Temă

$\boxed{1}$ Pentru următoarele v.a. construiți estimatorii dați de metoda momentelor și respectiv metoda verosimilității maxime, apoi cercetați calitățile acestora (nedeplasare, consistență, eficiența). Acolo unde se obțin estimatori diferiți precizați pe care îl preferați și de ce.

Cercetați comportamentul asimptotic al estimatorilor obținuți.

a) $f_\theta(x) = e^{-2\theta} \cdot \frac{(2\theta)^x}{x!}$, $x \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$

b) $f_p(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \{0, 1, \dots n\}$, $p \in (0,1)$

c) $f_\lambda(x) = \frac{x^2}{2\lambda^3} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, $\lambda > 0$

d) $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x$, $x \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$

e) $f_\theta(x) = \frac{x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^\alpha} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, $\theta > 0$, $\alpha > 0$ cunoscut

f) $f_\theta(x) = \frac{\theta}{1-\theta} \cdot x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}$, $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$

g) $f_\theta(x) = \frac{\alpha \cdot \theta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \cdot \mathbb{1}_{(\theta,\infty)}$, $\theta > 0$, $\alpha > 0$ cunoscut

h) $f_\theta(x) = \frac{5\theta^5}{x^6} \cdot \mathbb{1}_{(\theta,\infty)}$, $\theta > 0$

i) $f_\theta(x) = \frac{\theta^x}{(\theta+1)^{x+1}}$, $x \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$

j) $f_\theta(x) = \frac{2}{\theta} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, $\theta > 0$

k) $f_\theta(x) = \frac{\lambda}{\theta} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\frac{x^\lambda}{\theta}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}$, $\theta > 0$, $\lambda > 0$ cunoscut

l) $f_{\theta,m}(x) = \frac{\theta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\theta^2 \cdot (x-m)^2}$, $m \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$

m) $f_{\theta_1,\theta_2}(x) = \frac{1}{\theta_2^{\theta_1} \cdot \Gamma(\theta_1)} \cdot x^{\theta_1 - 1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}} \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}$, $\theta_1, \theta_2 > 0$

n) $f_{\mu,\lambda}(x) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{\lambda (x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$

o) $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{1}{\beta} \cdot (x-\alpha)} \cdot 1\!\!1_{(\alpha,\infty)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$

În contextul o) găsiți estimatorul de verosimilitate maximă pentru $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(X \geq 1)$.

$\boxed{2}$ Fie X o v.a. definită prin una din următoarele densități:

$f_\theta(x) = 1\!\!1_{(0,1)}$ pt. $\theta = 0$ și $f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 1\!\!1_{(0,1)}$ pentru $\theta = 1$.

Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ.

$\boxed{3}$ Fie X și Y două v.a. independente cu densitățile:

$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}$, $f_Y(y) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{y}{\mu}} \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}$, $\lambda, \mu > 0$

Se observă v.a. Z și W cu $Z = \min(X, Y)$ și $W = \begin{cases} 1, & Z = X \\ 0, & Z = Y \end{cases}$

$((Z_1, W_1), (Z_2, W_2) \ldots (Z_n, W_n))$ formează un eșantion i.i.d.)

Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru λ și μ.

$\boxed{4}$ Fie $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ v.a. ce satisfac condițiile:

$Y_i = \beta \cdot x_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1,n}$, unde $x_1, x_2, \dots x_n$ sunt constante fixate,

iar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ i.i.d., σ^2 necunoscut

Determinați estimatorul de verosimilitate maximă pentru β

și apoi determinați repartiția acestuia.