③

a)

$X \backslash Y$	-1	1	
0	$0{,}5-k$	$k-0{,}1$	$0{,}4$
1	k	$0{,}6-k$	$0{,}6$
	$0{,}5$	$0{,}5$	1

$X^2: \begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ $\quad Y: \begin{pmatrix} (-1)^2 & 1^2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ $\quad Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$E(X) = 0{,}6 \qquad E(X^2) = 0{,}6$

$E(Y) = 0 \qquad E(Y^2) = 1$

$X\cdot Y: \begin{pmatrix} 0\cdot(-1) & 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 \\ 0{,}5-k & k-0{,}1 & k & 0{,}6-k \end{pmatrix}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0{,}6 - 0{,}36 = 0{,}24$

$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1 - 0 = 1$

$X\cdot Y: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & 0{,}4 & 0{,}6-k \end{pmatrix}$ $\qquad E(X\cdot Y) = -k + 0 + 0{,}6 - k = 0{,}6 - 2k$

b) $\rho(X,Y) = \dfrac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \dfrac{0{,}6 - 2k - 0{,}6\cdot 0}{\sqrt{0{,}24\cdot 1}} = \dfrac{0{,}6-2k}{\sqrt{0{,}24}}$

c) X, Y necorelate $\Leftrightarrow \rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow 0{,}6 - 2k = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = 0{,}3}$

$\boxed{\pi_{ij} = p_i \cdot q_j \ \forall i,j} \Leftrightarrow X, Y$ indep.

$X \backslash Y$	-1	1	
0	$0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}4$
1	$0{,}3$	$0{,}3$	$0{,}6$
	$0{,}5$	$0{,}5$	1

$\left.\begin{array}{l} \pi_{11} = 0{,}2 = 0{,}4\cdot 0{,}5 \\ \pi_{12} = 0{,}2 = 0{,}4\cdot 0{,}5 \\ \pi_{21} = 0{,}3 = 0{,}6\cdot 0{,}5 \\ \pi_{22} = 0{,}3 = 0{,}6\cdot 0{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ X, Y indep.

Probabilități

Lucru cu v.a. discrete unidimensionale și bidimensionale

1. Fie variabila aleatoare discretă $X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$. Să se determine:

a) parametrul real p

b) funcția de repartiție a variabilei aleatoare X și să se reprezinte grafic.

c) media și dispersia variabilelor $16X - 23$ și $3X - 2$.

2. Calculați media și dispersia următoarelor variabile aleatoare:

a) $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6p & p & 4p^2 & 2p & 3p^2 & 3p^2 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$ b) $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots n \ldots & \ldots \\ p & pq & pq^2 & pq^{n-1} & \ldots \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{R}$

c) $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots n \ldots & \ldots \\ p & \frac{p}{3} & \frac{p}{3^2} & \frac{p}{3^3} & \ldots \frac{p}{3^n} & \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$ d) $X: \begin{pmatrix} n \\ \frac{p}{2^n} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$

3. Se dau variabilele aleatoare discrete $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Fie $k = P(X = 1, Y = -1)$. Să se determine:

✓ a) repartiția comună a variabilelor aleatoare X și Y

✓ b) coeficientul de corelație al variabilelor X și Y

✓ c) valorile parametrului k pentru care X și Y sunt necorelate; în acest caz să se testeze dacă X și Y sunt independente.

3. Se dau variabilele aleatoare independente: $X: \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - q & p \end{pmatrix}$, $p, q, a \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrul real a astfel încât variabila aleatoare $X - Y$ să aibă dispersia egală cu $\frac{4}{9}$.

Stabiliți dacă valoarea parametrului real a influențează valoarea coeficientului de corelație dintre X și Y .

4. Fie variabila aleatoare discretă $X: \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 6p & 2p & 9p & p \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrii reali a și b astfel încât variabila aleatoare $Y = aX + b$ să aibă media egală cu 57 și dispersia egală cu 75. Construiți apoi funcția de repartiție a variabilei aleatoare X și reprezentați-o grafic.

5. Se dau variabilele aleatoare discrete $X: \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Fie $k = P(X = -2, Y = 3)$.

a) Să se construiască repartiția comună a variabilelor aleatoare X și Y.

b) Să se determine parametrul real k astfel încât cele două variabile să fie necorelate.

c) Pentru k de la punctul anterior să se verifice dacă variabilele X și Y sunt independente.

6. Fie variabila aleatoare discretă:

$X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3p & 4p & 2p & p & p \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$

a) Determinați valoarea parametrului $p \in \mathbb{R}$

b) Construiți funcția de repartiție a lui X și realizați graficul acesteia

c) Calculați $E(3X-2)$, $Var(6X-3)$, $E(X+X^2)$

d) Calculați $P(|X| < \frac{1}{2} / -1.25 < X < 0.75)$

7. Se consideră variabila aleatoare bidimensională (*X*,*Y*), având repartiția:

$X \backslash Y$	-2	0	9	$P(X = X_i)$
-1	b	$2b$	0	
0	$3b$	$4b$	$5b$	
$P(Y = Y_j)$				

unde $b \in \mathbf{R}$.

(a) Să se determine tabloul repartiției variabilei aleatoare bidimensionale (*X*,*Y*) și repartițiile marginale.

(b) Să se studieze independența variabilelor aleatoare X și Y și să se calculeze $P(X\cdot Y \neq 0)$

(c) Să se calculeze dispersia variabilei aleatoare $3X-2Y$.

8. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	-2	-1	0	1	p_i
-1	1/80	2/80	3/80		1/4
0	2/80	3/80	14/80	1/80	
1	3/80		1/80	2/80	1/4
2			2/80		
q_j	1/4			1/4	

Să se determine:

a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora

b) coeficientul de corelație dintre X și Y

c) v.a. condiționate X|Y=0 și Y|X=2 și mediile acestora

d) Var(-3Y+3)

e) P(X<1,Y>-1)

9. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	-2	-1	0	1	2	p_i
-1	1/10	1/50	3/50	1/50	1/10	
0		3/25		3/25		
1	2/25	1/50	7/50	1/50	2/25	
q_j	11/50		6/25		11/50	

Să se determine:

a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora

b) coeficientul de corelație dintre X și Y

c) v.a. condiționate X|Y=0 și Y|X=1 și mediile acestora

d) Var(3X+5)

e) P(X<1,Y>0)

10. Fie X și Y două v.a. discrete a căror repartiție comună incompletă este dată mai jos:

X \ Y	1	2	3	4	p_i
0	4/40	3/40	2/40	1/40	1/4 = 10/40
1	1/40	4/40	3/40	2/40	1/4 = 10/40
2	2/40	1/40	4/40	3/40	1/4 = 10/40
3	3/40	2/40	1/40	4/40	10/40
q_j	10/40	10/40	10/40	10/40	1

Să se determine:

✓ a) repartiția comună a lui X și Y(de completat tabelul!) și repartițiile marginale ale acestora

✓ b) coeficientul de corelație dintre X și Y

✓ c) v.a. condiționate X|Y=3 și Y|X=1 și mediile acestora

✓ d) Var(-X+5)

✓ e) P(X<1,Y>3)

11. Fie X variabila aleatoare ce indică numărul de puncte obținute la aruncarea unui zar. Să se determine parametrii reali a și b astfel încat momentul centrat de ordin 2 al variabilei aleatoare $Y = aX + b$ să fie egal cu 1.

12. Se aruncă o monedă de 10 ori și se notează cu X variabila aleatoare care indică numărul de apariții al stemei în cele 10 aruncări. Să se determine:

a) repartiția variabilei aleatoare X

b) valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare X

c) funcția de repartiție a variabilei aleatoare X

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad E(X) = \frac{1}{4}(1+2+3) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\qquad Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$

$E(X^2) = \frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ $\qquad Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$

$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $\qquad E(Y) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$E(Y^2) = \frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$

$E(X\cdot Y) = 0 + 1\cdot\frac{1}{40} + 2\cdot\frac{4}{40} + 3\cdot\frac{3}{40} + 4\cdot\frac{2}{40} + 2\cdot\frac{2}{40} + 4\cdot\frac{1}{40} + 6\cdot\frac{4}{40} + 8\cdot\frac{3}{40} + 3\cdot\frac{3}{40} + 6\cdot\frac{2}{40} + 9\cdot\frac{1}{40} + 12\cdot\frac{4}{40}$

$E(X\cdot Y) = \frac{160}{40} = 4$

$\rho(X,Y) = \dfrac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = \dfrac{4 - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}}} = \dfrac{4 - \frac{15}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \Rightarrow$ X,Y sunt slab corelate

c) $X|Y=3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2/40}{10/40} & \frac{3/40}{10/40} & \frac{4/40}{10/40} & \frac{1/40}{10/40} \end{pmatrix}$ $\quad X|Y=3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ $\quad E(X|Y=3) = \frac{3}{10} + \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$Y|X=1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1/40}{10/40} & \frac{4/40}{10/40} & \frac{3/40}{10/40} & \frac{2/40}{10/40} \end{pmatrix}$ $\quad Y|X=1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$ $\quad E(Y|X=1) = \frac{1}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$

d) $Var(-X+5) = (-1)^2\cdot Var(X) = \frac{5}{4}$

e) $\mathbb{P}(X<1, Y>3) = \frac{1}{40}$