Agregación de preferencias (II)

3. Elección Social

Teorema de imposibilidad de Arrow

RACIONALIDAD

VALORES SOCIALES

3. Elección Social

Teorema de Arrow. Axiomas

1 Racionalidad colectiva: Las preferencias agregadas deben ser:

- Transitiva
- Completa

2 No trivialidad

- En el grupo hay al menos 2 miembros
- En el conjunto factible hay, al menos, 3 alternativas

3. Elección Social

Teorema de Arrow. Axiomas

3 Dominio universal

Para cualquier conjunto de prefencias individuales, la preferencia agregada está siempre definida

4 Relevancia binaria $\longleftrightarrow$ Alternativas irrelevantes

3. Elección Social

Teorema de Arrow. Axiomas

Principio de las alternativas irrelevantes

- Si el grupo prefiere **a** a **b** cuando el conjunto de alternativas es Ω, entonces el grupo prefiere **a** a **b** cuando el conjunto de alternativas es $\Omega' \subset \Omega$

- (Relevancia binaria) Si se consideran dos alternativas **a** y **b** para las que el método de agregación lleva a que **a > b**, cuando los votantes cambian sus preferencias en alternativas diferentes a **a** y **b**, el método lleva de nuevo a que **a > b**.

3. Elección Social

Teorema de Arrow. Axiomas

5 Principio de Pareto (monotonía /soberanía)

Si todo individuo dice que "**a** *es preferida a* **b**", entonces el grupo debe decir lo mismo.

6 No dictadura

No hay ningún individuo cuyas preferencias se conviertan automáticamente en las preferencias del grupo, independientemente de las preferencias de los otros miembros.

3. Elección Social

Teorema de Arrow

No existe ningún método de agregación compatible con los seis axiomas simultáneamente

INTERPRETACIÓN

Para cada método de agregación, es posible encontrar un caso particular donde el método es injusto (es decir, algunos axiomas no se verifican)

Esquema inicial

1. Contextualización del modulo en Ciencia de la Web

2. Decisión colectiva vs. Negociación

3. Agregación de preferencias ordinales (Elección Social, Votaciones)

4. Agregación de preferencias cardinales (Bienestar Social)

Esquema inicial

4. **Agregación de preferencias cardinales (Bienestar Social)**

4. Bienestar Social

- Imagina una sociedad compuesta por dos grupos étnicos: los Ying y los Yang. Esta sociedad está muy polarizada. Surgen las dos alternativas siguientes:

  1. Exterminar a los Yang
  2. No exterminar a los Yang

- Los Ying son mayoría y prefieren la alternativa 1, en contraste con los Yang que prefieren la alternative 2.

- Muchas reglas de Elección Social, satisfaciendo buenas propiedades, llevan a seleccionar la alternative 1. Es esto moralmente aceptable??

4. Bienestar Social

- Para la gran mayoría de nosotros la respuesta es negativa. Existen al menos dos razones para ello:

1. Podríamos pensar que no se debe tomar en cuenta la primera alternativa por su naturaleza diabólica.

2. Aunque se tiene en cuenta la primera alternativa, podemos rechazar el exterminio del Yang con un argumento basado en la intensidad de la preferencia: :

   "El inmenso sufrimiento de los Yang no se compensa con la satisfacción de los Ying " "

4. Bienestar Social

- Un ejemplo menos dramático: una calle llena de bares donde hay un tremendo ruido, por el que los vecinos no pueden dormir

- Los clientes de los bares preferirían un escenario en el que se les permita hacer ruido en lugar de otro en el que se prohíba hacer ruido. Por otra parte, hay que considerar que hay más clientes de bares que vecinos

- Muchas reglas de elección social llegarían a la decision de "no prohibir el ruido nocturno ".

- Sin embargo, con un argumento basado en la intensidad de preferencias podría decirse que "El sufrimiento de los vecinos no se compensa con la satisfacción de clientes de bares "

4. Bienestar Social

- Cuando comparamos el bienestar de los Yang con el bienestar de los Ying o el bienestar del vecino frente al bienestar del cliente del bar, utilizamos la **Comparación Interpersonal de Utilidades (CIU)**

- Tradicionalmente, los economistas se han mostrado reacios a utilizar comparaciones interpersonales de utilidad (a excepción de Edgeworth, Pigou, Marshall). La razón: la dificultad/imposibilidad de obtener esta clase de información.

4. Bienestar Social

- Gran parte del análisis normativo realizado durante la primera mitad Del siglo XX no usó CIU (especialmente durante los años 50 y 60). De hecho, Arrow advierte en su libro “Social Choice and Individual values” (1951)

> “The viewpoint will be taken here that interpersonal comparisons of utility have no meaning and, in fact, there is no meaning relevant to welfare comparisons in the measurability of individual utility.”

- Desde esta cita de Arrow, pasaron casi 20 años hasta que Amyrta Sen y otros comenzaron a considerar cómo hacer juicios normativos basándose en información cardinal

4. Bienestar Social

Elección Social vs. Bienestar Social

- **El mismo objetivo**: Juicio colectivo basado en juicios individuales (paradigma liberal)

- **Principal diferencia**: La naturaleza de la información: ordinal (elección social) vs. cardinal (bienestar social)

4. Bienestar Social

ELEMENTOS BÁSICOS. Elección Social

- *X* es el conjunto finito de alternativas
- Existe un número finito de agentes $i = 1, \ldots, m$
- Cada agente *i* tiene $\boxed{\text{preferencias } \succeq_i}$ sobre el conjunto *X*

ELEMENTOS BÁSICOS. Bienestar Social

- *X* es un conjunto de alternativas
- Hay un número finite de *m* of agentes $i = 1, \ldots, m$
- Cada agente *i* tiene $\boxed{\text{una función de utilidad } U_i}$ sobre el cto. *X*

4. Bienestar Social

<u>Funciones de Bienestar Social</u>

<u>DEFINICION</u> (Bergson, 1938)

- A social welfare function (SWF) is a real function

$$W : \Re^N \rightarrow \Re$$

- A social welfare function (SWF) assigns a real value to every n-dimensional vector

$$u(x) = [u_1(x), \ldots, u_N(x)]$$

4. Bienestar Social

Funciones de Bienestar Social

INTERPRETACIÓN

- En este contexto, una alternativa *x* is socialmente preferida a *x*’ en función de la FBS *W* cuando

$$W\,[u(x)] > W\,[u(x')]$$

- Esto lleva a un orden racional de alternativas y al concepto de optimo social.

- Metáfora: W es la función de utilidad de un dictador benevolente.

4. Bienestar Social

Función de utilidd colectiva multilineal

(Keeney & Kirkwood, 1975)

$$\boldsymbol{W} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j(x) + \sum_{\substack{j,l=1 \\ j<l}}^{n} \alpha_{jl} U_j(x) U_l(x) + \ldots$$

$$+ \sum_{\substack{j,l,s=1 \\ j<l<s}}^{n} \alpha_{jls} U_j(x) U_l(x) U_s(x) + \ldots + \alpha_{jl\ldots n} U_j U_l \ldots U_n$$

Liberalism and the majority principle

4. Bienestar Social

1. Función de utilidad colectiva de tipo aditivo (general)

$$\boldsymbol{W} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j(x)$$

1.1 Tipo compromiso

$$\boldsymbol{W} = \sum_{j=1}^{n} 1/n \; U_j(x)$$

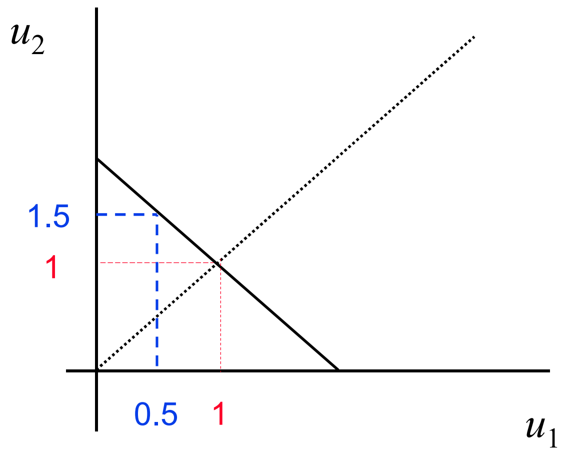
1.2 Tipo capitulación

$$\boldsymbol{W} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j U_j(x) \qquad \boldsymbol{W} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{U}_j(x)$$

4. Bienestar Social

INTERPRETACION

$$W(u_1, u_2) = u_1 + u_2$$

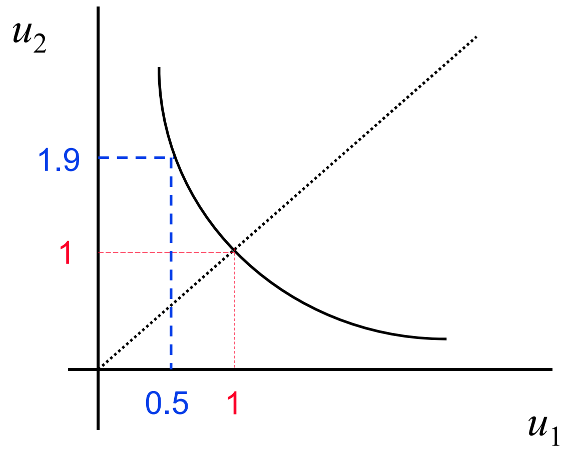


Linealidad ≡ Individualismo ≡ Principio de la mayoría

4. Bienestar Social

INTERPRETACIÓN

$$W(u_1, u_2) = u_1 u_2$$



Convexidad ≡ Solidaridad ≡ Principio de la minoría

Social Welfare Functions. Some structures

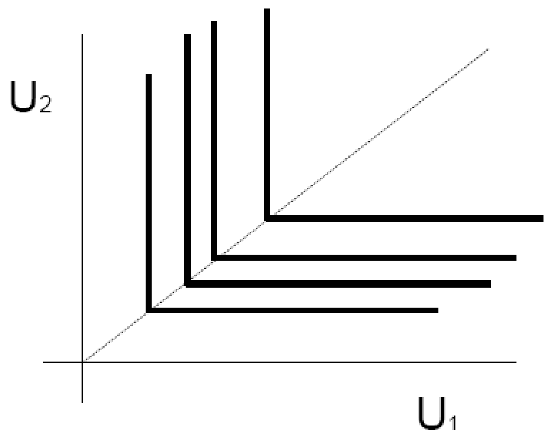
3. Función de utilidad Max-min (Rawlsiana)

(Rawls, 1971)

$$W(u) = \min\{u_1, \ldots, u_N\}$$

Convexidad asintótica

Liberalismo y el
Principio de la minoría



Example

Nakayama et.al (1979)

- A set of 5 decision-makers N = **{man, wife, mother, brother, son}**

Dimension$_1$ = #N = **5**

- A set of 9 alternatives $X \subset R^{12}$ ***(discrete set)***

- Dimension (X) = **12** *(issues to be considered - attributes)*

Dimension$_2$ = Dimension$_2$ (X) = **12**

Example

- Objectives
  1. Maximize good views
  2. Minimize population
  3. Maximize medical services
  4. Minimize pollution
  5. Maximize accessibility
  6. Maximize public moral
  7. Minimize the land price

Dimension$_2$ = **7** <12

- Individual utility function for each decision-maker

- Conjoint utility function for the group

Example

Formal framework

Cardinal information $\longleftrightarrow$ Utility Theory

- A set of decision-makers $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$
- A set of alternatives $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
- Attributes $a_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip})$
- Objectives
- $u^1, u^2, \ldots, u^n$ Individual utilities
- $\boldsymbol{U} = U(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ Collective utility

Example

GOOD RESIDENTIAL DISTRICT

- X_A : view
  - X_1: green
  - X_2: park
- X_B : population
  - X_3: population density
- X_C : health
  - X_4: medical facility
- X_D : pollution
  - X_5: bad smell
  - X_6: traffic accident
  - X_7: SO_2
  - X_8: soot and smoke
  - X_9: factory
- X_E : convenience
  - X_{10} : accesibility
- X_F : public moral
  - X_{11} : business affecting public moral
- X_G : land price
  - X_{12} : land price

Example

TABLE 1
List of Attributes

	Attribute	greatest level	least level
X_1	proportion of green area (%)	60	0
X_2	proportion of park area (%)	10	0
X_3	population density (person/km^2)	18,500	500
X_4	medical facility (number/10^3 persons)	10	3
X_5	bad smell (number/year)	60	0
X_6	traffic accident (number/year)	2,500	0
X_7	sulphurous acid gas (mg/day/100cm^2)	1.7	0
X_8	soot and smoke (t/month/km^2)	10	0
X_9	factory (number)	4,500	0
X_{10}	accessibility to the center of the city(minute)	60	0
X_{11}	offices of the business affecting public morals (number/km^2)	200	0
X_{12}	land price (10^3yen/m^2)	185	45

Example

	Man	Wife
$u_1(x_1)$	$\begin{cases} 1.309 - 1.309 \exp(-0.0481x_1) & \text{si } x_1 \le 30 \\ 1.309 - 0.073 \exp(-0.0481x_1) & \text{si } x_1 \ge 30 \end{cases}$	$-1.763 + 1.763 \exp(-0.0676x_1)$
$u_2(x_2)$	$1.198 - 1.198 \exp(-0.180x_2)$	$-0.00099 + 0.00099 \exp(0.692x_2)$
$u_3(x_3)$	$\begin{cases} 1.014 - 1.271 \exp(-0.000453x_3) & \text{si } x_3 \le 10000 \\ 1.023 - 0.00026 \exp(-0.000447x_3) & \text{si } x_3 \ge 10000 \end{cases}$	$\begin{cases} 1.309 - 1.537 \exp(0.000321x_3) & \text{si } x_3 \le 5000 \\ 1.110 - 0.047 \exp(-0.000171x_3) & \text{si } x_3 \ge 5000 \end{cases}$
$u_4(x_4)$	$2.274 - 2.2915 \exp(-0.0828x_4)$	$-0.152 - 0.0698 \exp(-0.281x_4)$
$u_5(x_5)$	$1.309 - 0.309 \exp(-0.0241x_5)$	$1.309 + 1.309 \exp(-0.0241x_5)$
$u_6(x_6)$	$-5.754 - 6.754 \exp(-0.0000641x_6)$	$0.00319 - 1.00319 \exp(-0.0023x_6)$
$u_7(x_7)$	$1.947 - 0.947 \exp(-0.424x_7)$	$1.947 - 0.947 \exp(-0.424x_7)$
$u_8(x_8)$	$1.039 - 0.039 \exp(-0.328x_8)$	$1 - 0.1x_8$
$u_9(x_9)$	$1 - 0.000222x_9$	$-1.769 - 2.769 \exp(-0.0000996x_9)$
$u_{10}(x_{10})$	$-0.309 + 1.309 \exp(-0.0241x_{10})$	$-0.0176 + 1.0176 \exp(-0.0676x_{10})$
$u_{11}(x_{11})$	$1.096 - 0.096 \exp(-0.0122x_{11})$	$-0.0107 + 1.0107 \exp(-0.0228x_{11})$
$u_{12}(x_{12})$	$1.024 - 0.0720 \exp(-0.0268x_{12})$	$-0.703 - 2.263 \exp(-0.00632x_{12})$

Example

Man	
$u_1(x_1)$	$\begin{cases} 1.309 - 1.309\exp(-0.0481x_1) & \text{si } x_1 \le 30 \\ 1.309 - 0.073\exp(-0.0481x_1) & \text{si } x_1 \ge 30 \end{cases}$
$u_2(x_2)$	$1.198 - 1.198\exp(-0.180x_2)$
$u_3(x_3)$	$\begin{cases} 1.014 - 1.271\exp(-0.000453x_3) & \text{si } x_3 \le 10000 \\ 1.023 - 0.00026\exp(-0.000447x_3) & \text{si } x_3 \ge 10000 \end{cases}$
$u_4(x_4)$	$2.274 - 2.2915\exp(-0.0828x_4)$
$u_5(x_5)$	$1.309 - 0.309\exp(-0.0241x_5)$
$u_6(x_6)$	$-5.754 - 6.754\exp(-0.0000641x_6)$
$u_7(x_7)$	$1.947 - 0.947\exp(-0.424x_7)$
$u_8(x_8)$	$1.039 - 0.039\exp(-0.328x_8)$
$u_9(x_9)$	$1 - 0.000222x_9$
$u_{10}(x_{10})$	$-0.309 + 1.309\exp(-0.0241x_{10})$
$u_{11}(x_{11})$	$1.096 - 0.096\exp(-0.0122x_{11})$
$u_{12}(x_{12})$	$1.024 - 0.0720\exp(-0.0268x_{12})$

$$1 + K_A u_A = (1 + K_A K_1 u_1)(1 + K_A K_2 u_2)$$

$$u_B = u_3$$

$$u_C = u_4$$

$$1 + K_D u_D = (1 + K_D K_5 u_5)(1 + K_D K_5 u_5)(1 + K_D K_6 u_6)(1 + K_D K_7 u_7)$$

$$u_E = u_{10}$$

$$u_F = u_{11}$$

$$u_G = u_{12}$$

Example

$$1 + K\boldsymbol{u^1} = (1 + KK_A u_A)(1 + KK_B u_B)(1 + KK_C u_C)$$
$$(1 + KK_D u_D)(1 + KK_E u_E)(1 + KK_F u_F)(1 + KK_G u_G)$$

$$\boldsymbol{u^1, u^2, u^3, u^4, u^5}$$

INDIVIDUAL UTILITIES

Example

$$\mathbf{U} = \mathrm{U}(\mathrm{u}^1, \mathrm{u}^2, \mathrm{u}^3, \mathrm{u}^4, \mathrm{u}^5)$$ (**collective utility**)

TYPE 1 (additive)

$$U(u^1, u^2, u^3, u^4, u^5) = \omega_1 u^1 + \omega_2 u^2 + \omega_3 u^3 + \omega_4 u^4 + \omega_5 u^5$$

TYPE 2 (multiplicative)

$$1 + KU(u^1, u^2, u^3, u^4, u^5) = (1 + Kk_1 u^1)(1 + Kk_2 u^2)(1 + Kk_3 u^3)(1 + Kk_4 u^4)(1 + Kk_5 u^5)$$

Example

	w_{i1}	w_{i2}	w_{i3}	w_{i4}	w_{i5}
1 (Man)	1	1	1	1	0.8
2 (Wife)	1	1	1	1	1
3 (Mother)	1	1	1	1	0.6
4 (Brother)	1	1	0.9	1	0.6
5 (Son)	1.2	1.2	0.8	1	1

$\sum_j w_{ij} = 1$

	w_{i1}	w_{i2}	w_{i3}	w_{i4}	w_{i5}
1	0.208	0.208	0.208	0.208	0.167
2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
3	0.217	0.217	0.217	0.217	0.130
4	0.222	0.222	0.2	0.222	0.133
5	0.231	0.231	0.154	0.192	0.192

w_1	0.216
w_2	0.216
w_3	0.196
w_4	0.208
w_5	0.164

Example

Score of the alternative a_i

$$0.216\times u^{1}(a_i)+0.216\times u^{2}(a_i)+0.196\times u^{3}(a_i)+0.208\times u^{4}(a_i)+$$
$$+0.164\times u^{5}(a_i)$$

Majority vs. Minority principle. A dilemma

Majority vs. Minority principle. A dilemma

With arithmetic mean

STUDENT 1	STUDENT 2
$\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
⬇	⬇
AVERAGE GRADE : **1**	AVERAGE GRADE : **1**

Majority vs. Minority principle. A dilemma

STUDENT 1

$$\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

↓

AVERAGE GRADE

Midpoint of the range
(10+0)/2

5

Majority vs. Minority principle. A dilemma

With the midpoint of the range

STUDENT 1

$$\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$\Downarrow$

INTERMEDIATE GRADE: **5**

STUDENT 2

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

$\Downarrow$

INTERMEDIATE GRADE: **1**

Majority vs. Minority principle. A dilemma

With the midpoint of the range

STUDENT 1

$$\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

INTERMEDIATE GRADE: **5**

STUDENT 3

$$\{10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 0\}$$

INTERMEDIATE GRADE: **5**

Majority vs. Minority principle. A dilemma

With the median

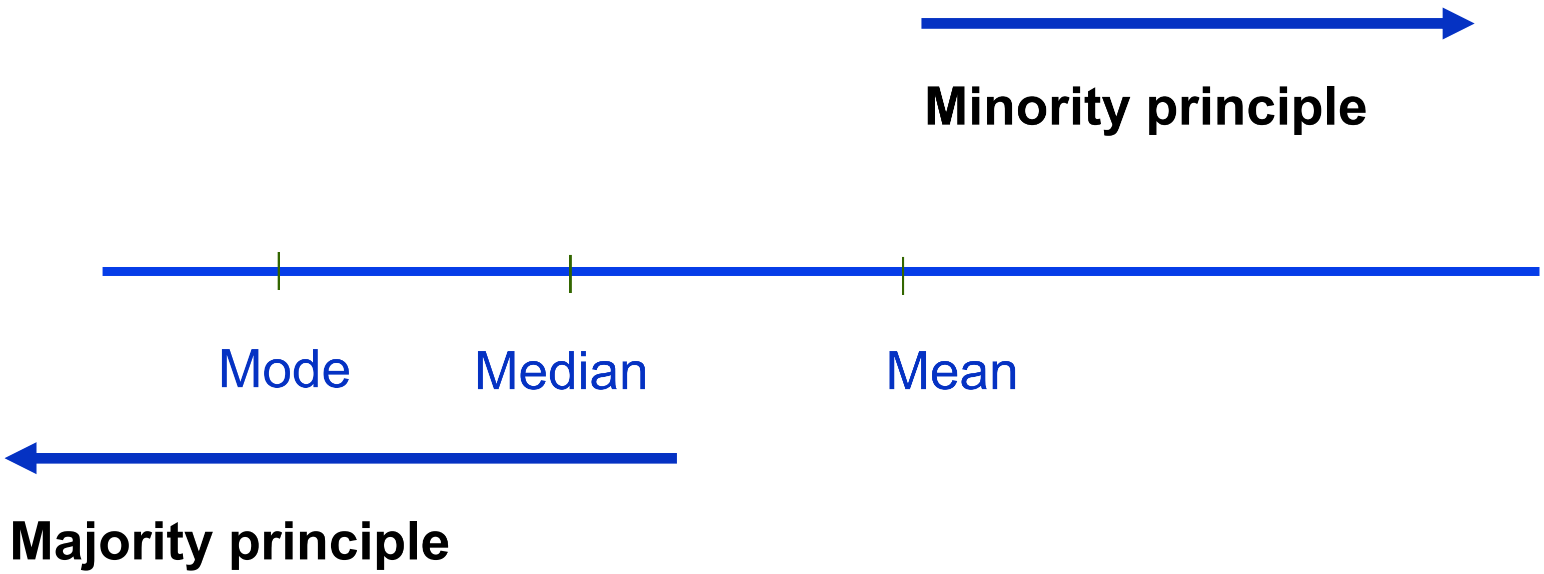
STUDENT 1	STUDENT X
$\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$	$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
⬇	⬇
MEDIAN	MEDIAN
0	**1**

Majority vs. Minority principle. A dilemma

With the mode

STUDENT 1	STUDENT X
$\{10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$
↓	↓
MODE	MODE
0	0

Majority vs. Minority principle. A dilemma



Majority vs. Minority principle. A dilemma

Measures of central tendency as "equidistant" to the elements of the data series

MEDIAN

$$g(a) = \sum_{i=1}^{k} f_i \mid x_i - a \mid$$

MEAN

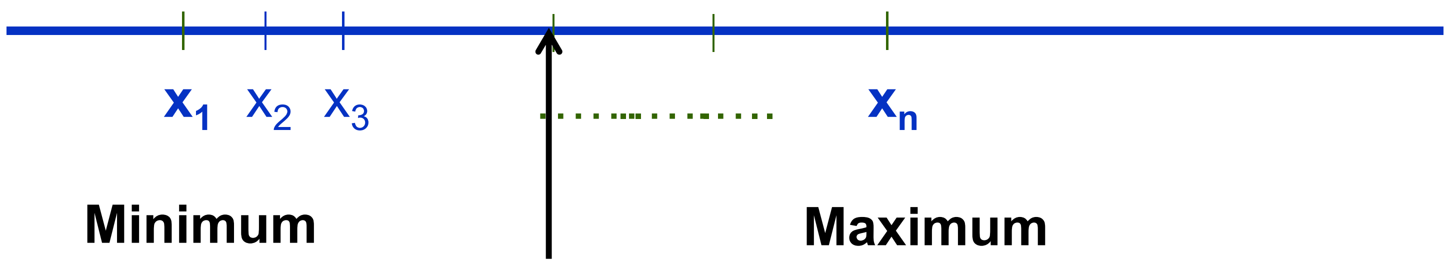
$$g(a) = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - a)^2$$

$$g_p(a) = \sum_{i=1}^{k} f_i \left| x_i - a \right|^p \quad p \geq 1 \quad p \in Z$$

Majority vs. Minority principle. A dilemma

$$g_p(a) = \sum_{i=1}^{k} f_i \left| x_i - a \right|^p \qquad p \geq 1 \qquad p \in Z$$

The maximum sensitivity towards the atypical value would theoretically be reached in p=∞



$$\frac{x_1 + x_n}{2}$$

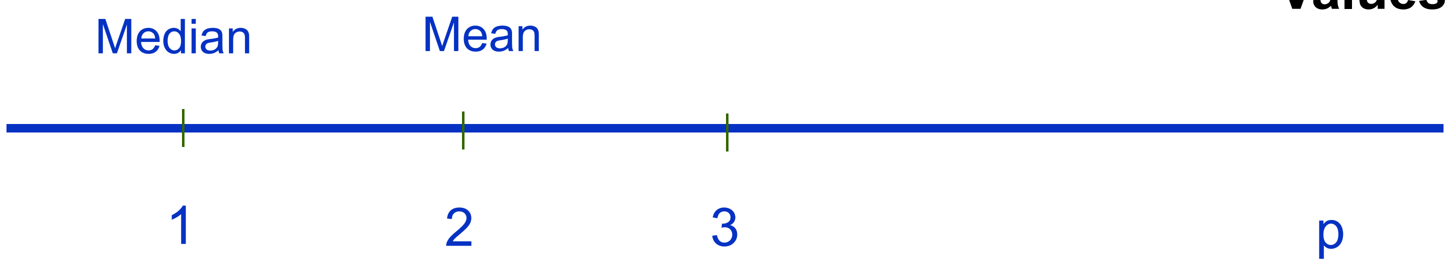
$$g_\infty(a) = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \left| x_i - a \right| \right\}$$

Majority vs. Minority principle. A dilemma

$$g_\infty(a) = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i - a|\}$$

Minority principle

Values x_i



Frecuencies f_i

Majority principle

$$g(a) = \sum_{i=1}^{k} f_i \, | \, x_i - a \, |$$