

Probleme cu repartiții de v.a.

1. Durata necesară (exprimată în ore) pentru reparația unei mașini este o variabilă aleatoare repartizată exponențial de parametru $\lambda=1/3$. Determinați:

- a) Probabilitatea ca reparația să dureze mai mult de 3 ore
- b) Probabilitatea ca reparația să dureze 12 ore știind că reparația durează mai mult de 9 ore

2. Presupunem că numărul de viroze respiratorii pe care le suferă o persoană într-un an este o variabilă aleatoare repartizată Poisson de parametru $\lambda=5$. Un vaccin minune apare pe piață care se dovedește eficient în cazul a 75% din persoanele cărora acesta le-a fost administrat, reducând parametrul repartiției Poisson la $\lambda=3$ (pentru restul populației se presupune că nu are un efect considerabil). Cu ce probabilitate o persoană care i s-a administrat vaccinul și care s-a îmbolnăvit de 2 ori într-un an (de viroze respiratorii!) se află printre cei 75% din populație pentru care vaccinul a fost eficient?

3. Un lot format din 100 de produse este supus controlului de calitate. Se extrag cinci produse din lot, fără revenire. Dacă se găsește un produs defect atunci lotul se respinge. Știind că 5% din produse sunt defecte determinați probabilitățile următoarelor evenimente:

- a) Lotul este acceptat
 - b) Lotul este respins
- Lotul este respins după a treia verificare

4. Se știe că înălțimea (măsurată în cm) bărbaților de 65 de ani este o variabilă aleatoare repartizată normal de medie $m=173$ cm și dispersie 16. Determinați ce procent din acești bărbați au înălțimea mai mare de 176 cm.

5. Dintr-o urnă ce conține **150 de bile roz** și **100 de bile mov** se extrag, **cu revenire**, cinci bile. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul bilelor roz obținute, **în total**, în urma celor cinci extrageri.

Determinați:

- a) Repartiția v.a. X
- b) $P(X = 4)$, $P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$, $P\left(X < \frac{\pi}{3}\right)$ și $P(X \leq 2 / X > 0.2)$
- c) $F\left(\frac{7}{2}\right)$, unde F este funcția de repartiție a v.a. X
- d) $E(X)$, $Var(X)$

6. O monedă nemăsluită (echilibrată) este aruncată până când capul apare de 10 ori. Fie X o v.a. ce numără de câte ori apare pajura în cadrul acestor aruncări. Determinați funcția de masă a v.a. X .

7. Fie X o v.a. repartizată normal cu media 3 și dispersia 49. Determinați valoarea parametrului c pentru care $P(X > c) = 0.15$

8. Profitul anual al unui agent economic, exprimat în milioane de unități monetare este o v.a. continuă X având densitatea de probabilitate

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = kx^5(1-x)^7, x \in (0,1), k \in \mathbb{R}$$

Determinați:

- a) Valoarea parametrului k
- b) Profitul mediu și dispersia v.a. profit.

9. Într-un cazino intră în medie o persoană la 10 minute. Determinați:

- a) Probabilitatea ca nicio persoană să nu intre în cazino în intervalul 12:00-12:30.
- b) Probabilitatea ca cel puțin 4 persoane să intre în cazino în intervalul 12:00-12:30.

10. Dintr-o urnă ce conține **50 de bile roz** și **200 de bile mov** se extrag, **fără revenire**, cinci bile. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul bilelor roz obținute, **în total**, în urma celor cinci extrageri.

Determinați:

- a) Repartiția v.a. X
- b) $P(X = 1)$, $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$, $P\left(X < \frac{\pi}{3}\right)$ și $P(X \leq 2 / X > 0.8)$
- c) $F\left(\frac{11}{5}\right)$, unde F este funcția de repartiție a v.a. X
- d) $E(X)$, $Var(X)$

11. Un test folosit pentru diagnosticarea *sindromului obsesivo-compulsiv* are o **acuratețe** de 90%(i.e. dacă persoana are sindromul atunci rezultatul testului va fi pozitiv cu o probabilitate de 0.9, iar dacă persoana nu are sindromul atunci rezultatul testului va fi negativ cu o probabilitate de 0.9). Știind că sindromul apare în medie la 1% din populație, determinați:

- a) Care este probabilitatea ca persoana să aibă acest sindrom dacă rezultatul testului este pozitiv în cazul unei persoane luate la întâmplare
- b) Care este probabilitatea ca persoana să nu aibă acest sindrom dacă rezultatul testului este negativ

12. Fie funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 30kx^{10}e^{-\frac{x}{30}}, x \geq 0, k \in \mathbb{R}.$$

Cerințe:

- a) Determinați valoarea parametrului real k astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue
- b) Calculați media și dispersia v.a. X.

13. **Testul fals pozitiv**

Considerăm un test de sânge care probează instalarea unei boli a cărei incidență este de 1 la 100 000 de persoane. **Testul este unul de încredere:** dacă o persoană are boala, acesta o va depista cu o probabilitate de 95% iar dacă o persoană este sănătoasă există probabilitatea de 0.5% ca testul să dea un rezultat fals pozitiv.

Determinați probabilitatea ca un test pozitiv să fie pozitiv în mod corect (adică să nu fie fals pozitiv!).

14. Urna lui Polya

O urnă conține b bile roz și c bile albastre. Se extrage o bilă din urnă, i se notează culoarea și este repusă în urnă, împreună cu alte d bile de aceeași culoare. Această procedură este repetată la infinit. Determinați:

- a) probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră
- b) probabilitatea ca prima bilă extrasă să fie albastră știind că a doua bilă extrasă este albastră

15. Un student este primul în coada de așteptare pentru un examen oral. Se știe că timpul de examinare este o v. a. repartizată exponențial de parametru $1/20$. Determinați probabilitatea ca:

- a) Studentul să aștepte mai mult de 20 min
- b) Studentul să aștepte între 20 și 40 min

16. Problema testului de paternitate

Gigel este chemat în instanță pentru a recunoaște paternitatea asupra copilului Lucicăi. Acesta se apără invocând că nu poate fi tatăl copilului întrucât a părăsit țara cu 290 de zile înainte de nașterea copilului și a revenit în țară cu 240 de zile înainte de nașterea copilului. Un expert depune marturie în cadrul procesului și afirmă că durata sarcinii unei femei este o variabilă aleatoare a cărei repartiție poate fi aproximată cu repartiția normală de medie 270 și dispersie 100. Ce va decide instanța?

17. Un feribot ajunge în stație la fiecare 30 minute începând cu ora 9:00. Un student care vrea să ia feribotul ajunge în stație la un moment uniform distribuit pe intervalul $(9, 12)$. Determinați probabilitatea ca studentul să aibă de așteptat feribotul:

- a) mai mult de 10 minute
- b) între 10 și 20 minute
- c) mai mult de 25 de minute

18. Din producția realizată de o mașină automată despre care se știe că realizează 5% piese defecte se extrag la întâmplare piese până la obținerea primei piese defecte. Se cere probabilitatea ca:

- a) prima piesă defectă să se obțină la a zecea extragere
- b) cel mult primele 5 piese să fie corespunzătoare
- c) prima piesă defectă să nu apară în una din primele 4 extrageri