dependen de las componentes espaciales en el plano $x - z$, es decir, $m_{X,Y}(\mathbf{r}; t) = m_{X,Y}(x, z; t)$, de forma que la contribución de las IDM al hamiltoniano total será

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \lambda_{\text{DM}} d \int \mathcal{L}(x, z; t) dx dz.$$

Luego, si utilizamos la ecuación (1.12), es directo probar que los términos lineales de (2.2) se anulan, así que sólo consideramos los de segundo orden,

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \lambda_{\text{DM}} d \cos \phi_M \int \left[m_Y \frac{\partial m_X}{\partial z} - m_X \frac{\partial m_Y}{\partial z} \right] dx dz,$$

donde, recordemos, que $m_{X,Y} = m_{X,Y}(x, z; t)$. Ahora realizamos la transformada de Fourier (ecuación (1.12)) con la intención de dejar \mathcal{H}_{DM} con la estructura de la relación (1.14), por lo que obtenemos la expresión

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \frac{1}{2M_s} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \mathcal{W}_{XY}^{\text{DM}}(\mathbf{k}) m_X^*(\mathbf{k}; t) m_Y(\mathbf{k}; t) + \mathcal{W}_{YX}^{\text{DM}}(\mathbf{k}) m_Y^*(\mathbf{k}; t) m_X(\mathbf{k}; t) \right\}, \quad (2.3)$$

en la que definimos los coeficientes

$$\mathcal{W}_{XY}^{\text{DM}}(\mathbf{k}) = -2iM_s k_z \lambda_{\text{DM}} \cos \phi_M \quad (2.4)$$

$$\mathcal{W}_{YX}^{\text{DM}}(\mathbf{k}) = 2iM_s k_z \lambda_{\text{DM}} \cos \phi_M \quad (2.5)$$

con $k_z = k \cos \phi_{\mathbf{k}}$ y $\phi_{\mathbf{k}}$ el ángulo entre la magnetización y el vector de la onda de espín, \mathbf{k} . Como señalamos antes, podemos ver que $(\mathcal{W}_{XY}^{\text{DM}}(\mathbf{k}))^* = \mathcal{W}_{YX}^{\text{DM}}(\mathbf{k})$.

Ahora el hamiltoniano en la ecuación (1.14), tendrá los coeficientes

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_X(\mathbf{k}) &= H_0 \cos(\phi_H - \phi_M) - M_{\text{eff}} \sin^2 \phi_M + 4\pi M_s F(kd) \sin^2 \phi_{\mathbf{k}} + Dk^2 \\ \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}) &= H_0 \cos(\phi_H - \phi_M) + M_{\text{eff}} \cos(2\phi_M) - 4\pi M_s F(kd) [\cos(2\phi_M) \\ &\quad + \sin^2 \phi_{\mathbf{k}} \sin^2 \phi_M] + Dk^2 \\ \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k}) &= -4\pi M_s F(kd) \sin(\phi_{\mathbf{k}}) \cos \phi_{\mathbf{k}} \sin \phi_M - 2iM_s k_z \lambda_{\text{DM}} \cos \phi_M \\ \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k}) &= -4\pi M_s F(kd) \sin \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_{\mathbf{k}} \sin \phi_M - 2iM_s k_z \lambda_{\text{DM}} \cos \phi_M \end{aligned} \quad (2.6)$$

Los detalles de los cálculos realizados en esta sección se encuentran en el Apéndice 3.5.

2.2. Relación de dispersión de las ondas de espín

Con los resultados anteriores, ya tenemos las expresiones necesarias para analizar la relación de dispersión de las ondas de espín. Reemplazando los coeficientes de (2.6) en la ecuación (1.18), la relación de dispersión, para la clase de simetría T , es

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{k}) &= 2\gamma M_s k \lambda_{\text{DM}} \cos \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M \\ &\quad + \gamma \sqrt{\mathcal{W}_X(\mathbf{k}) \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}) - (2\pi M_s kd \sin \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_{\mathbf{k}} \sin \phi_M)^2}. \end{aligned}$$

A primera vista, es evidente que la interacción de DM se encuentra sólo en el término lineal de la relación de dispersión (que es proporcional a λ_{DM}), resultado que concuerda con la teoría desarrollada por Costa *et al.* en que, considerando acoplamiento espín-órbita, aparece un término con esta tendencia y se asocia con las IDM.

En este caso (grupo puntual T), la asimetría se percibirá en mayor grado, con la magnetización en el plano del film ($\phi_M = 0$) y con vectores de onda paralelos a ésta ($\phi_{\mathbf{k}} = 0$). Este resultado también se ha citado en las referencias [12, 11], donde no se observa asimetría cuando la magnetización es perpendicular al plano de la lámina.

Si el sistema no presentara IDM ($\lambda_{\text{DM}} = 0$), como en los materiales ferromagnéticos usuales, la relación de dispersión sería simétrica respecto a una inversión del vector de onda ($\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$), donde éste rota π radianes y el ángulo $\phi_{\mathbf{k}}$ pasa a ser $\phi_{\mathbf{k}} \pm \pi$. Si consideramos IDM, el término que las representa en la relación de dispersión mencionada anteriormente, sujeto a una inversión del vector de onda, sufrirá un cambio de signo, ya que $\cos(\phi_{\mathbf{k}} \pm \pi) = -\cos \phi_{\mathbf{k}}$, y debido a este factor, habrá una asimetría en la relación, la cual ha sido reportada experimentalmente por *Zakeri et al.* [29, 30] sobre un sistema de Fe sobre W(110) y precedida en los trabajos citados inicialmente en el capítulo [12, 11].

De acuerdo a lo anterior, es fácil estimar la asimetría de la relación de dispersión de las ondas de espín a través de la frecuencia $f(\mathbf{k}) = \Omega(\mathbf{k})/2\pi$, la cual se define como

$$\Delta f = f(\mathbf{k}) - f(-\mathbf{k}). \quad (2.7)$$

Así, para la clase de simetría T , la expresión de la asimetría será lineal en el vector de onda y tiene la forma

$$\Delta f = \frac{4\gamma M_s k \lambda_{\text{DM}}}{2\pi} \cos \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M. \quad (2.8)$$

Como habíamos establecido, de acuerdo a las distintas geometrías cristalográficas de los sistemas, hay asociadas ciertas combinaciones de invariantes de Lifshitz, por lo que la asimetría tendrá una expresión particular en relación a cada una de éstas. Por ello, hemos resumido en la Tabla 2.1, la expresión para la asimetría Δf asociada a los grupos puntuales reportados en la literatura, como habíamos mostrado en la Tabla (1.1).

Clase de Simetría	Asimetría Δf
T	$\frac{4\gamma k M_s \lambda_{\text{DM}}}{2\pi} \cos \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M$
C_{nv}	$-\frac{4\gamma k M_s \lambda_{\text{DM}}}{2\pi} \sin \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M$
D_{2d}	$-\frac{4\gamma k M_s \lambda_{\text{DM}}}{2\pi} \cos \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M$
D_n	$\frac{4\gamma k M_s \lambda_{\text{DM}}^{(1)}}{2\pi} \cos \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M$
C_n	$-\frac{4\gamma k M_s}{2\pi} (\lambda_{\text{DM}}^{(1)} \sin \phi_{\mathbf{k}} - \lambda_{\text{DM}}^{(2)} \cos \phi_{\mathbf{k}}) \cos \phi_M$

Tabla 2.1: Expresiones de la asimetría para diferentes grupos puntuales.

Podemos ver que las expresiones de Δf son bastante similares, lo cual se debe a que en el límite de un film muy delgado, la componente y de la magnetización no entra en juego y los términos de segundo orden tienen la misma estructura. Cabe señalar que, en el caso $\phi_M = \pi/2$, es decir, cuando el film está saturado con la magnetización perpendicular al plano del sistema, la asimetría se anula para cualquier clase cristalográfica, de manera que las IDM sólo se percibirán, como habíamos manifestado, en mayor magnitud cuando la magnetización es paralela al plano del film. Además, dependiendo de la clase de simetría, tendremos una dependencia en el ángulo $\phi_{\mathbf{k}}$ que forman el vector de onda \mathbf{k} y la magnetización \mathbf{M} .

De estos resultados es importante rescatar que es posible estimar las constantes de DM en caso de que un experimento de esta índole se pudiera llevar a cabo. Como mencionamos en la Tabla (2.1), las principales clases de simetría a las cuales los ferromagnetos pueden pertenecer, pero, en principio, es posible obtener también una expresión de los invariantes de Lifshitz asociados a sistemas ferromagnéticos delgados más comunes que presentan IDM [31, 11], como Fe sobre W(110), debido a la baja simetría de su superficie. Solo bastaría con realizar el límite al continuo de la expresión discreta de la energía de las IDM, cuya forma es $\sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j$, teniendo en cuenta los vecinos cercanos en la red del cristal y la dirección de los vectores de Dzyaloshinskii \mathbf{D}_{ij} en ésta. Un tratamiento detallado de las expresiones discretas y de la geometría de estos sólidos, se encuentra en las referencias [13] y [31]. No obstante, hay que considerar que estos sistemas, en general, constan de unas pocas monocapas, por lo que el límite micromagnético puede no seguir siendo válido, debido a la baja dimensionalidad en su espesor. Pero, si los parámetros están dentro de un rango aceptable, sería posible, a partir de este tratamiento, obtener fácilmente las constantes de DM ajustando las curvas de la relación de dispersión con las de datos experimentales. A continuación, presentamos un ejemplo donde calculamos los invariantes asociados a un sistema de baja simetría y cuyos vectores de Dzyaloshinskii son conocidos.

2.3. Invariantes para superficies de baja dimensionalidad

2.3.1. Arreglo cuadrado bcc(001)

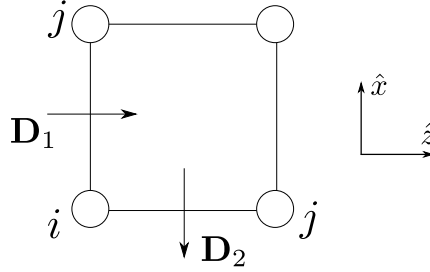


Figura 2.1: Orientaciones de los vectores de Dzyaloshinskii \mathbf{D}_i y los sitios con sus vecinos más cercanos para la superficie de una geometría cristalina cuadrada bcc(001) de un sistema bidimensional.

Un ejemplo concreto, es el caso de la superficie de un sistema cristalino cúbico bcc(001) reportado en las referencias [31, 10]. Los vectores de Dzyaloshinskii entre vecinos cercanos, como se muestra en la Figura 2.1, adecuados a nuestro sistema, están dados por $\mathbf{D}_1 = D\hat{z}$ y $\mathbf{D}_2 = -D\hat{x}$. Acá solo consideramos el caso donde las constantes de los vectores son iguales, $D_1 = D_2$. La energía de las interacciones, denotando $S_j^{(\alpha)}$ como la componente α del espín j , será por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{DM}} &= \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) \\ &= \sum_i \left\{ -D_2 \left(S_i^{(y)} S_{i+z}^{(z)} - S_i^{(z)} S_{i+z}^{(y)} \right) + D_1 \left(S_i^{(x)} S_{i+x}^{(y)} - S_i^{(y)} S_{i+x}^{(x)} \right) \right\} \quad (2.9)\end{aligned}$$

Considerando ahora el espín del sitio i como un vector clásico (límite al continuo) con coordenadas $\mathbf{x} = (x, y, z)$ del momento magnético ($\mathbf{S}_i \rightarrow (S/M_s)\mathbf{M}(x, y, z)$, con S como el espín total del sitio), podemos aproximar

$$\mathbf{S}_{i+z} \rightarrow \frac{S}{M_s} \mathbf{M}(x, y, z + \Delta z) \approx \frac{S}{M_s} \left(\mathbf{M}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial z} \Delta z \right).$$

De forma análoga se obtiene una expresión para el vecino en la otra dirección, $j = i + x$. Así, llegamos a

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \frac{S^2 D}{M_s^2} \sum_{\mathbf{x}} \left\{ -\mathcal{L}_{yz}^{(z)} \Delta z + \mathcal{L}_{xy}^{(x)} \Delta x \right\}.$$

Ahora, como estamos en el límite micromagnético y tenemos celdas cuadradas, podemos multiplicar la expresión por $\Delta x \Delta y / a^2 = \Delta y \Delta z / a^2 = 1$ y hacer $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$ para formar la integral, con lo que llegamos a una expresión más familiar

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \lambda_{\text{DM}} \int_V \{ \mathcal{L}_{yz}^{(z)} + \mathcal{L}_{yx}^{(x)} \} dV,$$

donde $\lambda_{\text{DM}} = -S^2 D / M_s^2 a^2$ es la constante de DM. Esta misma combinación de invariantes se cita en la ecuación (8) de la referencia [32]. Una investigación reciente, que utiliza esta geometría para describir un sistema, es el de la referencia [10], en el que se analizan monocapas de Mn sobre W(001).

2.3.2. Arreglo bcc(110)

Es posible extender el cálculo anterior a distintas configuraciones cristalográficas. Para el caso de Fe sobre W(110), podemos considerar el arreglo bcc(110) como se muestra en la Figura 2.2.

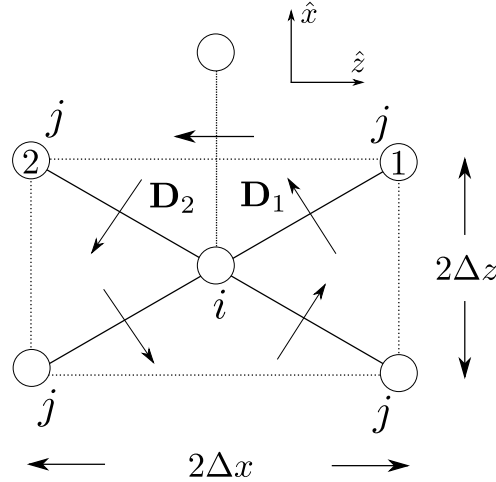


Figura 2.2: Orientaciones de los vectores de Dzyaloshinskii \mathbf{D}_i de la superficie de un arreglo bcc(110) (losenge lattice). La dirección de los vectores los asumimos de la referencia [11]. En estos sistemas, de una o dos monocapas de Fe sobre W(110), la constante de red $2\Delta z$, será la del W. La proporción con la constante a lo largo de \hat{x} , se mantiene como $(2\Delta x) = \sqrt{2}(2\Delta z)$ [11, 33]. Los sitios j se refieren a los vecinos más cercanos, mientras que el sitio que ilustramos en la parte superior del i , corresponde al siguiente más cercano, en que el vector de DM está en la dirección $-\hat{z}$.

Tomando en cuenta que hay 4 vecinos más cercanos, separaremos los cálculos para los dos vecinos señalados en la Figura 2.2 y asumiremos que los vectores

de Dzyaloshinskii tienen la misma magnitud [11]. Los otros dos vecinos dan exactamente el mismo resultado, por lo que bastaría tomar el doble del resultado que obtengamos. Entonces, el hamiltoniano del primer vecino será

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{DM}}^{(1)} &= \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) \\ &= \sum_i \left\{ -D_z \left(S_i^{(x)} S_{i+\epsilon_1}^{(y)} - S_i^{(y)} S_{i+\epsilon_1}^{(x)} \right) + D_x \left(S_i^{(y)} S_{i+\epsilon_1}^{(z)} - S_i^{(z)} S_{i+\epsilon_1}^{(y)} \right) \right\},\end{aligned}$$

en que $\epsilon_1 = \Delta z \hat{z} + \Delta x \hat{x}$. El cálculo del segundo vecino es similar, solo que en tal caso se tendría $\epsilon_2 = -\Delta z \hat{z} + \Delta x \hat{x}$. Denotaremos $\mathcal{H}_{\text{DM}}^{(\alpha)} = \sum_i S_i^{(\alpha)}$. Según la geometría, la cual es similar al caso anterior, se obtendrá un invariante con la misma estructura, pero con diferentes constantes de la red.

Reduciendo términos y considerando los 4 vecinos, el hamiltoniano para las IDM en este arreglo será

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{DM}} &= 2 \sum_i \left\{ \mathcal{S}_i^{(1)} + \mathcal{S}_i^{(2)} \right\} \\ &= 4 \sum_i \left\{ -D_z \left(S_i^{(x)} \frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial x} - S_i^{(y)} \frac{\partial S_i^{(x)}}{\partial x} \right) \Delta x \right. \\ &\quad \left. + D_x \left(S_i^{(y)} \frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial z} - S_i^{(z)} \frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial z} \right) \Delta z \right\},\end{aligned}$$

y en el límite micromagnético

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{DM}} &\stackrel{\Delta V \rightarrow 0}{=} -\frac{4D_z}{\Delta z \Delta y} \frac{S^2}{M_s^2} \int \mathcal{L}_{xy}^{(x)} dV + \frac{4D_x}{\Delta x \Delta y} \frac{S^2}{M_s^2} \int \mathcal{L}_{yz}^{(z)} dV \\ &= \lambda_{\text{DM}}^{(1)} \int \mathcal{L}_{yx}^{(x)} dV + \lambda_{\text{DM}}^{(2)} \int \mathcal{L}_{yz}^{(z)} dV,\end{aligned}\tag{2.10}$$

donde $\lambda_{\text{DM}}^{(1)} = 4D_z S^2 / (\Delta z \Delta y M_s^2)$ y $\lambda_{\text{DM}}^{(2)} = 4D_x S^2 / (\Delta x \Delta y M_s^2)$. En este caso, Δx , Δy y Δz , representan la mitad de las constantes de la red en las direcciones correspondientes [11, 33]. Con nuestras aproximaciones, sólo sería relevante el primer término de esta expresión. Si quisiéramos integrar el siguiente vecino más cercano, tendríamos que hacer un cálculo similar al del arreglo bcc(001), sólo cambiarían las constantes de la red, debido a que las direcciones de los vectores de Dzyaloshinskii siguen la misma tendencia [11].

Estudios recientes, han sido capaces de predecir algunos valores teóricos de los vectores de Dzyaloshinskii con cálculos de primeros principios en Fe/W(110) [34, 11], pero, al parecer, la precisión de las magnitudes reportadas no es muy elevada, debido a la complejidad de la teoría.

2.4. Susceptibilidades dinámicas

Así como en el caso de la relación de dispersión, usamos directamente la expresión de la absorción (ecuaciones (1.31), (1.32) y (1.33)). Ahora, podemos aproximar $1 + g^2 \approx 1$ (valores típicos de g son del orden de 0.01), para así obtener una expresión más reducida para la absorción:

$$\Im[S_{XX}(\mathbf{k}, \Omega)] = \frac{\gamma M_s (\gamma \Lambda(\mathbf{k}) \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}) - g \Omega \xi(\mathbf{k}))}{\xi(\mathbf{k})^2 + \Lambda(\mathbf{k})^2}, \quad (2.11)$$

teniendo en cuenta que

$$\Im[\mathcal{W}_{XY}] = -2M_s k \lambda_{DM} \cos \phi_{\mathbf{k}} \cos \phi_M$$

y

$$\xi(\mathbf{k}) = \Omega(\mathbf{k})^2 - \Omega^2 + 2\gamma \Im[\mathcal{W}_{XY}](\Omega(\mathbf{k}) - \Omega).$$

La idea general que podemos obtener de la expresión anterior, es que las IDM no modifican el ancho de la línea de absorción. En el caso de resonancia ferromagnética (FMR), es decir, la excitación de ondas de espín con vectores de onda nulos ($\mathbf{k} = 0$), el término de DM no modifica el ancho de línea de la resonancia, ya que éste no depende de la magnitud de la constante de DM. En vez de eso, las IDM simplemente producen un corrimiento del campo de resonancia, pero para un k no nulo, debido a que $\Im[\mathcal{W}_{XY}] \propto k$. De esta forma, el corrimiento de frecuencia también es nulo para el caso de FMR. Estos resultados se expondrán en la siguiente sección a través de las Figuras 2.4 y 2.5.

2.5. Resultados para un sistema de Siliciuro de Manganeso (MnSi)

Para ilustrar nuestros resultados haremos uso de la información expresada en la referencia [35] para un film delgado de MnSi, el cual es un helimagneto bajo una temperatura crítica cercana a los 29 K. Este sistema posee una anisotropía uniaxial con un plano fácil paralelo al plano de la película, por lo que, en nuestra notación, tenemos $K_u > 0$ para la constante de anisotropía. Como estamos considerando en la teoría un sistema saturado, necesitamos un campo magnético externo lo suficientemente fuerte para que el sistema pierda la configuración quiral de \mathbf{M} , la cual es característica de estos sistemas de MnSi. Para este material, el campo es del orden de 5400 Oe para un film de 11.5 nm de espesor.

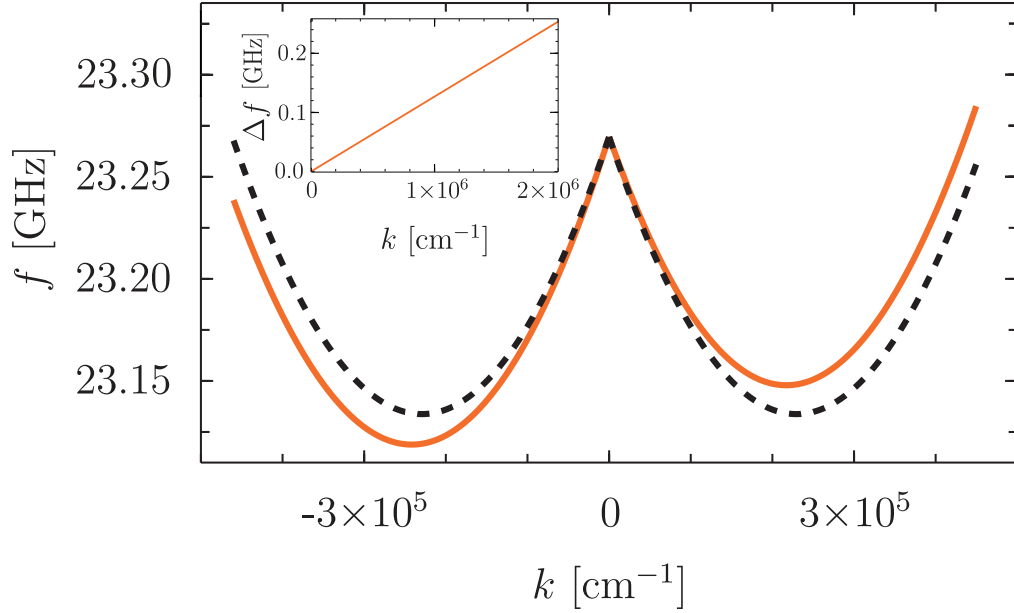


Figura 2.3: Relación de dispersión de las ondas de espín para una lámina magnética ultradelgada de MnSi, con 11.5 nm de espesor, la cual se encuentra saturada en el plano ($\phi_M = 0$) con un campo magnético externo de 5400 Oe. Este sistema posee una magnetización de saturación de 163 Oe, una rigidez de intercambio (exchange stiffness) de $D = 7.01226 \times 10^4$ Oe \times nm², una anisotropía uniaxial con una constante $K_u = 330 \times 10^3$ erg/cm³, lo cual corresponde a un campo de anisotropía de $H_u = 471$ Oe de amplitud; y una constante giromagnética (gyromagnetic ratio) de $\gamma = 0.0185555$ GHz/Oe. La línea continua corresponde al sistema con una constante de DM de $\lambda_{DM} = 0.658$ nm de magnitud, mientras que la línea intermitente se refiere al sistema sin IDM, es decir, con $\lambda_{DM} = 0$ nm. En el recuadro se ilustra la asimetría Δf para los parámetros recién citados, la cual está dada por la ecuación 2.8 y corresponde a la del grupo puntual T .

Acá verificamos que, efectivamente, hay un quiebre de la simetría de la relación de dispersión de las ondas de espín en presencia de las IDM. Esta asimetría, que estimamos como la diferencia entre el espectro de vectores de onda opuestos (ecuaciones (2.7) y (2.8)) Δf , es la que graficamos en el recuadro de la Figura 2.3 y es lineal en el vector de onda k , con una pendiente que depende de la constante de DM λ_{DM} , la magnetización de saturación M_s , la constante giromagnética γ y los ángulos ϕ_M y ϕ_k . La asimetría en ausencia de las IDM es claramente cero.

Además de la relación de dispersión, hemos analizado el espectro de absorción del sistema de MnSi especificado anteriormente, el cual se encuentra saturado con un campo de 5400 Oe. En la Figura 2.4 ilustramos la dependencia de la parte imaginaria de la susceptibilidad como función de la frecuencia para distintos val-

ores de la magnitud del vector de onda k y para vectores paralelos y antiparalelos a \mathbf{M} . Podemos observar que con valores cada vez mayores de k , el corrimiento de la frecuencia de resonancia entre vectores de onda opuestos es mayor, lo cual se relaciona con el incremento lineal de la asimetría en la frecuencia de los modos de ondas de espín. Las líneas cortadas de la Figura 2.4 (las cuales corresponden a $k = 2 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$), se encuentran desplazadas a la izquierda de la curva que representa $k = 0$, debido a la bajada inicial que tiene la curva de dispersión, como se muestra en la Figura 2.3.

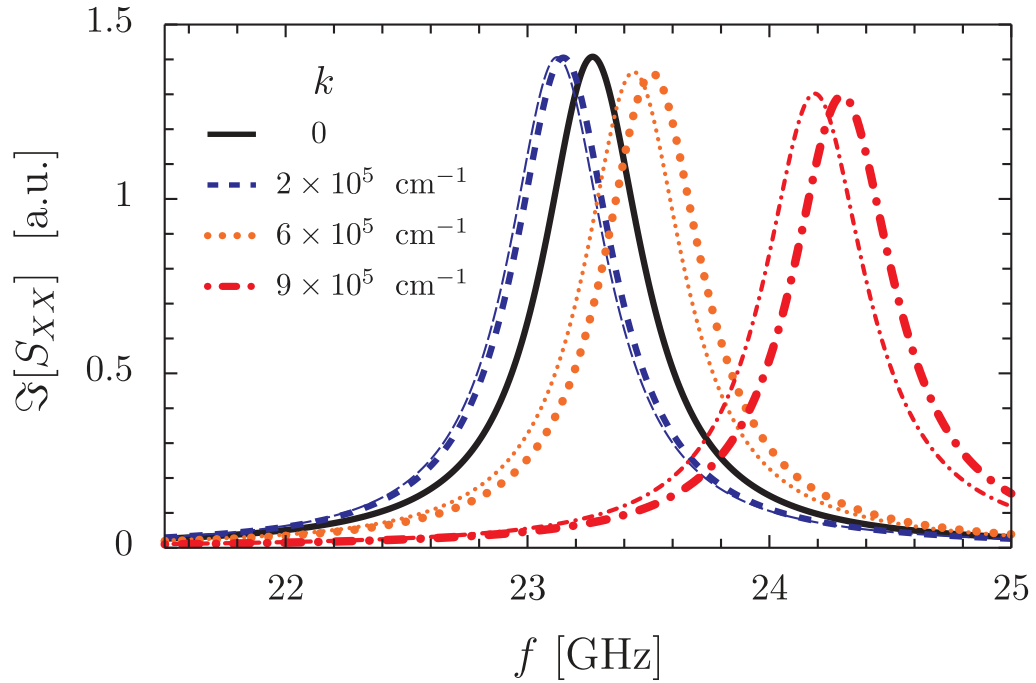


Figura 2.4: Espectro de absorción (parte imaginaria de la función respuesta) como función de la frecuencia f para el sistema de MnSi especificado en la Figura 2.3, con una constante de damping de $g = 0.01$, una constante de DM de $\lambda_{\text{DM}} = 0.658 \text{ nm}$ y diferentes magnitudes de los vectores de onda k . Las líneas gruesas, en cada caso, corresponden a vectores de onda con $\phi_{\mathbf{k}} = 0$ y las más delgadas, a los vectores opuestos, o sea, con $\phi_{\mathbf{k}} = \pi$. La línea sólida se refiere al caso con vector de onda nulo (FMR).

En la Figura 2.5a, estudiamos la dependencia del espectro de absorción de microondas con la magnitud del campo externo, sometido a un campo de microondas de 23.5 GHz, que corresponde a un campo resonante en un rango cercano al necesario para saturar la muestra, junto con su derivada respecto al campo en la Figura 2.5b. En este caso se aprecia que, para $k = 6 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$, la energía de

DM induce un corrimiento de la línea de absorción respecto al caso sin IDM y el cual es dependiente de la dirección del vector de onda, de forma que, si \mathbf{k} es paralelo a \mathbf{M} , el campo de resonancia disminuye; y si \mathbf{k} es antiparalelo a \mathbf{M} , el campo de resonancia aumenta. En ambos casos, con los parámetros de la Figura 2.5, este corrimiento (respecto al caso de $\lambda_{\text{DM}} = 0$) es de aproximadamente 12 Oe, lo cual se ve más claro en la Figura 2.5b.

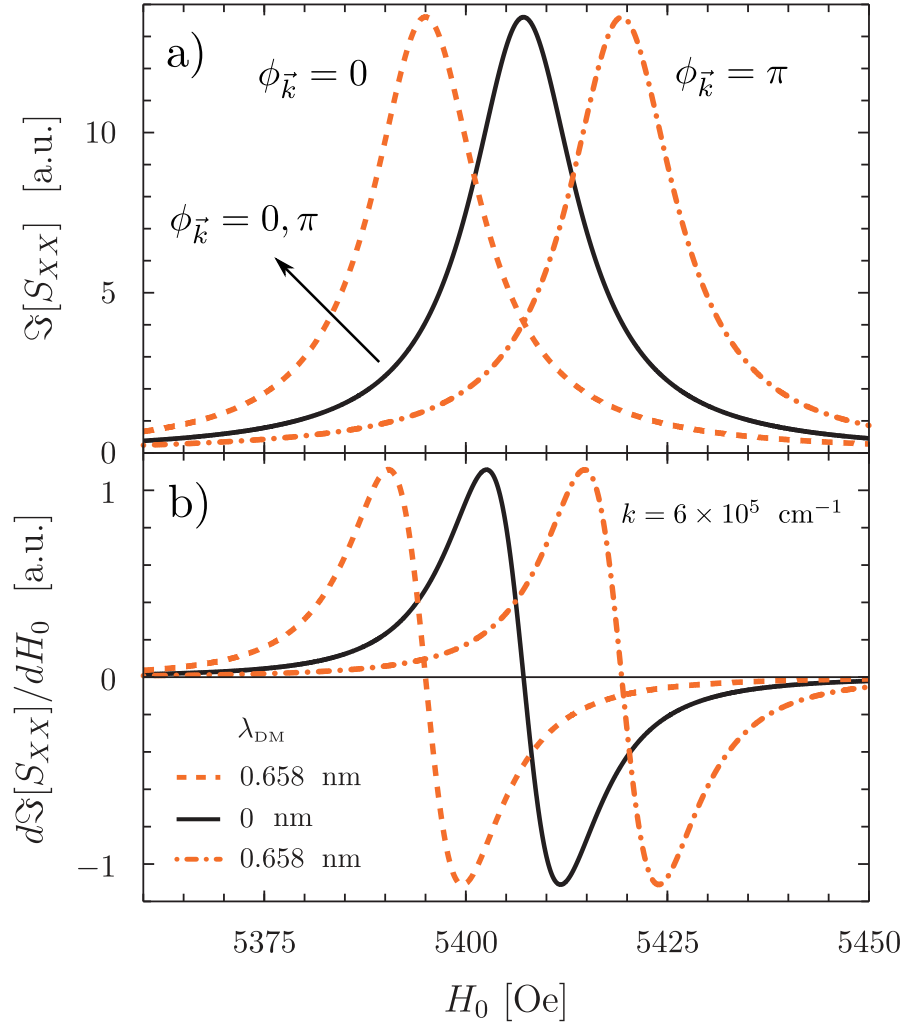


Figura 2.5: Espectro de absorción (Figura 2.5a) como función del campo aplicado H_0 para el sistema de MnSi especificado en la Figura 2.3, con un vector de onda de magnitud $k = 6 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$ y una frecuencia fija de 23.5 GHz. Las curvas punteadas (la cortada y la con puntos) corresponden al sistema con IDM y vectores de onda opuestos, mientras que la línea continua se refiere al caso con $\lambda_{\text{DM}} = 0$. En la Figura 2.5b, mostramos la derivada de esta función $\Im[S_{XX}]$ respecto al campo aplicado para especificar mejor el punto donde se encuentra el campo de resonancia.

Para cuantificar el corrimiento del campo de resonancia, respecto a otros valores del vector de onda, se ha graficado en la Figura 2.6a su comportamiento como función de k para dos frecuencias, 23.5 y 24 GHz. Acá observamos que inicialmente hay un aumento del campo de resonancia y luego éste comienza a decrecer para valores más grandes de k . En las dos situaciones, observamos que las curvas punteadas, que corresponden a los casos con IDM (con una constante $\lambda_{DM} = 0.658$ nm) y con vectores de onda opuestos, se van separando cada vez más de la línea continua, que corresponde al caso sin IDM ($\lambda_{DM} = 0$). Esta tendencia es lineal y se especifica en la Figura 2.6b, donde graficamos la diferencia entre el campo resonante, a una frecuencia de 23.5 GHz, entre vectores paralelos a \mathbf{M} (o sea, con $\phi_{\mathbf{k}} = 0$ y asociado a la línea discontinua de la Figura 2.6a), denotado por $H_{res}^{(0)}$, y el de vectores antiparalelos a \mathbf{M} ($\phi_{\mathbf{k}} = \pi$ y línea discontinua con puntos), que llamamos $H_{res}^{(\pi)}$, la cual comienza a incrementar para mayores valores de k , como en el caso de la dependencia con la frecuencia discutido más arriba.

Para los casos de dependencia en la frecuencia y en el campo magnético, los efectos de corrimiento en frecuencia y en campo de resonancia, en el espectro de absorción, debieran ser más apreciables para constantes de DM de mayor magnitud, lo cual podría observarse en películas de pocas monocapas, ya que presentan baja simetría en sus superficies.

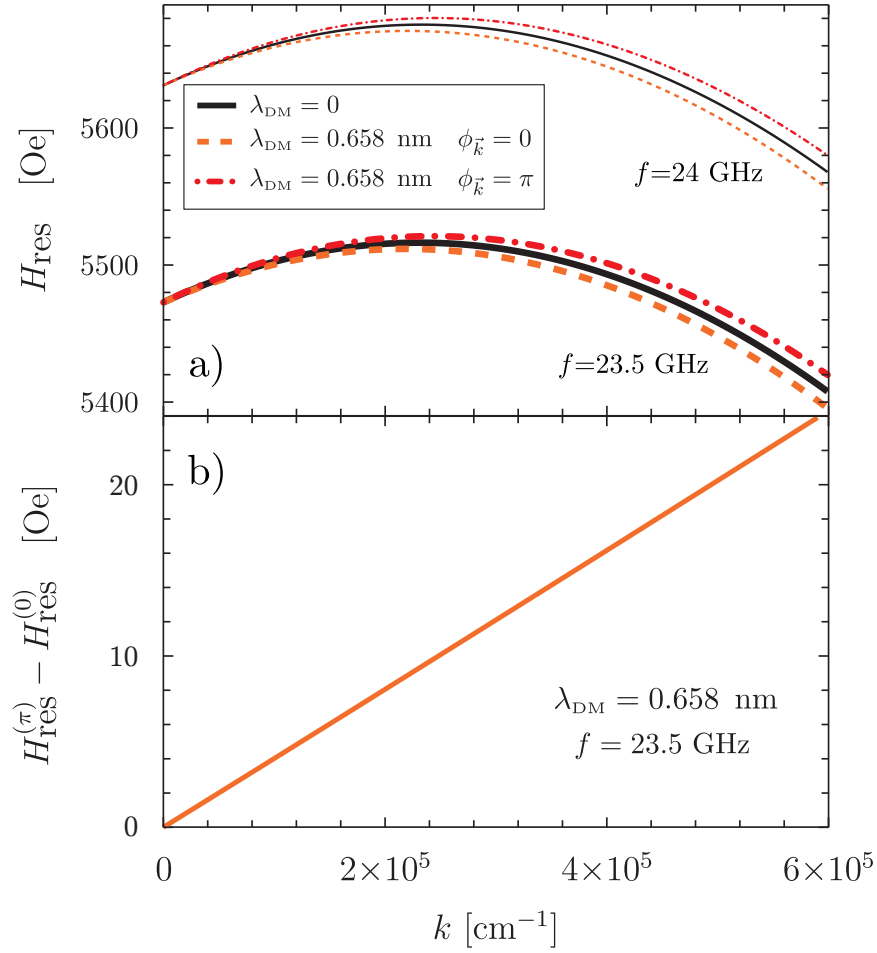


Figura 2.6: Gráficas del campo de resonancia (H_{res}) como función de la magnitud del vector de onda k para la lámina delgada de MnSi especificada en la Figura 2.3. En la Figura 2.6a, las curvas sólidas representan al sistema sin IDM, mientras que las líneas discontinuas, la cortada y la punto-segmentada, corresponden al caso con $\lambda_{\text{DM}} = 0.658$ nm, pero para vectores de onda opuestos ($\phi_{\mathbf{k}} = 0$ y $\phi_{\mathbf{k}} = \pi$ respectivamente). Además, las líneas gruesas se refieren al sistema bajo un campo de microondas de 23.5 GHz de frecuencia, en tanto que las líneas más delgadas son para una frecuencia de 24 GHz. La Figura 2.6b muestra la diferencia entre los campos de resonancia de vectores paralelos ($H_{\text{res}}^{(0)}$) y antiparalelos ($H_{\text{res}}^{(\pi)}$) a la magnetización \mathbf{M} , para el sistema con IDM y una frecuencia de 23.5 GHz.

2.6. Espectro de absorción para un sistema de Fe/W(110)

Otro sistema que es posible analizar, es el de Fe en W(110), cuya relación para la interacción de DM la obtuvimos en la Sección 2.3.2. Este tipo de sistemas con interacción de intercambio anisotrópico, consiste en pocas monocapas de Fe.

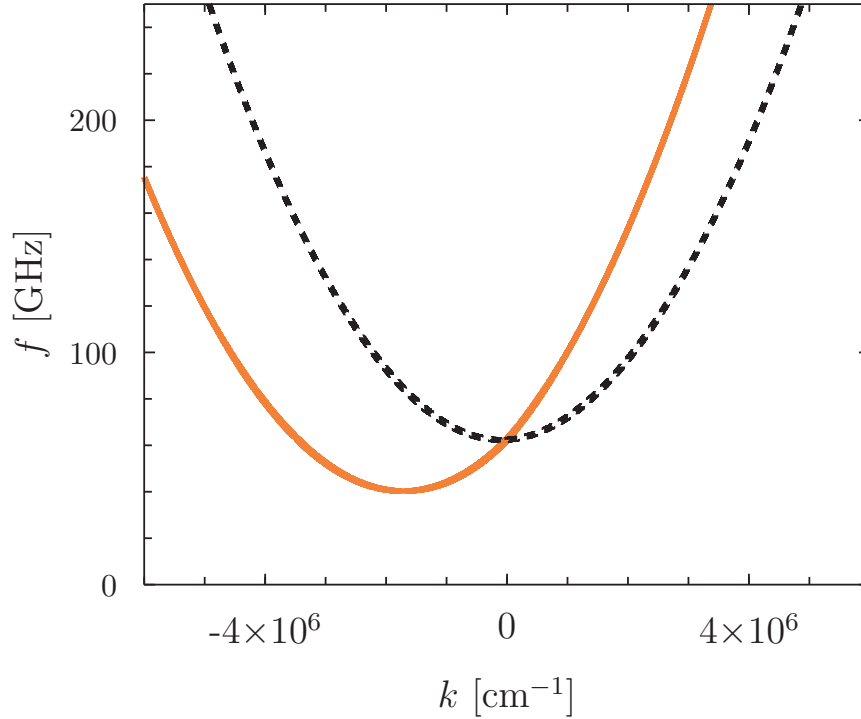


Figura 2.7: Relación de dispersión de las ondas de espín para una lámina de pocas monocapas de Fe/W(110), con $d = 1$ nm de espesor y una constante de red $a = 3.165$ Å; la cual se encuentra saturada en el plano ($\phi_M = 0$) con un campo magnético externo de 3000 Oe. Este sistema posee una magnetización de saturación de 1700 Oe, una rigidez de intercambio de $D = 2.5823 \times 10^5$ Oe \times nm² y una constante giromagnética de $\gamma = 0.0185555$ GHz/Oe. El campo de anisotropía uniaxial en el plano, lo hemos estimado como $H_u = 10000$ Oe de amplitud. La línea continua corresponde al sistema con una constante de DM de $\lambda_{DM}^{(1)} = 2.8$ nm de magnitud (ver ecuación 2.10), mientras que la línea intermitente se refiere al sistema sin IDM, es decir, con $\lambda_{DM}^{(1)} = 0$ nm; ambas con los ángulos $\phi_{\mathbf{k}} = \pi/2$ y $\phi_{-\mathbf{k}} = \pi/2 + \pi$.

Haciendo referencia a los trabajos reportados recientemente [11, 29, 30], podemos ver que las constantes de DM asociadas son de mayor magnitud y las asimetrías se aprecian en dirección perpendicular a la dirección de la magnetización de saturación de nuestra referencia. En la Figura 2.7, ilustramos la relación de dispersión, donde se aprecia una asimetría mucho mayor que la del sistema de MnSi analizado anteriormente, lo cual se puede ver directamente en el rango de frecuencias donde está situada la curva con las IDM. En este caso, estimamos [11] la constante de DM como $\lambda_{DM}^{(1)} = 2.8$ nm (ver ecuación 2.10; el término con $\lambda_{DM}^{(2)}$ no lo consideramos porque solo aporta un término lineal en la derivada espacial de m_Y que se anula con la transformada de Fourier), el campo de saturación lo hemos fijado en 3000 Oe y la onda de espín se mide en un ángulo $\phi_{\mathbf{k}} = \pi/2$ (para vectores de onda \mathbf{k} en la dirección \hat{x} ; en la dirección opuesta, debemos usar $\phi_{-\mathbf{k}} = \pi/2 + \pi$), que es donde existe mayor influencia de la interacción debido a que el invariante de Lifshitz es similar al de la clase de simetría C_{nv} y la asimetría tendrá una expresión como la de la Tabla 2.1, proporcional a $\sin \phi_{\mathbf{k}}$. Además, el sistema posee una anisotropía uniaxial en el plano en la dirección \hat{z} , por lo que debemos utilizar el resultado del Apéndice 3.3 y reemplazar según corresponda en las ecuaciones 2.6. A diferencia del sistema de MnSi, podemos ver que acá no existe una pendiente negativa inicial de la curva de la relación de dispersión, la cual es causada por los campos dipolares que genera la magnetización dinámica \mathbf{m} , aportando un término proporcional a \mathbf{k} [25, 27]. Esto porque, para la película de Fe/W(110), las ondas de espín las estamos analizando en la dirección perpendicular a la magnetización \mathbf{M} en el plano, es decir, las observamos en \hat{x} , y los efectos dipolares de \mathbf{m} sólo se aprecian hasta cierto ángulo crítico que forma el vector de onda \mathbf{k} respecto a la magnetización \mathbf{M} [25], de manera que, en este caso, la pendiente inicial será siempre positiva.

También, hemos graficado en la Figura 2.8, el espectro de absorción de la lámina de Fe/W(110), utilizando la expresión (1.31) con el invariante de Lifshitz correspondiente a esta geometría y los parámetros de la Figura 2.7. La resonancia (máxima absorción) ocurre justamente en los valores de la curva de la relación de dispersión, donde la frecuencia es igual a la de los modos normales del sistema.

En caso de que graficáramos los espectros de absorción con dependencia en la frecuencia o campo externo, veríamos los corrimientos en frecuencias y campos resonantes de las curvas, para determinados vectores de onda, mucho más pronunciados, debido a la mayor magnitud de la constante de DM.

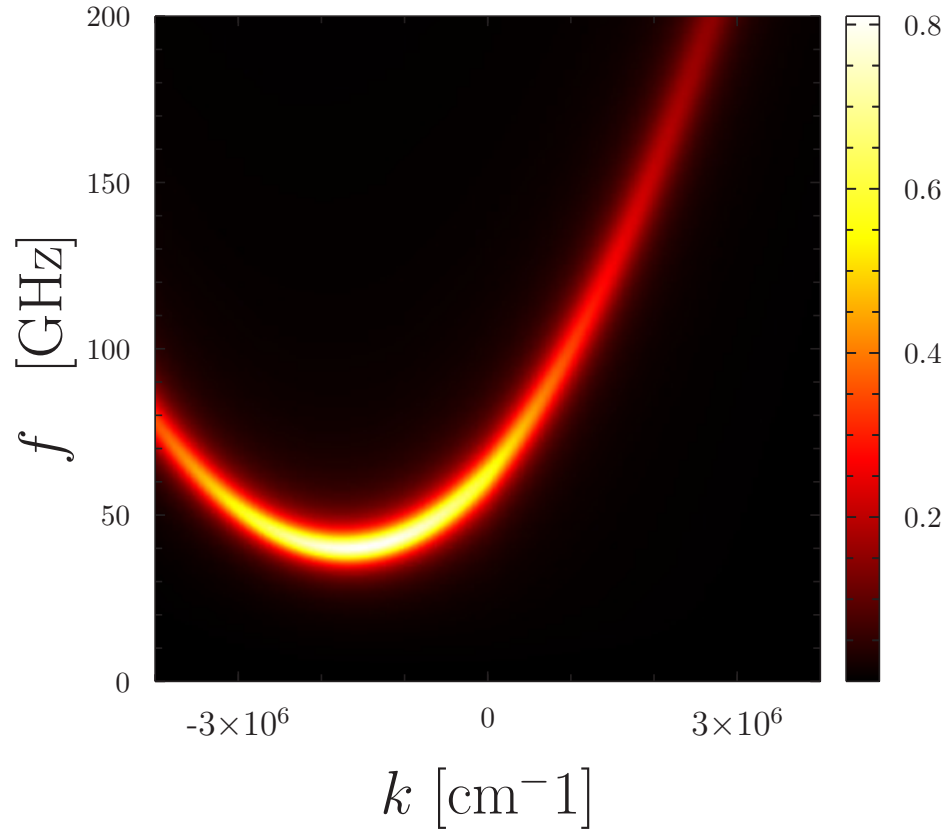


Figura 2.8: Espectro de absorción para una lámina de Fe/W(110) con los parámetros utilizados en la Figura 2.7, una constante de DM de $\lambda_{\text{DM}}^{(1)} = 2.8$ nm y una constante de amortiguamiento de $g = 0.1$, con la onda de espín en dirección perpendicular a la magnetización, es decir $\phi_{\mathbf{k}} = \pi/2$ y $\phi_{-\mathbf{k}} = \pi/2 + \pi$ según corresponda a las direcciones paralelas y antiparalelas a \hat{x} .

2.7. Conclusiones

En esta investigación, hemos demostrado la influencia que tienen las interacciones de Dzyaloshinskii-Moriya en el espectro de ondas de espín de películas ferromagnéticas delgadas, saturadas con un campo magnético. En estos sistemas, hemos calculado la relación de dispersión para diferentes clases de simetría cristalográficas (que dan cuenta de los distintos materiales de los que podrían estar conformados estos magnetos); además del tensor de susceptibilidad dinámica en la aproximación de respuesta lineal. En el caso de la relación de dispersión, hemos comprobado la existencia de una asimetría respecto a la inversión del vector de onda, lo cual ha sido reportado en forma experimental [29]. También, hemos predicho que no existe asimetría el caso de que la magnetización esté orientada perpendicular al plano de la lámina, lo que concuerda con resultados del formalismo de Costa et al. [12]. Respecto a las asimetrías, éstas se han cuantificado a través de la diferencia en frecuencia entre vectores de onda opuestos, $\Delta f(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k}) - f(-\mathbf{k})$, y hemos resumido en la Tabla 2.1 estas expresiones para diversos grupos puntuales. Estos resultados son analíticos, y sería interesante que fueran comparados con futuros experimentos en el área, de los cuales se podrían extraer datos relevantes, como las constantes de DM λ_{DM} .

Otro punto a destacar en nuestro formalismo es que, en el caso del sistema saturado, las IDM no afectan a la respuesta de Resonancia Ferromagnética ($\mathbf{k} = 0$). Esto se puede explicar como señalamos a continuación. El término de energía de las IDM es cuadrático en las componentes de la magnetización dinámica, por lo que no modifican la condición de equilibrio del estado de magnetización uniforme, que surge de los términos lineales en \mathbf{m} . Específicamente, los términos lineales de la energía de DM, se anulan debido a la linealidad en las primeras derivadas espaciales de \mathbf{m} . A su vez, los términos cuadráticos también son lineales en estas derivadas, lo que en el espacio de Fourier, se traduce en una linealidad en el vector de onda \mathbf{k} , demostrando lo que habíamos establecido inicialmente, que en FMR no hay influencia de las IDM.

Es importante mencionar que, en caso de que quisiéramos tomar en cuenta configuraciones quirales, lo cual es típico en estos sistemas, el problema se volvería más complicado, debido a las siguientes razones: (i) sería necesario volver a calcular la energía dipolar, lo cual no es una tarea trivial; (ii) tendríamos que considerar otra condición de equilibrio, en caso de tener, por ejemplo, una hélice como estado inicial o un arreglo de Skyrmions [35, 36]. Entonces, el hecho de tener un estado uniforme, saturando la magnetización, nos permite una mejor comparación entre la teoría y los experimentos, ya que no estamos asumiendo posibles estados de equilibrio. Esto nos posibilita la obtención de expresiones analíticas sencillas para describir el espectro de ondas de espín del ferromagneto.

Además de obtener efectos en la relación de dispersión, hemos conseguido deducir expresiones para las funciones respuesta y explicar la influencia de las IDM en el espectro de absorción. De acá, hemos logrado observar la existencia

de un corrimiento en las frecuencias y en los campos de resonancia del sistema, para vectores de onda opuestos y no-nulos ($k \neq 0$). Este fenómeno se incrementa en el caso de que la magnitudes del vector de onda y de las constantes de DM sean mayores.

Por último, si quisiéramos describir un sistema con un invariante distinto a los que se han propuesto en la lista de clases de simetría, y cuya geometría cristalográfica sea conocida, hemos indicado un método para poder calcularlo apropiadamente en el límite micromagnético. Para esto, es importante saber bien cuáles son los vectores de Dzyaloshinskii involucrados en el arreglo, los que no siempre son fáciles de obtener, y van de acuerdo a la estructura del material bajo estudio.

APÉNDICES

3.1. Energía de Intercambio

Teníamos

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} \simeq -S^2 J \sum_{i,j} \left(1 - \frac{\phi_{ij}^2}{2} \right).$$

Con la regla del coseno,

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_i|^2 + |\mathbf{S}_j|^2 - 2 |\mathbf{S}_i| |\mathbf{S}_j| \cos \phi_{ij} &= |\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_j|^2 \\ 2S^2 - 2S^2 \left(1 - \frac{\phi_{ij}^2}{2} + \dots \right) &= S^2 |\hat{\mathbf{s}}_i - \hat{\mathbf{s}}_j|^2 \\ |\hat{\mathbf{s}}_i - \hat{\mathbf{s}}_j| &\simeq \phi_{ij} \end{aligned}$$

Posteriormente, debemos realizar la suma en j , así que expandemos \hat{s}_j

$$\begin{aligned} \hat{s}_j &= \hat{s}(\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\epsilon}_j) \\ &= \hat{s}\left(x_i + \epsilon_j^{(x)}, y_i + \epsilon_j^{(y)}, z_i + \epsilon_j^{(z)}\right) \\ &= \hat{s}(\mathbf{x}_i) + \frac{\partial \hat{s}(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \epsilon_j^{(x)} + \frac{\partial \hat{s}(\mathbf{x}_i)}{\partial y} \epsilon_j^{(y)} + \frac{\partial \hat{s}(\mathbf{x}_i)}{\partial z} \epsilon_j^{(z)} + \frac{\partial^2 \hat{s}(\mathbf{x}_i)}{\partial x \partial y} \epsilon_j^{(x)} \epsilon_j^{(y)} + \dots \\ &\simeq \hat{s}(\mathbf{x}_i) + (\boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \boldsymbol{\nabla}) \hat{s}(\mathbf{x}_i) \\ &= \hat{s}_i + (\boldsymbol{\epsilon}_j \cdot \boldsymbol{\nabla}) \hat{s}_i \end{aligned}$$

Por último, debemos realizar una suma para una estructura cristalina en particular. Consideremos un arreglo BCC como ejemplo (ver Figura 3.1).

Los vectores primitivos en esta estructura son

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \frac{a}{2} (\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}) \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{a}{2} (-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \quad \boldsymbol{\epsilon}_3 = \frac{a}{2} (\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$$

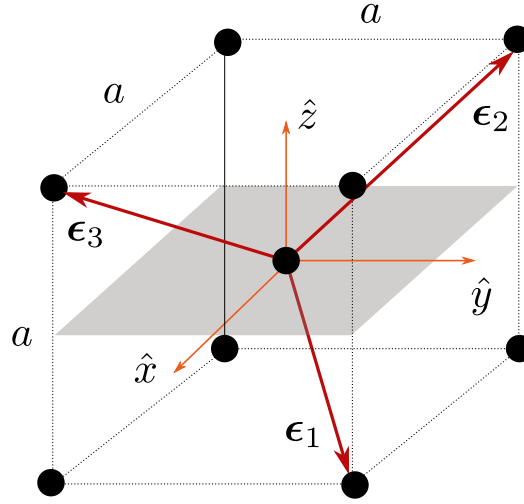


Figura 3.1: Arreglo BCC con los respectivos vectores primitivos y el sistema de coordenadas utilizado en los cálculos. Cada átomo tiene 8 vecinos y el número de átomos por sitio es igual a 2. La constante de la red se denota por a .

con a como la constante de la red. Si nos posicionamos en el sitio central de la celda, podemos observar que existen 8 vecinos cercanos para esta red, cuyas posiciones, son combinaciones similares a las de los vectores primitivos, como se muestra en la Figura 3.1. Así, tenemos: $\epsilon_4 = \frac{a}{2}(\hat{x} - \hat{y} - \hat{z})$, $\epsilon_5 = \frac{a}{2}(-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$, etc. Reemplazando en la suma, nos queda

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{ex}} = & \frac{JS^2}{2} \sum_i \frac{a^2}{4M_s^2} \left\{ ([\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 + ([-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 \right. \\ & + ([\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 + ([\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 \\ & + ([-\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 + ([-\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 \\ & \left. + ([-\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 + ([\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Notemos ahora, por ejemplo, que

$$\begin{aligned}
 ([\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2 &= (\nabla_x \mathbf{M}_i + \nabla_y \mathbf{M}_i - \nabla_z \mathbf{M}_i)^2 \\
 &= \left(\left[\nabla_x M_i^{(x)} + \nabla_y M_i^{(x)} - \nabla_z M_i^{(x)} \right] \hat{x} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\nabla_x M_i^{(y)} + \nabla_y M_i^{(y)} - \nabla_z M_i^{(y)} \right] \hat{y} \right. \\
 &\quad \left. + \left[\nabla_x M_i^{(z)} + \nabla_y M_i^{(z)} - \nabla_z M_i^{(z)} \right] \hat{z} \right)^2 \\
 &= \left[\left(\nabla_x M_i^{(x)} \right)^2 + \left(\nabla_y M_i^{(x)} \right)^2 + \left(\nabla_z M_i^{(x)} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(\nabla_x M_i^{(x)} \right) \left(\nabla_y M_i^{(x)} \right) - 2 \left(\nabla_x M_i^{(x)} \right) \left(\nabla_z M_i^{(x)} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\nabla_y M_i^{(x)} \right) \left(\nabla_z M_i^{(x)} \right) \right] \\
 &\quad + \left[\text{términos con } M_i^{(y)} \text{ y } M_i^{(z)} \right]
 \end{aligned}$$

Centrémonos ahora sólo en los términos con $M_i^{(x)}$, ya que para las otras componentes ocurrirá la misma simplificación. En la expresión anterior, los dos términos negativos, son debidos al $-\hat{z}$ de ϵ_1 y al cuadrado que mezcla los sumandos. Estos términos claramente se cancelarán con los del

$$([\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}] \cdot \nabla \mathbf{M}_i)^2,$$

ya que generan

$$2 \left(\nabla_x M_i^{(x)} \right) \left(\nabla_y M_i^{(x)} \right) + 2 \left(\nabla_x M_i^{(x)} \right) \left(\nabla_z M_i^{(x)} \right) + 2 \left(\nabla_y M_i^{(x)} \right) \left(\nabla_z M_i^{(x)} \right).$$

Así, formamos todos los pares que deben anularse (por ejemplo, se ve fácilmente que se anulan los de ϵ_2 con ϵ_3) y efectivamente ocurre con todos los términos proporcionales a 2 en la suma. Como los cuadrados siempre serán positivos, son los únicos términos que sobreviven, por lo que llegamos a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\text{ex}} &= \frac{JS^2}{2} \frac{a^2}{4M_s^2} \sum_i \left\{ 8 \left[\left(\nabla_x M_i^{(x)} \right)^2 + \left(\nabla_y M_i^{(x)} \right)^2 + \left(\nabla_z M_i^{(x)} \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + 8 \left[\left(\nabla_x M_i^{(y)} \right)^2 + \left(\nabla_y M_i^{(y)} \right)^2 + \left(\nabla_z M_i^{(y)} \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + 8 \left[\left(\nabla_x M_i^{(z)} \right)^2 + \left(\nabla_y M_i^{(z)} \right)^2 + \left(\nabla_z M_i^{(z)} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Notando que

$$(\nabla M_\alpha)^2 = \left(\frac{\partial M_i^{(\alpha)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_i^{(\alpha)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial M_i^{(\alpha)}}{\partial z} \right)^2,$$

con $\alpha = x, y, z$; y multiplicando y dividiendo por un celda de volumen $\Delta V = a^3$, se obtiene

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2JS^2}{a} 2 \right) \frac{1}{M_s^2} \sum_i \left\{ \left(\nabla M_i^{(x)} \right)^2 + \left(\nabla M_i^{(y)} \right)^2 + \left(\nabla M_i^{(z)} \right)^2 \right\} \Delta V.$$

En el límite infinitesimal, $\sum \Delta V \rightarrow \int dV$ y $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}(\mathbf{x}_i) \rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{x})$. Al pasar a la integral, debemos contar el número efectivo de átomos o momentos atómicos por sitio, que en el caso BCC sería de 2. Con esto en mente, llegamos a la expresión micromagnética de la energía de intercambio, para un arreglo BCC

$$\mathcal{H}_{\text{ex}} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{2JS^2}{a} 2 \right)}_A \frac{1}{M_s^2} \int \{ (\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2 \} dV.$$

En el caso de simetría cúbica y FCC, el cálculo es análogo, solo hay que considerar los vecinos cercanos, partiendo de los vectores primitivos, contar el número de átomos por sitio y realizar las sumas correspondientes. Con ello, se obtiene la definición de la constante de exchange $A = c2JS^2/a$, en el que c , el número atómico por sitio, será 1 para simetría cúbica, 2 para la BCC y 4 para la FCC.

3.2. Frecuencia de resonancia de un elipsoide ferromagnético

Comenzamos reemplazando la magnetización y campo magnético efectivo en la ecuación de LLG

$$\frac{\partial (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m})}{\partial t} = -\gamma (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(t)) \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t)) + \frac{g}{M_s} (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}) \times \frac{\partial (\mathbf{M}_0 + \mathbf{m})}{\partial t},$$

que claramente nos da

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \underbrace{\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0}_{\text{condición de eq.}} - \gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h} - \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0 - \gamma \underbrace{\mathbf{m} \times \mathbf{h}}_{2^\circ \text{ orden}} + \frac{g}{M_s} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \frac{g}{M_s} \underbrace{\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}}_{2^\circ \text{ orden}}.$$

El primer término es nulo y los de segundo orden los despreciamos. Así,

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h} - \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_{e0} + \gamma \mathbf{m} \times \tilde{N} \cdot \mathbf{M}_0 + \frac{g}{M_s} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}.$$

Luego, tenemos junto con la dependencia armónica de $\mathbf{m}(t)$ y $\mathbf{h}(t)$:

$$\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h} = M_s \hat{z} \times (h_x \hat{x} + h_y \hat{y}) = M_0 (-h_y \hat{x} + h_x \hat{y})$$

$$\mathbf{M}_0 \times \mathbf{m} = M_0 (-m_y \hat{x} + m_x \hat{y})$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{e0} = H_{e0} (m_y \hat{x} - m_x \hat{y})$$

$$\mathbf{m} \times \tilde{N} \cdot \mathbf{M}_0 = -N_z M_0 (m_y \hat{x} - m_x \hat{y})$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = i\omega \mathbf{m}$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = i\omega \mathbf{h}$$

Para llegar al sistema de ecuaciones

$$(i\omega + \gamma M_0 N_{xy}) m_x + (\gamma M_0 N_y + \gamma H_{e0} - \gamma N_z M_0 + gi\omega) m_y = \gamma M_0 h_{ey}$$

$$(-\gamma M_0 N_x - \gamma H_{e0} + \gamma N_z M_0 - gi\omega) m_x + (i\omega - \gamma M_0 N_{xy}) m_y = -\gamma M_0 h_{ex}$$

que pueden escribirse en forma matricial y resolverse para obtener la matrix susceptibilidad $\tilde{\chi}$ invirtiendo la matriz de 2×2 .

3.3. Anisotropía en el plano

Si quisiéramos una anisotropía con el eje fácil en el eje z de nuestro sistema de referencia (Figura 1.5), la energía asociada a ésta estará dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a &= -\frac{K_a}{M_s^2} \int_V (\mathbf{M} \cdot \hat{z})^2 dV \\ &= -\frac{K_a}{M_s^2} \int_V M_z^2 dV \end{aligned}$$

donde hemos denotado la constante de anisotropía como K_a . Así, utilizando la ecuación (1.11), debemos calcular

$$\begin{aligned} M_z^2 &= (M_Z \cos \phi_M - m_Y \sin \phi_M)^2 \\ &\approx \left(\left[M_s - \frac{m^2}{2M_s} \right] \cos \phi_M - m_Y \sin \phi_M \right)^2 \end{aligned}$$

Conservando solo términos hasta segundo orden en la magnetización dinámica \mathbf{m} , obtenemos

$$M_z^2 = M_s^2 \cos^2 \phi_M - M_s m_Y \sin(2\phi_M) - m_X^2 \cos^2 \phi_M - m_Y^2 \cos(2\phi_M),$$

donde, hasta ahora, $m_{X,Y} = m_{X,Y}(x, z; t)$. Entonces

$$\mathcal{H}_a = -\frac{K_a}{M_s^2} \int_V \{ M_s^2 \cos^2 \phi_M - M_s m_Y \sin(2\phi_M) - m_X^2 \cos^2 \phi_M - m_Y^2 \cos(2\phi_M) \} dV.$$

El primer término es una constante, así que la omitimos. El término lineal en m_Y se cancela junto con los términos lineales que surgen en el cálculo de la energía demagnetizante (también proporcionales a m_Y), debido a la condición de equilibrio, ya que con esta anisotropía, llamando $H_a = 2K_a/M_s$ a la magnitud de su campo asociado, tendríamos

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \times \mathbf{H}_i &= (\hat{z}M_s \cos \phi_M + \hat{y}M_s \sin \phi_M) \times (\hat{z}[H_0 \cos \phi_H + H_a]) \\ &\quad + \hat{y}H_0 \sin \phi_H - \hat{y}4\pi M_s \sin \phi_M \\ &= M_s H_0 \sin(\phi_M - \phi_H) + \left(\frac{4\pi M_s + H_a}{2} \right) M_s \sin(2\phi_M)\end{aligned}$$

y con la condición $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_i = 0$, el término con H_a se anula con los demás coeficientes.

Luego, transformamos en Fourier (ecuación (1.12)) los términos de segundo orden

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_a &= \frac{K_a}{M_s^2} \frac{1}{L^2 d} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \int_V \left\{ \cos^2 \phi_M m_X(\mathbf{k}; t) m_X(\mathbf{k}'; t) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \right. \\ &\quad \left. + \cos(2\phi_M) m_Y(\mathbf{k}; t) m_Y(\mathbf{k}'; t) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \right\} dV,\end{aligned}$$

e integramos las exponenciales para formar las deltas (ecuación (1.13)), recordando que \mathbf{k} y \mathbf{r} se refieren a los vectores en el plano. Finalmente, aplicando las propiedades de la magnetización dinámica, llegamos a

$$\mathcal{H}_a = \frac{1}{2M_s} \sum_{\mathbf{k}} H_a \left\{ \cos^2 \phi_M m_X^*(\mathbf{k}; t) m_X(\mathbf{k}; t) + \cos(2\phi_M) m_Y^*(\mathbf{k}; t) m_Y(\mathbf{k}; t) \right\}.$$

Por lo tanto, los coeficientes se agregan respectivamente a \mathcal{W}_X y \mathcal{W}_Y , de forma que nos quedaría (ver ecuación 2.6)

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_X(0) &= H_0 \cos(\phi_H - \phi_M) - 4\pi M_s \sin^2 \phi_M + H_a \cos^2 \phi_M \\ \mathcal{W}_Y(0) &= H_0 \cos(\phi_H - \phi_M) + 4\pi M_s \cos(2\phi_M) + H_a \cos(2\phi_M).\end{aligned}$$

3.4. Dinámica del sistema

En la dinámica del sistema debemos calcular

$$\begin{aligned}[m_{X,Y}(\mathbf{k}; t), \mathcal{H}] &= \frac{1}{2M_s} \sum_{\mathbf{k}'} \left\{ \mathcal{W}_X(\mathbf{k}') [m_{X,Y}(\mathbf{k}; t), m_X^*(\mathbf{k}'; t) m_X(\mathbf{k}'; t)] \right. \\ &\quad + \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}') [m_{X,Y}(\mathbf{k}; t), m_Y^*(\mathbf{k}'; t) m_Y(\mathbf{k}'; t)] \\ &\quad + \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k}') [m_{X,Y}(\mathbf{k}; t), m_X^*(\mathbf{k}'; t) m_Y(\mathbf{k}'; t)] \\ &\quad \left. + \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k}') [m_{X,Y}(\mathbf{k}; t), m_Y^*(\mathbf{k}'; t) m_X(\mathbf{k}'; t)] \right\}\end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}
[m_X(\mathbf{k}; t), m_Y^*(\mathbf{k}'; t)m_Y(\mathbf{k}'; t)] &= i\mu_0 M_s (\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}) m_Y(\mathbf{k}; t) \\
[m_X(\mathbf{k}; t), m_Y^*(\mathbf{k}'; t)m_X(\mathbf{k}'; t)] &= i\mu_0 M_s \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} m_X(\mathbf{k}; t) \\
[m_X(\mathbf{k}; t), m_X^*(\mathbf{k}'; t)m_Y(\mathbf{k}'; t)] &= i\mu_0 M_s \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} m_X^*(-\mathbf{k}; t) \\
[m_Y(\mathbf{k}; t), m_X^*(\mathbf{k}'; t)m_X(\mathbf{k}'; t)] &= -i\mu_0 M_s (\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}) m_X(\mathbf{k}; t) \\
[m_Y(\mathbf{k}; t), m_X^*(\mathbf{k}'; t)m_Y(\mathbf{k}'; t)] &= -i\mu_0 M_s \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} m_Y(\mathbf{k}; t) \\
[m_Y(\mathbf{k}; t), m_Y^*(\mathbf{k}'; t)m_X(\mathbf{k}'; t)] &= -i\mu_0 M_s \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} m_Y(\mathbf{k}; t)
\end{aligned}$$

Luego, reemplazamos en el conmutador y utilizamos las siguientes propiedades: al hacer $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, debemos cambiar el ángulo $\phi_{\mathbf{k}}$ por $\phi_{\mathbf{k}} + \pi$, de forma que

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_Y(-\mathbf{k}) &= \mathcal{W}_Y(\mathbf{k}) \\
\mathcal{W}_X(-\mathbf{k}) &= \mathcal{W}_X(\mathbf{k}) \\
\mathcal{W}_{XY}(-\mathbf{k}) &= -4\pi M_s F(kd) \sin \phi_{-\mathbf{k}} \cos \phi_{-\mathbf{k}} \sin \phi_M + i\Im[\mathcal{W}_{XY}(-\mathbf{k})]
\end{aligned}$$

En la tercera ecuación, como $\sin \phi_{-\mathbf{k}} = \sin(\phi_{\mathbf{k}} + \pi) = -\sin \phi_{\mathbf{k}}$ y $\cos \phi_{-\mathbf{k}} = \cos(\phi_{\mathbf{k}} + \pi) = -\cos \phi_{\mathbf{k}}$, la parte real queda igual, pero la parte imaginaria cambiará de signo, ya que si vemos la Tabla (2.1), de las asimetrías, las partes imaginarias para cualquier grupo puntual son siempre proporcionales a $\sin \phi_{\mathbf{k}}$ o a $\cos \phi_{\mathbf{k}}$, de manera que

$$\mathcal{W}_{XY}(-\mathbf{k}) = \Re[\mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k})] - i\Im[\mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k})] = \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})$$

Con esto en mente, volvemos a la ecuación de Heisenberg para llegar a (recordar que $\hbar\gamma = -\mu_0$)

$$\begin{aligned}
\dot{m}_X(\mathbf{k}) &= -\gamma \{ \mathcal{W}_Y(\mathbf{k})m_Y(\mathbf{k}) + \mathcal{W}_{YX}(\mathbf{k})m_X(\mathbf{k}) \} \\
\dot{m}_Y(\mathbf{k}) &= \gamma \{ \mathcal{W}_X(\mathbf{k})m_X(\mathbf{k}) + \mathcal{W}_{XY}(\mathbf{k})m_Y(\mathbf{k}) \}
\end{aligned}$$

la cual podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_X \\ \dot{m}_Y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\mathcal{W}_{YX} & -\mathcal{W}_Y \\ \mathcal{W}_X & \mathcal{W}_{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_X \\ m_Y \end{pmatrix}.$$

Luego, para resolver, suponemos $m_{X,Y}(\mathbf{k}; t) = \mathcal{M}_{X,Y}(\mathbf{k})e^{-i\Omega t}$ y hacemos el determinante cero para obtener soluciones no triviales de los modos normales,

$$\begin{vmatrix} -\gamma\mathcal{W}_{YX} + i\Omega & -\gamma\mathcal{W}_Y \\ \gamma\mathcal{W}_X & \gamma\mathcal{W}_{XY} + i\Omega \end{vmatrix} = 0.$$

De esta forma, obtenemos la ecuación característica

$$\Omega^2 - i\gamma(\mathcal{W}_{XY} - \mathcal{W}_{YX}) - \gamma^2(\mathcal{W}_X\mathcal{W}_Y - \mathcal{W}_{XY}\mathcal{W}_{YX}) = 0,$$

donde el resto del cálculo es directo.

3.5. Energía de las IDM

Con el objetivo de obtener la energía o hamiltoniano de las interacciones asimétricas, comenzamos con el cálculo de la expresión (2.1), donde calcularemos por separado

$$\mathcal{L} = \underbrace{M_x \frac{\partial M_z}{\partial y} - M_z \frac{\partial M_x}{\partial y}}_{(1)} + \underbrace{M_z \frac{\partial M_y}{\partial x} - M_y \frac{\partial M_z}{\partial x}}_{(2)} + \underbrace{M_y \frac{\partial M_x}{\partial z} - M_x \frac{\partial M_y}{\partial z}}_{(3)}.$$

Claramente, (1) se anula debido a que no tenemos dependencia en y . Haciendo uso de las relaciones (1.9), (1.10) y (1.11), obtenemos los otros dos términos, así que

$$(1) = 0$$

$$(2) = M_Z \frac{\partial m_Y}{\partial x} - m_Y \frac{\partial M_Z}{\partial x}$$

$$(3) = (M_Z \sin \phi_M + m_Y \cos \phi_M) \frac{\partial m_x}{\partial z} - m_x \sin \phi_M \frac{\partial M_Z}{\partial z} - m_x \cos \phi_M \frac{\partial m_Y}{\partial x}$$

Recordando que $M_Z \approx M_s - m^2/2M_s$, sumamos y dejamos solo los términos hasta segundo orden, para obtener la ecuación (2.2).

Habíamos señalado que los términos lineales se anulaban, esto se debe a que, al transformar la expresión

$$\mathcal{H}_{\text{DM}}^{\text{lineal}} = \lambda_{\text{DM}} d \int \left[M_s \frac{\partial m_Y(\mathbf{r}; t)}{\partial x} + M_s \sin \phi_M \frac{\partial m_X(\mathbf{r}; t)}{\partial z} \right] dx dz$$

en Fourier, nos queda

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{DM}}^{\text{lineal}} &= \lambda_{\text{DM}} M_s \sum_{\mathbf{k}} \left\{ [m_Y(\mathbf{k}; t) i k_x + \sin \phi_M m_X(\mathbf{k}; t) i k_z] \frac{1}{L^2} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dx dz \right\} \\ &= \lambda_{\text{DM}} M_s i \sum_{\mathbf{k}} [m_Y(\mathbf{k}; t) \sin \phi_{\mathbf{k}} + \sin \phi_M m_X(\mathbf{k}; t) \cos \phi_{\mathbf{k}}] k \delta_{\mathbf{k},0} \end{aligned}$$

Y ya es obvio que con la delta, el vector de onda se anula, así que podemos decir que, efectivamente, $\mathcal{H}_{\text{DM}}^{\text{lineal}} = 0$.

3.6. Invariantes para una red cuadrada bcc(001)

Solo daremos más detalles de los cálculos realizados para este ejemplo. Teníamos la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{DM}} &= \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) \\ &= \sum_{i,j} \mathbf{D}_{ij} \cdot \left\{ \left(S_i^{(y)} S_j^{(z)} - S_i^{(z)} S_j^{(y)} \right) \hat{x} + \left(S_i^{(x)} S_j^{(y)} - S_i^{(y)} S_j^{(x)} \right) \hat{z} \right\} \end{aligned}$$

La componente en \hat{y} no la escribimos porque ninguno de los vectores de Dzyaloshinskii tiene esta componente. Fácilmente notamos que entre el vecino con $j = i + x$, solo sobrevivirá la componente con \hat{z} y, análogamente, el vecino $j = i + z$ con la componente \hat{x} . De esta manera se obtiene la ecuación (2.9). Luego, reemplazando en el límite al continuo

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \frac{S^2 D}{M_s} \sum_{\mathbf{x}} \left\{ -M_y(x, y, z) M_z(x, y, z + \Delta z) + M_z(x, y, z) M_y(x, y, z + \Delta z) \right. \\ \left. + M_x(x, y, z) M_y(x + \Delta x, y, z) - M_y(x, y, z) M_x(x + \Delta x, y, z) \right\}$$

Y con las aproximaciones

$$\mathcal{H}_{\text{DM}} = \frac{S^2 D}{M_s} \sum_{\mathbf{x}} \left\{ -M_y \left(M_z + \frac{\partial M_z}{\partial z} \Delta z \right) + M_z \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta z \right) \right. \\ \left. + M_x \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \right) - M_y \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \Delta x \right) \right\} \\ \stackrel{\Delta V \rightarrow 0}{=} -\frac{S^2 D}{M_s a^2} \int_V \{ \mathcal{L}_{yz}^{(z)} + \mathcal{L}_{yx}^{(x)} \} dV$$

donde notamos que, en la primera igualdad, se cancelan vario términos, quedándonos exactamente la forma de los invariantes. Además, la red es cúbica, por lo que basta con multiplicar por a^2 , la distancia entre vecinos cercanos de ésta.

3.7. Invariantes para una red bcc(110)

Teníamos inicialmente

$$\mathcal{H}_{\text{DM}}^{(1)} = \sum_i \left\{ -D_z \left(S_i^{(x)} S_{i+\epsilon_1}^{(y)} - S_i^{(y)} S_{i+\epsilon_1}^{(x)} \right) + D_x \left(S_i^{(y)} S_{i+\epsilon_1}^{(z)} - S_i^{(z)} S_{i+\epsilon_1}^{(y)} \right) \right\} \\ = \sum_i \left\{ -D_z \left[S_i^{(x)} S^{(y)}(\mathbf{x}_i + \epsilon_1) - S_i^{(y)} S^{(x)}(\mathbf{x}_i + \epsilon_1) \right] \right. \\ \left. + D_x \left[S_i^{(y)} S^{(z)}(\mathbf{x}_i + \epsilon_1) - S_i^{(z)} S^{(y)}(\mathbf{x}_i + \epsilon_1) \right] \right\},$$

Luego, con la notación $\mathcal{H}_{\text{DM}}^{(\alpha)} = \sum_i \mathcal{S}_i^{(\alpha)}$, expandiendo y simplificando, según corresponda, obtenemos

$$\mathcal{S}_i^{(1)} = -D_z \left[S_i^{(x)} \left(\frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial x} \Delta x \right) - S_i^{(y)} \left(\frac{\partial S_i^{(x)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(x)}}{\partial x} \Delta x \right) \right] \\ + D_x \left[S_i^{(y)} \left(\frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial x} \Delta x \right) - S_i^{(z)} \left(\frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial x} \Delta x \right) \right].$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{\text{DM}}^{(2)} &= \sum_i \left\{ -D_z \left[S_i^{(x)} S_{i+\epsilon_2}^{(y)} - S_i^{(y)} S_{i+\epsilon_2}^{(x)} \right] - D_x \left[S_i^{(y)} S_{i+\epsilon_2}^{(z)} - S_i^{(z)} S_{i+\epsilon_2}^{(y)} \right] \right\} \\
 &= \sum_i \mathcal{S}_i^{(2)} \\
 \mathcal{S}_i^{(2)} &= -D_z \left[S_i^{(x)} \left(-\frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(y)}}{\partial x} \Delta x \right) - S_i^{(y)} \left(-\frac{\partial S_i^{(x)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(x)}}{\partial x} \Delta x \right) \right] \\
 &\quad - D_x \left[S_i^{(y)} \left(-\frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial x} \Delta x \right) - S_i^{(x)} \left(-\frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial S_i^{(z)}}{\partial x} \Delta x \right) \right].
 \end{aligned}$$

Luego, basta con simplificar los términos similares y llegamos a las expresiones utilizadas en la Sección 2.3.2.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Daniel D. Stancil and Anil Prabhakar. *Spin Waves: Theory and Applications*. Springer-Verlag New York Inc., 2009.
- [2] Helmut Krönmüller. General Micromagnetic Theory. In Helmut Krönmüller and Stuart Parkin, editors, *Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials*, volume **Volume 2: Micromagnetism**. John Wiley & Sons, 2007.
- [3] Amikam Aharoni. *Introduction to the Theory of Ferromagnetism*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2nd edition, 2001.
- [4] Jacques Miltat, Goncalo Albuquerque, and André Thiaville. Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures I. In *An Introduction to Micromagnetics in the Dynamic Regime*, volume **83** of *Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures I*, pages 1–33. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [5] Sōshin Chikazumi. *Physics of Ferromagnetism*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 2 edition, 1997.
- [6] Jürgen Lindner and Michael Farle. Magnetic Anisotropy of Heterostructures. In Hartmut Zabel and Samuel D. Bader, editors, *Magnetic Heterostructures*, volume **227** of *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [7] I. E. Dzyaloshinskii. *Theory of helical structures in antiferromagnets I: Non-metals*. Zh. Eksp. Teor. Fiz., **46**:1420, 1964. [Sov. Phys. JETP **19**, 960 (1964)].
- [8] I. E. Dzyaloshinskii. *A thermodynamic theory of weak ferromagnetism of antiferromagnetics*. J. Phys. Chem. Solids, **4**:241–255, 1958.
- [9] T. Moriya. *Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism*. Phys. Rev., **120**:91, 1960.

- [10] L. Udvardi, A. Antala, L. Szunyogh, A. Buruzs, and P. Weinberger. *Magnetic pattern formation on the nanoscale due to relativistic exchange interactions*. Physica B, **403**:402–404, 2008.
- [11] L. Udvardi and L. Szunyogh. *Chiral Asymmetry of the Spin-Wave Spectra in Ultrathin Magnetic Films*. Phys. Rev. Lett., **102**:207204, 2009.
- [12] A. T. Costa, R. B. Muniz, S. Lounis, A. B. Klautau, and D. L. Mills. *Spin-orbit coupling and spin waves in ultrathin ferromagnets: The spin-wave Rashba effect*. Phys. Rev. B, **82**:014428, 2010.
- [13] A. Crepieux and C. Lacroix. *Dzyaloshinskii-Moriya interactions induced by symmetry breaking at a surface*. J. Magn. Magn. Mater., **182**:341, 1998.
- [14] A. N. Bogdanov and D. A. Yablonski. *Thermodynamically stable "vortices" in magnetically ordered crystals. The mixed states of magnets*. Zh. Eksp. Teor. Fiz., **95**:178, 1989. [Sov. Phys. JETP **68**, 101 (1989)].
- [15] A. Leonov. *Twisted, localized, and modulated states described in the phenomenological theory of chiral and nanoscale ferromagnets*. PhD thesis, IFW Dresden, 2012. <http://www.ifw-dresden.de/institutes/itf/diploma-and-phd-theses-at-the-itf>.
- [16] P. Bak and M. H. Jensen. *Theory of helical magnetic structures and phase transitions in MnSi and FeGe*. J. Phys. C: Solid State Phys., **13**(31):L881–5, 1980.
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics*, volume 5 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, third edition edition, 1980.
- [18] David Šec. *Free energy of liquid crystals*. Seminar – Symmetries in Physics, University of Ljubljana, 2011. <http://www-f1.ijs.si/~ziherl/Sec11.pdf>.
- [19] D. Cortés-Ortuño and P. Landeros. *Influence of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction on the spin-wave spectra of thin films*. J. Phys.: Condens. Matter, **25**:156001, 2013.
- [20] Charles Kittel. *Quantum Theory of Solids*. Wiley, 2nd edition, 1987.
- [21] D. L. Mills. *Quantum theory of spin waves in finite samples*. J. Magn. Magn. Mater., **306**:16, 2006.
- [22] Alexander G. Gurevich and Gennadii A. Melkov. *Magnetization Oscillations and Waves*. CRC Press, 1 edition, 1996.
- [23] Charles Kittel. *On the Theory of Ferromagnetic Resonance Absorption*. Phys. Rev., **73**(2):155–161, 1948.

- [24] C. Herring and C. Kittel. *On the Theory of Spin Waves in Ferromagnetic Media*. Phys. Rev., **81**:869–880, 1951.
- [25] R. Arias and D.L. Mills. *Extrinsic contributions to the ferromagnetic resonance response of ultrathin films*. Phys. Rev. B, **60**:7395, 1999.
- [26] B. A. Kalinikos and A. N. Slavin. *Theory of dipole-exchange spin wave spectrum for ferromagnetic films with mixed exchange boundary conditions*. J. Phys. C: Solid State Phys., **19**:7013–7033, 1986.
- [27] P. Landeros, R. Arias, and D.L. Mills. *Two magnon scattering in ultrathin ferromagnets: The case where the magnetization is out of plane*. Phys. Rev. B, **77**:214405, 2008.
- [28] P. Landeros, R. A. Gallardo, O. Posth, J. Lindner, and D. L. Mills. *Role of the spin-transfer in the ferromagnetic resonance response of thin films*. Phys. Rev. B, **81**:214434, 2010.
- [29] Kh. Zakeri, Y. Zhang, J. Prokop, T.-H. Chuang, N. Sakr, W. X. Tang, and J. Kirschner. *Asymmetric Spin-Wave Dispersion on Fe(110): Direct Evidence of the Dzyaloshinskii-Moriya Interaction*. Phys. Rev. Lett., **104**:137203, 2010.
- [30] Kh. Zakeri, Y. Zhang, J. Prokop, T.-H. Chuang, W.X. Tang, and J. Kirschner. *Magnon excitations in ultrathin Fe layers: The influence of the Dzyaloshinskii-Moriya interaction*. J. Phys.: Conf. Ser., **303**:012004, 2011.
- [31] E. Y. Vedmedenko, L. Udvardi, P. Weinberger, and R. Wiesendanger. *Chiral magnetic ordering in two-dimensional ferromagnets with competing Dzyaloshinsky-Moriya interactions*. Phys. Rev. B, **75**:104431, 2007.
- [32] A. N. Bogdanov and U. K. Rößler. *Chiral symmetry breaking in magnetic thin films and multilayers*. Phys. Rev. Lett., **87**:037203, 2001.
- [33] X. Qian and W. Hubner. *Ab initio magnetocrystalline anisotropy calculations for Fe/W(110) and Fe/M(110)*. Phys. Rev. B, **64**:092402, 2001.
- [34] Lars Bergqvist, Andrea Taroni, Anders Bergman, Corina Etz, and Olle Eriksson. *Atomistic spin dynamics of low-dimensional magnets*. <http://arxiv.org/pdf/1211.2964.pdf>, 2013.
- [35] E. A. Karhu, U. K. Rößler, A. N. Bogdanov, S. Kahwaji, B. J. Kirby, H. Fritzsche, M. D. Robertson, C. F. Majkrzak, and T. L. Monchesky. *Chiral modulations and reorientation effects in MnSi thin films*. Phys. Rev. B, **85**:094429, 2012.
- [36] A. Tonomura, X. Yu, K. Yanagisawa, T. Matsuda, Y. Onose, N. Kanazawa, H. S. Park, and Y. Tokura. *Real-Space Observation of Skyrmion Lattice in Helimagnet MnSi Thin Samples*. Nano Letters, **12**:1673, 2012.

- [37] M. Bode, M. Heide, K. von Bergmann, P. Ferriani, S. Heinze, G. Bihlmayer, A. Kubetzka, O. Pietzsch, S. Blägel, and R. Wiesendanger. *Chiral magnetic order at surfaces driven by inversion asymmetry*. Nature, **447**:190–193, 2007.
- [38] M. Farle. *Ferromagnetic resonance of ultrathin metallic layers*. Rep. Prog. Phys., **61**:755, 1998.
- [39] B. Hillebrands. Brillouin light scattering from layered magnetic structures. In M. Cardona and Güntherodt, editors, *Light Scattering in Solids VII*, volume **75** of *Topics in Applied Physics*. Springer-Verlag, 2000.
- [40] J. Lindner and M. Farle. Magnetic Anisotropy of Heterostructures. In Samuel D. Bader H. Zabel, editor, *Magnetic Heterostructures*, volume **227** of *Springer Tracts in Modern Physics*, page 364. Springer-Verlag, 2007.