Probabilități

Lucru cu v.a. discrete unidimensionale și bidimensionale

1. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix},\ p\in\mathbb{R}$. Să se determine:

a) parametrul real p

b) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X şi să se reprezinte grafic.

c) media şi dispersia variabilelor $16X-23$ şi $3X-2$.

2. Calculați media și dispersia următoarelor variabile aleatoare:

a) $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6p & p & 4p^2 & 2p & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix},\ p\in\mathbb{R}$ b) $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n \ldots & \ldots \\ p & pq & pq^2 & pq^{n-1} & \ldots \end{pmatrix},\ p,q\in\mathbb{R}$

c) $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots n \ldots & \ldots \\ p & \frac{p}{3} & \frac{p}{3^2} & \frac{p}{3^3} & \ldots\frac{p}{3^n} & \end{pmatrix},\ p\in\mathbb{R}$ d) $X:\begin{pmatrix} n \\ \frac{p}{2^n} \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{R}$

3. Se dau variabilele aleatoare discrete $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Fie $k=P(X=1,Y=-1)$. Să se determine:

a) repartiţia comună a variabilelor aleatoare X şi Y
b) coeficientul de corelaţie al variabilelor X şi Y
c) valorile parametrului k pentru care X şi Y sunt necorelate; în acest caz să se testeze dacă X şi Y sunt independente.

3. Se dau variabilele aleatoare independente: $X:\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-q & p \end{pmatrix},\ p,q,a\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrul real a astfel încât variabila aleatoare $X-Y$ să aibă dispersia egală cu $\frac{4}{9}$.

Stabiliţi dacă valoarea parametrului real a influenţează valoarea coeficientului de corelaţie dintre X şi Y .

4. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 6p & 2p & 9p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât variabila aleatoare $Y=aX+b$ să aibă media egală cu 57 şi dispersia egală cu 75. Construiţi apoi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X şi reprezentaţi-o grafic.

5. Se dau variabilele aleatoare discrete $X:\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Fie $k=P(X=-2, Y=3)$.

a) Să se construiască repartiţia comună a variabilelor aleatoare X şi Y.
b) Să se determine parametrul real k astfel încât cele două variabile să fie necorelate.
c) Pentru k de la punctul anterior să se verifice dacă variabilele X şi Y sunt independente.

6. Fie variabila aleatoare discretă:

$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$

a) Determinaţi valoarea parametrului $p\in\mathbb{R}$
b) Construiţi funcţia de repartiţie a lui X şi realizaţi graficul acesteia
c) Calculaţi $E(3X-2)$, $Var(6X-3)$, $E(X+X^2)$
d) Calculaţi $P(|X|<\frac{1}{2} / -1.25<X<0.75)$

7. Se consideră variabila aleatoare bidimensională (X,Y), având repartiția:

$X \backslash Y$	-2	0	9	$P(X=X_i)$
-1	b	$2b$	0	
0	$3b$	$4b$	$5b$	
$P(Y=Y_j)$				

unde $b\in\mathbf{R}$.

(a) Să se determine tabloul repartiției variabilei aleatoare bidimensionale (X,Y) și repartițiile marginale.

(b) Să se studieze independența variabilelor aleatoare X și Y și să se calculeze $P(X\cdot Y\neq 0)$

(c) Să se calculeze dispersia variabilei aleatoare $3X-2Y$.

8. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	-2	-1	0	1	p_i
-1	1/80	2/80	3/80		1/4
0	2/80	3/80	14/80	1/80	
1	3/80		1/80	2/80	1/4
2			2/80		
q_j	1/4			1/4	

Să se determine:

a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora

b) coeficientul de corelație dintre X și Y

c) v.a. condiționate X|Y=0 și Y|X=2 și mediile acestora

d) Var(-3Y+3)

e) P(X<1,Y>-1)

9. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	-2	-1	0	1	2	p_i
-1	1/10	1/50	3/50	1/50	1/10	
0		3/25		3/25		
1	2/25	1/50	7/50	1/50	2/25	
q_j	11/50		6/25		11/50	

Să se determine:

a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora

b) coeficientul de corelație dintre X și Y

c) v.a. condiționate X|Y=0 și Y|X=1 și mediile acestora
d) Var(3X+5)
e) P(X<1,Y>0)

10. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	1	2	3	4	p_i
0	4/40	3/40	2/40		1/4
1		4/40	3/40	2/40	1/4
2	2/40	1/40		3/40	1/4
3	3/40		1/40	4/40	
q_j					

Să se determine:
a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora
b) coeficientul de corelație dintre X și Y
c) v.a. condiționate X|Y=3 și Y|X=1 și mediile acestora
d) Var(-X+5)
e) P(X<1,Y>3)

11. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul de puncte obținute la aruncarea unui zar. Să se determine parametrii reali a și b astfel încat momentul centrat de ordin 2 al variabilei aleatoare $Y = aX + b$ să fie egal cu 1.

12. Se aruncă o monedă de 10 ori și se notează cu X variabila aleatoare care indică numărul de apariții al stemei în cele 10 aruncări. Să se determine:
a) repartiția variabilei aleatoare X
b) valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare X
c) funcția de repartiție a variabilei aleatoare X