Opasna zona oko vulkana

Seminarski rad u okviru kursa
Osnove matematičkog modeliranja
Matematički fakultet, Beograd

David Dimić, Sara Arsić
daviddimi@hotmail.com, saraarsic39@gmail.com

Maj 2019.

Sažetak

U ovom radu biće opisan postupak modeliranja jednog problema varijante kosog hica ispaljenog sa zadate visine - određivanje sigurne zone oko vulkana koji izbacuje užareno kamenje. Postupna objašnjenja jednačina do kojih se došlo biće ilustrovana odgovarajućim slikama i jednom animacijom isprogramiranih u programskom jeziku Python.

Sadržaj

1 Uvod

Prvo će biti iznet problem koji se rešava, a potom pretpostavke u delu 1.2 koje su uzete da bi se problem lakše rešio. Kako je suštinski deo problema model kosog hica, on će biti pomenut u delu 2 gde će biti izračunate neke ključne tačke za rešenje, a potom u poglavlju 3 biće izneto rešenje problema. Na kraju će, u dodatku A, biti prikazani kodovi korišćeni u ovom radu.

1.1 Formulacija problema

Vulkan na visini h u odnosu na okolinu izbacuje užareno kamenje brzinom od maksimalno v_0. Potrebno je odrediti zonu oko vulkana gde nije bezbedno leteti, kao i nebezbednu zonu u podnožju vulkana.

1.2 Pretpostavke

Radi lakšeg izračunavanja uzećemo u obzir sledeće pretpostavke. Za kosi hitac pretpostavljamo [1] da je kamen materijalna tačka sa nekom pozitivnom masom za koji u svakom trenutku možemo da izračunamo $x(t)$ i $y(t)$, i da su ove funkcije dva puta neprekidno diferencijabilne, kako bismo mogli da primenimo diferencijabilni i integralni račun.

Koordinatni sistem postavljemo u podnožje vulkana, u ravni zemlje, ispod njegovog otvora, gde je x-osa u ravni zemlje, a y-osa u smeru vrha vulkana. Otvor vulkana nalazi se na visini h i iz te tačke može biti izbačen kamen pod bilo kojim uglom $\alpha \in [0, \pi]$. Prvo ćemo posmatrati slučaj u ravni ovako postavljenog sistema, a potom uvesti i treću koordinatu, pošto kamen može biti ispaljen u bilo kom smeru. Još jedna važna pretpostavka je da užarena kugla u trenutku pada ostaje ukopana na tom mestu (nema daljeg kotrljanja). U prostoru oko vulkana nema prepreki, a podnožje smatramo ravnim.

Kako je maksimalna brzina pod kojom može da se izbaci kamen v_0, dozvoljene su sve brzine između 0 i v_0. Pri modelovanju tražiće se maksimalna opasna zona, a sve trajektorije sa brzinom manje od maksimalne upašće u takvu zonu. Zbog ovoga će se svuda nadalje koristiti da je brzina tačno v_0.

2 Kosi hitac

Ispaljeni projektil sa visine h početnom brzinom v_0 i pod uglom α u odnosu na x-osu možemo modelovati kosim hicem. Njegove parametarske jednačine su (za detaljno izvođenje pogledati [1]):

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \tag{1}$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + h \tag{2}$$

Dalje ćemo odrediti koje su koordinate tačke gde se dostiže najveća visina, a potom, gde se dostiže najdalji domet koji kosi hitac može da ima.

2.1 Maksimalna visina

Potražimo sada iz jednačina kosog hica 1 i 2 gde izbačeni kamen pod uglom α dostiže maksimalnu visinu. Kako nas zanima maksimum funkcije po y-osi treba da važi:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0$$
$$v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

odakle dobijamo vremenski trenutak t_{max} u kojem se dostiže maksimum:

$$t_{max} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

zamenog ovog t_{max} u jednačine kosog hica 1 i 2 dobijemo koordinate traženog maksimuma. Označimo tu tačku sa H:

$$H_x = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \tag{3}$$

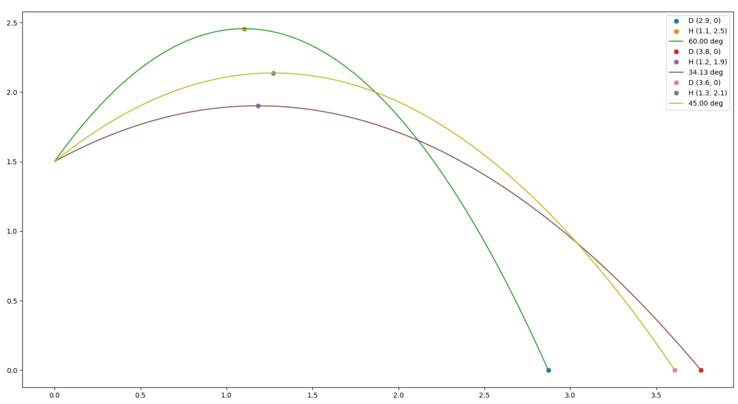
$$H_y = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + h \tag{4}$$

Da bismo počeli sa određivanjem opasne zone, makar po y kooridnati, potreno je rešiti za koji ugao α se dostiže maksimum? Kako nam je u jednačini 4 jedina promenljiiva ugao, to je očigledno kada sinus ima najveću vrenost, a to je za $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$ uzevši u obzir ograničenje da $\alpha \in [0, \pi]$. Onda je, uvrštavanjem ovog ugla u 4 najviša moguća tačka do koje kamen može da dobaci u visinu H^{max}:

$$H_x^{max} = 0 \tag{5}$$

$$H_y^{max} = h + \frac{v_0^2}{2g} \tag{6}$$

Radi jednostavnijeg zapisa u daljem tekstu H_{max} označavaće H_y^{max}.



Slika 1: Tri kosa hica sa označenima tačkama H i D

2.2 Maksimalni domet

Odredimo koji je domet kamena izbačenog pod uglom α, početnom brzinom v_0 sa vulkana visine h, odnosno trenutak kada pada na zemlju. Eliminacijom t iz jednačine 1 i njenim uvrštavanjem 2 dobijamo jednačinu oblika $y = f(x)$, pri tome ikoristimo da je $1/\cos^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ i označimo $L = v_0^2/g$:

$$y = -x^2\frac{1+\tan^2\alpha}{2L} + x\tan\alpha + h \tag{7}$$

Označimo tačku dometa sa $D = x$. Iz uslova da kamen treba da padne na zemlju važi da je $y = 0$, pa se dobija:

$$D\tan\alpha - D^2\frac{1+\tan^2\alpha}{2L} + h = 0 \tag{8}$$

Rešavanjem ove jednačine po D dobile bi se dve tačke preseka sa x-osom: jedno pozitivno i jedno negativno rešenje. Negativno rešenje D_1 može da se razume kao tačka u prošlosti sa koje se, u nivou zemlje, bacio kamen čija trajektorija odgovara jednačini kosog hica. Drugo, pozitivno rešenje predstavlja traženi domet D kada ispaljeni kamen udara o zemlju.

Potražimo sada za koji ugao je taj domet maksimalan. Posle izvoda po α na obe strane dobija se:

$$\frac{dD}{d\alpha}\tan\alpha + D\sec^2\alpha - \left(\frac{1}{L}D\frac{dD}{d\alpha}(1+\tan^2\alpha) + \frac{1}{2L}D^2(2\tan\alpha\sec^2\alpha)\right) = 0$$

$$\frac{dD}{d\alpha} = \frac{D\sec^2\alpha(\frac{D}{L}\tan\alpha - 1)}{\tan\alpha - \frac{D}{L}(1+\tan^2\alpha)}$$

Iz ove jednačine D dostiže svoj maksimum za neki ugao α kada je $\frac{dD}{d\alpha} = 0$, odnosno kada je izraz sa desne strane 0. Maksimum dometa se dostiže za:

$$D_{max}\sec^2\alpha(\frac{D_{max}}{L}\tan\alpha - 1) = 0$$

$$\frac{D_{max}}{L}\tan\alpha - 1 = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{L}{D_{max}}$$

Sada dobijeni $\tan\alpha$ zamenimo u formulu 8 i dobijamo:

$$L - \frac{D_{max}^2}{2L} - \frac{L}{2} + h = 0$$

$$D_{max} = \sqrt{L^2 + 2Lh}$$

Dakle, tačka najdaljeg dometa je:

$$D_x^{max} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 + 2h\frac{v_0^2}{g}} \tag{9}$$

$$D_y^{max} = 0 \tag{10}$$

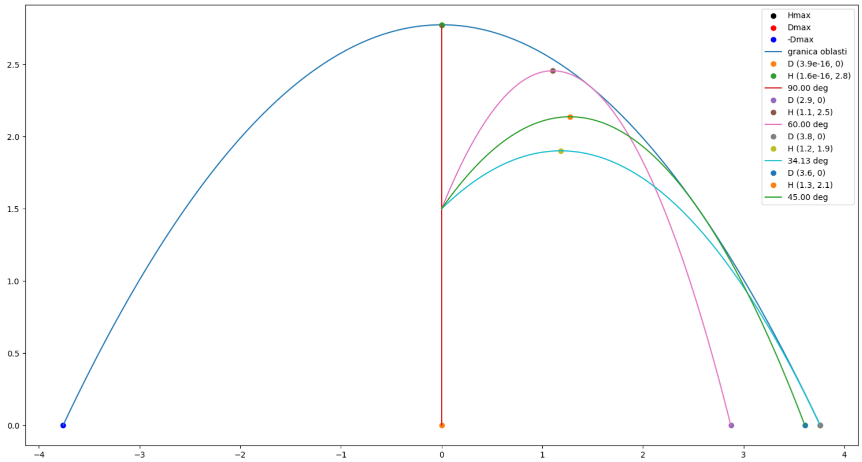
a ugao za koji se postiže najdalji domet α_D^{max}:

$$\alpha_D^{max} = \arctan\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2}}} \tag{11}$$

Na slici 1 označene su tačke H i D kosog hica, dok se na slici 2 vide tačke H^{max} i D^{max} najdaljeg dometa po kooridnatnim osama.

3 Opasna oblast

U delu 2.1 i 2.2 izveli smo koje su najdalje tačke dometa po y (H^{max} jednačine 5 i 6), odnosno po x-osi (D^{max} 9 i 10). Potpuno simetrično u odnosu na y-osu, kamen može biti ispaljen ka negativnom delu x-ose, pa je tada njegov maksimalni domet $-D^{max}$.



Slika 2: Parabola opasne zone sa nekoliko trajektorija kamenja

Varirajući ugao α dobijamo različite parabole, kao što je prikazano na slici 2. Da bismo odredili sigurnu zonu potrebno je odrediti obvojnicu[1] oko ove familije parabola. Poznato je iz diferencijalne geometrije da se obvojnica neke familije ravanskih krivih dobija kao rešenje sledećeg sistema jednačina:

$$F(x, y, a) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \tag{13}$$

U našem slučaju $F(x, y, a)$ je kriva 7, a parametar a ugao α. Odnosno imamo sistem:

$$y + x^2 \frac{1 + \tan^2 \alpha}{2L} - x \tan \alpha - h = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \tag{15}$$

Rešavajući prvo 15 dobija se:

$$x^2 \frac{\tan \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{L} - \frac{x}{\cos^2 \alpha} = 0$$

odakle je x koordinata obvojnice:

$$x = \frac{L}{\tan \alpha} \tag{16}$$

[1] Linija L koja u svakoj tački dodiruje samo jednu liniju familije krivih K, pri čemu u različitim tačkama dodiruje različite krive, zove se *obvojnica* linija K.

Uvrštavajući ovo x u prvu jednačinu sistema 14 dobija se i y kooridnata obvojnice:

$$y = h + \frac{L}{2} - \frac{L}{2\tan\alpha} \tag{17}$$

Da bismo dobili jednačinu obvojnice paraboli kosog hica sa parametrom α, iz 16 izrazićemo $\tan\alpha$ i uvrstiti u 17, pri čemu je $h + L/2 = H_{max}$:

$$y = H_{max} - \frac{x^2}{2L} \tag{18}$$

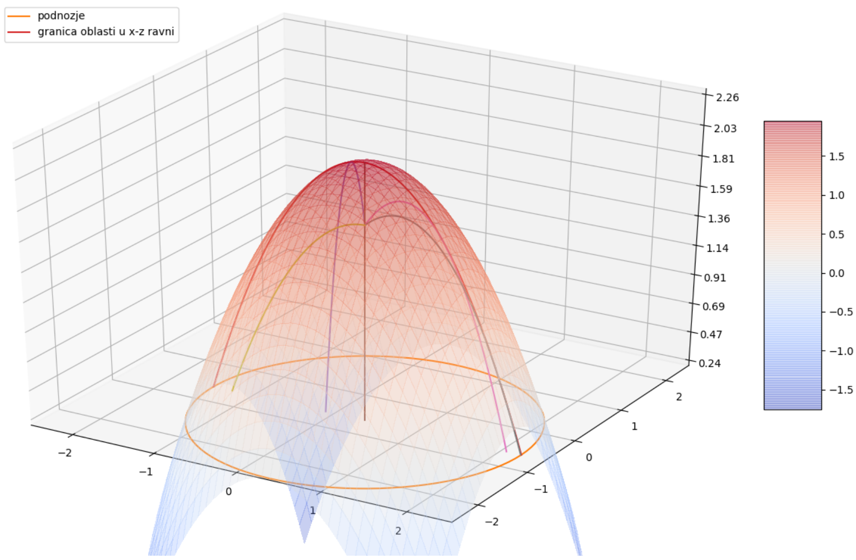
Ovim je pokazano da je obvojnica takođe jedna parabola. Na slici 2 vidi se njen grafik i da ona zaista jeste granična kriva opasne oblasti vulkana. Kôd ove slike opisan je u delu A.1.

Kako kamen može biti ispaljen u ma kojem pravcu, rotacijom dobijene parabole oko y-ose dobija se paraboloid koji opisuje nebezbedan prostor oko vulkana. Uvrštavanjem tačke maksimuma i prečnika oblasti u podnožju u jednačinu paraboloida $2p(z - z_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ dobija se tražena površ:

$$z = H_{max} - \frac{1}{2L}(x^2 + y^2) \tag{19}$$

a kako je $1/(2L) = H_{max}/D_{max}^2$, možemo ovu oblast zapisati preko maksimalnih tačaka dometa po koordinatnim osama koje smo izračunali u 2.2 i 2.1:

$$\boxed{z = H_{max} - \frac{H_{max}}{D_{max}^2}(x^2 + y^2)} \tag{20}$$



Slika 3: Opasna zona sa nekoliko trajektorija kamenja

Na slici 3 prikazana je ova površ kao i zona u podnožju. Za nekoliko uglova $(\pi, \frac{\pi}{1.8}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ iscrtane su trajektorije kamenja koje u jednoj tački dodiruju površ, ali je nikada ne presecaju. Kôd za generisanje slike dat je u dodatku A.2.

Kada je $z = 0$ u jednačini 20 dobija se očekivana opasna zona u podnožju vulkana - krug poluprečnika D_{max}:

$$x^2 + y^2 = D_{max}^2 \tag{21}$$

4 Zaključak

U ovom radu predstavljen je jedan način za određivanje opasne zone oko vulkana koji izbacuje užareno kamenje. Data je formulacija problema i nekoliko pretpostavki koje su napravljene radi lakšeg modeliranja, iskorišćen je ključni koncept kosog hica za modelovanje trajektorije kamenja. Izvedene su formule ekstremnih tačaka po x i y osi i iskorišćene za određivanje, prvo granice oblasti u $\mathbb{R}^2$, što je jedna parabola, a potom njeno proširenje na paraboloid u $\mathbb{R}^3$ čime se dobilo finalno rešenje problema. Celokupan rad i sve formule propraćene su proverom u programskom jeziku `Python` kojim su generisane slike i jedna animacija, čiji su kodovi dati u dodatku.

Literatura

[1] Milan Dražić. *Matematičko modeliranje.* Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2017.

A Dodatak - kôdovi

Pri izradi rada i proveri dobijenih jednačina korišćen je programski jezik `Python` i modul `matplotlib` za sve slike i animacije koje se nalaze u radu. Ovde će biti izloženi korišćeni kodovi uz kratka objašnjenja. Svi kodovi takođe su dostupni na GitHub nalogu autora [2].

A.1 Kosi hitac i granična parabola u ravni

Naredni kôd generiše nekoliko parametrizovanih paraboli kosog hica, pri čemu su svi parametri osim ugla α fiksirani. Označene su ključne tačke izračunate u delu 2.2 i 2.1. Prikazana je i parabola koja određuje granicu opasne zone oko vulkana.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig, ax = plt.subplots()
# Parametri kosog hica
g = 9.81
v0 = 5
h = 1.5
# Kljucne tacke maksimuma
Hmax = h + v0**2/(2*g)
Dmax_sq = (v0**2/g)**2 + 2*h*v0**2/g
Dmax = np.sqrt(Dmax_sq)

def plot_tacke():
```

[2] https://github.com/daviddimic/opasna-zona-oko-vulkana

```
    ax.plot(0, Hmax, 'o', color='black', label = 'Hmax')
    ax.plot(Dmax, 0, 'o', color='red', label = 'Dmax')
    ax.plot(-Dmax, 0, 'o', color='blue', label = '-Dmax')

def plot_hitac(alpha):
    """
    Iscrtavanje parabole kosog hica sa uglom alpha
    i tackama kada dostize max visina i max domet
    """
    # Dt je vreme kada telo pada na zemlju
    Dt = (v0*np.sin(alpha) + np.sqrt((v0**2)*(np.sin(alpha))**2 + 2*g*h))/g
    t = np.linspace(0, Dt, 100)
    x = v0*t*np.cos(alpha)
    y = v0*t*np.sin(alpha) - g*t**2/2 + h
    # Tacke max visine i max dometa
    D = v0*np.cos(alpha)*Dt
    ax.plot(D, 0, 'o', label = 'D (%0.2g, %0.2g)' % (D, 0))
    Hx = v0**2*np.sin(2*alpha)/(2*g)
    Hy = h + v0**2*np.sin(alpha)**2/(2*g)
    ax.plot(Hx, Hy, 'o', label = 'H (%0.2g, %0.2g)' % (Hx, Hy))
    ax.plot(x, y, label = '%0.2f deg' % (alpha*180/np.pi))

def plot_parabola():
    """
    Crtanje parabole opasne oblasti
    """
    x = np.linspace(-Dmax,Dmax,100)
    y = -(Hmax/Dmax_sq)*x**2 + Hmax
    ax.plot(x, y, label = 'granica oblasti')

plot_tacke()
plot_parabola()
plot_hitac(np.pi/2)
plot_hitac(np.pi/3)
# Za ovaj ugao je maksimalni domet
plot_hitac(np.arctan(1/np.sqrt(1+2*h*g/v0**2)))
plot_hitac(np.pi/4)
ax.legend(loc='upper right')
plt.show()
```

A.2 Opasna oblast u prostoru

Sledeći program generiše sliku na kojoj je prikazana opasna oblast oko vulkana, nekoliko trajektorija kosog hica za različite uglove, kao i granica te oblasti u podnožju. Vidi se da svaka od putanja kamenja dodiruje granicu oblasti u jednoj tački.

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator, FormatStrFormatter
import numpy as np

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
```

```python
line, = ax.plot([], [], lw=2)
# Podesavanja koordinatnih osa
ax.set_xlim(-3, 3)
ax.set_ylim(-3, 3)
ax.set_zlim(0, 2.5)
# z-osa
ax.zaxis.set_major_locator(LinearLocator(10))
ax.zaxis.set_major_formatter(FormatStrFormatter('%.02f'))

# Parametri kosog hica
g = 9.81
v0 = 3
h = 1.5
# Kljucne tacke maksimuma
Hmax = h + v0**2/(2*g)
Dmax_sq = (v0**2/g)**2 + 2*h*v0**2/g
Dmax = np.sqrt(Dmax_sq)

y = np.zeros(100)

def plot_podnozje():
    t = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
    x = Dmax*np.cos(t)
    z = Dmax*np.sin(t)
    ax.plot(x, z, y, label = 'podnozje')

def plot_hitac(alpha):
    """
    Iscrtavanje parabole kosog hica u x-z ravni sa uglom alpha
    """
    #Dt - vreme kada telo pada na zemlju
    Dt = (v0*np.sin(alpha) + np.sqrt((v0**2)*(np.sin(alpha))**2 + 2*g*h))/g
    t = np.linspace(0, Dt, 100)
    x = v0*t*np.cos(alpha)
    z = v0*t*np.sin(alpha) - g*t**2/2 + h
    ax.plot(x, y, z)

def plot_parabola():
    """
    Crtanje parabole opasne oblasti u x-z ravni
    """
    x = np.linspace(-Dmax,Dmax,100)
    z = -(Hmax/Dmax_sq)*x**2 + Hmax
    ax.plot(x, y, z, label = 'granica oblasti u x-z ravni')

def plot_paraboloid():
    """
    Iscrtavanje paraboloida opasne oblasti
    """
    X = np.arange(-Dmax, Dmax, 0.1)
    Y = np.arange(-Dmax, Dmax, 0.1)
    X, Y = np.meshgrid(X, Y)
    Z = Hmax - (X**2 + Y**2)/(Dmax_sq/Hmax)
    surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.coolwarm,
```

```
                              linewidth=0, antialiased=False, alpha=0.3)
    # color bar
    fig.colorbar(surf, shrink = 0.5, aspect = 5)

plot_podnozje()
plot_paraboloid()
plot_parabola()
plot_hitac(np.pi/1.8)
plot_hitac(np.pi/2)
plot_hitac(np.pi/4)
plot_hitac(np.pi/6)
plot_hitac(np.pi)
ax.legend(loc='upper left')
plt.show()
```

A.3 Animacija

Sledeći primer kôda prikazuje da je dobijena nebezbedna oblast zaista tačno rešenje datog problema [3]. Svi parametri kosog hica su fiksirani osim ugla $\alpha \in [0, \pi]$ koji je parametar animacije. Kosi hitac se iscrtava u x-z ravni radi dobre vidiljivosti, ali zbog simetrije, on može biti usmeren u bilo kom pravcu oko z-ose. Zbog dodatne jasnoće u istoj ravni sa kosim hicem iscrtana je i parabola koja predstavlja granicu dobijene oblasti. Cilj animacije je prikazati da parabola kosog hica, kada se provarila ugao α, tačno opisuje parabolu granice tražene oblasti oko vulkana. Funkcije `plot_parabola()`, `plot_paraboloid()` i `plot_podnozje()` su iste kao u prethodnom primeru A.2, pa je ovde njihova definicija izostavljena.

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import animation

fig = plt.figure(figsize=(12, 10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
line, = ax.plot([], [], lw=2)
# Podesavanja koordinatnih osa
ax.set_xlim(-2, 2)
ax.set_ylim(-2, 2)
ax.set_zlim(0, 2)
# Parametri kosog hica
g = 9.81
v0 = 3
h = 1.5
# Kljucne tacke maksimuma
Hmax = h + v0**2/(2*g)
Dmax_sq = (v0**2/g)**2 + 2*h*v0**2/g
Dmax = np.sqrt(Dmax_sq)

y = np.zeros(100)
```

[3] https://raw.githubusercontent.com/daviddimic/opasna-zona-oko-vulkana/master/img/vulkan_animation.mp4

```python
def init():
    """
    Inicijalizacija animacije
    """
    line.set_data([], [])
    line.set_3d_properties([])
    return line,

def animate(i):
    """
    Funkcija koja se poziva pri svakom frejmu animacije
    """
    alpha = i/100
    #Dt - vreme kada telo pada na zemlju
    Dt = (v0*np.sin(alpha) + np.sqrt((v0**2)*(np.sin(alpha))**2 + 2*g*h))/g
    t = np.linspace(0, Dt, 100)
    x = v0*t*np.cos(alpha)
    z = v0*t*np.sin(alpha) - g*t*t/2 + h

    line.set_data(x, y)
    line.set_3d_properties(z)
    line.set_color('red')
    return line,

# Animacija
anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func = init,
                               frames = 300, interval = 20, blit = True)
plot_podnozje()
plot_parabola()
plot_paraboloid()
ax.legend(loc='upper left')
plt.show()
```