VARIABILE ALEATOARE (v.a.)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spațiu de probabilitate

v.a.
- DISCRETE
  - repartiție
  - funcția de masă
  - funcția de repartiție
- CONTINUE
  - repartiție
  - densitate de probabilitate
  - funcția de repartiție

<u>def.</u> $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este v.a. dacă $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

(adică dacă X este o funcție măsurabilă)

Obs. ① Elementele mulțimii Ω nu sunt neapărat numere. De aceea putem să ne gândim la o v.a. X ca fiind o funcție ce asociază „etichete numerice" stărilor din Ω.

② Prin convenție, când vrem să calculăm probabilitatea ca X să ia o anumită valoare putem scrie $\mathbb{P}(X < 3)$ (în loc de $\mathbb{P}(X(\omega) < 3)$

↪ această parte se subînțelege

③ Dacă $X(\Omega)$ este o mulțime cel mult numărabilă atunci X este o v.a. discretă, iar dacă $X(\Omega)$ este infinită dar nenumărabilă („infinită de puterea continuului") atunci X este o v.a. continuă.

I Variabile aleatoare discrete

Forma generală:

valorile pe care le poate lua v.a. X

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots\dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots\dots & p_n \end{pmatrix}$$

$x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

$\underbrace{p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.}$

→ condiție importantă!

probabilitățile cu care X ia valorile $x_1, \dots x_n$

Obs.: ① Reprezentarea de mai sus se numește repartiția v.a. X.

② Repartiția v.a. discrete conține toate valorile pe care le poate lua X, cu o probabilitate strict pozitivă.

③ Valorile $x_1, x_2 \dots x_n$ se pun, de obicei, în ordine crescătoare și sunt valori distincte.

def. O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcția de masă a v.a. discrete X dacă e definită astfel:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \ \text{ pt. } i = \overline{1,n} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}}$$

def. O funcție $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește funcția de repartiție a v.a. X dacă:

$$\boxed{F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)}$$

Probabilitatea condiționată

Fie A și B două evenimente definite pe același spațiu de probabilitate. Atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}} \quad \text{pt. } \mathbb{P}(B) \neq 0$$

Interpretare

$\mathbb{P}(A/B)$ ne determină probabilitatea de producere a evenimentului A știind că evenimentul B s-a produs.

Obs Dacă A și B sunt evenimente independente atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \quad \text{și} \quad \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)}$$

Formula lui Bayes

$$\boxed{\mathbb{P}(A/B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A) \cdot \mathbb{P}(A)}$$

În cazul lucrului cu v.a. discrete evenimentele sunt de tipul $X = 3$, $X < 2$, $X \geq 1$.

ex. $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\mathbb{P}(X \geq 2 / X < 3) = \frac{\mathbb{P}((X \geq 2) \cap (X < 3))}{\mathbb{P}(X < 3)} = \frac{\mathbb{P}(2 \leq X < 3)}{\mathbb{P}(X < 3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Exemple

① Fie v.a. discretă X definită astfel:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Calculați:

a) $\mathbb{P}(X \leq 0) = ?$

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

b) $\mathbb{P}(X > 0) = ?$

$$\mathbb{P}(\underbrace{X > 0}) = 1 - \mathbb{P}(\underbrace{X \leq 0}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

evenimente complementare

c) $\mathbb{P}(X = 1) = ?$

$\mathbb{P}(X = 1) = 0$ (deoarece 1 nu face parte din mulțimea valorilor pe care le poate lua X)

d) $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

② Determinați parametrul real p astfel încât X să fie o v.a. discretă

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 1-p & 2p & -9p+2 \end{pmatrix}$$

C.E. $\begin{cases} 1-p \geq 0 \\ 2p \geq 0 \\ -9p+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 1 \\ p \geq 0 \\ p \leq \frac{2}{9} \end{cases}$

$$1-p+2p+(-9p+2) = 1 \Leftrightarrow -8p = -2 \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{1}{4}}$$

Este $p = \frac{1}{4}$ soluție? **NU**, pentru că $\frac{1}{4} \nleq \frac{2}{9}$.

Operații cu v.a. discrete

① Operații „unare" (Transformări de v.a)

Fie $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

$p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

adunare/scădere/înmulțire cu o constantă

1) $X \pm c : \begin{pmatrix} x_1 \pm c & x_2 \pm c & \dots & x_n \pm c \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ $\forall c \in \mathbb{R}$

ridicarea la putere

2) $X^c : \begin{pmatrix} x_1^c & x_2^c & \dots & x_n^c \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

condiția e suficientă, dar NU și necesară

3) Mai general, pentru o funcție $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă avem:

$$g(X) : \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Obs. ① În cazul operațiilor „unare" (afectează o singură v.a.) se modifică doar valorile v.a. probabilitățile rămânând aceleași.

② Dacă funcția g nu este bijectivă o anumită valoare a lui $g(X)$ poate să apară de mai multe ori, caz în care se scrie o singură dată iar probabilitățile se adună.

ex. $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{g(x) = x^2} g(X) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

② Operații „binare" cu v.a. independente

Fie $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ și $Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$

două v.a. discrete.

def. Spunem că X și Y sunt v.a. independente dacă

$$\boxed{\mathbb{P}(\underbrace{X = x , Y = y}_{\text{„și"}}) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)}$$

Dacă X și Y sunt independente atunci:

$$X \dot{\pm} Y : \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 & x_1 \pm y_2 & \dots & x_1 \pm y_m & x_2 \pm y_1 & x_2 \pm y_2 & \dots & x_n \pm y_m \\ p_1 \cdot q_1 & p_1 \cdot q_2 & \dots & p_1 \cdot q_m & p_2 \cdot q_1 & p_2 \cdot q_2 & \dots & p_n \cdot q_m \end{pmatrix}$$

Obs. ① Operația dintre X și Y se aplică pe toate combinațiile de valori (x_i, y_j), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, iar probabilitățile se înmulțesc. Dacă aceeași valoare apare de mai multe ori se va scrie o singură dată iar probabilitățile se adună.

② $\dfrac{X}{Y} \overset{not.}{=} X \cdot Y^{-1}$

ex. $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ X, Y independente

$X+Y : \begin{pmatrix} -1+0 & -1+1 & 0+0 & 0+1 & 1+0 & 1+1 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $X+Y : \Big(\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{3}{9} \end{matrix}$

TEMĂ

Obs. Cerințele sunt valabile pentru toate grupele, dar fiecare student va rezolva doar subpunctele aferente grupei din care face parte.

1 Fie X și Y două v.a. discrete independente.

1) Pornind de la X și Y construiți următoarele v.a.

a) $X: \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ $\quad Y: \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$3X = ?$, $X^{-1} = ?$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot X\right) = ?$, $Y^2 = ?$, $Y + 3 = ?$

b) $X: \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad Y: \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$ GRUPA 252

$X - 1 = ?$, $X^{-2} = ?$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot X\right) = ?$, $Y \cdot 5 = ?$, $e^{Y} = ?$

c) $X: \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\quad Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ GRUPA 253

$2X = ?$, $X^{-3} = ?$, $tg(\pi \cdot X) = ?$, $Y - 2 = ?$, $|Y| = ?$

d) $X: \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$, $\quad Y: \begin{pmatrix} e & e^3 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ GRUPA 254

$2 - X = ?$, $X^3 = ?$, $\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot X\right) = ?$, $Y^{-1} = ?$, $\ln Y = ?$

2) Folosind v.a. X și Y de la 1) determinați:

a) $2X+3Y$, $3X-Y$, $X^2 \cdot Y^3$ GRUPA 251

b) $X-Y$, $\cos(\pi \cdot X \cdot Y)$, X^2+3Y GRUPA 252

c) $X+Y$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot X \cdot Y\right)$, $\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}$ GRUPA 253

d) $X \cdot Y$, $\frac{X}{Y}$, $|X-Y^2|$ GRUPA 254

3) Determinați parametrii reali p și q știind că:

a) $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p & q \end{pmatrix}$ $Y: \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0,1 & \frac{p^2+0,02}{2} \end{pmatrix}$ GRUPA 251

sunt v.a. bine definite

b) $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & p & q^2 \end{pmatrix}$ și $X^2: \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ p & p & p^2 \end{pmatrix}$ GRUPA 252

sunt v.a. bine definite

c) $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & p^2 & q \end{pmatrix}$ și $X^4: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{9}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$ GRUPA 253

sunt v.a. bine definite

d) $X: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2p & q \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 7q \end{pmatrix}$ GRUPA 254

sunt v.a. bine definite

4) Folosind repartițiile v. a. de la 1), 2) calculați:

a) $\mathbb{P}(2X+3Y>1)=?$

$\mathbb{P}(2X+3Y>1 \mid X>0)=?$

$\mathbb{P}(2X+3Y<3 \mid Y<-2)=?$

$\mathbb{P}(X^2\cdot Y^3>3)=?$

$\mathbb{P}(X^2\cdot Y^3\leq 3)=?$

$\mathbb{P}(2X+3Y<3X-Y)=?$

b) $\mathbb{P}(X-Y>0)=?$

$\mathbb{P}(X-Y<0 / X>0)=?$

$\mathbb{P}(X-Y>0 \mid Y\leq 0)=?$

$\mathbb{P}\left(\cos(\pi XY)<\frac{1}{2}\right)=?$

$\mathbb{P}(X^2+3Y\geq 3)=?$

$\mathbb{P}(X-Y<X^2+3Y)=?$

c) $\mathbb{P}(X+Y<2)=?$

$\mathbb{P}(X+Y>2 \mid X>5)=?$

$\mathbb{P}(X+Y<12 \mid Y<0)=?$

$\mathbb{P}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot XY\right)\leq\frac{1}{2}\right)=?$

$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}<1 \mid Y<0\right)=?$

$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}<X+Y\right)=?$

d) $\mathbb{P}(X \cdot Y \leq e^4) = ?$

$\mathbb{P}(X \cdot Y \geq 7 \,/\, X < 0) = ?$

$\mathbb{P}(X \cdot Y < 9 \,/\, Y > 3) = ?$

$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < 1\right) = ?$

$\mathbb{P}(|X - Y^2| \geq 3) = ?$

$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < |X - Y^2|\right) = ?$