Lab 14

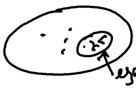
Monday, 13 January 2025 10:47

STATISTICĂ

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$

$X \sim F_\theta$

fct. de repartiție / densitate / fct. de masă pt. o populație



eșantion reprezentativ

$X_1, X_2, \dots, X_n$ variabile independente și distribuite (VIRTUAL = nu am încă niște valori concrete)

$x_1, x_2, \dots, x_n$ eșantion efectiv

un estimator = fct. care depinde de val. din eșantion pt un educated guess

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (var. aleatoare) ESTIMATOR

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ESTIMAȚIE

$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$ (v.a.) MEDIE de SELECȚIE

$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ (cu val. concrete și nu virtuale ca mai sus)

în general, cele 2 metode nu dau aceiași estimatori (MM și MVM)

Vom analiza doar cazul în care θ e un parametru unic

<u>Metoda momentelor</u>

$E(X) = \overline{X}$

media teoretică a selecției populației mari trebuie să fie egală cu media de selecție

1) $f_\theta(x) = \frac{2}{\theta} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}, \theta > 0$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{2}{\theta} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx = \frac{2}{\theta} \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx$

$\frac{x^2}{\theta} = t \Rightarrow x^2 = \theta t \Rightarrow x = \sqrt{\theta t} \Rightarrow dx = \sqrt{\theta} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \to \infty \Rightarrow t \to \infty$

$E(X) = \frac{2}{\cancel{\theta}} \cdot \int_0^\infty \cancel{\theta} t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{\theta} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$= \sqrt{\theta} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t}\,dt = \sqrt{\theta} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\theta} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\theta}}{2} \cdot \sqrt{\pi}$

fct. gamma de la analiză (AN I, SEM. I)

$E(X) = \overline{X} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\theta \pi}{4}} = \overline{X}$

$\Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{4\overline{X}^2}{\pi}}$

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. cu valorile de selecție $x_1, x_2, \dots, x_n$

Pas 1 $L(\theta \mid x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$ // $n \cdot \overline{x}$

θ VARIABILĂ; $x_1, \dots, x_n$ ȘTIU (PARAMETRII STABILIȚI)

Pas 2 $\ln L(\theta) = n \cdot \ln \frac{2}{\theta} + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\theta} \cdot n \cdot \overline{x} = n \ln 2 - n \ln \theta + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\theta} \cdot n \cdot \overline{x}$

Pas 3 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \Leftrightarrow -\frac{n}{\theta} + n \cdot \overline{x} \cdot \frac{1}{\theta^2} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{\theta^2}{n}$

$-\theta + \overline{x} = 0 \Leftrightarrow \hat{\theta} = \overline{x} \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$

Pas 4 $\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right|_{\theta = \overline{x}} = \left.\frac{n}{\theta^2} - 2 \cdot n \cdot \overline{x} \cdot \frac{1}{\theta^3}\right|_{\theta = \overline{x}} = \left.\underbrace{\frac{n}{\theta^2}}_{>0} \underbrace{\left(1 - 2\overline{x} \cdot \frac{1}{\theta}\right)}_{<0}\right|_{\theta = \overline{x}} < 0$