$\boxed{3}$

a)

X \ Y	-1	1	p_i
0	0,5-k	k-0,1	0,4
1	k	0,6-k	0,6
q_j	0,5	0,5	1

$X^2: \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ $Y^2: \begin{pmatrix} (-1)^2 & 1^2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ $Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$E(X) = 0,6$ $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(Y) = 0$ $Var(X) = 0,6 - 0,6^2 = 0,24$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - 0 = 1$

$E(X\cdot Y) = -1\cdot k + 0\cdot 0,4 + 1\cdot(0,6-k)$

$= 0,6 - 2k$

$X\cdot Y: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0,5-k & k-0,1 & k & 0,6-k \end{pmatrix}$

$X\cdot Y: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & 0,4 & 0,6-k \end{pmatrix}$

b) $\rho(X,Y) = \dfrac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \dfrac{0,6-2k - 0,6\cdot 0}{\sqrt{0,24\cdot 1}} = \dfrac{0,6-2k}{\sqrt{0,24}}$

c) X, Y necorelate $\Leftrightarrow \rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow 0,6 - 2k = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = 0,3}$

Pt. k = 0,3

X \ Y	-1	1	p_i
0	0,2	0,2	0,4
1	0,3	0,3	0,6
q_j	0,5	0,5	1

$\boxed{\pi_{ij} = p_i \cdot q_j \quad \forall i,j}$

$\left.\begin{array}{l} \pi_{11} = 0,2 = \underbrace{0,4}_{p_1}\cdot\underbrace{0,5}_{q_1} \\ \pi_{12} = 0,2 = 0,4\cdot 0,5 \\ \pi_{21} = 0,3 = \underbrace{0,6}_{p_2}\cdot\underbrace{0,5}_{q_1} \\ \pi_{22} = 0,3 = 0,6\cdot 0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ X, Y indep.

Probabilități

Lucru cu v.a. discrete unidimensionale și bidimensionale

1. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$. Să se determine:

a) parametrul real p

b) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X şi să se reprezinte grafic.

c) media şi dispersia variabilelor $16X-23$ şi $3X-2$.

2. Calculaţi media şi dispersia următoarelor variabile aleatoare:

a) $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6p & p & 4p^2 & 2p & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$ b) $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ...n... & ..... \\ p & pq & pq^2 & pq^{n-1} & .... \end{pmatrix}$, $p,q\in\mathbb{R}$

c) $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ...n... & ..... \\ p & \frac{p}{3} & \frac{p}{3^2} & \frac{p}{3^3} & ...\frac{p}{3^n} & \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$ d) $X:\begin{pmatrix} n \\ \frac{p}{2^n} \end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}$

3. Se dau variabilele aleatoare discrete $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Fie $k = P(X=1, Y=-1)$. Să se determine:

a) repartiţia comună a variabilelor aleatoare X şi Y
b) coeficientul de corelaţie al variabilelor X şi Y
c) valorile parametrului k pentru care X şi Y sunt necorelate; în acest caz să se testeze dacă X şi Y sunt independente.

3. Se dau variabilele aleatoare independente: $X:\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-q & p \end{pmatrix}$, $p,q,a\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrul real a astfel încât variabila aleatoare $X-Y$ să aibă dispersia egală cu $\frac{4}{9}$.

Stabiliţi dacă valoarea parametrului real a influenţează valoarea coeficientului de corelaţie dintre X şi Y .

4. Fie variabila aleatoare discretă $X:\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 6p & 2p & 9p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât variabila aleatoare $Y = aX+b$ să aibă media egală cu 57 şi dispersia egală cu 75. Construiţi apoi funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X şi reprezentaţi-o grafic.

5. Se dau variabilele aleatoare discrete $X:\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ şi $Y:\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Fie $k = P(X=-2, Y=3)$.

a) Să se construiască repartiţia comună a variabilelor aleatoare X şi Y.
b) Să se determine parametrul real k astfel încât cele două variabile să fie necorelate.
c) Pentru k de la punctul anterior să se verifice dacă variabilele X şi Y sunt independente.

6. Fie variabila aleatoare discretă:

$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$

a) Determinaţi valoarea parametrului $p\in\mathbb{R}$
b) Construiţi funcţia de repartiţie a lui X şi realizaţi graficul acesteia
c) Calculaţi $E(3X-2)$, $Var(6X-3)$, $E(X+X^2)$
d) Calculaţi $P(|X| < \frac{1}{2} / -1.25 < X < 0.75)$

7. Se consideră variabila aleatoare bidimensională (X,Y), având repartiţia:

X \ Y	−2	0	9	$P(X = X_i)$
−1	b	$2b$	0	
0	$3b$	$4b$	$5b$	
$P(Y = Y_j)$				

unde b∈**R**.

(a) Să se determine tabloul repartiției variabilei aleatoare bidimensionale (X,Y) și repartițiile marginale.

(b) Să se studieze independența variabilelor aleatoare X și Y și să se calculeze $P(X\cdot Y\neq 0)$

(c) Să se calculeze dispersia variabilei aleatoare $3X-2Y$.

8. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	-2	-1	0	1	p_i
-1	1/80	2/80	3/80	14/80	1/4 = 20/80
0	2/80	3/80	14/80	1/80	20/80
1	3/80	14/80	1/80	2/80	1/4 = 20/80
2	14/80	1/80	2/80	3/80	20/80
q_j	1/4 = 20/80	20/80	20/80	1/4 = 20/80	1

Să se determine:
a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora
b) coeficientul de corelație dintre X și Y
c) v.a. condiționate X|Y=0 și Y|X=2 și mediile acestora
d) Var(-3Y+3)
e) P(X<1,Y>-1)

9. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	-2	-1	0	1	2	p_i
-1	1/10	1/50	3/50	1/50	1/10	
0		3/25		3/25		
1	2/25	1/50	7/50	1/50	2/25	
q_j	11/50		6/25		11/50	

Să se determine:
a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora
b) coeficientul de corelație dintre X și Y
c) v.a. condiționate X|Y=0 și Y|X=1 și mediile acestora
d) Var(3X+5)
e) P(X<1,Y>0)

10. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	1	2	3	4	p_i
0	4/40	3/40	2/40		1/4
1		4/40	3/40	2/40	1/4
2	2/40	1/40		3/40	1/4
3	3/40		1/40	4/40	
q_j					

Să se determine:
a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora
b) coeficientul de corelație dintre X și Y
c) v.a. condiționate X|Y=3 și Y|X=1 și mediile acestora
d) Var(-X+5)
e) P(X<1,Y>3)

11. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul de puncte obținute la aruncarea unui zar. Să se determine parametrii reali a și b astfel încat momentul centrat de ordin 2 al variabilei aleatoare $Y = aX+b$ să fie egal cu 1.

12. Se aruncă o monedă de 10 ori și se notează cu X variabila aleatoare care indică numărul de apariții al stemei în cele 10 aruncări. Să se determine:
a) repartiția variabilei aleatoare X
b) valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare X
c) funcția de repartiție a variabilei aleatoare X

$E(X\cdot Y) = (-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{80} + (-1)\cdot(-1)\cdot\frac{2}{80} + 0 + (-1)\cdot 1\cdot\frac{14}{80} + 0 - \frac{6}{80} - \frac{14}{80} + \cancel{\frac{2}{80}} - \frac{56}{80} - \cancel{\frac{2}{80}} + \frac{6}{80} = -1$

$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $E(X) = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$Y: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $E(Y) = -2\cdot\frac{1}{4} + (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

$X^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $E(X^2) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{2}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$Y^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $E(Y^2) = \frac{3}{2}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

b) $\rho(X,Y) = \dfrac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \dfrac{-1+\frac{1}{4}}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2}} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

c) $X|Y=0: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3/80}{20/80} & \frac{14/80}{20/80} & \frac{1/80}{20/80} & \frac{2/80}{20/80} \end{pmatrix}$ $X|Y=0: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{20} & \frac{14}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} \end{pmatrix}$ $E(X|Y=0) = -1\cdot\frac{3}{20} + 0\cdot\frac{14}{20} + 1\cdot\frac{1}{20} + 2\cdot\frac{2}{20}$

$Y|X=2: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{14/80}{20/80} & \frac{1/80}{20/80} & \frac{2/80}{20/80} & \frac{3/80}{20/80} \end{pmatrix}$ $Y|X=2: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{14}{20} & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{3}{20} \end{pmatrix}$ $E(Y/X=2) = \dots$

d) $Var(-3Y+3) = (-3)^2\cdot Var(Y) = 9\cdot\frac{5}{4} = \frac{45}{4}$

e) $P(X<1, Y>-1) = \frac{3}{80} + \frac{14}{80} + \frac{14}{80} + \frac{1}{80} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$