Gheorghe Oprișan   Gabriela Ileana Sebe

Compendiu de teoria probabilităților și statistică matematică

Editura Tehnică

Universitaria

Gheorghe OPRIŞAN
Gabriela Ileana SEBE

COMPENDIU
DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR
ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti, 1999

Adresa:**S.C. Editura TEHNICĂ S.A.**
Piața Presei Libere, 1
33 București, România
cod 79738

Coperta seriei: **Andrei Mănescu**

Redactor: **Gheorghe Oprișan**
Tehnoredactor: Diana Jilavu

Bun de tipar: 19.03.1999 ; coli de tipar: 14,5
C.Z.U. 517

ISBN 973-31-1325-5

Tipărit la Tipografia SEMNE

PREFAŢĂ

"Norocul ajută numai minţile pregătite". Louis Pasteur

Prezenta lucrare îşi propune să prezinte într-o manieră cât mai naturală şi accesibilă, însă fără a renunţa la rigoarea matematică, noţiuni şi rezultate fundamentale din teoria probabilităţilor şi statistica matematică, ramuri ale matematicii solicitate în cele mai variate domenii.

Deşi teoria probabilităţilor îşi are originile în observaţiile făcute pe seama rezultatelor jocurilor de noroc, în prezent, după aproape trei secole, această disciplină se bazează pe un aparat matematic foarte dezvoltat, bogat în concepte şi rezultate care permit descrierea şi investigarea fenomenelor aleatoare.

Statistica matematică reprezintă mulţimea procedeelor prin care se studiază proprietăţi, caracteristici ale populaţiilor numeroase, folosind instrumentul matematic în analiză şi interpretare. Ea prezintă legitatea caracteristicilor în modele abstracte desprinse din lumea datelor concrete, empirice, de care dispune statisticianul.

Teoria probabilităţilor constituie aparatul matematic de bază al statisticii matematice, permiţând construirea logică a ştiinţei respective, şi în acelaşi timp, pune în evidenţă intervalul de aplicare a ei.

Revenind asupra importanţei deosebite ce o au teoria probabilităţilor şi statistica matematică, subliniem că ele sunt folosite atât direct în rezolvarea a variate probleme puse de practica social-economică, în industrie, agricultură, comerţ, planificare, investiţii etc., cât şi ca bază teoretică necesară altor ramuri speciale ale matematicii ca: programarea matematică, teoria aşteptării, teoria informaticii şi cibernetică etc.

Întrucât teoria probabilităţilor construieşte variate modele abstracte care pot servi la interpretarea diverselor fenomene reale, asistăm la întrepătrunderea cu alte ştiinţe cum sunt ştiinţele tehnice, economia, biologia, lingvistica etc., generând noi domenii de cercetare ca: mecanica statistică, statistica economică, biologia matematică, lingvistica matematică.

Chiar cercetarea matematică fundamentală foloseşte teoria probabilităţilor ca instrument de lucru, de exemplu, în teoria numerelor, în analiza numerică, în probleme legate de utilizarea maşinilor electronice de calcul etc.

Cartea de faţă este concepută în paisprezece capitole. În primele patru capitole este expusă teoria clasică a probabilităţilor. Următoarele şase capi-

CUPRINS

INTRODUCERE

Teoria probabilităţilor este o teorie matematică care se ocupă cu studiul fenomenelor întâmplătoare sau aleatoare, utilizând în acest scop metodele deductive ale matematicii. Fenomenelor aleatoare de masă le este caracteristică proprietatea de stabilitate a frecvenţelor. Conceptul fundamental de probabilitate corespunde intuitiv constantei în jurul căreia oscilează frecvenţele şi către care şirul acestor frecvenţe tinde, când numărul probelor creşte nelimitat.

Teoria proceselor stocastice[1] este partea teoriei contemporane a probabilităţilor, care a contribuit cel mai mult la progresul ei. În prezent, procesele stocastice fac obiectul unor investigaţii teoretice din partea matematicienilor, dar în acelaşi timp prezintă largi utilizări practice în inginerie, economie, biologie, psihologie, sociologie, lingvistică etc.

Teoria proceselor stocastice se ocupă cu studiul structurii familiilor de variabile aleatoare.

Statistica matematică are ca obiect elaborarea noţiunilor şi metodelor specifice studiului statistic al fenomenelor de masă, înţelegând prin acestea fenomenele care se constituie sub acţiunea colectivă şi repetată a unui număr mare de factori întâmplători.

Statistica matematică se ocupă cu gruparea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la anumite fenomene, precum şi cu unele previziuni privind producerea lor în viitor.

Metodele statistice moderne, bazate pe teoria probabilităţilor, sunt utilizate în industrie, administraţia de stat, agricultură, medicină, fizică, sociologie, psihologie, educaţie etc.

---

[1] Cuvântul "stocastic" îşi are originea în cuvântul grecesc "stokhastikos", a cărui semnificaţie este "a ţinti".

Capitolul 1

Spaţiu de probabilitate

1.1 Evenimente

Pe baza observaţiilor şi experimentelor ştiinta deduce legi care guvernează cursul fenomenelor studiate. Un *experiment* poate fi definit ca realizarea unui set (complex) de condiţii (C). Prin urmare, două experimente diferă între ele prin seturile de condiţii (C) specifice fiecăruia dintre ele. În urma efectuării unui experiment se realizează un *eveniment.* De exemplu, dacă apa la presiunea atmosferică (760 mm) este încălzită la 100° C (setul de condiţii (C)), ea se transformă în vapori (evenimentul realizat). În urma efectuării experimentului unele evenimente se realizează cu certitudine, iar altele pot sau nu să se realizeze (adică uneori se realizează, alteori nu).

Din acest punct de vedere un experiment poate fi considerat *determinist* sau *aleator.* Experimentul descris în exemplul de mai sus este determinist, dacă avem în vedere doar evenimentul ce constă în transformarea apei în vapori. Pe de altă parte, dacă delimităm în spaţiu un volum de 1 dm^3 fixat şi ne referim la evenimentul ce constă în faptul că în acest volum numărul de molecule de apă este $\geq 10^6$, atunci experimentul nostru poate fi considerat aleator. În concluzie, un experiment aleator este un experiment al cărui rezultat este influenţat de factori întâmplători. În continuare vor fi considerate doar experimente aleatoare.

Totalitatea rezultatelor posibile ale unui experiment se numeşte *spaţiul evenimentelor elementare* (*spaţiul eşantioanelor* sau *spaţiul de selecţie*) asociat experimentului. (Evident, de aici rezultă că "eveniment elementar" înseamnă "rezultat posibil"). Spaţiul evenimentelor elementare este notat cu Ω, iar elementele lui Ω sunt *evenimente elementare.*

Un eveniment asociat unui experiment aleator, deci unui spaţiu de evenimente elementare, corespunde unui enunţ privind experimentul, enunţ care poate fi corect sau fals. Mulţimea evenimentelor pentru care enunţul este corect constituie evenimentul considerat. Astfel, orice eveniment este o submulţime a spaţiului evenimentelor elementare Ω. Dacă mulţimea Ω este finită sau infinit numărabilă, atunci este valabilă şi reciproca: orice submulţime a lui Ω este un eveniment. În cazul în care Ω este o mulţime infinit nenumărabilă nu este întotdeauna posibil să luăm ca evenimente asociate lui Ω toate submulţimile sale (vezi exemplul 1, §1.2). Evenimentele vor fi notate cu litere mari $A, B, C, \ldots$

Orice eveniment elementar care intră în componenţa unui eveniment A se numeşte *favorabil* lui A. Întregul spaţiu al evenimentelor Ω va fi numit *evenimentul sigur*, iar evenimentul care nu conţine nici un eveniment elementar, deci mulţimea vidă $\emptyset$, va fi numit *evenimentul imposibil.* Justificarea acestor denumiri este imediată: evenimentul sigur se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experimentului, iar cel imposibil nu se realizează la nici o efectuare a experimentului. Evenimentul imposibil constă în nerealizarea evenimentului sigur şi reciproc.

Fie A şi B două evenimente din Ω. Se spune că evenimentul A *implică* evenimentul B, dacă $A \subset B$, adică dacă A este o submulţime a lui B. Deci evenimentul B se realizează ori de câte ori se realizează evenimentul A. Orice eveniment implică evenimentul sigur, iar evenimentul imposibil implică orice eveniment. Evenimentele elementare nu sunt implicate de nici un alt eveniment cu excepţia celui imposibil.

Dacă $A = B$, atunci fiecare eveniment îl implică pe celălalt şi se spune că evenimentele A şi B sunt *echivalente.*

Operaţiile cu evenimente se identifică cu operaţiile cu mulţimi.

Reuniunea evenimentelor A şi B, notată $A \cup B$, este evenimentul ce constă din acele evenimente elementare care aparţin fie lui A, fie lui B, fie amândurora. Deci realizarea lui $A \cup B$ este echivalentă cu realizarea a cel puţin unuia dintre evenimentele A sau B.

Intersecţia evenimentelor A şi B, notată $A \cap B$, este evenimentul ce constă din acele evenimente elementare care aparţin atât lui A, cât şi lui B. Realizarea lui $A \cap B$ este echivalentă cu realizarea atât a lui A, cât şi a lui B.

Complementarul sau *opusul* evenimentului A, notat $\bar{A}$ sau A^c, este evenimentul ce constă din acele evenimente elementare care nu aparţin lui A. Evenimentul $\bar{A}$ se realizează dacă şi numai dacă A nu se realizează.

Diferenţa a două evenimente A şi B, notată $A \setminus B$, este evenimentul ce constă din acele evenimente elementare care aparţin lui A şi nu aparţin lui B. Deci realizarea lui $A \setminus B$ este echivalentă cu realizarea lui A, dar cu nerealizarea lui B. Evident, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Diferenţa simetrică a două evenimente A şi B, notată $A \triangle B$, este evenimentul ce constă din acele evenimente elementare care aparţin fie lui $A \setminus B$, fie lui $B \setminus A$.

Două evenimente A şi B se numesc *incompatibile* sau *disjuncte* dacă ele nu au nici un eveniment elementar comun, adică dacă $A \cap B = \emptyset$. Prin urmare, nu este posibilă atât realizarea lui A, cât şi a lui B.

Definiţiile anterioare se extind evident şi la cazul unui număr finit de evenimente $A_1, \ldots, A_n$ sau la cazul unei infinităţi numărabile de evenimente $A_1, A_2, \ldots$

Se spune că n evenimente $A_1, \ldots, A_n$ sunt *disjuncte în ansamblul lor* dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. (Evident, definiţia se extinde şi la cazul unei infinităţi numărabile de evenimente).

Un sistem (finit sau infinit numărabil) de evenimente disjuncte în ansamblul lor se numeşte *sistem complet de evenimente* dacă reuniunea lor este evenimentul sigur. Cu alte cuvinte, un sistem complet de evenimente este o *partiţie* a evenimentului sigur.

Din cele constatate anterior, se observă că oricărui experiment îi sunt proprii următoarele două obiecte matematice şi anume spaţiul evenimentelor elementare Ω şi o familie $\mathcal{K}$ de părţi ale lui Ω, numită mulţimea evenimentelor corespunzătoare experimentului considerat, care verifică următoarele axiome:

1. $\Omega \in \mathcal{K}$;
2. $A \in \mathcal{K} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{K}$;
3. $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$.

Familia de evenimente $\mathcal{K}$ este numită *algebră* sau *câmp de evenimente.*

Din axiomele de mai sus rezultă că orice succesiune finită de operaţii de tip reuniune, intersecţie, diferenţă, s-ar face cu evenimentele din $\mathcal{K}$, rezultatul va fi tot un eveniment din $\mathcal{K}$.

Din considerente de ordin matematic, în locul axiomei 3 se consideră următoarea axiomă

3'. $\{A_n \mid n \geq 1\} \subset \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{K}$.

Familia $\mathcal{K}$ de submulţimi ale lui Ω care îndeplineşte axiomele 1, 2 şi 3' este numită *σ-algebră* sau *σ-câmp de evenimente.*

Dacă Ω este o mulţime finită, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, atunci $\mathcal{K}$ coincide cu $\mathcal{P}(\Omega)$ (mulţimea părţilor lui Ω) şi conţine 2^n elemente. Un astfel de câmp de evenimente se numeşte *finit generat.* În acest caz nu există nici o deosebire între câmp şi σ-câmp de evenimente.

Dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ este o familie de submulţimi ale lui Ω, atunci cea mai mică σ-algebră care conţine pe $\mathcal{F}$ se numeşte *σ-algebră generată de $\mathcal{F}$* şi se notează $\sigma(\mathcal{F})$. Există cel puţin o σ-algebră care conţine pe $\mathcal{F}$, de exemplu $\mathcal{P}(\Omega)$. Este evident că $\sigma(\mathcal{F})$ este egală cu intersecţia tuturor σ-algebrelor ce conţin pe $\mathcal{F}$. Prin urmare, $\sigma(\mathcal{F})$ este o σ-algebră definită pe Ω care se caracterizează prin următoarea proprietate: dacă $\mathcal{H}$ este o σ-algebră oarecare definită pe Ω şi $\mathcal{H} \supset \mathcal{F}$, atunci $\mathcal{H} \supset \sigma(\mathcal{F})$.

algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$ este numită *σ-algebră Borel* [1] pe $\mathbf{R}$, iar o mulţime din $\mathcal{B}$ este numită *boreliană.*

În legătură cu $\mathcal{B}$ se pot demonstra următoarele:

- orice interval din $\mathbf{R}$ de orice formă ($(a, b], [a, b], (-\infty, a]$ etc.) este mulţime boreliană;

- σ-algebra generată de oricare din tipurile precedente de intervale coincide cu $\mathcal{B}$.

Similar, dacă $\Omega = \mathbf{R}^n$, σ-algebra generată de mulţimile deschise din $\mathbf{R}^n$, notată $\mathcal{B}^n$, este numită σ-algebră Borel pe $\mathbf{R}^n$. În ceea ce priveşte proprietăţile precedente, în locul intervalelor se vor considera paralelipipede de diverse forme.

Pentru $(A_n)_{n\geq 1}$ un şir de evenimente din σ-algebra $\mathcal{K}$, se definesc evenimentele

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_n \bigcap_{m\geq n} A_m,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_n \bigcup_{m\geq n} A_m,$$

numite *limita inferioară*, respectiv *limita superioară* ale şirului. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n = A,$$

atunci şirul de evenimente considerat se numeşte convergent la limita A. Se constată că limita inferioară constă din acele evenimente elementare care aparţin tuturor evenimentelor A_n, $n \geq 1$, cu excepţia unui număr finit dintre acestea, iar limita superioară constă din acele evenimente elementare care aparţin la o infinitate de evenimente A_n, $n \geq 1$.

Noţiunile de limită superioară şi limită inferioară ale unui şir de evenimente pot fi reduse la noţiunile mai familiare de limită superioară şi limită inferioară ale unui şir de funcţii. Dacă pentru un eveniment A se introduce *indicatorul* χ_A al acestuia ca funcţia definită prin relaţia

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

atunci indicatorul evenimentului $\lim\limits_{n\to\infty} \inf A_n$ este funcţia $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \chi_{A_n}$, iar cel al evenimentului $\lim\limits_{n\to\infty} \sup A_n$ este funcţia $\lim\limits_{n} \sup \chi_{A_n}$. Şirul $(A_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul de funcţii $(\chi_{A_n})_{n\geq 1}$ este convergent.

Exemplul 1. Fie $\Omega \neq \emptyset$ şi $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$. Atunci $\mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ este o σ-algebră.

Exemplul 2. Se consideră experimentul aruncării unei monede a) o dată; b) de două ori.

[1] După numele lui Emile Borel (1871-1956), mare matematician francez.

a) Dacă se notează cu v şi s evenimentele elementare care constau în apariţia "valorii" şi respectiv a "stemei", atunci în cazul a) spaţiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{v, s\}$, iar $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{v\}, \{s\}, \Omega\}$;

b) spaţiul evenimentelor elementare este $\Omega = \{(vs), (sv), (vv), (ss)\}$, iar $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemplul 3. Se consideră experimentul aruncării unui zar. Cum evenimentele elementare constau în apariţia uneia dintre cele şase feţe ale zarului, atunci $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{i\}, \{i,j\}, \{i,j,k\}, \{i,j,k,l\}, \{i,j,k,l,m\}, \Omega\},$$

unde $i, j, k, l, m \in \Omega$, $i \neq j \neq k \neq l \neq m$. Numărul de evenimente din câmp este $n = 2^6 = 64$.

Exemplul 4. Dintre studenţii prezenţi la cursul de "Teoria probabilităţilor şi statistică matematică" se alege la întâmplare unul. Se notează cu A evenimentul ce constă în aceea că studentul ales este băiat, cu B evenimentul că el nu fumează şi cu C evenimentul că el locuieşte la cămin. Se cere:

a) să se interpreteze evenimentul $A \cap B \cap \bar{C}$;

b) când este adevărată relaţia $\bar{C} \subset B$?

c) în ce condiţii are loc identitatea $A \cap B \cap C = A$?

d) când va putea avea loc egalitatea $\bar{A} = B$? (Va avea loc dacă toţi băieţii fumează?).

Soluţie. a) A fost ales un băiat care nu locuieşte în cămin şi care nu fumează.

b) Incluziunea $\bar{C} \subset B$ este adevărată când toţi studenţii fumători locuiesc în cămin.

c) Identitatea $A \cap B \cap C = A$ are loc când toţi băieţii locuiesc în cămin şi nici unul nu fumează.

d) $\bar{A} = B$ are loc când nici o fată nu fumează, iar toţi băieţii fumează. Egalitatea are loc dacă fumează toţi băieţii, deoarece pot fuma şi fetele.

Exemplul 5. În tabelul 1.1 sunt enumerate toate rezultatele posibile (spaţiul evenimentelor elementare) ale distribuirii la întâmplare a 3 bile (a,b şi c) în 3 urne.

Distribuirea a 3 bile în 3 urne

1	$(abc\|-\|-)$	10	$(a\|bc\|-)$	19	$(-\|a\|bc)$
2	$(-\|abc\|-)$	11	$(b\|ac\|-)$	20	$(-\|b\|ac)$
3	$(-\|-\|abc)$	12	$(c\|ab\|-)$	21	$(-\|c\|ab)$
4	$(ab\|c\|-)$	13	$(a\|-\|bc)$	22	$(a\|b\|c)$
5	$(ac\|b\|-)$	14	$(b\|-\|ac)$	23	$(a\|c\|b)$
6	$(bc\|a\|-)$	15	$(c\|-\|ab)$	24	$(b\|a\|c)$
7	$(ab\|-\|c)$	16	$(-\|ab\|c)$	25	$(b\|c\|a)$
8	$(ac\|-\|b)$	17	$(-\|ac\|b)$	26	$(c\|a\|b)$
9	$(bc\|-\|a)$	18	$(-\|bc\|a)$	27	$(c\|b\|a)$

Tabelul 1.1

Fiecare din aranjamentele enumerate reprezintă un eveniment elementar şi orice alt eveniment este o reuniune de evenimente elementare, deci este vorba de un câmp finit generat. Evenimentul A, descris astfel: "într-una dintre urne se află mai multe bile" se realizează ori de câte ori se realizează unul din primele 21 evenimente elementare din tabelul 1.1. De asemenea, evenimentul B, ce constă în faptul că "a doua urnă nu este goală", poate fi descompus în evenimentele elementare 2, 4 -6, 10 - 12, 16 - 27. Evenimentul $C = A \bigcap B$ se obţine din descompunerea evenimentelor elementare 2, 4 - 6, 10 - 12, 16 - 21. Evident $A \bigcup B = \Omega$, iar $\emptyset$ este evenimentul ce constă în faptul că " în nici una dintre urne nu se află mai mult de o bilă şi a doua urnă este goală".

O problemă mai generală, care poate fi studiată în acelaşi mod, este aceea a distribuirii la întâmplare a r bile în n urne. Cazul considerat mai sus se obţine pentru $r = n = 3$.

Trebuie remarcat faptul că natura fizică a spaţiului evenimentelor elementare nu este relevantă; astfel, în exemplul dat, s-a vorbit despre bile şi urne, dar există multe spaţii reale, complet deosebite, care din punct de vedere abstract sunt echivalente cu problema considerată. Dăm mai jos o enumerare a unora dintre aceste situaţii:

- repartizarea a r accidente rutiere pe zilele săptămânii corepunde cu plasarea a r bile în $n = 7$ urne;

- distribuirea a r persoane în n profesii;

- distribuirea a r particule elementare în n regiuni ale spaţiului.

1.2 Probabilitate

Probabilitatea unui eveniment este o măsură a gradului de posibilitate a acelui eveniment, grad de posibilitate care merge de la valoarea 0 (pentru evenimentul imposibil) până la valoarea 1 (pentru evenimentul sigur). Pentru un eveniment intermediar $A, \emptyset \subset A \subset \Omega$, probabilitatea lui A va trebui să reflecte stabilitatea asimptotică a frecvenţei lui A într-un număr arbitrar de mare de repetări independente ale experimentului căruia A îi este asociat.

Dacă A şi B sunt evenimente incompatibile, atunci numărul de apariţii ale evenimentului $A \bigcup B$ într-un număr arbitrar de repetări ale experimentului fiind egal cu suma numărului de apariţii ale lui A şi a numărului de apariţii ale lui B, probabilitatea lui $A \bigcup B$ trebuie să fie egală cu suma probabilităţilor lui A şi a lui B. Prin urmare, probabilitatea va trebui să posede o proprietate de aditivitate pentru evenimente incompatibile.

Plecând de la aceste considerente nematematice, matematicianul rus Kolmogorov [2] a dat următoarea definiţie conceptului matematic de probabilitate.

Fie $(\Omega, \mathcal{K})$ un σ-câmp de evenimente. Se numeşte *probabilitate* pe $\mathcal{K}$ o aplicaţie $P : \mathcal{K} \to \mathbf{R}$ cu proprietăţile:

1) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{K}$ şi $P(\Omega) = 1$;

2) (*σ-aditivitatea*) pentru orice familie cel mult numărabilă $\{A_i | i \in I\}$ de evenimente din $\mathcal{K}$, disjuncte în ansamblul lor

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numeşte *spaţiu (câmp) de probabilitate.*

Următoarele proprietăţi rezultă din definiţia probabilităţii

a) $P(\emptyset) = 0$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \forall A \in \mathcal{K}$;

b) (*monotonia*) $P(A_1) \leq P(A_2)$ şi $P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1)$ dacă $A_1 \subset A_2$ în $\mathcal{K}$;

c) (*aditivitatea tare*)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{K};$$

d) (*finit-subaditivitatea*) pentru orice familie finită $\{A_i | i \in I\}$ de evenimente

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i);$$

e) (*formula lui Poincaré* [3].) pentru orice familie finită

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{L \subset I} (-1)^{card L - 1} P\left(\bigcap_{i \in L} A_i\right).$$

---

[2] A.N.Kolmogorov (1903-1987), unul dintre fondatorii teoriei moderne a probabilităţilor, este autorul monografiei "Fundamentele teoriei probabilităţilor" apărută în anul 1933.

[3] Henri Poincaré (1854-1912) a fost numit ultimul universalist dintre matematicieni. Contribuţia sa în teoria probabilităţilor are o mare valoare filozofică şi pedagogică

Dacă $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$ şi $p_1, ..., p_n$ sunt numere reale nenegative astfel încât $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, atunci funcţia definită prin $P(\omega_i) = p_i$, $i = \overline{1,n}$, este o probabilitate pe Ω. Dacă $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, atunci evenimentele elementare ω_i se numesc *egal probabile* şi probabilitatea unui eveniment A se defineşte ca raportul dintre numărul "cazurilor favorabile" producerii lui A şi numărul "cazurilor posibile" ale experimentului[4]. Aceasta este aşa numita *definiţie clasică* a probabilităţii care, după cum se vede, este aplicabilă numai în condiţii deosebit de restrictive.

Fie A un eveniment legat de un anumit experiment. Se repetă acest experiment de n ori (în condiţii identice) şi se notează cu $N_n(A)$, numărul de realizări ale lui A. Raportul $\frac{N_n(A)}{n}$ se numeşte *frecvenţa relativă* a realizării evenimentului A în cele n repetări.

Se remarcă uşor că dacă se aruncă o monedă nedeformată de un număr mare de ori, frecvenţa de apariţie a unei feţe oscilează în jurul valorii $p = 1/2$. Un fapt destul de amuzant, dar semnificativ în sine, este că la începutul secolului XX, statisticianul Pearson a obţinut în 24.000 de aruncări o frecvenţă relativă egală cu 0,5005. Această stabilitate a frecvenţei relative este fundamentată riguros de teoremele de tip "legea numerelor mari" (vezi §4.2).

Se arată că pentru ca o aplicaţie $P : \mathcal{K} \to [0, 1]$ să fie o probabilitate este necesar şi suficient ca

1) $P(\Omega) = 1$;

2′) (*finit-aditivitatea*) pentru orice familie finită $\{A_i | i \in I\}$ de evenimente disjuncte în ansamblul lor

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i);$$

3′) (*continuitatea monoton secvenţială în* $\emptyset$) pentru orice şir $\{A_n | n \geq 1\}$ de evenimente descrescătoare la $\emptyset$, adică

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \quad \text{şi} \quad \bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset, \quad \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Pentru a stabili alte proprietăţi fundamentale ale probabilităţii, ce decurg în mod esenţial din (3′), se introduce următoarea notaţie $A_n \downarrow A$ (respectiv $A_n \uparrow A$) când $n \to \infty$, dacă $A_n \supseteq A_{n+1} (n \geq 1)$ şi $\bigcap_{n\geq 1} A_n = A$ în $\mathcal{K}$ (respectiv $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n \geq 1$ şi $\bigcup_{n\geq 1} A_n = A$ în $\mathcal{K}$).

[4] De exemplu, dacă $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m}\}$, $m \leq n$, atunci $P(A) = m/n$.

Astfel se poate arăta următoarea proprietate numită *continuitatea monoton secvenţială* a probabilităţii

$$A_n \downarrow A \ (n \to \infty) \quad \text{în} \quad \mathcal{K} \Rightarrow P(A_n) \downarrow P(A);$$

$$A_n \uparrow A \ (n \to \infty) \quad \text{în} \quad \mathcal{K} \Rightarrow P(A_n) \uparrow P(A).$$

De asemenea, are loc şi proprietatea numită *σ-subaditivitatea* probabilităţii, ce constă în faptul că pentru orice familie numărabilă $\{A_i | i \in I\}$ de evenimente astfel încât $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Dacă o proprietate referitoare la elementele lui Ω are loc pentru orice $\omega \in \Omega \setminus A$, unde $A \in \mathcal{K}$ şi $P(A) = 0$, se spune că proprietatea are loc *aproape sigur* (prescurtat a.s.) în raport cu P.

Observaţie. Din enunţul unei probleme clasice de probabilităţi trebuie să rezulte foarte clar care este spaţiul evenimentelor elementare corespunzător. Dacă enunţul problemei dă loc la interpretări, atunci pot apărea rezultate contradictorii (vezi exemplul 7 din acest paragraf). De obicei, confuziile apar din cauza insuficientei explicitări a termenului "la întâmplare".

Exemplul 1. Fie Ω mulţimea primelor 120 de numere naturale $\{1, 2, ..., 120\}$. Se consideră mulţimile

$$A = \{\omega \in \Omega | \omega \text{ este multiplu de } 3\},$$

$$B = \{\omega \in \Omega | \omega \text{ este multiplu de } 4\}.$$

Dacă se consideră funcţia de probabilitate P definită pe $\mathcal{P}(\Omega)$ prin

$$P(E) = \frac{\text{card}\, E}{\text{card}\, \Omega} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega),$$

atunci

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad \text{şi} \quad P(B) = \frac{1}{4}.$$

Elementele mulţimilor A, respectiv B sunt în progresie aritmetică de raţie 3, respectiv 4. În continuare se calculează $P(A \cap B)$ şi $P(A \cup B)$. Cum $A \cap B$ reprezintă mulţimea multiplilor lui 12, atunci $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Pe baza proprietăţii de aditivitate tare se obţine

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Se observă, de asemenea, că

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B),$$

acest lucru fiind posibil deoarece numerele 3 şi 4 sunt relativ prime.

Se consideră şi mulţimea

$$C = \{\omega \in \Omega | \omega \text{ este multiplu de } 6 \}.$$

Cum $P(C) = \frac{1}{6}$, cât este $P(B \cap C)$? Deoarece $B \cap C$ reprezintă mulţimea numerelor naturale cuprinse între 1 şi 120, divizibile la 4 şi la 6, adică divizibile la c.m.m.m.c $(4, 6) = 12$, rezultă că $P(B \cap C) = \frac{1}{12}$. Apoi se obţine

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Se consideră Ω' astfel încât $\Omega \subseteq \Omega'$, Ω' fiind o mulţime finită de numere naturale succesive şi se ia funcţia de probabilitate construită în acelaşi mod

$$P' : \mathcal{P}(\Omega') \to [0, 1]$$

$$P'(E) = \frac{\text{card } E}{\text{card } \Omega\prime} \quad \forall E \in \mathcal{P}(\Omega').$$

Pentru mulţimile

$$A' = \{\omega \in \Omega' | \omega \text{ este multiplu de } 3 \},$$

$$B' = \{\omega \in \Omega' | \omega \text{ este multiplu de } 4 \},$$

$$C' = \{\omega \in \Omega' | \omega \text{ este multiplu de } 6 \},$$

se observă că

$$P'(A') = \frac{1}{3}, \quad P'(B') = \frac{1}{4} \quad \text{şi} \quad P'(C') = \frac{1}{6}.$$

În concluzie, independent de cardinalul mulţimii finite Ω, proporţia în care se află numerele unei progresii aritmetice (de raţie 3,4, respectiv 6) este aceeaşi. Problema care se pune este ce se întâmplă dacă Ω este o mulţime infinit numărabilă, de exemplu $\Omega = \mathrm{N}^*$. Cum definiţia anterioară a probabilităţii nu mai este valabilă, se consideră probabilitatea definită pe baza frecvenţei de apariţie a evenimentelor respective. De exemplu, pentru multiplii de 3, se ia $P(A) = \frac{1}{3}$. De fapt, această frecvenţă se calculează utilizând $N_n(A)$, numărul de apariţii ale multiplilor de 3 aflaţi în primele n numere naturale, unde $n \in A$. Atunci frecvenţa este dată de limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} = \frac{1}{3}.$$

Limite similare există şi pentru mulţimile $B, C, A\cap B, B\cap C$, având valorile deja găsite anterior. În concluzie, se pot studia toate mulţimile de forma

$$A_m = \{\omega | \omega \text{ este multiplu de } m\}, \quad m \in \mathbf{N}^*,$$

cu aceeaşi metodă dacă $\Omega = \mathbf{N}^*$.

Totuşi noua definiţie a lui P creează surprize, deşi P funcţionează corect pe mulţimile de forma A_m.

Fie, de exemplu, mulţimea $Z = \{1999\}$ sau $Z = \{1, 2, ..., 1999\}$. Atunci probabilitatea $P(Z)$ va fi dată de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n(Z)}{n} = 0$. În concluzie, orice submulţime finită a mulţimii numerelor naturale are probabilitatea 0, în acord cu această metodă de calcul. Cum P ar trebui să fie σ-aditivă, atunci s-ar obţine $P(\Omega) = P(\mathbf{N}^*) = 0$ în loc de $P(\Omega) = 1$.

Această contradicţie arată că P nu poate fi o probabilitate pe $\Omega = \mathbf{N}^*$. Există totuşi o cale de ieşire din această situaţie paradoxală. Astfel abandonând cerinţa ca probabilitatea P să fie definită pe $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\mathbf{N}^*)$, se poate rezolva situaţia.

Astfel se consideră doar un număr finit de mulţimi A_m şi toate mulţimile derivate din acestea prin operaţiile de complementarizare, reuniune şi intersecţie. Familia de mulţimi, obţinută astfel, se va numi familia generată de mulţimile A_m fixate iniţial. În acest fel, va fi posibilă definirea funcţiei P, în maniera descrisă anterior, pe toate mulţimile acestei familii.

O mulţime care nu se află în această familie nu are probabilitate, adică probabilitatea ei nu este definită. Astfel se spune mai degrabă că probabilitatea mulţimii Z nu este definită, decât că ea este egală cu zero. Deci, în acest context, Z nu este măsurabilă.

Exemplul 2. Se reia problema distribuirii a r bile în n urne. Pentru aceasta se consideră numerele întregi $r_1, r_2, ..., r_k$ astfel încât $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$, $r_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$. Se arată că numărul de moduri în care o mulţime ce conţine n elemente poate fi partiţionată în k mulţimi astfel încât prima submulţime să conţină r_1 elemente, a doua r_2 elemente, ş.a.m.d., este

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}.$$

Se observă mai întâi că ordinea submulţimilor este esenţială în sensul că $(r_1 = 2,\ r_2 = 3)$ şi $(r_1 = 3,\ r_2 = 2)$ reprezintă partiţii diferite. Pe de altă parte, ordinea elementelor într-o submulţime nu are importanţă.

Pentru a obţine partiţia dorită trebuie mai întâi selectate r_1 dintre cele n elemente (ceea ce se poate face în $C_n^{r_1}$ moduri), apoi selectate r_2 elemente din cele $n - r_1$ rămase (ceea ce se poate face în $C_{n-r_1}^{r_2}$ moduri), ş.a.m.d.

După ce se formează a $(k-1)$ - a submulţime rămân $n - r_1 - r_2 - ... - r_{k-1} = r_k$ elemente, care formează ultimul grup. În concluzie, numărul de partiţii posibile este

$$C_n^r \cdot C_{n-r_1}^{r_2} ... C_{n-r_1-r_2-...-r_{k-1}}^{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}.$$

Revenind la problema distribuirii a r bile în n urne, se observă de la început că, dacă se face distincţie între bile, numărul total de distribuiri este n^r (spaţiul evenimentelor elementare conţine n^r elemente). Dacă se admite că ele sunt egal probabile, atunci fiecare din ele va avea probabilitatea n^{-r}.

Dacă se presupune că nu contează care anume bile sunt distribuite într-o urnă oarecare, ci numai numărul acestor bile, atunci ţinând seama de cele precedente, probabilitatea ca în prima urnă să fie r_1 bile, în a doua r_2 bile, ş.a.m.d., este dată de

$$p_1 = \frac{r!}{r_1!r_2!...r_n!} n^{-r}. \tag{1.1}$$

Acest mod de a atribui o probabilitate fiecărei secvenţe $(r_1, r_2, ..., r_n)$, $r_1 + r_2 + ... + r_n = r$, este cunoscut sub denumirea de *statistica Maxwell-Boltzmann.*

Se presupune acum că nu se face distincţie între bile, ceea ce atrage după sine modificarea spaţiului evenimentelor elementare. Pentru a stabili numărul de elemente ale spaţiului evenimentelor elementare se reprezintă urnele prin spaţiile dintre $n + 1$ bare, iar bilele prin steluţe. Astfel, de exemplu, simbolul $| * * | * | \, || * * * |$ va însemna că (pentru $n = 5$, $r = 6$) în prima urnă sunt 2 bile, în a doua una, a treia şi a patra urnă sunt goale, iar a cincea urnă conţine 3 bile.

Un astfel de simbol începe şi se sfârşeşte cu câte o bară, dar celelalte $n - 1$ bare şi r steluţe apar într-o ordine arbitrară. Deci pentru a scrie un astfel de simbol, trebuie alese r poziţii, dintre cele $n + r - 1$, pe care se pun steluţe. Este deci clar că numărul total de simboluri, deci de distribuiri, este C_{n+r-1}^r.

Dacă se presupune că toate distribuirile sunt egal probabile, atunci fiecare va avea probabilitatea $1/C_{n+r-1}^r$ şi se obţine aşa numita *statistică Bose-Einstein.*

Condiţia ca în nici una din urne să nu fie mai mult de o bilă, se traduce prin condiţia de a nu avea două steluţe una după alta. Cele $n + 1$ bare lasă între ele n spaţii, care trebuie ocupate de r steluţe şi aceasta se poate face în C_n^r moduri.

Dacă se presupune că toate distribuirile sunt egal probabile, cu excepţia acelora în care apare vreo urnă cu două sau mai multe bile şi care se vor considera de probabilitate nulă, atunci probabilitatea unei distribuiri, în care nici o urnă nu conţine mai mult de o bilă, va fi $1/C_n^r$. Aceasta este aşa numita *statistică Fermi-Dirac.*

În concluzie, în experimentul care constă în distribuirea a r bile (fără a face distincţie între bile) în n urne, spaţiul evenimentelor elementare este mulţimea secvenţelor $(r_1, r_2, ..., r_n)$ cu proprietatea că

$$r_1 + r_2 + ... + r_n = r, \quad (r_i \in \mathbf{N}).$$

Fiecărei astfel de secvenţe i se poate ataşa una din probabilităţile

$$P_1(\{r_1, r_2, ..., r_n\}) = \frac{r!}{r_1!r_2!...r_n!}n^{-r}$$

în cazul statisticii Maxwell-Boltzmann,

$$P_2(\{r_1, r_2, ..., r_n\}) = 1/C^r_{n+r-1}$$

în cazul statisticii Bose-Einstein,

$$P_3(\{r_1, r_2, ..., r_n\}) = \begin{cases} 1/C^r_n, & \text{dacă} \quad r_i \leq 1, \ i = \overline{1,n} \\ 0, & \text{dacă există cel puţin un } r_i > 1 \end{cases}$$

în cazul statisticii Fermi-Dirac.

Cele trei statistici apar în fizică prin considerarea unui sistem de r particule, fiecare din ele putându-se găsi într-o anumită regiune (sau celulă) a spaţiului care a fost împărţit într-un număr n de astfel de regiuni. În acest fel, starea întregului sistem este descrisă de distribuirea la întâmplare a r particule în n celule. Alegerea uneia dintre cele trei statistici se face în funcţie de natura particulelor.

Exemplul 3. Acest exemplu este denumit "problema zilei de naştere" şi constă în determinarea probabilităţii ca dintre r persoane cel puţin două să aibă ziua de naştere în aceeaşi zi a anului, presupus a fi format din n zile. Se observă că această problemă se încadrează în problema generală a distribuirii a r bile în n urne, mai precis este vorba de statistica Maxwell-Boltzmann.

Pentru rezolvarea problemei se calculează probabilitatea evenimentului contrar şi anume probabilitatea ca în fiecare urnă să se afle cel mult o bilă. Prin urmare vor exista r urne ce conţin o singură bilă, iar celelalte $n-r$ nu vor conţine nici o bilă. Dacă se fixează cele r urne în care se găseşte câte o bilă şi se ţine seama de formula (1.1), rezultă că probabilitatea unui astfel de eveniment este $r!n^{-r}$; cum cele r urne pot fi alese în C^r_n moduri, rezultă că probabilitatea ca în nici o urnă să nu fie mai mult de o bilă este

$$C^r_n r!n^{-r} = n(n-1)...(n-r+1)n^{-r}.$$

În concluzie, probabilitatea ca cel puţin două persoane să aibă ziua de naştere în aceeaşi zi este

$$p = 1 - n(n-1)...(n-r+1)n^{-r}.$$

Dacă $n = 365$, pentru $r \geq 1/2$ se constată că $p > 1/2$. Acest rezultat este interesant, pentru că la o examinare superficială a problemei era de aşteptat ca $p > 1/2$ numai dacă $r > 182$.

Exemplul 4. Exemplul următor este cunoscut sub denumirea de "problema întâlnirii" şi se enunţă astfel: două persoane hotărăsc să se întâlnească în intervalul de timp $[0, T]$, momentele sosirilor lor în acest interval fiind aleatoare. Prima persoană care soseşte aşteaptă un timp t, fără a depăşi intervalul $[0, T]$; deci dacă soseşte la momentul $t_0 \in [0, T]$, ea aşteaptă un timp egal cu $\min\{t, T - t_0\}$. Se cere probabilitatea ca cele două persoane să se întâlnească.

Înregistrând momentul sosirii lui A pe axa Ox, iar momentul sosirii lui B pe axa Oy, rezultă că spaţiul evenimentelor elementare poate fi identificat cu $\Omega = \{(x, y) | \, 0 \leq x \leq T, \ 0 \leq y \leq T\}$. Pentru ca A şi B să se întâlnească este necesar şi suficient ca $|x - y| \leq t$. Atunci evenimentul, a cărui probabilitate este căutată, este dat de domeniul haşurat din fig. 1.1.

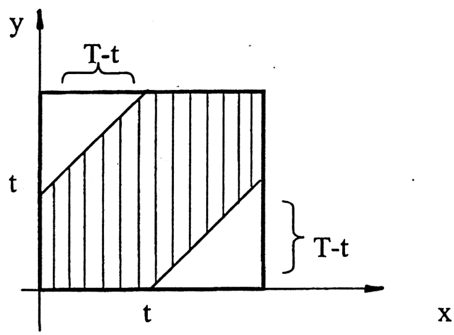


Fig. 1.1

Probabilitatea căutată va fi raportul dintre aria acestui domeniu haşurat şi aria lui Ω [5], adică

$$p = 1 - \frac{(T - t)^2}{T^2}.$$

Problema întâlnirii poate fi utilizată, ca o primă aproximaţie în rezolvarea unor probleme de tipul următor: un muncitor deserveşte două utilaje; fiecare din cele două utilaje necesită supraveghere la un moment de timp aleator. Se poate întâmpla ca, în timp ce muncitorul se află la unul din utilaje, prezenţa sa să fie necesară la celălalt. Care este timpul mediu de neutilizare al unuia din utilaje ?

[5] Se presupune că cele două persoane sosesc independent una de cealaltă şi pentru fiecare din ele probabilitatea de a sosi într-un anumit interval de timp este proporţională cu lungimea acestui interval.

Exempul 5. Două semnale de lungime $\tau < \frac{1}{2}$ sunt transmise într-un interval de timp [0,1], transmiterea lor începând la orice moment al intervalului $[0, 1-\tau]$ (probabilităţile ca acest moment să se găsească în intervale de aceeaşi lungime sunt egale). Dacă semnalele se suprapun chiar şi parţial, atunci ambele sunt distorsionate şi nu pot fi recepţionate. Să se determine probabilitatea ca semnalele să fie recepţionate fără distorsiuni.

Această problemă este o aplicaţie a exemplului precedent (problema întâlnirii). Utilizând rezultatele de mai sus, se găseşte probabilitatea căutată

$$p = \frac{(1-2\tau)^2}{(1-\tau)^2}.$$

Exemplul 6. Imaginea punctuală a unui obiect pe ecranul circular al unui radar (fig.1.2) are o poziţie aleatoare în disc, domeniile de aceeaşi arie fiind egal probabile. Se consideră evenimentul A ce constă în faptul că distanţa ρ_M de la imaginea M la centrul ecranului este mai mică decât $\frac{r}{2}$. Se cere $P(A)$.

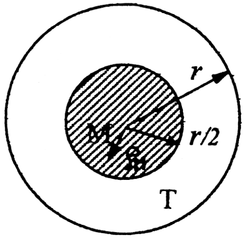


Fig. 1.2

Dacă T este mulţimea punctelor ecranului, adică spaţiul evenimentelor elementare, atunci $A = \left\{M \in T | \, \rho_M < \frac{r}{2}\right\}$. Deci

$$P(A) = \frac{\text{aria } A}{\text{aria } T} = \frac{\pi \frac{r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

Exemplul 7 (*Paradoxul lui Bertrand*). Într-un cerc de rază R se alege o coardă la întâmplare. Care este probabilitatea ca lungimea acestei coarde să fie mai mare decât latura triunghiului echilateral înscris în cerc ?

Vom da trei soluţii la această problemă.

Soluţia 1. Din motive de simetrie, se poate fixa o direcţie cu care trebuie să fie paralelă coarda aleasă. Ducem un diametru perpendicular pe această direcţie (vezi fig. 1.3 a)). Dacă coarda intersectează acest diametru în intervalul cuprins între 1/4 şi 3/4 din lungimea sa, atunci coarda este mai mare decât latura triunghiului echilateral înscris. Deci probabilitatea căutată este 1/2.

Soluţia 2. Din motive de simetrie putem fixa unul din capetele coardei dinainte, urmând să alegem la întâmplare pe cel de al doilea. Tangenta la cerc în punctul ales A şi laturile triunghiului echilateral cu un vârf în A, înscris în cerc, formează unghiuri de $\frac{\pi}{3}$.

Cel de al doilea capăt al coardei trebuie să fie pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ şi rezultă că probabilitatea căutată este 1/3 (vezi fig. 1.3 b)).

Soluţia 3. Pentru a defini poziţia coardei este suficient să specificăm mijlocul ei. Pentru a satisface condiţiile problemei trebuie ca mijlocul să fie în discul cu centrul în O şi de rază $\frac{R}{2}$ (vezi fig. 1.3 c)). Prin urmare, probabilitatea căutată este $\frac{1}{4}$.

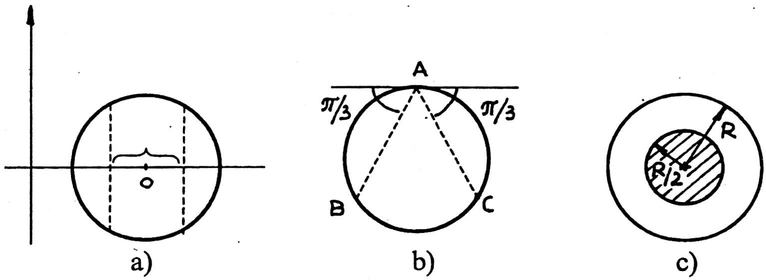


Fig. 1.3.

Acest "paradox" provine din faptul că enunţul problemei nu a permis stabilirea categorică a spaţiului evenimentelor elementare. Propunem cititorului să precizeze spaţiul evenimentelor elementare la fiecare din cele 3 soluţii.

1.3 Independenţă şi condiţionare

Conceptul de independenţă este conceptul de bază din teoria clasică a probabilităţilor. El este specific teoriei probabilităţilor şi este unul din conceptele care au permis delimitarea ei ca disciplină matematică independentă. Însuşi Kolmogorov afirma: "În conceptul de independenţă se percepe cel puţin primul germene al adevăratei naturi a problemelor din teoria probabilităţilor".

Evenimentele A_1 şi A_2 ale câmpului de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numesc *P - independente*[6] (*stocastic independente*) dacă

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \tag{1.2}$$

Trei evenimente $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{K}$ se numesc *P - independente* dacă

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1)P(A_2)\\
&P(A_2 \bigcap A_3) = P(A_2)P(A_3)\\
&P(A_1 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_3)\\
&P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).
\end{aligned}$$

În general, dacă $\{A_i | \ i \in I\}$ este o familie oarecare de evenimente din $\mathcal{K}$, atunci evenimentele A_i, $i \in I$, se numesc *P - independente* (*în totalitatea lor*), dacă pentru orice mulţime finită de indici $J \subset I$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Dacă evenimentele familiei $\{A_j | \ i \in I\}$ sunt *P- independente* (*două câte două*), adică

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j,$$

aceasta nu atrage după sine faptul că evenimentele familiei sunt P-independente (vezi exemplul 4). De aceea, nu trebuie confundată independenţa totală a evenimentelor cu independenţa evenimentelor două câte două (în perechi).

Două familii $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{K}$ se numesc P-independente dacă relaţia (1.2) are loc pentru orice $A_1 \in \mathcal{L}_1$ şi orice $A_2 \in \mathcal{L}_2$.

Fie două familii P-independente $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ cu proprietatea: dacă $A, B \in \mathcal{L}_i$, atunci $A \cap B \in \mathcal{L}_i$, $i = \overline{1,2}$. Atunci σ-algebrele $\sigma(\mathcal{L}_1)$ şi $\sigma(\mathcal{L}_2)$ sunt de asemenea P-independente.

Se observă că noţiunea de independenţă este relativă la probabilitatea considerată în contrast, de exemplu, cu noţiunea de evenimente incompatibile, care nu depinde de nici o probabilitate.

O discuţie mai elaborată, legată de noţiunea de independenţă, va fi făcută ulterior, în legătură cu variabilele aleatoare.

Fie $A, B \in \mathcal{K}$, $P(B) \neq 0$. Se numeşte *probabilitatea lui A condiţionată de B*, notată $P_B(A)$ sau $P(A| \ B)$, valoarea $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Acest raport semnifică

[6]Litera P poate lipsi, dacă rezultă din context.

probabilitatea lui A, ştiind că evenimentul B s-a realizat. Spre exemplu, la experimentul care constă în aruncarea a două zaruri, unde probabilitatea fiecărui eveniment elementar este $\frac{1}{36}$, se consideră următoarele evenimente: evenimentul B care constă în faptul că pe primul zar a apărut un punct şi evenimentul A care constă în faptul că suma punctelor apărute pe cele două zaruri este 3. Atunci

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{şi} \quad P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Presupunând că după aruncarea primului zar, evenimentul B s-a realizat, probabilitatea ca după aruncarea celui de al doilea zar, suma punctelor să fie 3 este

$$P(A|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6},$$

ceea ce poate fi verificat şi printr-un calcul direct.

Dacă evenimentele A şi B sunt P-independente, atunci, după cum era de aşteptat $P(A|\, B) = P(A)$.

Propoziţia 1.1. *Au loc următoarele egalităţi:*

a) $P(A|\, B) = P(A \cap B|\, B)$, $\forall A \in \mathcal{K}$ *dacă* $P(B) \neq 0$;

b) $P(C|\, A \cap B)\, P(B|\, A) = P(C \cap B|\, A)$ *dacă* $P(A \cap B) \neq 0$;

c) (formula de înmulţire) $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|\, A_1) \ldots P(A_n|\, A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$ *dacă* $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Teorema 1.2 *(formula probabilităţii totale). Fie*

$$\bigcup_{ui \in I} A_i = \Omega, \quad A_i \in \mathcal{K}, \quad A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in I,$$

unde I *este cel mult numărabilă, iar* $A \in \mathcal{K}$ *arbitrar. Atunci are loc relaţia*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(A|\, A_i)$$

dacă $P(A_i) \neq 0, \quad \forall i \in I$.

Teorema 1.3 *(formula lui Bayes). În ipotezele teoremei 1.2 are loc relaţia*

$$P(A_i|\, A) = \frac{P(A_i) P(A|\, A_i)}{\sum_{i \in I} P(A_i) P(A|\, A_i)}, \; i \in I,$$

dacă $P(A) \neq 0$.

Celebra formulă a lui Bayes, publicată în anul 1763, permite calculul "probabilităţii inverse" sau "probabilităţii cauzei" A_i, pe baza "efectului" observat A. Probabilitatea $P(A_i)$ se numeşte *probabilitatea apriori* a cauzei A_i, în timp ce $P(A_i|A)$ reprezintă *probabilitatea aposteriori* a cauzei A_i. De exemplu, dacă

A este evenimentul producerii unui cutremur şi A_i sunt diferite teorii seismologice, care explică acest fenomen, atunci formula ar putea ajuta specialiştii să aleagă între aceste teorii. De remarcat este şi faptul că Laplace[7] a utilizat această formulă pentru a calcula probabilitatea ca "soarele să răsară şi mâine". Din păcate utilitatea practică a acestei formule este limitată de lipsa noastră de informaţii despre probabilităţile apriori.

Propoziţia 1.4 (Borel-Cantelli). *Pentru orice şir* $\{A_n | n \geq 1\}$ *de evenimente au loc următoarele implicaţii*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow \limsup_n A_n = \emptyset \quad a.s.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n | \bigcap_1^{n-1} \bar{A}_m\right) = \infty \Rightarrow \sup_n A_n = \Omega \quad a.s.$$

În particular, pentru orice şir $\{A_n | n \geq 1\}$ *de evenimente independente rezultă* $\limsup_n A_n = \emptyset$ *sau* Ω *a.s., după cum seria* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ *converge sau diverge.*

Exemplul 1. Dacă evenimentele A_1 şi A_2 sunt P-independente, atunci următoarele perechi de evenimente sunt P-independente: $(A_1, \bar{A}_2)$, $(\bar{A}_1, A_2)$, $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$. În acest caz $\mathcal{L}_1 = \{A_1\}$, $\mathcal{L}_2 = \{A_2\}$, $\sigma(\mathcal{L}_1) = \{\emptyset, A_1, \bar{A}_1, \Omega\}$ şi $\sigma(\mathcal{L}_2) = \{\emptyset, A_2, \bar{A}_2, \Omega\}$.

Exemplul 2 (*Experimentul Bernoulli repetat*[8]).

Prin experiment Bernoulli se înţelege un experiment aleator cu două rezultate posibile s succes şi $\bar{s}$ eşec, având probabilităţile p, respectiv q, $p + q = 1$. Dacă experimentul este repetat de n ori, atunci spaţiul evenimentelor elementare asociat Ω_n, va fi reprezentat de cele 2^n şiruri ordonate de lungime n de componente s şi $\bar{s}$. Presupunând că repetările succesive sunt independente şi considerând A_i, evenimentele ca rezultatul repetării de rang i a experimentului să fie s, atunci

$$P(A_i) = p \quad \text{şi} \quad P(\bar{A}_i) = 1 - p = q, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dacă $\omega \in \Omega_n$ conţine de k ori, $0 \leq k \leq n$, componenta s şi de $n-k$ ori componenta $\bar{s}$, atunci $P(\omega) = p^k q^{n-k}$, ca o consecinţă a independenţei. Este important de remarcat că numărul $p^k q^{n-k}$ reprezintă probabilitatea obţinerii unui şir specific, care conţine componenta s de k ori. Astfel pentru a calcula probabilitatea obţinerii a k succese în n repetări, se observă mai întâi că există C_n^k şiruri specifice ω, cu această componenţă.

[7]Pierre Simon de Laplace (1749-1827), astronom, matematician şi fizician francez, a scris un monumental tratat de probabilităţi în anul 1815.

[8]Această schemă clasică, cunoscută sub denumirea *experimentul Bernoulli repetat*, a constituit subiectul cercetărilor făcute de Bernoulli, De Moivre, Laplace, Borel etc.

Atunci probabilitatea căutată este $C_n^k p^k q^{n-k}$. Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de *formula lui Bernoulli.*

Acest experiment poate fi realizat şi cu ajutorul unei urne, ce conţine bile albe şi negre. Probabilitatea ca la o extragere să se obţină o bilă albă este p, iar ca să se obţină o bilă neagră este $q = 1 - p$. Se fac n extrageri, după fiecare extragere punându-se bila la loc. Se presupune că extragerile sunt independente între ele. În acest caz se pune problema găsirii probabilităţii ca în cele n extrageri, să se obţină bila albă de exact k ori, $0 \leq k \leq n$. În continuare se face acelaşi raţionament ca mai sus [9].

Exemplul 3. Se consideră toate familiile, care au doi copii. Dacă se presupune că naşterile băieţilor şi ale fetelor sunt egal probabile, atunci spaţiul evenimentelor elementare poate fi notat schematic

$$\Omega = \{(bb), (bf), (fb), (ff)\},$$

unde b = băiat, f = fată. Ordinea din fiecare pereche reprezintă ordinea cronologică a naşterilor. Se alege o familie la întâmplare şi se consideră următoarele trei evenimente

A - primul copil este băiat;

B - cei doi copii au sexe diferite;

C - primul copil este fată.

Atunci rezultă

$$A \cap B = \{(bf)\}, \quad B \cap C = \{(fb)\}, \quad A \cap C = \emptyset.$$

Un calcul trivial arată că

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

dar $P(A \cap C) = 0 \neq P(A)P(C)$. Astfel perechile de evenimente (A, B) şi (B, C) sunt P-independente, dar A şi C nu sunt P-independente.

Exemplul 4 (S.N. Bernstein). Fie

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \ \mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega),$$

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}.$$

Se consideră evenimentele

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \ B = \{\omega_1, \omega_3\}, \ C = \{\omega_1, \omega_4\}.$$

[9] Această schemă clasică este cunoscută şi sub denumirea de *urna lui Bernoulli cu bila repetată.*

Deoarece

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4},$$

rezultă că evenimentele A, B, C sunt două câte două P-independente. Pe de altă parte

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Deci evenimentele A, B, C nu sunt P-independente în ansamblul lor.

Exemplul 5. Care este probabilitatea ca aruncând şase zaruri perfecte, să se obţină şase feţe diferite ? Numerotând zarurile de la 1 la 6 şi punând

A_1 - evenimentul ca zarul 1 să prezinte orice faţă;

A_2 - evenimentul ca zarul 2 să prezinte o faţă diferită de a primului zar;

A_3 - evenimentul ca zarul 3 să prezinte o faţă diferită de feţele primelor două zaruri ... etc.

rezultă

$$P(A_1) = 1,\ P(A_2|\,A_1) = \frac{5}{6},\ P(A_3|\,A_1 \cap A_2) = \frac{4}{6}\ ,\ldots,\ P(A_6|\,A_1 \cap \ldots \cap A_5) = \frac{1}{6}.$$

În final, aplicând formula de înmulţire (propoziţia 1.1, c)) se obţine

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_6) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot = \frac{6!}{6^6}.$$

Exemplul 6. Un zar perfect este aruncat de două ori succesiv. Ştiind că numărul total de puncte obţinute în ambele aruncări este 7, care este probabilitatea ca la prima aruncare să se obţină k puncte, $1 \leq k \leq 6$?

Pentru aceasta, fie A_1 evenimentul ca la prima aruncare să se obţină k puncte şi A evenimentul ca numărul total de puncte din ambele aruncări să fie 7. Atunci

$$P(A_1|\,A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{6}.$$

Datorită alegerii fericite a numărului 7, probabilitatea necondiţionată $P(A_1)$ este egală cu $P(A_1|\,A)$. Dacă, în schimb, se ia A_1 evenimentul ca în prima aruncare să se obţină k puncte, $1 \leq k \leq 5$ şi A evenimentul ca numărul total de puncte din ambele aruncări să fie 6, atunci

$$P(A_1|\,A) = \frac{1}{5} \quad \text{şi} \quad P(A_1) = \frac{1}{6}.$$

Exemplul 7 (*Schema lui Pólya*) [10]. Se consideră o urnă cu a bile albe şi b bile negre. După fiecare extragere a unei bile din urnă, bila respectivă este

[10] George Pólya a fost profesor la Universitatea Stanford şi a avut contribuţii majore în teoria probabilităţilor, numărându-se printre cei mai eminenţi analişti ai timpurilor moderne.

reintrodusă în urnă împreună cu încă c bile de aceeaşi culoare cu cea extrasă ($c > 0$). Dacă c este un întreg negativ, atunci din urnă se scot c bile, având culoarea bilei extrase iniţial. Dacă $c = 0$ schema se reduce la schema bilei repetate. În general, dacă c este negativ procesul se va opri după un număr finit de extrageri, dar dacă $c \geq 0$ procesul poate fi continuat la infinit. Ne vom restrânge la cazul $c \geq -1$, cunoscut sub denumirea de *urna lui Pólya*[11].

Notând cu a şi b, culoarea albă şi respectiv neagră, care este probabilitatea ca în schema urnei lui Pólya primele trei bile extrase să aibă culorile în acestă ordine $\{a, a, b\}$? Dar $\{a, b, a\}$? Dar $\{b, a, a\}$?

Se notează cu A_1 evenimentul ca în prima extragere să se obţină o bilă albă, cu A_2 evenimentul ca în a doua extragere să se obţină o bilă albă şi cu B_3 evenimentul ca în a treia extragere să se obţină o bilă neagră. Atunci

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(B_3 | A_1 \cap A_2) = \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+c}{a+b+c} \cdot \frac{b}{a+b+2c} \end{aligned}$$

conform formulei de înmulţire. Cu notaţii similare rezultă

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(B_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap B_2) = \\ &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+c} \cdot \frac{a+c}{a+b+2c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(B_1) \cdot P(A_2 | B_1) \cdot P(A_3 | B_1 \cap A_2) = \\ &= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{a+c}{a+b+2c}. \end{aligned}$$

Se observă că s-a obţinut acelaşi rezultat în cele trei cazuri. În concluzie, probabilitatea extragerii a două bile albe şi a unei bile negre, nu depinde de ordinea în care bilele sunt extrase.

Exemplul 8. Se consideră a) două urne cu câte 8 bile, dintre care 2 albe şi 6 negre, b) trei urne cu câte 10 bile, dintre care 6 albe şi 4 negre. Din cele 5 urne se alege una la întâmplare, iar apoi din acea urnă se alege o bilă la întâmplare. Care este probabilitatea ca bila să fie albă ?

Se notează cu A_1 (respectiv A_2) evenimentul care constă în faptul că urna aleasă este de tipul (a) (respectiv (b)). Dacă C este evenimentul a cărui probabilitate se cere, atunci, conform teoremei 1.2

$$P(C) = P(A_1)P(C | A_1) + P(A_2)P(C | A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0,46.$$

[11]Acest model a fost inventat de Pólya cu scopul de a studia o problemă apărută în medicină.

Exemplul 9. În condiţiile exemplului precedent, se presupune că, în urma efectuării experimentului, se constată că bila extrasă este albă. Care este probabilitatea ca bila să provină dintr-o urnă de tipul (a) ?

Trebuie calculat $P(A_1|\,C)$; pentru aceasta se utilizează teorema 1.3.

$$P(A_1|\,C) = \frac{P(A_1)P(C|\,A_1)}{P(C)} = \frac{(2/5)(2/8)}{0,46} = \frac{5}{23}.$$

Exemplul 10. Un radar urmăreşte independent între ele n aeronave. În timpul unei perioade de supraveghere, cea de a i - a aeronavă poate fi pierdută cu probabilitatea p_i, $i = \overline{1,n}$. Să se găsească probabilităţile următoarelor evenimente

$A = \{$ nici o aeronavă nu este pierdută$\}$;

$B = \{$ este pierdută cel puţin o aeronavă $\}$;

$C = \{$ cel mult o aeronavă este pierdută$\}$.

Dacă A_i, $(P(A_i) = p_i)$, este evenimentul ce constă în pierderea celei de a i - a aeronave, $i = \overline{1,n}$, atunci, prin ipoteză, aceste evenimente sunt independente. Obţinem

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

$$P(C) = P\left(A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n}(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{i-1} \cap A_i \cap \bar{A}_{i+1} \cap \ldots \cap A_n)\right)\right) =$$

$$= P(A) + \sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{i-1} \cap A_i \cap \bar{A}_{i+1} \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) + \sum_{i=1}^{n}(1-p_1)\ldots(1-p_{i-1})p_i(1-p_{i+1})\ldots p_n$$

(în ultima relaţie se consideră $A_0 = \emptyset$).

Exemplul 11. Un mesaj poate fi transmis printr-unul din cele n canale de comunicaţie, grupate în 4 grupe, după calităţile lor în ceea ce priveşte corectitudinea transmisiei. Aceste grupe conţin respectiv n_1, n_2, n_3, n_4 canale, $(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n)$. Probabilitatea ca un mesaj să fie transmis corect pentru un canal din grupa i este p_i, $i = \overline{1,4}$. Pentru a îmbunătăţi calitatea transmisiei, fiecare mesaj este transmis de două ori pe două canale diferite. Probabilitatea selectării unui canal este aceeaşi pentru oricare dintre ele, iar această selectare este independentă de calitatea transmisiei. Să se determine probabilitatea ca mesajul să fie transmis corect pe cel puţin un canal.

Se notează cu A evenimentul a cărui probabilitate este cerută şi cu A_i şi H_i evenimentele care constau în faptul că primul şi respectiv cel de al doilea mesaj sunt transmise prin canale din grupa i, $i = \overline{1,4}$.

$$P(A|\, A_i) = \sum_{j=1}^{4} P(A \cap H_j|\, A_i) = \sum_{j=1}^{4} P(H_j|\, A_i) P(A|\, H_j \cap A_i) =$$

$$= \frac{n_i - 1}{n-1}[1 - (1-p_i)^2] + \sum_{j \neq i} \frac{n_j}{n-1}[1 - (1-p_i)(1-p_j)],$$

iar $P(A_i) = \dfrac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,4}$. Prin urmare, din teorema 1.2 rezultă

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) P(A|\, A_i).$$

Capitolul 2

Variabile aleatoare

2.1 Noţiunea de variabilă aleatoare

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate. O funcţie $X : \Omega \to \mathbf{R}$ se numeşte *variabilă aleatoare reală*, dacă pentru orice $A \in \mathcal{B}$ rezultă $X^{-1}(A) \in \mathcal{K}$.

Această condiţie este echivalentă cu oricare din următoarele:

a) $\{\omega |\, X(\omega) \leq c\} \in \mathcal{K}$ pentru orice $c \in \mathbf{R}$;
b) $\{\omega |\, X(\omega) \geq c\} \in \mathcal{K}$ pentru orice $c \in \mathbf{R}$;
c) $\{\omega |\, a \leq X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{K}$ pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$.

Din aceste condiţii se pot obţine alte condiţii echivalente prin înlocuirea inegalităţilor nestricte cu inegalităţi stricte. Însă condiţia iniţială stă la baza definirii conceptului de variabilă aleatoare cu valori într-o mulţime arbitrară M în care s-a introdus o σ-algebră de părţi $\mathcal{M}$. Aşadar, o funcţie $X : \Omega \to M$ se numeşte *variabilă aleatoare cu valori în M* pe un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, dacă pentru orice $A \in \mathcal{M}$ rezultă $X^{-1}(A) \in \mathcal{K}$.[1] În particular, o variabilă aleatoare cu valori în spaţiul euclidian n-dimensional se numeşte *vector aleator n-dimensional.*

O funcţie $Z : \Omega \to \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ este corpul numerelor complexe) se numeşte *variabilă aleatoare complexă*, dacă funcţiile Re Z şi Im Z sunt variabile aleatoare reale.

În cele ce urmează, variabilele aleatoare vor fi notate prescurtat cu *v.a.*

O v.a. X se numeşte *discretă*[2], dacă mulţimea valorilor sale (reale sau nu) este cel mult numărabilă.

Dacă X este o v.a. discretă, atunci valorile sale x_i, $i \in I$, se numesc *puncte de concentraţie*.

---

[1] Este interesant de notat că definiţia conceptului de variabilă aleatoare nu face să intervină probabilitatea P, ci numai Ω şi $\mathcal{K}$.

[2] Cel mai simplu exemplu de v.a. discretă este cel al unei "variabile" cu o singură valoare posibilă (deci o constantă).

O v.a. reală X se numeşte *simplă* sau *etajată*, dacă mulţimea valorilor sale este finită.

O v.a. reală X se numeşte *continuă* [3] dacă $P(\{\omega | X(\omega) = x\}) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

În continuare, pentru simplificarea scrierii, se va suprima în notaţie evenimentul aleator ω, adică se va scrie $\{X < x\}$ şi $\{X \in A\}$, în loc de $\{\omega | X(\omega) < x\}$, respectiv $\{\omega | X(\omega) \in A\}$.

2.2 Funcţia de repartiţie

Un mod de a caracteriza v.a. reale este acela care utilizează noţiunea de funcţie de repartiţie. Prin *funcţie de repartiţie* a v.a. X se înţelege funcţia

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Funcţia de repartiţie are următoarele proprietăţi:

1) F_X este crescătoare ($x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$);
2) F_X este continuă la dreapta ($F_X(x+0) = F_X(x), \quad x \in \mathbf{R}$) [4];
3) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = F_X(+\infty) = 1$.

Dacă v.a. X este discretă cu valorile $x_1, x_2, \ldots$, iar $p_i = P(X = x_i)$, atunci $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$, suma făcându-se după toţi indicii i pentru care $x_i \leq x$. În acest caz F_X se numeşte *funcţie de repartiţie de tip discret*.

Funcţia care ataşează valorilor x_i probabilităţile p_i se numeşte *funcţia de frecvenţă* sau *repartiţia de probabilitate* a v.a. De obicei funcţia de frecvenţă a v.a. X este dată sub forma

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \ldots \end{pmatrix}.$$

Dacă v.a. X este simplă,

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \quad x_1 < \ldots < x_n,$$

[3] Există v.a. care nu sunt nici discrete şi nici continue.

[4] Unii autori definesc funcţia de repartiţie prin relaţia $F_X(x) = P(X < x)$. Această definiţie atrage după sine continuitatea la stânga a funcţiei de repartiţie, fără a provoca modificări esenţiale de rezultate.

atunci F_X ia valori constante pe intervalele $(x_{i-1}, x_i]$, adică este o *funcţie în scară*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + \dots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Dacă există o funcţie integrabilă $p_X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t)dt \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

atunci se spune că v.a. X admite *densitate de probabilitate* sau *densitate de repartiţie*, iar p_X este numită *densitatea de probabilitate* sau de *repartiţie* a v.a. X. În acest caz, evident v.a. este continuă.

În general, aici este vorba despre o integrală Lebesgue [5]. Întrucât funcţia p_X este pozitivă, convergenţa (în sens Riemann) a integralei $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(t)dt$ atrage după sine integrabilitatea Lebesgue pe $\mathbf{R}$. De obicei se întâlneşte cazul în care p_X este integrabilă Riemann.

Întrucât $F_X(+\infty) = 1$, rezultă că densitatea de probabilitate trebuie să îndeplinească condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(t)dt = 1$.

De asemenea, dacă p_X este continuă, atunci $F'_X(x) = p_X(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Dacă F_X este funcţia de repartiţie a v.a. X, atunci pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ au loc relaţiile

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a), \\ P(a < X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a), \\ P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a-0), \\ P(a \leq X < b) &= F_X(b-0) - F_X(a-0), \\ P(X = a) &= F_X(a) - F_X(a-0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dacă F_X este continuă, atunci în membrul stâng al relaţiilor (2.1) nu are importanţă dacă inegalităţile sunt stricte sau nu. De asemenea, din ultima relaţie (2.1) rezultă că dacă F_X este continuă atunci v.a. X este continuă.

[5] Henri Lebesgue (1875-1941), cofondator cu E.Borel al şcolii moderne de teoria măsurii şi integrării.

Evident, dacă X admite o densitate de probabilitate p_X, atunci F_X este continuă şi în acest caz

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(t)dt.$$

Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator definit pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Funcţia $F_X : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ dată prin relaţia

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)^6$$

se numeşte *funcţia de repartiţie n-dimensională* a vectorului aleator n-dimensional $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Funcţia de repartiţie n-dimensională îndeplineşte condiţiile:

1') F_X este crescătoare în fiecare variabilă, adică $x_i < x_i'$ implică

$$F_X(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \le F_X(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n);$$

2') F_X este continuă la dreapta în fiecare variabilă, adică

$$F_X(x_1, \ldots, x_{i+0}, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad \forall 1 \le i \le n;$$

3') $F_X(-\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = 0$ şi $F_X(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1$.

Dacă există o funcţie $p_X : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ integrabilă, cu proprietatea

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_X(t_1, t_2, \ldots, t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ se spune că p_X este *densitatea de probabilitate (de repartiţie)* a vectorului aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Evident

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(t_1, t_2, \ldots t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n = 1. \tag{2.2}$$

De asemenea, pentru orice $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$, $a_i, b_i \in \overline{\mathbf{R}}$, avem

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \ldots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_a}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} p_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

În general, dacă $A \in \mathcal{B}^n$ (A este o mulţime boreliană din $\mathbf{R}^n$), atunci

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in A) = \int \cdots \int_A p_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n. \tag{2.3}$$

[6] Pentru simplificarea scrierii, virgula va înlocui semnul $\cap$. Astfel $\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\}$ va însemna $\{X_1 \le x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \le x_n\}$. Acest mod de scriere se va utiliza şi în continuare.

Dacă $p_X(x_1, \ldots, x_n)$ este continuă atunci

$$p_X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}. \tag{2.4}$$

Dacă $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ este un vector aleator extras din $X = (X_1, \ldots, X_n)$, atunci funcţia de repartiţie a vectorului $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ se obţine din $F_X(x_1, \ldots, x_n)$ făcând limita către $+\infty$ după toate variabilele x_i, $i \neq i_1, \ldots, i_k$. Existenţa unei densităţi de probabilitate $p_X(x_1, \ldots, x_n)$ pentru vectorul aleator $(X_1, \ldots, X_n)$ implică existenţa densităţii pentru $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ care este dată de

$$p_{i_1 \ldots i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{\infty}^{\infty} p_X(x_1, \ldots, x_n) dx_i \tag{2.5}$$

integrala efectuându-se în raport cu toate variabilele x_i, $i \neq i_1, \ldots, i_k$.

V.a. $X_1, \ldots, X_n$ se numesc *P-independente* dacă

$$P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \ldots P(X_n \leq x_n)$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$. Prin urmare dacă F_X este funcţia de repartiţie (şi p_X densitatea de probabilitate) a vectorului aleator $X = (X_1, \ldots, X_n)$, iar F_{X_i} este funcţia de repartiţie (şi p_{X_i} densitatea de probabilitate) a v.a. X_i, $i = \overline{1, n}$, atunci în cazul independenţei au loc relaţiile

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) \\ p_X(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Reciproc, fiecare din relaţiile (2.6) atrage după sine independenţa v.a. $X_1, \ldots, X_n$.

Independenţa a două v.a. X_1 şi X_2 este echivalentă cu independenţa oricărei perechi de familii de evenimente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \{X_1^{-1}(-\infty, x_1); x_1 \in \mathbf{R}\}, & \mathcal{L}_2 &= \{X_2^{-1}(-\infty, x_2); x_2 \in \mathbf{R}\}; \\
\mathcal{L}_1 &= \{X_1^{-1}(x_1, \infty); x_1 \in \mathbf{R}\}, & \mathcal{L}_2 &= \{X_2^{-1}(x_2, \infty); x_2 \in \mathbf{R}\}; \\
\mathcal{L}_1 &= \{X_1^{-1}(-\infty, x_1]; x_1 \in \mathbf{R}\}, & \mathcal{L}_2 &= \{X_2^{-1}(-\infty, x_2]; x_2 \in \mathbf{R}\}; \\
\mathcal{L}_1 &= \{X_1^{-1}[x_1, \infty); x_1 \in \mathbf{R}\}, & \mathcal{L}_2 &= \{X_2^{-1}[x_2, \infty); x_2 \in \mathbf{R}\}.
\end{aligned}$$

Teoria clasică a probabilităţilor culminează cu un studiu extensiv al şirurilor (infinite) de v.a. (reale) independente (vezi cap. 4). Un astfel de şir se caracterizează prin aceea că orice submulţime finită de elemente ale sale este constituită din v.a. independente.

Exemplul 1. Se consideră v.a.

$$X : \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Funcţia sa de repartiţie este

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 5 \\ \frac{1}{3}, & 5 \leq x < 10 \\ 1, & x \geq 10 \end{cases}.$$

Exemplul 2. Se aruncă un zar. Fiecărui eveniment elementar, ce constă în apariţia unei feţe, i se asociază unul din numerele 1,2,...,6, numere scrise pe feţele zarului. V.a. X poate lua şase valori $x_i = i$, $i = \overline{1,6}$, cu aceeaşi probabilitate $P(X = x_i) = \frac{1}{6}$, $i = \overline{1,6}$. Să se reprezinte grafic funcţia $P(X < x)$.

Deoarece evenimentul ca v.a. X să ia valori mai mici ca 1 este imposibil, rezultă $P(X < 1) = 0$.

Dacă x este un număr satisfăcând inegalităţile $1 \leq x < 2$ atunci

$$P(X < x) = P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

Dacă $2 \leq x < 3$, atunci

$$P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{3}.$$

....

Analog, pentru $5 \leq x < 6$ rezultă

$$P(X < x) = \sum_{i=1}^{5} P(X = i) = \frac{5}{6},$$

iar pentru $x \geq 6$, rezultă

$$P(X < x) = P(X \leq 6) = \sum_{i=1}^{6} P(X = i) = 1.$$

Graficul este o funcţie în scară (vezi fig. 2.1).

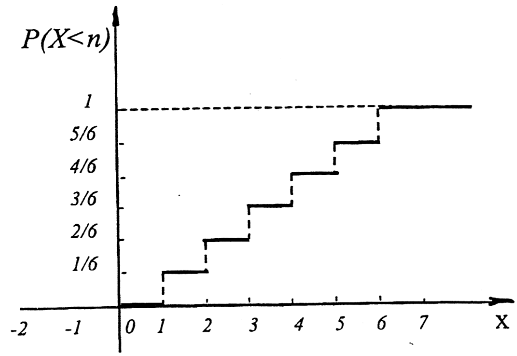


Fig. 2.1.

Exemplul 3. Se aruncă două zaruri. Să se calculeze funcţia de repartiţie a sumei punctelor obţinute. Suma punctelor obţinute prin aruncarea a două zaruri determină următoarea v.a.

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Funcţia de repartiţie este

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36}, & 3 \leq x < 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{35}{36} & 11 \leq x < 12 \\ 1, & x \geq 12. \end{cases}$$

Exemplul 4. Se consideră funcţia $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$p(x) = \begin{cases} a\, e^{-x/5}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

unde $a \in \mathbf{R}$. Se cer valorile parametrului a pentru care p este o densitate de probabilitate. Întrucât p este pozitivă şi integrabilă pentru orice $a \in \mathbf{R}$, singura condiţie care trebuie impusă este $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, care conduce la $a\int_{0}^{\infty} e^{-x/5}dx = 1$, de unde se deduce $a = \frac{1}{5}$.

Exemplul 5. Se presupune că durata unei convorbiri telefonice la distanţă mare este o v.a. X cu funcţia de repartiţie

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x/3} - \frac{1}{2}e^{-[x/3]}, & x \geq 0 \end{cases}$$

unde prin $[y]$ se înţelege cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu y (partea întreagă a lui y). Să se calculeze $P(X > 6)$ şi $P(X = 3)$.

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-[2]} \simeq 0,135,$$

$$P(X = 3) = F_X(3) - F_X(3 - 0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) \simeq 0,316.$$

Exemplul 6. Momentul sosirii unui semnal este o v.a. T cu densitatea de probabilitate p. Până la un moment $t_0 < \tau$ semnalul nu a venit. Să se determine probabilitatea ca el să sosească în intervalul de timp $(t_0, \tau]$ (vezi fig. 2.2).

Se consideră evenimentul $A(t)$ ce constă în faptul că semnalul soseşte în intervalul $(0, t]$. Atunci

$$P(A(t)) = P(T \leq t) = \int_0^t p(u)du.$$

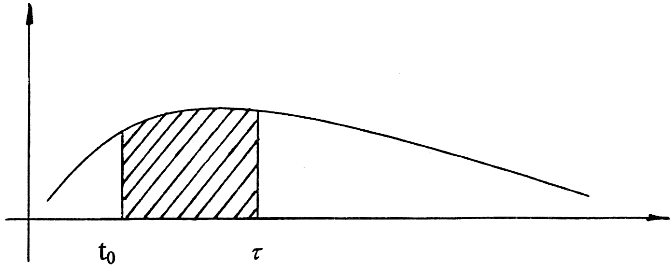


Fig.2.2.

Trebuie calculată probabilitatea $q = P(A(\tau)|\,\overline{A(t_0)})$. Deoarece

$$\begin{aligned} P(A(\tau)) &= P(A(\tau)) \cap A(t_0)) + P(A(\tau)) \cap \overline{A(t_0)}) = \\ &= P(A(t_0)) + P(\overline{A(t_0)}) \cdot P(A(\tau)|\,\overline{A(t_0)}) \end{aligned}$$

rezultă că

$$\int_0^{\tau} p(t)dt = \int_0^{t_0} p(t)dt + \left[1 - \int_0^{t_0} p(t)dt\right] q.$$

Prin urmare

$$q = \frac{\int_0^{\tau} p(t)dt}{1 - \int_0^{t} p(t)dt}.$$

Exemplul 7. Două mesaje sunt transmise, independent unul de altul, putând fi distorsionate sau nu. Probabilităţile de distorsiune pentru cele două mesaje sunt p_1 şi respectiv p_2. Se consideră v.a. X şi Y definite astfel

$$X = \begin{cases} 1, & \text{dacă primul mesaj este distorsionat} \\ 0, & \text{dacă primul mesaj nu este distorsionat} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{dacă al doilea mesaj este distorsionat} \\ 0, & \text{dacă al doilea mesaj nu este distorsionat.} \end{cases}$$

Să se determine funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y).

Dacă se notează cu C-mesaj transmis corect şi cu D-mesaj transmis distorsionat, atunci spaţiul evenimentelor elementare este reprezentat în tabelul 2.1.

	C	D
C	(C,C)	(C, D)
D	(D,C)	(D,D)

Tabelul 2.1.

	C	D
C	q_1q_2	q_1p_2
D	p_1q_2	p_1p_2

Tabelul 2.2.

De exemplu, evenimentul (D, C) înseamnă că primul mesaj a fost distorsionat, iar cel de al doilea corect. Dacă se notează $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, atunci probabilităţile acestor evenimente sunt date în tabelul 2.2. şi de aici se deduce repartiţia (funcţia de frecvenţă) vectorului aleator (X, Y) (tabelul 2.3.). Funcţia de repartiţie este dată în tabelul 2.4.

X \ Y	0	1
0	q_1q_2	q_1p_2
1	p_1q_2	p_1p_2

Tabelul 2.3.

X \ Y	$Y < 0$	$0 \leq Y < 1$	$Y \geq 1$
$X < 0$	0	0	0
$0 \leq X < 1$	0	$q_1 q_2$	q_1
$X \geq 1$	0	q_2	1

Tabelul 2.4.

Exemplul 8. Se reia exemplul 6, §1.2, pentru $r = 1$. Pentru un punct A de pe ecran se notează cu R şi ϕ coordonatele sale polare într-un sistem de axe (vezi fig.2.3). Evident, R şi ϕ sunt v.a. Să se determine densitatea de probabilitate $p(\rho, \varphi)$ a vectorului aleator (R, ϕ) şi să se precizeze dacă R şi ϕ sunt v.a. independente.

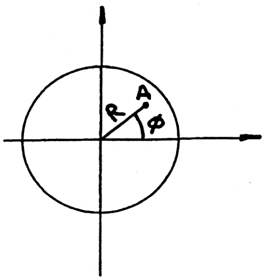


Fig. 2.3.

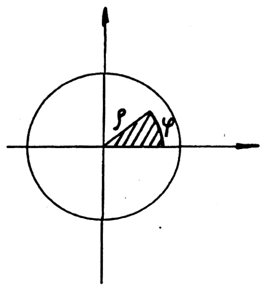


Fig. 2.4.

Se observă că $p(\rho, \varphi) = 0$ pentru $\rho > 1$ sau/şi $\varphi \notin [0, 2\pi)$. Pentru $0 < \rho \leq 1$ şi $0 \leq \varphi < 2\pi$ rezultă

$$P(R \leq \rho,\ \phi \leq \varphi) = P(A \in D) = \frac{\text{aria } D}{\pi} = \frac{\rho^2 \varphi}{2\pi},$$

unde D este domeniul haşurat din fig. 2.4. Conform relaţiei (2.4) se obţine

$$p(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\pi}, & 0 < \rho \leq 1;\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Densităţile de probabilitate ale v.a. R şi ϕ sunt respectiv (vezi (2.5))

$$p_R(\rho) = \int_0^{2\pi} p(\rho, \varphi) d\varphi = 2\rho, \quad 0 < \rho \leq 1,$$

$$p_\phi(\varphi) = \int_0^1 p(\rho, \varphi) d\rho = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Întrucât $p(\rho,\varphi) = p_R(\rho)\cdot p_\phi(\varphi)$, rezultă că v.a. R şi ϕ sunt independente conform relaţiei (2.6).

Exemplul 9. (*Acul lui Buffon*). Pe o suprafaţă plană orizontală sunt trasate drepte paralele echidistante la distanţa $2a$. Un ac de lungime $2l$ ($l < a$) este aruncat pe această suprafaţă. Fie ϕ v.a. care desemnează unghiul (cuprins între 0 şi π) făcut de ac cu direcţia paralelor (vezi fig.2.5), iar X v.a. care desemnează distanţa de la mijlocul acului la cea mai apropiată paralelă.

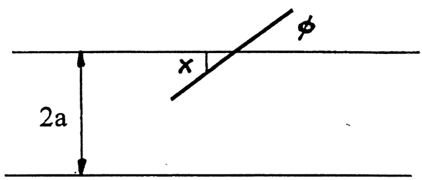


Fig. 2.5.

Se fac următoarele ipoteze:

- densitatea de probabilitate a v.a. X este

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & 0 \le x \le a \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

- densitatea de probabilitate a v.a. ϕ este

$$p_\phi(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & 0 \le \varphi \le \pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

- v.a. X şi ϕ sunt independente.

Se cere probabilitatea ca acul să întâlnească una dintre paralele.

Conform relaţiei (2.6) densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X,ϕ) este

$$p(x,\varphi) = p_X(x)p_\phi(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{a\pi}, & 0 \le x \le a,\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca acul să întâlnească una dintre drepte este $X \le l\sin\phi$. Prin urmare, dacă

$$A = \{(x,\varphi)\,|\, 0 \le x \le a,\ 0 \le \varphi \le \pi,\quad x \le l\sin\varphi\}$$

(vezi fig. 2.6), atunci conform relaţiei (2.3) probabilitatea căutată este

$$\begin{aligned} P((X,\phi)\in A) &= \iint_A p(x,\varphi)dxd\varphi = \frac{1}{a\pi}\iint_A dxd\varphi = \\ &= \frac{\text{aria } A}{a\pi} = \frac{\int_0^\pi l\sin\varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}. \end{aligned}$$

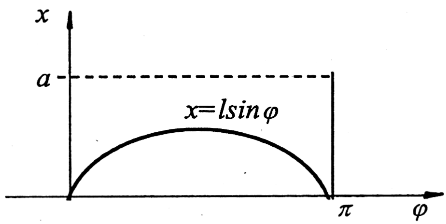


Fig. 2.6.

2.3 Funcţii de variabile aleatoare

De remarcat este faptul că toate operaţiile aritmetice şi trecerile la limită (pentru şiruri) efectuate pe v.a., conduc la alte v.a. Mai precis, dacă X şi Y sunt v.a. pe un acelaşi câmp de probabilitate, atunci $X+Y$, $X\cdot Y$, $\frac{X}{Y}$ $(Y\neq 0)$ şi deci, în particular, $X+c$ şi cX, unde c este un număr real arbitrar, sunt v.a.

Mai general, fie $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ o funcţie astfel încât pentru orice $a\in\mathbf{R}$ mulţimea

$$\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid f(x_1,x_2,...,x_n)<a\}$$

este o mulţime boreliană din $\mathbf{R}^n$ (adică o mulţime din $\mathcal{B}^n$) (de exemplu, aceasta se întâmplă dacă f este continuă), iar $X_1,X_2,...,X_n$ v.a. reale. Atunci funcţia $Y=f(X_1,X_2,...,X_n)$ care în punctul ω ia valoarea

$$Y(\omega)=f(X_1(\omega),X_2(\omega),...,X_n(\omega))$$

este de asemenea o v.a. Dacă vectorul aleator $(X_1,X_2,...,X_n)$ admite densitatea de probabilitate p, iar F_Y este funcţia de repartiţie a v.a. Y, atunci are loc următoarea formulă

$$F_Y(x)=\int_B p(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n \qquad (2.7)$$

unde

$$B = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \mid f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq x\}.$$

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata nenulă cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile de puncte, dar care sunt în număr finit în orice interval mărginit. Se presupune că ecuaţia $f(x) = y$, $y \in \mathbf{R}$, admite un număr finit de soluţii în orice interval mărginit. Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei va fi notată $\{x_1, x_2, ...\}$.

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate p_X, precum şi v.a. $Y = f(X)$. În condiţiile de mai sus, densitatea de probabilitate ρ_Y a v.a. Y este

$$\rho_Y = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} p_X(x_k)/|f'(x_k)|. \tag{2.8}$$

Dacă $\{X_i | i \in I\}$ este o familie numărabilă de v.a., atunci aplicaţiile $\sup\limits_{i \in I} X_i$ şi $\inf\limits_{i \in I} X_i$ sunt v.a. De aceea se pot defini pentru orice şir $\{X_n | n \geq 1\}$ de v.a., noile v.a.

$$\lim_{n \to \infty} \sup X_n = \inf_n \sup_{m \geq n} X_m$$

$$\lim_{n \to \infty} \inf X_n = \sup_n \inf_{m \geq n} X_m.$$

Mulţimea de convergenţă a şirului $\{X_n | n \geq 1\}$ este definită ca fiind mulţimea măsurabilă

$$\{\lim_{n \to \infty} \sup X_n = \lim_{n \to \infty} \inf X_n\}.$$

În particular, dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \sup X_n = \lim\limits_{n \to \infty} \inf X_n$ pe Ω, se spune că şirul $\{X_n | n \geq 1\}$ *converge peste tot* şi se notează cu $\lim\limits_{n \to \infty} X_n$ expresia comună precedentă. Astfel limita oricărui şir convergent de v.a. este încă o v.a.

Dacă $\{X_n | n \geq 1\}$ este un şir crescător (respectiv descrescător) de v.a. convergent punctual la v.a. X, atunci se adoptă notaţia

$$X_n \uparrow X \quad \text{(respectiv } X_n \downarrow X\text{)}, \; n \to \infty.$$

Exemplul 1. Fie $Y = X_1 + X_2$ o v.a. Utilizând formula (2.7) se obţine

$$F_Y(x) = \int\int_{\{x_1 + x_2 \leq x\}} p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2,$$

integrala dublă efectuându-se pe domeniul haşurat (vezi fig. 2.7).

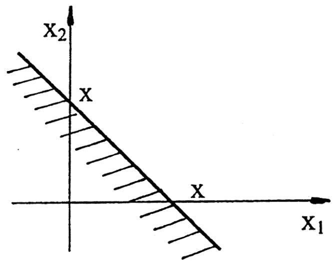


Fig. 2.7

Dacă se face schimbarea de variabile $u = x_1$, $v = x_1 + x_2$, atunci domeniul de integrare devine $\{(u,v)|u \in \mathbf{R},\ v \leq x\}$; cum jacobianul acestei transformări este 1 se obţine

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} dv \int_{-\infty}^{\infty} p(u, v-u)du. \tag{2.9}$$

Din relaţia (2.9), prin derivare în raport cu x, se găseşte densitatea de probabilitate ρ_Y a v.a. Y

$$\rho_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, x-u)du. \tag{2.10}$$

Dacă v.a. X_1 şi X_2 sunt pozitive, deci $p(x_1, x_2) = 0$ pentru $x_1 \leq 0$ sau/şi $x_2 \leq 0$, formulele (2.9) şi (2.10) devin

$$F_Y(x) = \int_0^x dv \int_0^x p(u, v-u)du \tag{2.11}$$

şi respectiv

$$\rho_Y(x) = \int_0^x p(u, x-u)du. \tag{2.12}$$

Dacă v.a. X_1 şi X_2 sunt independente şi au densităţile de probabilitate p_1 şi respectiv p_2, atunci (2.10) devine

$$\rho_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(u)p_2(x-u)du. \tag{2.13}$$

Exemplul 2. Fie $Y = X^2$ o v.a., iar p densitatea de probabilitate a v.a. X. Utilizând relaţia (2.7) rezultă

$$F_Y(x) = \int_{\{y^2 \leq x\}} p(y)dy, \quad x > 0,$$

sau

$$F_Y(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} p(y)dy$$

de unde, prin derivare în raport cu x se găseşte densitatea de probabilitate

$$\rho_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(p(\sqrt{x}) + p(-\sqrt{x})), \quad x > 0.$$

Exemplul 3. Se consideră vectorul aleator $X = (X_1, X_2)$ având densitatea de probabilitate $p(x_1, x_2)$. Să se calculeze densitatea de probabilitate a v.a. $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$. Pentru aceasta se utilizează relaţia (2.7) şi se obţine

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \displaystyle\iint_{\{x_1^2+x_2^2 \leq x^2\}} p(x_1, x_2)dx_1dx_2, & x > 0. \end{cases}$$

Trecând la coordonate polare $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $\rho > 0$, $0 < \theta < 2\pi$,

$$F_Y(x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^x p(\rho\cos\theta,\, \rho\sin\theta)\rho d\rho, \quad x > 0.$$

Densitatea de probabilitate ρ_Y a v.a. Y se obţine prin derivare în raport cu x

$$\rho_Y(x) = \int_0^{2\pi} xp(x\cos\theta,\, x\sin\theta)d\theta, \quad x > 0.$$

Exemplul 4. Trei obuze sunt trase independent. Distanţa de la obiectiv la punctele de impact sunt trei v.a. X_1, X_2, X_3 independente şi identic repartizate, având densitatea de probabilitate p şi funcţia de repartiţie G. Să se determine probabilitatea ca cel puţin unul din obuze să cadă la o distanţă mai mică sau egală cu x_0 de obiectiv.

Fie $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$. Se va determina funcţia de repartiţie şi densitatea de probabilitate a v.a. Y. Conform relaţiilor (2.6) şi (2.7) rezultă

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \iiint_{\{\min(x_1,x_2,x_3)\leq x\}} p(x_1)p(x_2)p(x_3)dx_1dx_2dx_3 = \\ &= \iiint_{\{x_1<x, x_1<x_2, x_1<x_3\}} p(x_1)p(x_2)p(x_3)dx_1dx_2dx_3 + \\ &+ \iiint_{\{x_2<x, x_2<x_1, x_2<x_3\}} p(x_1)p(x_2)p(x_3)dx_1dx_2dx_3 + \\ &+ \iiint_{\{x_3<x, x_3<x_1, x_3<x_2\}} p(x_1)p(x_2)p(x_3)dx_1dx_2dx_3. \end{aligned}$$

Cum cele trei integrale triple sunt egale datorită simetriei, rezultă

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= 3\int_0^x dx_1 \int_{x_1}^{\infty} dx_2 \int_{x_1}^{\infty} p(x_1)p(x_2)p(x_3)dx_3 = \\ &= 3\int_0^x [1-G(x_1)]^2 p(x_1)dx_1. \end{aligned}$$

Prin urmare densitatea de probabilitate a v.a. Y este

$$\rho_Y(x) = 3[1-G(x)]^2 p(x), \quad x > 0$$

şi

$$P(Y \leq x_0) = F_Y(x_0) = \int_0^{x_0} \rho_Y(x)dx.$$

Exemplul 5. Se consideră două v.a. independente X şi Y cu densităţile de probabilitate $p(x)$ şi respectiv $q(y)$. Să se calculeze probabilitatea evenimentului $\{X \leq Y\}$.

Dacă se notează $Z = X - Y$, atunci conform relaţiilor (2.6) şi (2.7), funcţia de repartiţie a v.a. Z este

$$F(z) = \iint_{\{x-y<z\}} p(x)q(y)dxdy$$

şi utilizând schimbarea de variabile $x - y = u$, $y = v$ rezultă

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{\infty} p(u+v)q(v)dv.$$

Probabilitatea căutată este

$$P(Z \leq 0) = F(0) = \int_{-\infty}^{0} du \int_{-\infty}^{\infty} p(u+v)q(v)dv = \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} p(v-u)q(v)dv.$$

În particular, dacă $p = q$ este continuă şi G este funcţia de repartiţie (comună) a v.a. X şi X atunci

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[p(y)\int_{-\infty}^{y} p(x)dx\right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)G(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(y)G'(y)dy = \left.\frac{G^2(y)}{2}\right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deci $P(X \leq Y) = \dfrac{1}{2}$.

Exemplul 6. Fie $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. independente având funcţiile de repartiţie $F_1, F_2, ..., F_n$. Se consideră v.a.

$$M = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$$

$$m = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Să se determine funcţiile lor de repartiţie $F_{\max}$, respectiv $F_{\min}$. Se obţine

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= P(M \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, ..., X_n \leq x) = \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x), ..., P(X_n \leq x) = F_1(x)F_2(x)...F_n(x) \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În particular, dacă F_i, $i = \overline{1,n}$, sunt egale, atunci $F_{\max}(x) = F^n(x)$.

Pentru a determina $F_{\min}$ este convenabil să se introducă funcţia G_i, corespunzătoare fiecărei F_i astfel

$$G_i(x) = P(X_i > x) = 1 - F_i(x).$$

Atunci se obţine

$$\begin{aligned} G_{\min}(x) &= P(m > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n > x) = \\ &= P(X_1 > x)P(X_2 > x)...P(X_n > x) = \\ &= G_1(x)G_2(x)...G_n(x). \end{aligned}$$

Dacă F_i, $i = \overline{1,n}$, sunt egale, atunci

$$G_{\min}(x) = G^n(x), \quad F_{\min}(x) = 1 - G^n(x).$$

2.4 Valori medii şi valori medii condiţionate

O altă noţiune fundamentală în teoria probabilităţilor este noţiunea de medie sau speranţă matematică a unei v.a.

Dacă X este o v.a. discretă cu repartiţia $p_X(x_i) = p_i$, iar f o funcţie reală sau complexă arbitrară definită pe mulţimea valorilor lui X, se defineşte *valoarea medie* a lui $f(X)$, notată $E(f(X))$, ca suma seriei $\sum\limits_i f(x_i)p_i$ (presupunând seria absolut convergentă [7], adică $\sum\limits_i |f(x_i)|p_i < \infty$).

Dacă X este o v.a. continuă cu densitatea p, iar f o funcţie reală sau complexă măsurabilă de variabilă reală, se defineşte valoarea medie a lui $f(X)$, notată $E(f(X))$, ca valoarea integralei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$ (presupunând integrala absolut convergentă, adică $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|p(x)dx < \infty$).

Integrala este concepută în sens Lebesgue. Prin urmare, dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, atunci f trebuie să fie măsurabilă Borel; dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, atunci Re$f$ şi

[7] Această condiţie este întotdeauna satisfăcută în cazul în care mulţimea valorilor lui X este finită.

Imf trebuie să fie măsurabile Borel. Cazurile cele mai întâlnite care asigură existenţa valorii medii sunt acelea în care integrala improprie (în sens Riemann) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ este absolut convergentă sau când f este mărginită şi integrabilă Riemann pe orice compact din $\mathbf{R}$. Definiţiile din acest paragraf sunt date numai pentru v.a. discrete sau care admit densitate de probabilitate, care reprezintă cazurile cele mai frecvente.

Valoarea medie corespunzătoare alegerii $f(x) = x^m$, $m \in \mathbf{N}^*$, se numeşte *momentul de ordinul* m al lui X (presupusă reală) şi se notează $E(X^m)$ sau $M_m(X)$. Prin urmare momentul de ordinul m se calculează prin formulele

$$E(X^m) = \sum_i x_i^m p_i, \quad \text{dacă} \quad X \quad \text{este o v.a. discretă}$$

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m p(x)dx, \quad \text{dacă} \quad X \quad \text{este o v.a. continuă}$$

cu densitatea p.

Valoarea medie corespunzătoare alegerii $f(x) = |x|^r$, $r > 0$, se numeşte *momentul absolut de ordinul* r al lui X şi se notează $E(|X|^r)$ sau $\bar{M}_r(X)$. Prin urmare

$$E(|X|^r) = \sum_i |x_i|^r p_i$$

sau

$$E(|X|^r) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r p(x)dx.$$

Pentru $m = 1$ se obţine *valoarea medie* sau *media* lui X, notată $E(X)$. Deci

$$E(X) = \sum_i x_i p_i \quad \text{sau} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

O v.a. X se numeşte *P-integrabilă* dacă $E(X^+) < \infty$ şi $E(X^-) < \infty$, unde

$$X^+ = \sup(X, 0), \quad \text{iar} \quad X^- = \sup(-X, 0) = -\inf(X, 0).$$

Aplicaţiile X^+ şi X^- sunt pozitive, $X = X^+ - X^-$, iar $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$.

O v.a. X se numeşte *P-sumabilă* dacă $E(X^+) < \infty$ sau $E(X^-) < \infty$. De remarcat este faptul că P-sumabilitatea este condiţia cea mai generală care permite să se definească $E(X)$ ca $E(X^+) - E(X^-)$.

Plecând de la definiţia mediei, se deduc următoarele proprietăţi:

a) dacă $X = c =$ const., atunci $E(X) = c$;
b) (*monotonia*) dacă $X \leq Y$, atunci $E(X) \leq E(Y)$;
c) $E(aX) = aE(X)$ pentru orice număr real a; (2.14)
d) (*aditivitatea*) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

e) dacă X şi Y sunt independente, atunci $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proprietăţile d) şi e) pot fi extinse şi pentru un număr finit de v.a. De asemenea, se remarcă că dacă aditivitatea mediei E este un rezultat general, deja cunoscut din teoria integrării, e) este specific teoriei probabilităţilor, necesitând independenţa v.a. Dacă în particular, se consideră $X_i = \chi_{A_i}$ $(i = \overline{1,n})$, atunci extensia proprietăţii e) se reduce la

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

dacă $\{A_i |\, i = \overline{1,n}\}$ este o familie de evenimente independente, în timp ce

$$E(\chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \ldots + \chi_{A_n}) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

fără să se impună condiţii suplimentare pentru evenimentele A_i. Mult timp, acest fapt, cunoscut ca paradoxul lui Cardano [8], a creat confuzie.

Este important de semnalat, altă proprietate a mediei şi anume proprietatea de *continuitate monoton secvenţială*, enunţată astfel:

f) dacă $\{X_n |\, n \geq 1\}$ este un şir crescător de v.a. P-integrabile, convergent la o v.a. X, atunci

$$X_n \uparrow X \ (n \to \infty) \Rightarrow E(X_n) \uparrow E(X);$$

f′) dacă $\{X_n |\, n \geq 1\}$ este un şir crescător de v.a. convergent la o v.a. X, astfel încât X_n^- este P-integrabilă pentru cel puţin un indice n, atunci

$$X_n \uparrow X \ (n \to \infty) \Rightarrow E(X_n) \uparrow E(X).$$

Dacă $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un vector aleator cu densitatea de probabilitate $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, iar $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este o funcţie măsurabilă Borel, atunci valoarea medie a v.a. $Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2, \ldots, x_n)p(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n.$$ [9]

Pentru un vector aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, media este vectorul valorilor medii $(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n))$.

Momentul de ordinul m, $m \in \mathbf{N}^*$, al v.a. $X - E(X)$ se numeşte *momentul centrat de ordinul* m al lui X.

Momentul absolut de ordinul r, $r > 0$, al v.a. $X - E(X)$ se numeşte *momentul centrat absolut de ordinul* r al lui X.

---

[8] Gerolamo Cardano (1501-1576) a scris prima carte despre jocurile de noroc.

[9] Se deduce din relaţia (2.7).

Momentul centrat de ordinul 2 se numeşte *varianţa* sau *dispersia* lui X şi se notează $\mathrm{Var}(X)$ sau $D(X)$. Deci

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$$

sau

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 p(x) dx.$$

Varianţa este un indicator important al împrăştierii valorilor v.a. după cum rezultă din *inegalitatea lui Cebîşev* [10].

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.15}$$

Proprietăţile varianţei sunt:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2; & \\ \text{b) dacă } X = c = \text{const., atunci } \mathrm{Var}(X) = 0; & (2.16) \\ \text{c) } \mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X) \text{ pentru orice număr real } a; & \\ \text{d) } \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y))); & \\ \text{e) dacă } X \text{ şi } Y \text{ sunt independente, atunci } \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). & \end{array}$$

Proprietatea e) poate fi extinsă şi pentru un număr finit de v.a. independente.

Valoarea $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ se numeşte *abatere medie pătratică.*

Mediana unei funcţii de repartiţie F este valoarea m pentru care au loc inegalităţile $F(m-0) \leq \frac{1}{2} \leq F(m)$. Dacă F este continuă atunci există cel puţin o valoare m pentru care $F(m) = \frac{1}{2}$.

Dacă în relaţia de definiţie a medianei se pune în loc de $\frac{1}{2}$ valoarea $\frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$, $n > 2$, se obţine definiţia *cuantilei de ordin n.*

Modul unei repartiţii se defineşte pentru v.a. discrete, precum şi pentru v.a. care admit densitate de probabilitate. Astfel, pentru o v.a. discretă modul este valoarea care are cea mai mare probabilitate de realizare. În cazul existenţei densităţii, modul este maximul funcţiei de densitate.

Repartiţiile pot fi *unimodale* sau *multimodale.*

Valoarea medie a produsului$(X - E(X))(Y - E(Y))$ se numeşte *corelaţia* sau *covarianţa* v.a. X şi Y şi se notează $\mathrm{cov}(X, Y)$. Evident $\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$ şi

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y).$$

[10] P.L.Cebîşev (1821-1894) a fost un mare matematician rus.

Acest concept serveşte la caracterizarea dependenţei a două v.a. Dacă v.a. X şi Y au corelaţia nulă, se mai spune că sunt *necorelate*. Condiţia necesară şi suficientă ca v.a. X şi Y să fie necorelate este ca $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$. Rezultă că două v.a. independente sunt necorelate. Reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată. Ea va fi justificată prin exemplul 10.

Fie $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator. Matricea cu elementele $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$, $1 \le i, j \le n$, se numeşte *matrice de corelaţie (covarianţă)*.

Raportul

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y)}}, \quad \operatorname{Var}(X) \neq 0, \ \operatorname{Var}(Y) \neq 0,$$

se numeşte *coeficientul de corelaţie* al v.a. X şi Y. Coeficientul de corelaţie are valori cuprinse între -1 şi 1. Valorile extreme corespund cazului în care între X şi Y există legătura funcţională de forma

$$Y = E(Y) + \left(\frac{\operatorname{Var}(Y)}{\operatorname{Var}(X)}\right)^{1/2} \cdot (X - E(X)).$$

Valorile pozitive ale lui $\rho(X,Y)$ pot indica existenţa unei tendinţe ca la valorile mari ale lui Y să corespundă valori mari ale lui X. Valorile negative ale lui $\rho(X,Y)$ pot indica existenţa unei tendinţe ca la valorile mici ale lui Y să corespundă valori mari ale lui X, iar la valorile mari ale lui Y valori mici pentru X. Valorile lui $\rho(X,Y)$ apropiate de zero pot indica faptul că aceste tendinţe sunt slabe, în timp ce valorile lui $\rho(X,Y)$ apropiate de ± 1 pot indica faptul că aceste tendinţe sunt puternice.

Fie X şi Y două v.a. discrete cu valorile $x_1, x_2, \ldots$, respectiv $y_1, y_2, \ldots$, iar f o funcţie reală sau complexă arbitrară definită pe mulţimea valorilor lui X. Se defineşte *valoarea medie a lui* $f(X)$ *condiţionată de* $Y = y_j$, $j = 1, 2, \ldots$, notată $E(f(X)|\, Y = y_j)$, ca media v.a. discrete ce ia valorile $f(x_1), f(x_2), \ldots$ cu probabilităţile

$$p(x_i|\, y_j) = P(X = x_i|\, Y = y_j), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Prin urmare

$$E(f(X)|\, Y = y_j) = \sum_i f(x_i) p(x_i|\, y_j).$$

Se verifică imediat că

$$E(f(X)) = \sum_j E(f(X)|\, Y = y_j) \cdot P(Y = y_j). \tag{2.17}$$

Fie (X, Y) un vector aleator cu densitatea de probabilitate $p(x, y)$, iar f o funcţie reală sau complexă de variabilă reală [11]. *Valoarea medie a lui* $f(X)$

[11] Se presupune că f (respectiv $\operatorname{Re} f$ şi $\operatorname{Im} f$) este măsurabilă Borel.

condiţionată de $Y = y$, notată $E(f(X)|\,Y = y)$, se defineşte prin egalitatea

$$E(f(X)|\,Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x,y)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x,y)dx}{p_Y(y)}$$

şi are loc relaţia

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(f(X)|\,Y = y)p_Y(y)dy, \tag{2.18}$$

unde s-a notat cu p_Y densitatea de probabilitate a v.a. Y.

De asemenea, dacă $a, b \in \mathbf{R}$, atunci probabilitatea evenimentului $\{a \leq X \leq b\}$ condiţionată de $Y = y$, notată $P(a \leq X \leq b|\,Y = y)$, se defineşte prin egalitatea

$$P(a \leq X \leq b|\,Y = y) = \frac{\int_a^b p(x,y)dx}{p_Y(y)}$$

şi are loc relaţia

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^{\infty} P(a \leq X \leq b|\,Y = y)p_Y(y)dy. \tag{2.19}$$

Evenimentul $\{a \leq X \leq b\}$ se poate înlocui, în general, cu un eveniment de forma $\{X \in A\}$, unde $A \in \mathcal{B}$ şi în acest caz

$$P(X \in A|\,Y = y) = \frac{\int_A p(x,y)dx}{p_Y(y)}.$$

În particular, $P(X \leq x|\,Y = y)$ este *repartiţia lui* X *condiţionată* $Y = y$. Funcţia de repartiţie F_X a v.a. X poate fi calculată prin utilizarea relaţiei

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X \leq x|\,Y = y)p_Y(y)dy. \tag{2.20}$$

Exemplul 1. Fie L un întreg pozitiv şi $p_n = \frac{1}{L}$, $1 \leq n \leq L$. V.a. discretă care ia valorile $1, 2, \ldots, L$ cu probabilităţile p_n, $1 \leq n \leq L$, are valoarea medie

$$E(X) = \frac{1}{L} \cdot \sum_{n=1}^{L} n = \frac{1}{L} \cdot \frac{L(L+1)}{2} = \frac{L+1}{2}.$$

În acest caz al v.a. X, uniform repartizată pe mulţimea $\{1, 2, \ldots, L\}$, se observă că valoarea medie a lui X este egală cu media aritmetică a celor L valori ale v.a.

Exemplul 2. Se presupune că o monedă nedeformată este aruncată de un număr de ori până la apariţia stemei. Fie X v.a. ce reprezintă numărul de aruncări până la apariţia stemei, adică $\{X = n\}$ înseamnă că în primele $(n-1)$ aruncări s-a obţinut valoarea. Atunci

$$p_n = P(X = n) = \frac{1}{2^n}$$

deoarece rezultatul favorabil este reprezentat de secvenţa $\underbrace{v\,v\ldots v}_{n-1\,\text{ori}}s$, unde $v =$ valoarea şi $s =$ stema. Valoarea medie este

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Pentru a calcula suma seriei se pleacă de la seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{pentru} \quad |x| < 1.$$

Prin derivare termen cu termen (seria precedentă fiind uniform convergentă pentru $|x| < 1$) se obţine

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Apoi luând $x = \dfrac{1}{2}$ se obţine

$$4 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

de unde

$$4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + 2.$$

Atunci $E(X) = 2$.

Se poate generaliza problema dacă se consideră o monedă deformată. În acest caz probabilitatea apariţiei stemei este p şi a valorii este $q = 1 - p$. Atunci

$$p_n = \underbrace{(q \ldots q)}_{n-1\,\text{ori}} p = q^{n-1} p$$

şi valoarea medie devine

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} \cdot p = p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

V.a. X se numeşte "timpul de aşteptare pentru apariţia stemei" sau, mai general, pentru a avea "succes".

Exemplul 3. O monedă nedeformată este aruncată de n ori. Se consideră X_i rezultatul aruncării de rang i, cuantificat prin 1 sau 0, în acord cu obţinerea stemei sau a valorii. Cu aceste notaţii, v.a. $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ reprezintă numărul de apariţii ale stemei în n aruncări. Atunci rezultă

$$p_k = P(S_n = k) = C_n^k \cdot \frac{1}{2^n}, \; 0 \leq k \leq n$$

şi

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

Considerând o monedă deformată se poate din nou generaliza problema regăsind repartiţia

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

dacă

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{cu probabilitatea } p \\ 0, & \text{cu probabilitatea } q = 1 - p \end{cases} \qquad \forall i = \overline{1,n}.$$

V.a. X_i, $i = \overline{1,n}$, se mai numesc şi *variabile bernoulliene*. Atunci ţinând seama că $E(X_i) = p$, $i = \overline{1,n}$, rezultă

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\,p.$$

V.a. X_i, $i = \overline{1,n}$, fiind independente rezultă

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = npq,$$

deoarece $\mathrm{Var}(X_i) = p - p^2 = pq$, $\forall i = \overline{1,n}$. $E(S_n)$ şi $E(S_n^2)$ se pot calcula direct, dar este mult mai complicat.

Exemplul 4. Funcţia de frecvenţă a v.a. X este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,216 & 0,432 & 0,288 & 0,064 \end{pmatrix}.$$

Conform definiţiilor prezentate rezultă

$$E(X) = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= (0 - 1,2)^2 \cdot 0,216 + (1 - 1,12)^2 \cdot 0,432 + \\ &+ (2 - 1,2)^2 \cdot 0,288 + (3 - 1,2)^2 \cdot 0,064 = 0,72. \end{aligned}$$

Exemplul 5. V.a. X are densitatea de probabilitate

$$p(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ sau } x > 1. \end{cases}$$

Pentru ca p să fie o densitate de probabilitate se impune condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, de unde $a = 2$. Aşadar

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}$$

şi prin urmare

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Exemplul 6. V.a. X ia valorile 0 sau 1 după cum un circuit electronic este în stare de funcţionare sau defect. Circuitul este conectat la o sursă a cărei tensiune U este o v.a. reală şi pozitivă cu densitatea de probabilitate $p(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Probabilitatea de defectare a circuitului este direct proporţională cu tensiunea U, fiind egală cu zero pentru $U = u_0$ şi egală cu 1 pentru $U = u_1$. Se cere probabilitatea de defectare, adică $P(X = 1)$.

În condiţiile date rezultă

$$P(X = 1 | \, U = u) = \begin{cases} 0, & u < u_0 \\ \dfrac{u - u_0}{u_1 - u_0}, & u_0 \leq u \leq u_1 \\ 1, & u > u_1. \end{cases}$$

Utilizând relaţia (2.19) rezultă

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \int_0^{\infty} P(X = 1 | \, U = u)e^{-u}du = \frac{1}{u_1 - u_0}\int_{u_0}^{u_1} (u - u_0)e^{-u}du + \\ &+ \int_{u_1}^{\infty} e^{-u}du = \frac{e^{-u_0} - e^{-u_1}}{u_1 - u_0}. \end{aligned}$$

Exemplul 7. Un dispozitiv are 4 siguranţe. În cazul suprasolicitărilor se arde o siguranţă şi este schimbată cu alta nouă. Să se determine valoarea medie a numărului de suprasolicitări N, după care în dispozitiv sunt schimbate toate siguranţele fixate iniţial, dacă ieşirea din aparat în momentul solicitării uneia din cele n siguranţe este egal probabilă (siguranţa neschimbată este considerată nouă).

Fie $E(N|k)$ valoarea medie a numărului de suprasolicitări, după care toate cele n siguranţe fixate iniţial vor arăta schimbate, dacă au rămas neschimbate k siguranţe.

Dacă au rămas neschimbate k siguranţe ($k \geq 1$), atunci pentru deteriorarea uneia din ele este nevoie de o suprasolicitare următoare. În funcţie de rezultatele suprasolicitării următoare vor fi diferite medii ale numărului de suprasolicitări necesare pentru arderea siguranţelor rămase din numărul celor fixate iniţial. Deci pentru suprasolicitarea următoare se pot produce două evenimente

A_1 - a ars una din siguranţele fixate iniţial

A_2 - a ars o siguranţă schimbată.

Se obţine

$$P(A_1) = \frac{k}{n} \quad \text{şi} \quad P(A_2) = 1 - \frac{k}{n}.$$

Dacă prin solicitarea următoare se produce A_1, atunci valoarea medie a numărului de solicitări pentru schimbarea tuturor celor k siguranţe neschimbate până la solicitarea următoare va fi

$$1 + E(N|k-1).$$

Dacă prin solicitarea următoare se produce A_2, atunci valoarea medie este

$$1 + E(N|k).$$

Se obţine

$$E(N|k) = 1 + \frac{k}{n}E(N|k-1) + \frac{n-k}{n}E(N|k).$$

Deci

$$E(N|k) - E(N|k-1) = \frac{n}{k}.$$

Dacă $k = 1$, adică a rămas numai o siguranţă neschimbată, atunci probabilitatea schimbării ei este $\frac{1}{n}$, deci

$$E(N|1) = n.$$

Rezultă următorul şir de egalităţi:

$$E(N|n) - E(N|n-1) = \frac{n}{n}$$

$$E(N|n-1) - E(N|n-2) = \frac{n}{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E(N|3) - E(N|2) = \frac{n}{3}$$

$$E(N|2) - E(N|1) = \frac{n}{2}$$

$$E(N|1) = n$$

care prin sumare dau

$$E(N\,|\,n) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots + \frac{n}{2} + n$$

şi

$$E(N) = E(N\,|\,n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Exemplul 8. Fie X o v.a. cu densitatea de probabilitate p. Să se verifice faptul că, dacă m este mediana lui X, iar $a \in \mathbf{R}$, atunci valoarea medie a v.a. $Y = |X - a|$ este minimă pentru $a = m$.

Se obţine

$$\begin{aligned} E(Y) = E(|X-a|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|p(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{a} (a-x)p(x)dx + \int_{a}^{\infty} (x-a)p(x)dx = \\ &= a - E(X) - 2a\int_{a}^{\infty} p(x)dx + 2\int_{a}^{\infty} xp(x)dx. \end{aligned}$$

Dacă $a = m$ se obţine

$$E(|X-m|) = 2\int_{m}^{\infty} xp(x)dx - E(X),$$

deoarece prin definiţia medianei

$$\int_{m}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{m} p(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Aşadar

$$E(|X-a|) = a + E(|X-m|) = -2\int_{m}^{\infty} xp(x)dx + 2\int_{a}^{\infty} (x-a)p(x)dx$$

sau

$$E(|X-a|) = E(|X-m|) + 2\int_{a}^{m} (x-a)p(x)dx.$$

Întrucât $\int_{a}^{m} (x-a)p(x)dx \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$, rezultă că $E(|X-a|)$ este minimă pentru $a = m$.

Exemplul 9. Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$p(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Să se determine mediana şi cuantila de ordin 4. Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Mediana m se determină din relaţia $F(m) = \frac{1}{2}$, de unde rezultă $1 - e^{-3m} = \frac{1}{2}$ şi deci $m = \frac{1}{3}\ln 2$. Cuantila de ordin 4 se obţine rezolvând ecuaţia $F(q_4) = \frac{1}{4}$, care conduce la $q_4 = \frac{1}{3}\ln\frac{4}{3}$.

Exemplul 10. Fie v.a. X şi Y cu repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

V.a. XY va lua valorile $z_{ij} = x_i y_j$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 2$. Concret se obţin:

$$z_{11} = 2,\ z_{21} = 1,\ z_{31} = -1,\ z_{41} = -2,\ z_{12} = -2,\ z_{22} = -1,\ z_{32} = 1,\ z_{42} = 2.$$

Aceste valori au probabilităţile următoare:

$$r_{11} = 0,\ r_{21} = \frac{1}{4},\ r_{31} = \frac{1}{4},\ r_{41} = 0,\ r_{12} = \frac{1}{4},\ r_{22} = 0,\ r_{32} = 0,\ r_{42} = \frac{1}{4}.$$

Cum $E(X) = 0$, $E(Y) = 0$ şi $E(XY) = 0$, rezultă că $E(XY) = E(X)E(Y)$. Deci $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. Dar

$$p_i q_j = \frac{1}{8} \neq r_{ij}\ \forall (i,j) \in \{1,2,3,4\} \times \{1,2\},$$

unde $(p_i)_{1\leq i\leq 4}$ şi $(q_j)_{1\leq j\leq 2}$ reprezintă repartiţiile v.a. X, respectiv Y. În concluzie, X şi Y sunt necorelate, dar nu sunt independente.

Exemplul 11. Se consideră v.a. X şi Y, unde $Y = aX + b$, $a \neq 0$, $b \in \mathbf{R}$. Să se determine coeficientul de corelaţie $\rho(X,Y)$.

Dacă $\mu = E(X)$, atunci $E(Y) = a\mu + b$ (conform (2.14)). De asemenea, dacă $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X)$, atunci $\operatorname{Var}(Y) = a^2\sigma^2$ (conform (2.16)) şi $E(XY) = E(aX^2 + bX) = a(\sigma^2 + \mu^2) + b\mu$ (conform (2.14)). Prin urmare

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = a(\sigma^2+\mu^2) + b\mu - \mu(a\mu + b) = a\sigma^2$$

şi deci

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{a\sigma^2}{\sqrt{a^2\sigma^4}} = \frac{a}{|a|} = sgn a.$$

Exemplul 12. V.a. Y are densitatea de probabilitate

$$p(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Dacă X este o altă v.a., atunci probabilitatea evenimentului $\{a \leq X \leq b\}$ condiţionată de Y este dată de relaţia

$$P(A \leq X \leq b | Y = y) = y^2, \quad y \in [0,1].$$

Să se calculeze $P(a \leq X \leq b)$.

Utilizând relaţia (2.19) se obţine

$$P(a \leq X \leq b) = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}.$$

Exemplul 13. Fie X o v.a. pozitivă, iar F funcţia sa de repartiţie care îndeplineşte condiţia $\lim\limits_{x \to \infty} x[1 - F(x)] = 0$. Să se arate că

$$E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx.$$

Se demonstrează această relaţie pentru cazul în care X admite o densitate de probabilitate continuă p; în acest caz

$$F'(x) = p(x), \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xp(x)dx = -\int_0^\infty x\frac{d}{dx}[1 - F(x)]dx = \\ &= -x[1 - F(x)]|_0^\infty + \int_0^\infty [1 - F(x)]dx = \\ &= \int_0^\infty [1 - F(x)]dx. \end{aligned}$$

Mai general, se poate arăta că, dacă X este o v.a. oarecare (nu neapărat pozitivă) cu funcţia de repartiţie F care îndeplineşte condiţiile

$$\lim_{x \to -\infty} xF(x) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to \infty} x[1 - F(x)] = 0,$$

atunci

$$E(X) = -\int_0^\infty F(x)dx + \int_0^\infty [1 - F(x)]dx.$$

2.5 Funcţia generatoare şi funcţia caracteristică

Un instrument foarte eficace şi în acelaşi timp comod de utilizat este funcţia generatoare introdusă de Euler [12].

Fie X o v.a. discretă cu valori întregi nenegative. Se numeşte *funcţie generatoare* a v.a. X funcţia

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n),$$

fiind privită ca funcţie de variabilă reală t [13].

Se observă că funcţia generatoare este definită cel puţin pentru $|t| < 1$. De asemenea

$$g_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1.$$

Propoziţia 2.1. *Fie X şi Y două v.a. discrete cu valori întregi nenegative. Dacă $g_X = g_Y$, atunci $p_X = p_Y$.*

Enunţul proprozitiei 2.1 se poate reformula astfel: repartiţia de probabilitate a unei v.a. discrete cu valori întregi nenegative este determinată în mod unic de funcţia sa generatoare.

Propoziţia 2.2. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independente luând valori întregi nenegative. Se consideră v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Atunci*

$$g_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(t).$$

Se remarcă că funcţia generatoare (de probabilitate) g_X generează probabilităţile $P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}$, ceea ce justifică chiar denumirea acordată transformatei. Probabilităţile $P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}$, se determină din relaţia

$$P(X = n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}, \quad \text{unde} \quad g_X^{(n)}(t) = \frac{d^n g_X(t)}{dt^n}. \tag{2.21}$$

Cu ajutorul funcţiei generatoare se pot calcula următoarele

a) $E(|X|) < \infty \Rightarrow E(X) = g'_X(1)$;

b) $E(X^2) < \infty \Rightarrow E(X^2) = g''_X(1) + g'_X(1)$, (2.22)

$$\mathrm{Var}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.$$

Deşi funcţia generatoare de probabilitate este un instrument matematic eficace, totuşi utilizarea ei este limitată, fiind definită numai pentru v.a. discrete cu valori întregi nenegative. De aceea, această inconvenienţă trebuie

[12] Leonhard Euler (1707-1783) prolific matematician elveţian.

[13] Uneori, în alte situaţii, este avantajos ca variabila t să fie considerată variabilă complexă.

depăşită. Avantajul expresiei funcţiei generatoare ca medie a v.a. t^X [14], este acela de a permite unele extensii. Astfel dacă X este o v.a. cu valori reale arbitrare se introduce următoarea definiţie. Se numeşte *funcţie generatoare de momente* a lui X funcţia

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}),$$

cu condiţia să existe $h > 0$, astfel încât valoarea medie să existe şi să fie finită pentru $| t |< h$ [15].

Se observă că pentru v.a. nenegativă, X, $E(e^{tX})$ există pentru orice $t \leq 0$. Ca să existe funcţia generatoare de momente, se cere în plus existenţa lui $E(e^{tX})$ pentru $0 < t < h$ şi un anume $h > 0$.

Se observă în plus că dacă X este o v.a. cu valori întregi, atunci $\psi_X(t) = g_X(e^t)$ pentru $| t |< h$, (cu condiţia ca funcţia generatoare de momente să existe pentru $| t |< h$).

Proprietăţile de unicitate şi multiplicare sunt prezente din nou şi se pot enunţa astfel.

Propoziţia 2.3. *Fie X şi Y două v.a. Dacă există $h > 0$, astfel încât $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ pentru $| t |< h$, atunci X şi Y sunt identic repartizate.*

Propoziţia 2.4. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independente, ale căror funcţii generatoare de momente există pentru $| t |< h$ şi un anume $h > 0$. Fie v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Atunci*

$$\psi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(t), \quad | t |< h.$$

S-a văzut că derivatele de ordinul n ale funcţiei generatoare (de probabilitate), calculate în zero, furnizează probabilităţile $P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}$. În continuare se va stabili că derivatele funcţiei generatoare de momente, calculate în zero, generează momente, ceea ce sugerează însăşi denumirea transformatei.

Propoziţia 2.5. *Fie X o v.a. a cărei funcţie generatoare de momente, $\psi_X(t)$, există pentru $| t |< h$ şi un anume $h > 0$. Atunci*

a) $E(| X |^r) < \infty, \quad \forall r > 0;$
b) $E(X^n) = \psi_X^{(n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Dacă funcţia generatoare de momente este dată sub forma

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n), \quad | t |< h,$$

[14] Formă în care Euler nu ar fi recunoscut-o, deoarece conceptul de v.a. apare nu mult înainte de anul 1930.

[15] Se remarcă legătura strânsă între funcţia generatoare de momente şi transformata Laplace a funcţiilor cu valori reale.

atunci momentele de ordinul n, $E(X^n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, reprezintă coeficienţii termenilor $\frac{t^n}{n!}$, $n \in \mathbf{N}^*$, din dezvoltarea în serie.

Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator. Funcţia generatoare de momente a lui X este

$$\psi_X(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E(e^{t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n})$$

cu condiţia să existe $h_1, h_2, \ldots, h_n > 0$ astfel încât să existe media pentru $| t_k |< h_k$, $k = \overline{1,n}$.

Deşi avantajul funcţiei generatoare de momente este mare în comparaţie cu cel al funcţiei generatoare de probabilitate, totuşi, există cazuri în care funcţia generatoare de momente nu există [16].

În continuare se va introduce o transformată care există pentru toate repartiţiile. Dezavantajul acestei transformate constă în faptul că ia valori complexe şi deci necesită un aparat matematic mai sofisticat.

Se numeşte *funcţie caracteristică* [17] a v.a. X funcţia

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + i\sin(tX)),$$

unde i este unitatea imaginară, $i^2 = -1$.

Întrucât

$$|E(e^{itX})| \leq E(|e^{itX}|) = E(1) = 1,$$

rezultă că funcţia caracteristică există pentru orice t şi pentru orice v.a. X.

Următoarele propoziţii stabilesc câteva proprietăţi elementare ale funcţiei caracteristice.

Propoziţia 2.6. *Funcţia caracteristică a unei v.a. X are proprietăţile:*

a) $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1, \quad \forall t \in \mathbf{R}$;
b) $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t), \quad \forall t \in \mathbf{R}$;
c) $\varphi_X(t)$ *este uniform continuă pe* $\mathbf{R}$.

Propoziţia 2.7. *Fie X şi Y două v.a. Dacă $\varphi_X = \varphi_Y$, atunci X şi Y sunt identic repartizate.*

Teorema 2.8 (Teorema de inversiune). *Fie X o v.a. cu funcţia de repartiţie F şi funcţia caracteristică φ_X. Dacă F este continuă în a şi b ($a < b$), atunci*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)dt.$$

[16] Un exemplu de acest gen este repartiţia Cauchy $C(0,1)$ (vezi §3.18).

[17] Abstracţie, făcând de un minus la exponent şi de un factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, funcţia caracteristică coincide cu transformata Fourier în cazul continuu şi cu seria Fourier în cazul discret.

Se observă că propoziţia 2.7 este un corolar al teoremei 2.8, funcţia de repartiţie fiind complet determinată de funcţia caracteristică. Într-adevăr rezultă

$$F(b) = \lim_{a\to-\infty}\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt,$$

a parcurgând o mulţime de continuitate a funcţiei F.

Corolarul 2.9. *Funcţia F este derivabilă în punctul x şi derivata ei în acest punct este dată de formula*

$$p(x) = F'(x) = \lim_{h\to\infty}\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{1-e^{ith}}{ith}\cdot e^{-itx}\varphi_X(t)dt$$

dacă şi numai dacă expresia din membrul drept există.

În particular, dacă φ_X este absolut integrabilă pe $\mathbf{R}$ (adică $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_X(t)|\,dt < \infty$), atunci densitatea de probabilitate p există, este mărginită, continuă şi

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt. \tag{2.23}$$

Propoziţia 2.10. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independente. Atunci funcţia caracteristică a v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ este*

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t).$$

Propoziţia 2.11. *Fie X o v.a., astfel încât $E(|X|^n) < \infty$ pentru un anume $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci*

a) $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$ pentru $k = \overline{1,n}$;

b) $\varphi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} E(X^n)\cdot\dfrac{(it)^n}{n!}$ în intervalul de convergenţă al seriei.

Propoziţia 2.12. *Fie X o v.a. şi $a, b \in \mathbf{R}$. Atunci*

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\cdot\varphi_X(at).$$

Făcând o comparaţie între propoziţia 2.5 (b) şi propoziţia 2.11 (a), am fi tentaţi să spunem că ambele rezultate pot fi obţinute unul din celălalt, pe baza relaţiei $\varphi_X(t) = \psi_X(it)$. Totuşi această relaţie nu este în general valabilă, deoarece există v.a. care nu au funcţii generatoare de momente.

Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator. Funcţia caracteristică a lui X este

$$\varphi_X(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E(e^{i(t_1X_1+t_2X_2+\ldots+t_nX_n)}).$$

Exemplul 1. Pentru v.a. bernoulliene $X_1, X_2, \ldots, X_n$, din exemplul 3, §2.4, funcţia generatoare comună este

$$g_X(t) = q + pt$$

pentru că $P(X = 0) = q$ şi $P(X = 1) = p$. Atunci $g'_X(t) = p$ şi $g''_X(t) = 0$, de unde rezultă conform relaţiilor (2.22)

$$E(X) = g'_X(1) = p,$$

$$\mathrm{Var}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Pentru $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ (unde X_i, $i = \overline{1,n}$, sunt v.a. independente) se obţin conform propoziţiei 2.2

$$\begin{aligned} g_{S_n}(t) &= (q+pt)^n, \\ g'_{S_n}(t) &= np(q+pt)^{n-1}, \\ g''_{S_n}(t) &= n(n-1)p^2(q+pt)^{n-2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$E(S_n) = np,$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq,$$

deja calculate în §2.4.

Exemplul 2. V.a. X are funcţia generatoare g_X. Să se determine funcţia generatoare corespunzătoare v.a. $X+1$ şi $2X$.

Probabilităţile v.a. $X+1$ sunt

$$P(X+1 = n) = P(X = n-1) = p_{n-1}.$$

Atunci funcţia generatoare este dată de

$$g_{X+1}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}t^n = t\sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}t^{n-1},$$

de unde rezultă că $g_{X+1}(t) = tg_X(t)$, deoarece $g_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ şi

$$p_n = P(X = n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Analog, se observă că

$$P(2X = n) = p_{2n},$$

deci

$$g_{2X}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} t^n = g_X(t^2).$$

Exemplul 3. Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. independente, care iau valorile $0, 1, 2, \ldots, a-1$ cu probabilităţile $\frac{1}{a}$. Fie v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Să se calculeze funcţia generatoare a v.a. S_n şi funcţia generatoare corespunzătoare probabilităţilor $P(S_n \leq j)$.

Cum $(X_n)_n$ sunt v.a. independente identic repartizate, rezultă că

$$g_{S_n}(t) = (g_{X_i}(t))^n.$$

Deoarece

$$g_{X_i}(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{a-1} t^n = \frac{1-t^a}{a(1-t)}$$

se obţine

$$g_{S_n}(t) = \left[\frac{1-t^a}{a(1-t)}\right]^n.$$

Se observă că

$$P(S_n \leq j) + P(S_n > j) = 1.$$

Înmulţind cu t^n şi sumând, se obţine

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(S_n \leq j) t^j = \frac{1}{1-t} g_{S_n}(t).$$

Exemplul 4. Dintr-o urnă conţinând bile albe şi bile negre se fac extrageri succesive, de fiecare dată punându-se bila extrasă înapoi în urnă. Se extrage o bilă albă cu probabilitatea p, iar o bilă neagră cu probabilitatea $q = 1 - p$. Fie X o v.a. care ia valoarea n dacă pentru prima oară se obţine o bilă albă, urmată de una neagră în extragerile de rang $n-1$ şi n. Să se determine funcţia generatoarea a v.a. X.

Succesiunea cea mai generală care poate conduce la apariţia unei bile albe, urmată de una neagră, la extragerile $n-1$ şi n este

$$\underbrace{NN\ldots N}_{n-1 \text{ ori}} A \qquad \underbrace{AA\ldots A}_{n-1 \text{ ori}} N$$

unde am notat prin A, respectiv N apariţia unei bile albe, respectiv negre. Se poate scrie $X = X_1 + X_2$, unde X_1 şi X_2 sunt v.a. egale cu rangul extragerii în cazul în care s-a obţinut prima bilă albă, respectiv neagră. X_1 şi X_2 sunt v.a. independente. Atunci funcţia generatoare a v.a. X va fi egală cu produsul funcţiilor generatoare corespunzătoare v.a. X_1 şi X_2. Cum $P(X_1 = k) = q^{k-1} \cdot p$, funcţia generatoare a v.a. X_1 este

$$g_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}pt^k = pt\sum_{k=1}^{\infty}(qt)^{k-1} = \frac{pt}{1-qt}.$$

Cum $P(X_2 = k) = p^{k-1} \cdot q$, funcţia generatoare a v.a. X_2 este

$$g_{X_2}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}qt^k = qt\sum_{k=1}^{\infty}(pt)^{k-1} = \frac{qt}{1-pt}.$$

Atunci funcţia generatoare a v.a. X este

$$g_X(t) = \frac{pqt^2}{(1-qt)(1-pt)}.$$

Exemplul 5. V.a. discretă X are funcţia generatoare $g_X(t) = ke^{t^2+t}$. Să se determine k şi să se găsească

a) $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$;
b) $E(X)$ şi $\mathrm{Var}(X)$;
c) cea mai mică valoare $n_0 \in \mathbf{N}$ pentru care $P(X > n_0) < \frac{2}{5}$.

Din relaţia $g_X(1) = 1$ rezultă $ke^2 = 1$ şi deci $k = e^{-2}$. Din relaţiile (2.22) se obţine

$$P(X = 0) = g_X(0) = e^{-2},\ P(X = 1) = e^{-2},$$

$$P(X = 2) = \frac{3k}{2} = \frac{3e^{-2}}{2}.$$

Relaţiile (2.22) dau $E(X) = 3ke^2 = 3$ şi $\mathrm{Var}(X) = 11ke^2 + 3 - 9 = 5$.
Conform relaţiei (2.21) se obţine

$$P(X > n) = 1 - P(X \leq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Valoarea minimă n_0 pentru care

$$1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} < \frac{2}{5}$$

este $n_0 = 3$.

Exemplul 6. Dacă X este o v.a. bernoulliană, atunci

$$\psi_X(t) = q + pe^t,\ E(X) = \psi'_X(0) = p,\ E(X^2) = \psi''_X(0) = p$$

şi
$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$
Din dezvoltarea în serie Taylor a lui e^t în jurul originii rezultă
$$\psi_X(t) = q + p\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot p.$$
Deci $E(X^n) = p, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Exemplul 7. Se consideră funcţia $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $p(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, $a > 0$. Să se determine constanta a astfel încât p să fie densitatea de repartiţie [18] a unei v.a. X. Să se determine apoi funcţia caracteristică corespunzătoare.

Impunând condiţia $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ se obţine
$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = 1$$
şi deci $\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}\Big|_0^{\infty} = 1$ care este adevărată pentru orice $a > 0$. Funcţia caracteristică φ_X este prin definiţie
$$\varphi_X(t) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx.$$

Pentru calculul acestei integrale se poate utiliza teorema reziduurilor şi se obţine
$$\varphi_X(t) = \begin{cases} 2ai\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{itx}}{x^2+a^2}, \quad x = ia\right), & t \geq 0 \\ -2ai\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{itx}}{x^2+a^2}, \quad x = -ia\right), & t < 0. \end{cases}$$
După calculul reziduurilor se obţine
$$\varphi_X(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$
şi deci $\varphi_X(t) = e^{-a|t|}$, $t \in \mathbf{R}$.

Exemplul 8. Să se determine funcţia de repartiţie a v.a. X care are funcţia caracteristică
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{4}(1+e^{it})^2.$$

[18] Densitatea de repartiţie în cauză reprezintă densitatea de repartiţie Cauchy $C(0,a)$, unde $a > 0$ (vezi §3.18).

Întrucât

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{4}e^{2it}$$

rezultă că X este o v.a. discretă cu funcţia de frecvenţă

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Deci funcţia de repartiţie este

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Exemplul 9. Să se determine funcţia de repartiţie a v.a. X care are funcţia caracteristică

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad \lambda > 0.$$

Utilizând relaţia (2.23) rezultă că densitatea de probabilitate corespunzătoare este

$$p(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{\lambda - it} dt.$$

Această integrală poate fi calculată cu teorema reziduurilor şi se obţine

$$p(x) = \begin{cases} -\lambda i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-itx}}{\lambda - it}, \quad t = -\lambda i\right), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Deci

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Exemplul 10. Să se determine funcţia caracteristică $\varphi(t_1, t_2)$ a vectorului aleator (X, Y), dacă acesta admite o densitate de probabilitate $p(x, y) = f(r)$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Să se studieze cazul particular

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Prin definiţie

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1x+t_2y)}p(x,y)dxdy.$$

Făcând o schimbare de coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta \quad \rho > 0,\ 0 < \theta < 2\pi$$

se obţine

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2) &= \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} e^{i\rho(t_1\cos\theta + t_2\sin\theta)}\rho f(\rho)d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} \rho f(\rho)d\rho \int_0^{2\pi} e^{i\rho(t_1\cos\theta+t_2\sin\theta)}d\theta.\end{aligned}$$

Pentru calculul celei de a doua integrale se procedează astfel

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho(t_1\cos\theta+t_2\sin\theta)}d\theta = \int_{|z|=1} \frac{\exp\left(\left(\frac{i\rho}{2}\right)\left(t_1 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - it_2\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\right)}{iz}dz =$$

$$= 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{\exp\left(\frac{\rho}{2}\right)\left((t_2+it_1)z - \left(\frac{1}{z}\right)(t_2-it_1)\right)}{z},\quad z=0\right) =$$

$$= 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{\exp\left(\frac{\rho T}{2}\right)\left(zt - \frac{1}{zt}\right)}{z},\quad z=0\right) = 2J_0(\rho T),$$

unde

$$T = \sqrt{t_1^2+t_2^2},\quad t = \frac{t_2+it}{T},\quad \text{iar}\quad J_n,\ n\in \mathbf{N},$$

sunt funcţiile Bessel de speţa întâi. Prin urmare

$$\varphi(t_1,t_2) = 2\pi\int_0^{\infty} \rho f(\rho)J_0(\rho T)d\rho.$$

În cazul particular dat

$$\varphi(t_1,t_2) = \left(\frac{2}{a^2}\right)\int_0^a \rho J_0(\rho T)d\rho = \left(\frac{2}{a^2T}\right)\int_0^a \frac{d}{d\rho}(\rho J_1(\rho T))d\rho = \left(\frac{2}{aT}\right)J_1(aT).$$

Aici s-a folosit relaţia

$$\frac{d}{dz}(zJ_1(z)) = zJ_0(z).$$

Exemplul 11. Să se determine funcţia caracteristică $\varphi(t_1,t_2)$ a vectorului aleator (X,Y), dacă acesta admite densitatea de probabilitate

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & \min(x,y) < 0 \\ xye^{-(x+y)}, & \min(x,y) \geq 0. \end{cases}$$

Funcţia caracteristică a vectorului aleator (X, Y) este

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, t_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(t_1x+t_2y)} xye^{-(x+y)} dx dy = \\ &= \int_0^\infty xe^{-(1-it_1)x} dx \int_0^\infty ye^{-(1-it_2)y} dy = \\ &= (1-it_1)^{-2}(1-it_2)^{-2}.\end{aligned}$$

Exemplul 12. Densitatea de probabilitate a vectorului aleator $X = (X_1, \ldots, X_n)$ este

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^n} \cdot \frac{1}{(1+x_1^2)\ldots(1+x_n^2)}.$$

Să se determine funcţia caracteristică a lui X şi să se studieze independenţa v.a. $X_1, \ldots, X_n$.

Funcţia caracteristică a lui X este

$$\begin{aligned}\varphi(t_1, \ldots, t_n) &= \int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty e^{i\sum\limits_{k=1}^n t_k x_k} p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it_1x_1}}{1+x_1^2} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it_nx_n}}{1+x_n^2} dx_n.\end{aligned}$$

Cu ajutorul formulei reziduurilor rezultă

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = e^{-|t|}.$$

Deoarece

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = e^{-\sum\limits_{k=1}^n |t_k|} = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t_k)$$

rezultă că v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente.

2.6 Cumulanţi (semi-invarianţi)

Fie $X = (X_1, \ldots, X_k)$ un vector aleator şi $\varphi(t_1, \ldots, t_k) = E(e^{i(t_1X_1+\ldots+t_kX_k)})$, funcţia sa caracteristică. Presupunem că există $n \in \mathrm{N}^*$ astfel încât $E(|X_i|)^n < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Rezultă că există momentele

$$m_X^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)} = E(X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_k})$$

pentru orice $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathrm{N}$, $\nu_1 + \ldots + \nu_k \leq n$. Aceasta implică existenţa şi continuitatea derivatelor parţiale

$$\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\partial t_1^{\nu_1} \ldots \partial t_k^{\nu_k}} \varphi(t_1, \ldots, t_k)$$

pentru $\nu_1 + \ldots + \nu_k \leq n$. Aşadar, dacă dezvoltăm $\varphi(t_1, \ldots, t_k)$ în serie Taylor obţinem

$$\varphi(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k \leq n} \frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1! \ldots \nu_k!} m_X^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} t_1^{\nu_1} \ldots t_k^{\nu_k} + o(|t|^n)$$

unde $|t| = |t_1| + \ldots + |t_k|$.

Deoarece φ este continuă şi $\varphi(0, \ldots, 0) = 1$, rezultă că φ este diferită de zero într-o vecinătate $|t| < \delta$ a originii. Deci, în această vecinătate, derivatele parţiale

$$\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\partial t_1^{\nu_1} \ldots \partial t_k^{\nu_k}} \ln \varphi(t_1, \ldots, t_k)$$

există şi sunt continue. Aşadar, putem considera dezvoltarea Taylor [19]

$$\ln \varphi(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_k \leq n} \frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1! \ldots \nu_k!} s_X^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} t_1^{\nu_1} \ldots t_k^{\nu_k} + o(|t|^n),$$

unde coeficienţii $s_X^{(\nu_1 \ldots \nu_k)}$ sunt numiţi *cumulanţi* (sau *semi-invarianţi*).

Observăm că, dacă X şi Y sunt independenţi, atunci

$$\ln \varphi_{X+Y}(t) = \ln \varphi_X(t) + \ln \varphi_Y(t)$$

şi de aceea

$$s_{X+Y}^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = s_X^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} + s_Y^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)}$$

care justifică denumirea de semi-invariant. Dacă $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ introducem următoarele notaţii

$$\nu! = \nu_1! \ldots \nu_k!; \; |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_k; \; t^\nu = t_1^{\nu_1} \ldots t_k^{\nu_k}.$$

Între momentele $m_X^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = m_X^{(\nu)}$ şi cumulanţii $s_X^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = s_X^{(\nu)}$ există următoarele relaţii care permit exprimarea unora în funcţie de ceilalţi

$$m_X^{(\nu)} = \sum \frac{1}{q!} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \ldots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} s_X^{(\lambda^{(p)})},$$

$$s_X^{(\nu)} = \sum \frac{(-1)^{q-1}}{q} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \ldots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} m_X^{(\lambda^{(p)})},$$

unde sumarea se face după toate mulţimile ordonate de vectori $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(q)})$ (cu componente din $\mathbf{N}$), astfel încât

$$|\lambda^{(p)}| > 0 \quad \text{şi} \quad \lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(q)} = \nu.$$

[19] Dacă $z = re^{i\theta}$, se ia $\ln z = \ln r + i\theta$.

Utilizând aceste relaţii obţinem

$$
\begin{aligned}
m_X^{(1)} &= s_X^{(1)} \\
m_X^{(1,2)} &= s_X^{(1,2)} + s_X^{(1)} s_X^{(2)} \\
m_X^{(1,2,3)} &= s_X^{(1,2,3)} + s_X^{(1,2)} s_X^{(3)} + s_X^{(1,3)} s_X^{(2)} + \\
&\quad + s_X^{(2,3)} s_X^{(1)} + s_X^{(1)} s_X^{(2)} s_X^{(3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Pentru $k = 1$ avem

$$
\begin{aligned}
m_1 &= s_1 \\
m_2 &= s_2 + s_1^2 \\
m_3 &= s_3 + 3s_1 s_2 + s_1^3 \\
m_4 &= s_4 + 3s_2^2 + 4s_1 s_3 + 6s_1^2 s_2 + s_1^4
\end{aligned}
$$

Capitolul 3

Repartiţii clasice

3.1 Repartiţia binomială

Fie X o v.a. discretă care ia valorile $0, 1, \ldots, n$, cu funcţia de frecvenţă

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p + q = 1, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Se observă că $P(X = k)$ este egală cu termenul general al dezvoltării binomului $(p+q)^n$. V.a. X reprezintă numărul de apariţii ale unui eveniment A în n experimente independente cum ar fi experimentul Bernoulli repetat (vezi exemplul 2, §1.3), unde p este probabilitatea realizării evenimentului A, iar q este probabilitatea realizării evenimentului contrar $\bar{A}$.

Se demonstrează că (*teorema limită locală De Moivre-Laplace*)

$$P(X = k) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{l_n^2}{2npq}} \tag{3.1}$$

unde $l_n = k - np$; $a\sqrt{n} \leq l_n \leq b\sqrt{n}$, $a, b, n =$ constante.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = np$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = npq$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n$, $t \in \mathbf{R}$;
- Modul (valoarea cea mai probabilă M_0) este numărul întreg care satisface relaţiile $np - q \leq M_0 \leq np + p$.

Observaţie. Se consideră n v.a. independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cu funcţiile de frecvenţă

$$X_j : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_j & q_j \end{pmatrix} \quad p_j + q_j = 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Repartiţia v.a. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ este numită *repartiţia binomială generalizată a lui Poisson.* Mulţimea valorilor lui X este $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Dacă $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, atunci v.a. X va fi repartizată binomial.

Se poate imagina că X desemnează numărul de bile albe extrase în ipoteza că probabilităţile de extragere a unei bile albe în cele n extrageri sunt respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (diferă de la o extragere la alta, păstrându-se însă independenţa lor). Funcţia de frecvenţă a v.a. X, adică $P(X = k)$, $k = \overline{1, n}$, este coeficientul lui t^k din dezvoltarea

$$(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2) \ldots (p_n t + q_n).$$

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j$;

- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j q_j$;

- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} (p_j e^{it} + q_j)$, $t \in \mathbf{R}$.

Exemplul 1. Un număr de k mesaje, conţinând $n_1, n_2, \ldots, n_k$ simboluri binare, sunt transmise (independent între ele) printr-un canal de comunicaţie. Probabilitatea de a transmite un simbol eronat este p. Când mesajele sunt decodificate, se pot corecta erori la cel mult două simboluri pentru fiecare din cele k mesaje. O eroare la cel puţin un simbol (după corectare) face ca întregul mesaj să fie eronat. Să se găsească probabilitatea q ca cel puţin unul dintre cele k mesaje să fie eronat.

Fie X_i, $1 \leq i \leq k$, v.a. ce desemnează numărul simbolurilor eronate în cel de-al i-lea mesaj. X_i are o repartiţie binomială cu parametrii n_i şi p. Cum

$$P(X_i \leq 2) = \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^{j} p^j (1-p)^{n_i - j}$$

rezultă

$$q = 1 - \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{2} C_{n_i}^{j} p^j (1-p)^{n_i - j}.$$

Exemplul 2. Se presupune că sunt date un număr de relee de transmisie care sunt "nesigure" în sensul următor: dacă este aplicată o tensiune releul închide şi transmite tensiunea în 90% din timpul de aplicare al acesteia. Se pune problema de a găsi un număr minim de relee, care montate în paralel, să asigure o transmitere a tensiunii timp de 99,99% din timpul de aplicare a tensiunii. Se va presupune că starea de funcţionare sau nefuncţionare a unui releu este independentă de starea celorlalte relee.

Dacă tensiunea este aplicată în intervalul $[0, T]$, atunci se admite că probabilitatea ca un releu să fie în funcţiune la momentul t $(0 \leq t \leq T)$ este 0,9.

Dacă numărul de relee este n, atunci probabilitatea ca cel puţin un releu să fie în funcţiune la momentul t este

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k (0,9)(0,1)^{n-k} = 1 - C_n^0 (0,9)^0 (0,1)^n = 1 - (0,1)^n.$$

Trebuie găsit n în aşa fel ca $1 - (0,1)^n = 0,9999$, de unde rezultă $n = 4$.

Exemplul 3. Un lot de produse de un anumit tip nu trebuie să conţină mai mult de 10% produse defecte. La controlul de calitate se iau la întâmplare 100 de produse şi întregul lot este respins, dacă se găsesc 5 sau mai multe produse defecte. Să se găsească probabilitatea ca un lot cu 10% defecte să fie acceptat.

Se consideră că lotul este suficient de mare, pentru ca probabilitatea de extragere a unui produs defect să rămână neschimbată după fiecare extragere.

Lotul este acceptat dacă din 100 de produse extrase sunt defecte cel mult 4. Considerând deci, o repartiţie binomială cu $p = 0,1$ şi $q = 0,9$, se obţine probabilitatea de a extrage cel mult 4 produse defecte

$$\sum_{k=0}^{4} C_{100}^k p^k q^{n-k} \cong 0,024.$$

Exemplul 4. Se consideră două recipiente A şi B, fiecare având $1dm^3$, conţinând $2,7 \cdot 10^{22}$ molecule de gaz. Recipientele sunt puse în contact, astfel ca între ele să existe un schimb liber de molecule. Se cere probabilitatea ca după 24 ore unul din recipiente să conţină cu $2,7 \cdot 10^{12}$ mai multe molecule de gaz decât celălalt.

Se admite că probabilitatea ca, după 24 ore, o moleculă să se afle într-unul sau altul din cele două recipiente, este egală cu $\frac{1}{2}$ (această ipoteză este traducerea matematică a afirmaţiei "între recipiente există un schimb liber de molecule"). Astfel, dacă k este numărul de molecule din A, atunci în B se vor găsi $5,4 \cdot 10^{22} - k$ molecule.

Probabilitatea ca în recipientul A să se găsească k molecule, conform repartiţiei binomiale este

$$p(k) = C_{5,4\cdot 10^{22}}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5,4\cdot 10^{22} - k} = C_{5,4\cdot 10^{22}}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5,4\cdot 10^{22}}.$$

Probabilitatea căutată va fi $\sum_k p(k)$, unde suma se ia după acei indici k pentru care

$$|k - (5,4 \cdot 10^{22} - k)| \geq 5,4 \cdot 10^{12},$$

adică după acei k pentru care

$$|k - 2,7 \cdot 10^{22}| \geq 2,7 \cdot 10^{12}.$$

Exemplul 5. Printr-un canal de comunicaţii se transmit 4 mesaje. Fiecare din ele, independent de celelalte, poate fi distorsionat. Probabilităţile de distorsiune pentru cele 4 mesaje sunt p_1, respectiv p_2, p_3, p_4. Se consideră v.a. X care desemnează numărul de mesaje distorsionate. Pentru $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,4$ se cere:

a) probabilitatea ca cel puţin un mesaj să fie distorsionat;

b) probabilitatea ca mai mult de trei mesaje să fie distorsionate;

c) $E(X)$ şi $\text{Var}(X)$.

Se vor utiliza rezultatele corespunzătoare repartiţiei binomiale generalizate. Avem $q_1 = 0,1$; $q_2 = 0,8$; $q_3 = 0,7$; $q_4 = 0,6$. Funcţia de frecvenţă a v.a. X se obţine din dezvoltarea

$$(0,9 + 0,1t)(0,8 + 0,2t)(0,7 + 0,3t)(0,6 + 0,4t)$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,3024 & 0,4404 & 0,2144 & 0,0404 & 0,0021 \end{pmatrix}.$$

a) $P(X \geq 1) = 0,6976$;

b) $P(X \geq 3) = 0,2572$;

c) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i = 1$; $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i q_i = 0,7$.

3.2 Repartiţia binomial negativă

Fie $c \in \mathbf{N}^*$, $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Se consideră v.a. X care ia valorile $c, c+1, \ldots$ şi a cărei funcţie de frecvenţă este dată de

$$P(X = n) = C_{n-1}^{c-1} p^c q^{n-c}, \quad n \geq c,$$

adică termenul general din dezvoltarea în serie de puteri ale lui q a funcţiei $p^c(1-q)^{-c}$.

V.a. X poate fi definită ca numărul de extrageri din urna lui Bernoulli cu bila repetată (vezi exemplul 2, §1.3) necesar pentru a obţine de c ori bila albă.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{c}{p}$;
- Varianţa $\text{Var}(X) = \dfrac{cq}{p^2}$;
- Modul $M_0 : \dfrac{c-1}{p} \leq M_0 \leq \dfrac{c-q}{p}$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = p^c e^{itc}(1 - qe^{it})^{-c}$, $t \in \mathbf{R}$.

Exemplul 1 (*Problema cutiei de chibrituri a lui Banach*). O persoană are în buzunarele din stânga şi din dreapta câte o cutie cu chibrituri, conţinând fiecare N chibrituri. De fiecare dată când are nevoie de un chibrit, persoana alege la întâmplare (cu probabilitatea $\frac{1}{2}$) una din cutii, din care ia chibrituri. Se cere probabilitatea ca în momentul în care persoana respectivă descoperă că o cutie este goală, cealaltă să conţină exact r chibrituri.

Alegerea succesivă a buzunarului este asimilată cu o urnă Bernoulli; bila albă va reprezenta buzunarul stâng. Cutia din buzunarul stâng va fi goală în momentul când cutia din buzunarul drept conţine exact r chibrituri dacă şi numai dacă a $(N+1)-$ a alegere a buzunarului stâng este precedată de $N-r$ alegeri ale buzunarului drept. Dacă X reprezintă v.a. ce desemnează numărul total de chibrituri consumate, atunci se poate considera că X urmează o repartiţie binomial negativă cu

$$c = N+1, \quad p = \frac{1}{2},$$

$$P(X = 2N - r + 1) = C_{2N-r}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-r} = C_{2N-r}^{N} 2^{-2N+r}.$$

Acelaşi raţionament se aplică şi dacă prima cutie goală este cea din buzunarul drept. Prin urmare

$$p = 2C_{2N-r}^{N} 2^{-2N+r} = C_{2N-r}^{N} 2^{-2N+r+1}.$$

3.3 Repartiţia geometrică

Fie $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$. Se consideră v.a. X având funcţia de frecvenţă

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

V.a. X reprezintă numărul de extrageri din urna lui Bernoulli cu bila repetată (vezi exemplul 2, §1.3), în care se obţine bila albă pentru prima dată. Legea geometrică se obţine din legea binomial negativă (vezi §3.2) pentru $c = 1$.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \frac{1}{p}$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$;
- Funcţia generatoare $g_X(t) = \frac{pt}{1 - qt}$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$.

Exemplul 1. La fiecare ciclu de imagine pe ecranul unui radar (independent de alte cicluri) un obiect este descoperit cu probabilitatea $p = 0.2$. Să se determine valoarea medie şi varianţa v.a. X care desemnează numărul de cicluri necesar până la obţinerea primei imagini a obiectului. Să se determine numărul minim de cicluri, după executarea cărora obiectul nu este descoperit cu o probabilitate mai mică sau egală cu 0,02.

Dacă $q = 1 - p = 0,8$ se obţine

$$E(X) = \frac{1}{p} = 5, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{q}{p^2} = 20.$$

Apoi trebuie determinat numărul minim de cicluri n cu proprietatea $P(X > n) \leq 0,02$. Întrucât

$$P(X > n) = 1 - P(x \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = q^n$$

rezultă că n se determină din inegalitatea $q^n \leq 0,02$ şi se obţine $n \geq 17,5$. Deci valoarea căutată este $n = 18$.

Exemplul 2. Într-un stoc se află n becuri; fiecare bec este defect cu probabilitatea p. Pentru a alege un bec, se încearcă pe rând la reţea până se găseşte un bec fără defect. Fie Z v.a. care desemnează numărul de becuri probate.

Se cere funcţia de frecvenţă a v.a. Z şi valoarea ei medie.

$P(Z = m)$ pentru $m < n$ se obţine utilizând repartiţia geometrică; $P(Z = n)$ este probabilitatea ca toate cele n becuri să fie probate, deci primele $n - 1$ sunt defecte. Prin urmare

$$P(Z = n) = p^{n-1},$$

iar dacă $q = 1 - p$, funcţia de frecvenţă a lui Z este

$$Z : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m & \dots & n-1 & n \\ q & pq & p^2q & \dots & p^{m-1}q & \dots & p^{n-2}q & p^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Funcţia generatoare (vezi §2.5) corespunzătoare va fi

$$g_Z(t) = \sum_{m=1}^{n-1} qp^{m-1}t^m + p^{n-1}t^n = \frac{qt - qp^{n-1}t^n}{1 - pt} + p^{n-1}t^n.$$

Deci

$$E(Z) = g_Z'(1) = \frac{1 - p^n}{1 - p}.$$

3.4 Repartiţia hipergeometrică

Se consideră o urnă cu a bile albe şi b bile negre. Se fac n extrageri succesive, fără a pune înapoi în urnă bila după fiecare extragere (*urna lui Bernoulli cu bila nerepetată*).

Fie X v.a. care desemnează numărul de bile albe extrase şi care poate lua valorile $0, 1, 2, \ldots, \min(a, n)$. Se demonstrează că

$$P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \quad 0 \leq k \leq \min(a, n).$$

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = np$;

- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = npq\dfrac{a+b-n}{a+b-1}$, (3.4)

unde

$$p = \frac{a}{a+b} \quad \text{şi} \quad q = \frac{b}{a+b}.$$

Exemplul 1. Se spune despre un complex, format din 10 unităţi, că este în stare de funcţionare, dacă la orice moment de timp cel puţin 5 unităţi funcţionează. La o verificare se inspectează 4 din cele 10 unităţi. Complexul este considerat în stare de funcţionare, dacă cel puţin 3 din cele 4 unităţi verificate funcţionează. Dacă, în realitate, numai 4 din cele 10 unităţi sunt în funcţiune, care este probabilitatea ca, în urma verificării, complexul să fie considerat în stare de funcţionare ?

Se notează cu $p(m)$ probabilitatea ca, din cele 4 unităţi inspectate, m să nu funcţioneze $(0 \leq m \leq 4)$.

Utilizând repartiţia hipergeometrică, în care $a = 6$, $b = 4$, probabilitatea căutată are valoarea

$$p(0) + p(1) \cong 0,12.$$

Exemplul 2. Un lot ce conţine 40 de produse este considerat acceptabil, dacă nu conţine mai mult de 5 produse defecte. Pentru a lua o decizie, se verifică la întâmplare, produs cu produs, până când este găsit un produs defect. Dacă aceasta se întâmplă în primele 6 verificări, atunci lotul este respins. Să se găsească o margine superioară pentru probabilitatea ca un lot necorespunzător să fie acceptat, respectiv pentru probabilitatea ca un lot corespunzător să fie respins.

Este clar că probabilitatea de a accepta un lot necorespunzător este cu atât mai mică, cu cât numărul de produse defecte din lot este mai mare. Deci pentru prima chestiune, se utilizează repartiţia hipergeometrică cu $a = 34$, $b = 6$, $n = 6$, $k = 6$ şi se obţine probabilitatea căutată $\dfrac{C_{34}^6 \cdot C_6^2}{C_{40}^6} \cong 0,35$.

Pentru cea de-a doua chestiune, un raţionament analog arată că probabilitatea căutată este

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

dacă $a = 5$, $b = 35$, $n = 6$; se obţine că ea este aproximativ 0,42.

Exemplul 3. Într-un lac se pescuiesc 1000 de peşti. Fiecare peşte prins este marcat şi apoi este aruncat din nou în lac. La un al doilea pescuit se prind tot 1000 de peşti şi se constată că dintre aceştia 100 sunt marcaţi. Se poate trage de aici o concluzie relativă la numărul de peşti din lac ?

Aceasta este o problemă de *estimare statistică* (vezi cap. 12). Se va presupune că pescuitul, în fiecare din cele două etape, este o selecţie întâmplătoare din colectivitatea generală a peştilor din lac (vezi §11.2) şi că numărul de peşti rămâne constant între cele două momente când se pescuieşte. Se fac următoarele notaţii:

a - numărul de peşti prinşi prima dată, deci marcaţi (care joacă rolul bilelor albe)

n - numărul de peşti prinşi a doua oară

k - numărul de peşti marcaţi prinşi a doua oară

b - numărul de peşti din lac nemarcaţi (care este necunoscut)

$P_b(k)$ - probabilitatea ca o doua oară să fie prinşi k peşti marcaţi.

Cu aceste notaţii, probabilitatea $P_b(k)$ poate fi calculată utilizând repartiţia hipergeometrică.

Numărul de peşti din lac este $a + b$ şi este evident că $a + b \geq a + n - k$.

În exemplul nostru $a = k = 1000$ şi $k = 100$; deci numărul de peşti din lac este cel puţin 1900.

Dacă se acceptă că numărul de peşti este chiar 1900, atunci

$$P_b(k) = \frac{C_{1000}^{100} C_{900}^{900}}{C_{1900}^{1000}} = \frac{(1000!)^2}{100!1900!}.$$

Această probabilitate are ordinul de mărime 10^{-430}, ceea ce ne îndreptăţeşte să admitem că această ipoteză este foarte puţin plauzibilă (este neverosimilă).

La aceeaşi concluzie se ajunge, dacă am presupune că numărul de peşti este foarte mare (de ordinul 10^6).

Aceste consideraţii ne conduc la alegerea acelei valori a lui b, pentru care $P_b(k)$ este maxim. Acest procedeu pentru estimarea lui b este cunoscut sub denumirea de *metoda verosimilităţii maxime* (vezi §12.2).

Astfel dacă se consideră raportul

$$\frac{P_b(k)}{P_{b-1}(k)} = \frac{b(a + b - n)}{(b - n + k)(a + b)}$$

se observă că acest raport este mai mare ca 1 pentru $b < \dfrac{a(n-k)}{k}$ şi este mai mic ca 1 pentru $b > \dfrac{a(n-k)}{k}$.

Rezultă că $P_b(k)$, ca funcţie de b, este crescătoare pentru $b < \dfrac{a(n-k)}{k}$ şi apoi descrescătoare pentru $b > \dfrac{a(n-k)}{k}$. Maximul are loc când $b = \left[\dfrac{a(n-k)}{k}\right]$ (cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu $\dfrac{a(n-k)}{k}$).

Pentru exemplul nostru se găseşte că valoarea cea mai verosimilă pentru b este $\hat{b} = 10000$.

3.5 Repartiţia Poisson

Pentru $\lambda > 0$ se consideră v.a. X cu valori în $\mathbf{N}$ şi cu funcţia de frecvenţă

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Repartiţia Poisson mai este numită *repartiţia evenimentelor rare* şi se obţine ca un caz limită al legii binomiale cu parametrii n şi p. Mai precis, pentru n suficient de mare, p mic, astfel încât să se poată considera produsul $np = \lambda$ de valoare constantă, şirul (X_n) de v.a. repartizate binomial cu parametrii n şi p, converge în repartiţie (vezi exemplul 8 §4.1) către X. Pe de altă parte, legea Poisson poate fi aproximată de o lege normală (vezi exemplul 9 §4.1).

În multe situaţii practice, numărul de defecţiuni ale unui utilaj, într-un interval de timp fixat, urmează o repartiţie Poisson (vezi exemplul 1).

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \lambda$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \lambda$; (3.5)
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = \exp \lambda(e^{it} - 1)$, $t \in \mathbf{R}$.

Exemplul 1. Se studiază numărul de defecţiuni ale unui utilaj în intervalul de timp $[0, T]$ şi fie X v.a. care desemnează acest număr. Se notează $P(m) = P(X = m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Se fac următoarele ipoteze:

a) repararea utilajului se face instantaneu (adică prin înlocuire din punct de vedere practic);

b) defectarea utilajului într-un interval de timp Δt este independentă de defectarea aparatului în orice interval de timp disjunct de acesta (nu se ţine seama de fenomene de uzură în timp);

c) probabilitatea de a avea o defecţiune în intervalul Δt este $p(\Delta t)$; iar funcţia $p(\Delta t)$ îndeplineşte condiţia

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{T}{\Delta t} p(\Delta t) = \lambda > 0,$$

(prin urmare, probabilitatea unei defecţiuni într-un interval mic este proporţională cu lungimea sa);

d) dacă $q(\Delta t)$ este probabilitatea ca în intervalul Δt să aibă loc două sau mai multe defecţiuni, atunci

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

(aceasta înseamnă că nu se iau în consideraţie defectări simultane).

Intervalul $[0, T]$ se împarte în n subintervale de lungime Δt; deci $n = \dfrac{T}{\Delta t}$. Dacă se notează $p_n = p(\Delta t)$, atunci

$$\lim_{n \to \infty} n p_n = \lambda.$$

Se notează cu $p(m, n)$ probabilitatea ca în m din cele n subintervale să se înregistreze câte o defecţiune şi fie $a_n = n p_n$. Ţinând seama de ipotezele făcute, se poate utiliza repartiţia binomială (vezi §3.1) pentru evaluarea lui $p(m, n)$. Se obţine

$$p(m,n) = C_n^m p_n^m (1 - p_n)^{n-m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{a_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{a_n^m}{m!} \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^m}.$$

Conform ipotezei (d) rezultă

$$|P(m) - p(m, n)| \le n q(\Delta t) = \frac{q(\Delta t)}{\Delta t} T \to 0$$

când $\Delta t \to 0$, deci când $n \to \infty$. Aşadar

$$P(m) = \lim_{n \to \infty} p(m, n) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Prin urmare, X urmează o repartiţie Poisson. Se observă că, în virtutea ipotezelor (c) şi (d), numărul mediu de defecţiuni în intervalul $[0, T]$ este aproximativ egal cu $p(\Delta t)\dfrac{T}{\Delta t} \cong \lambda$. Aceasta ne determină ca, în diversele exemple practice, ce se modelează cu ajutorul repartiţiei Poisson, să alegem pe λ ca fiind numărul mediu de apariţii ale respectivului eveniment. Pe de altă parte, rezultă că

$$p(\Delta t) \cong \frac{\lambda}{T}\Delta t,$$

constantele λ şi T fiind fixate. Aşadar probabilitatea $p(\Delta t)$ este de ordinul de mărime al lui Δt, deci mică. De aici provine numele de repartiţie a evenimentelor rare.

Exemplul 2. Un numărător de particule se blochează, dacă mai mult de 10 particule sunt într-o milisecundă. Numărul mediu de particule emise este de una pe milisecundă. Se cere probabilitatea ca numărătorul de particule să se blocheze într-un interval de timp de o milisecundă fixat în prealabil.

Se notează cu $p(k)$, probabilitatea ca numărul de particule emise în intervalul dat să fie k şi se calculează cu ajutorul repartiţiei Poisson pentru $\lambda = 1$.

Probabilitatea de blocare este

$$\sum_{k=11}^{\infty} p(k) = 1 - \sum_{k=0}^{10} p(k) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{e^{-1}}{k!} \cong 10^{-7}.$$

Exemplul 3. Se consideră o centrală telefonică cu un mare număr de abonaţi, caracterizată de un trafic mediu de 50000 apeluri telefonice pe zi. Se numeşte nivel de supraîncărcare cel mai mic număr N, cu proprietatea că probabilitatea a N sau mai multe apeluri pe secundă este mai mică decât 0.001.

Se cere nivelul de supraîncărcare.

Numărul mediu de apeluri pe secundă este $\dfrac{50}{24 \cdot 3600} \cong 0,58$.

Probabilitatea $p(k)$, de a avea k apeluri într-un interval de timp de p secunde fixat, se calculează utilizând repartiţia Poisson cu $\lambda = 0,58$.

Nivelul de supraîncărcare va fi cel mai mic număr întreg N pentru care

$$p(N) + p(N+1) + \ldots \leq 0,001.$$

Întrucât λ este subunitar, termenii sumei de mai sus începând cu al doilea sunt neglijabili în primă aproximaţie, în raport cu $p(N)$. Astfel N se determină din inegalitatea $p(N) \leq 0,001$ şi se găseşte $N = 5$.

Exemplul 4. Particulele cosmice, care întâlnesc un satelit, generează un câmp cu densitatea a (particule/m^2).

Un agregat al satelitului, care se găseşte în câmpul de particule, are suprafaţa S (m^2). Pentru ieşirea din funcţiune a acestui agregat este suficient să fie bombardat de 2 particule; dacă este bombardat de o singură particulă, atunci el iese din funcţiune cu probabilitatea p.

Se cere probailitatea ieşirii din funcţiune. Numărul mediu de particule, care bombardează agregatul respectiv, este $\lambda = as$.

Se consideră următoarele evenimente:

A - agregatul iese din funcţiune,

H_0 - agregatul nu este lovit de nici o particulă,

H_1 - agregatul este lovit de o singură particulă,

H_2 - agregatul este lovit de două sau mai multe particule.

Admiţând că fluxul particulelor ce lovesc agregatul este poissonian rezultă

$$P(H_0) = e^{-\lambda}, \quad P(H_1) = \lambda e^{-\lambda}, \quad P(H_2) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda).$$

Din ipoteze rezultă

$$P(A \mid H_0) = 0, \quad P(A \mid H_1) = p, \quad P(A \mid H_2) = 1.$$

Utilizând formula probabilităţii totale (vezi teorema 1.2, §1.3) se obţine

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \\ &= p\lambda e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda}(1+\lambda). \end{aligned}$$

3.6 Repartiţia normală

Densitatea de repartiţie normală cu parametrii $m \in \mathbf{R}$ şi $\sigma > 0$, notată $N(m, \sigma)$, este

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Caracteristici principale:

- Valoarea medie $E(X) = m$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, $t \in \mathbf{R}$.

Graficul densităţii de repartiţie $p(x)$ pentru $m = 0$ şi $\sigma = 1$ este dat în fig. 3.1. În general, pentru diverse valori ale lui $m \in \mathbf{R}$ şi $\sigma > 0$, graficul este simetric faţă de $x = m$, are un maxim de coordonate $\left(m, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ şi două puncte de inflexiune pentru $x = m \pm \sigma$. Graficul este cunoscut sub numele de *clopotul lui Gauss*.

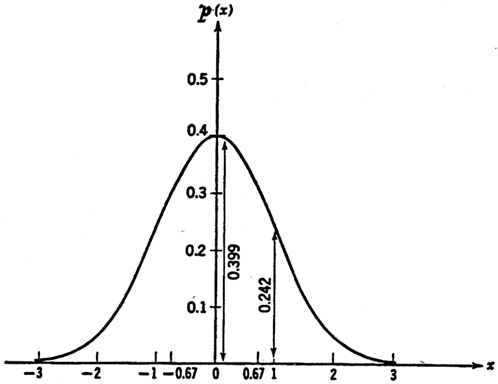


Fig. 3.1.

Legea normală normată (*standard* sau *redusă*) $N(0,1)$ are funcţia de repartiţie

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

care se numeşte *funcţia lui Laplace* şi este tabelată (vezi anexa 1). Graficul ei este dat în fig. 3.2.

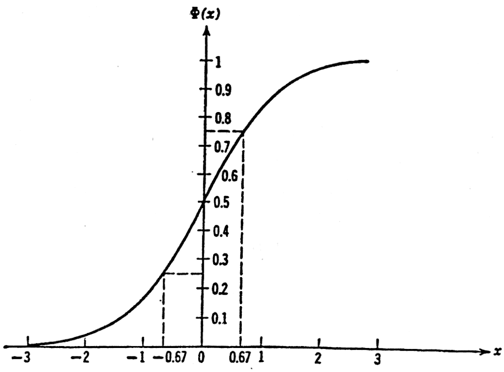


Fig. 3.2

Se observă că $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $x \geq 0$; iar dacă X este repartizată $N(m, \sigma)$, atunci

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad a < b.$$

În particular

$$P(m - \alpha \leq X \leq m + \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - 1, \quad \alpha > 0. \tag{3.6}$$

Densitatea normală a fost introdusă de Gauss [1], ca densitatea căreia trebuie să i se supună erorile de observaţie, pentru ca media aritmetică a unei mulţimi de măsurări să fie cea mai apropiată de valoarea adevărată. Deşi, în realitate, nu există o lege normală a erorilor, după cum s-a observat, totuşi densitatea normală are o importanţă teoretică foarte mare, fiind întâlnită în problemele asimptotice din teoria probabilităţilor.

Exemplul 1. Fie X o v.a. repartizată $N(m, \sigma)$. Să se determine probabilitatea ca X să se abată de la valoarea sa medie m cu mai mult de 3σ.

Conform relaţiei (3.6) se obţine

$$\begin{aligned} P(|X-m| > 3\sigma) = 1 - P(|X-m| \leq 3\sigma) = \\ = 1 - P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) = 1 - 2\Phi(3). \end{aligned}$$

Din tabele (vezi anexa 1) se găseşte $\Phi(3) \cong 0,49865$. Prin urmare

$$P = (|X-m| > 3\sigma) \cong 0,0027.$$

Exemplul 2. O uzină produce bile pentru rulmeţi cu diametrul nominal 10(mm). În realitate diametrul este o v.a. repartizată $N(10; 0,4)$. La controlul de calitate se acceptă doar bilele cu diametrul cuprins între 9,3 şi 10,7. Să se determine procentul de rebuturi.

Probabilitatea ca o bilă să fie rebutată este

$$\begin{aligned} P(|X-m| > 0,7) = 1 - P(|X-m| \leq 0,7) = \\ = 1 - \left(2\Phi\left(\frac{0,7}{0,4}\right) - 1\right) = 2(1 - \Phi(1,75)) \cong 0,08. \end{aligned}$$

Prin urmare există aproximativ 8% rebuturi.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a fost un mare matematician german.

3.7 Repartiţia lognormală

Densitatea de repartiţie a v.a. X este lognormală, dacă este de forma

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-\theta)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(x-\theta)-m]^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Prin urmare v.a. $Y = \ln(x - \theta)$ este repartizată $N(m, \sigma)$.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \theta + e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$;
- Varianţa $\text{Var}(X) = e^{2m}e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

3.8 Repartiţia uniformă

Se spune că v.a. X este uniform repartizată pe intervalul $[a, b]$, dacă are densitatea de repartiţie

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \text{ sau } x > b. \end{cases}$$

Prin urmare funcţia de repartiţie va fi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$;
- Varianţa $\text{Var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$; (3.7)
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{(b-a)it}$, $t \in \mathbf{R}$.

Exemplul 1. Să se determine probabilitatea ca o v.a. X, repartizată uniform pe $[a, b]$, să se abată de la valoarea medie cu mai mult de 3σ, unde $\sigma = (b-a)\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Valoarea medie $m = \dfrac{(a+b)}{2}$ conform (3.7). Se obţine

$$P(|X - m| > 3\sigma) = 1 - P(|X - m| \leq 3\sigma) = 1 - F(m + 3\sigma) + F(m - 3\sigma) =$$

$$= 1-F\left(\frac{b(1+\sqrt{3})+a(1-\sqrt{3})}{2}\right)+F\left(\frac{b(1-\sqrt{3})+a(1+\sqrt{3})}{2}\right) = 1-1+0 = 0$$

întrucât $\frac{b(1+\sqrt{3})+a(1-\sqrt{3})}{2} > b$ şi $\frac{b(1-\sqrt{3})+a(1+\sqrt{3})}{2} < a$; F reprezintă funcţia de repartiţie uniformă.

Exemplul 2. Între orele 7 şi 8 un tren (metrou) pleacă dintr-o staţie la 3; 5; 8; 10; 13; 15; 18; 20 ... minute după ora 7. Să se determine probabilitatea ca o persoană ce soseşte în staţie să aştepte mai puţin de un minut pînă la plecarea primului tren, dacă se presupune că momentul de sosire al persoanei urmează o repartiţie uniformă în intervalul de timp de la 7 la 8.

Fie A evenimentul a cărui probabilitate ne interesează. Acest eveniment constă în faptul că persoana soseşte într-unul din intervalele 2 la 3, 4 la 5, 7 la 8, 9 la 10, ş.a.m.d. Întrucât funcţia de repartiţie a momentului sosirii este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{60}, & 0 \le x \le 60 \\ 1, & x > 60 \end{cases}$$

rezultă conform (2.1)

$$P(A) = [F(3) - F(2)] + [F(5) - F(4)] + \ldots = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Se remarcă asemănarea dintre acest exemplu şi exemplul 4, §1.2, precum şi posibilitatea utilizării sale în practică, aşa cum s-a menţionat în exemplul citat.

Exemplul 3. Un mecanism, ce urmează o repartiţie uniformă pe intervalul $[0, 1]$, alege la întâmplare un număr din acest interval. Se cere probabilitatea ca cea de-a doua zecimală a rădăcinii pătrate a numărului ales să fie egală cu k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Se notează cu A_k evenimentul a cărui probabilitate ne interesează. Se observă că $x \in A_k$ dacă şi numai dacă există $m = 0, 1, 2, \ldots, 9$ astfel încât

$$m + \frac{k}{10} \le 10\sqrt{x} < m + \frac{k+1}{10},$$

adică dacă şi numai dacă există $m = 0, 1, \ldots, 9$ astfel încât

$$\frac{1}{100}\left(m + \frac{k}{10}\right)^2 \le x < \frac{1}{100}\left(m + \frac{k+1}{10}\right)^2.$$

Lungimea acestui interval este

$$\frac{1}{10000}(20m + 2k + 1)$$

şi deci

$$P(A_k) = \frac{1}{10000}\sum_{m=0}^{9}(20m + 2k + 1) = 0,001 + 0,0002k.$$

3.9 Repartiţia exponenţială

Densitatea de probabilitate exponenţială este

$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$, $t \in \mathbf{R}$.

Repartiţia exponenţială are un rol important în teoria fiabilităţii. Astfel, repartiţia duratei de funcţionare neîntreruptă a unei instalaţii (dacă nu se ia în consideraţie uzura în timp) este exponenţială.

De asemenea, dacă numărul de defecţiuni în orice interval $[0,t]$ este repartizat Poisson cu parametrul λt, atunci intervalul între două defecţiuni succesive este repartizat exponenţial cu parametrul λ.

Repartiţia exponenţială reprezintă un model în diferite probleme ce se referă la durata de aşteptare, de exemplu, în telefonie, reţele de servire şi aprovizionare etc.

Dacă X este o v.a. cu densitate exponenţială, atunci pentru orice numere reale nenegative s şi t se obţine

$$P(X > s + t | X > s) = \frac{\lambda \int_{s+t}^{\infty} e^{-\lambda u} du}{\lambda \int_{s}^{\infty} e^{-\lambda u} du} = e^{-\lambda t} = P(X > t). \tag{3.8}$$

Semnificaţia probabilistă a relaţiei (3.8) este următoarea: faptul că am aşteptat un anumit timp, nu are nici o influenţă asupra duratei ulterioare a aşteptării (ca şi cum am aşteptat în zadar). Acest fapt poate fi exprimat în mod sugestiv, spunând că X nu are memorie. Lipsa de memorie a densităţii exponenţiale este o proprietate caracteristică a acesteia în sensul următor: o v.a. nenegativă X satisface condiţia

$$P(X > s + t|X > s) = P(X > t), \quad s \ge 0, \quad t \ge 0,$$

dacă şi numai dacă este o variabilă exponenţială.

În fapt, se arată că dacă funcţia f definită pe $[0, \infty)$ este descrescătoare şi satisface ecuaţia funcţională a lui Cauchy

$$f(s+t) = f(s) \cdot f(t), \quad s \geq 0, \quad t \geq 0,$$

atunci $f(t) = e^{-\lambda t}$, unde $\lambda \geq 0$.

Se observă, în plus, că repartiţia geometrică (vezi §3.3) furnizează doar în cazul discret prin relaţia

$$P(X > m+n | X > m) = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n = P(X > n), \quad m, n \in \mathbf{N},$$

un analog al relaţiei (3.8), deoarece lipsa de memorie poate deveni falsă dacă m şi n nu sunt numere întregi (de exemplu pentru $m = n = 1/2$).

Exemplul 1. Se presupune că durata de funcţionare neîntreruptă a unui utilaj este o v.a. T, ce urmează o repartiţie exponenţială cu parametrul λ (semnificaţia fizică pentru λ, numită *intensitate de avariere*, este dată de faptul că probabilitatea de defectare într-un interval de lungime Δt este $\lambda \Delta t + o(\Delta t))$[2].

Presupunând că utilajul a funcţionat fără defecţiuni până la momentul τ, să se determine repartiţia v.a. T_τ, care reprezintă intervalul până la prima defectare după momentul τ.

Pentru $t > 0$ se obţine

$$P(T_\tau \leq t) = P(\tau < T \leq t + \tau | T > \tau) = \frac{e^{-\lambda \tau} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda \tau}} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Prin urmare, repartiţia timpului rămas până la prima defecţiune nu depinde de cât timp era utilajul în funcţiune (se exclude fenomenul de uzură în timp).

Exemplul 2. Făcând un studiu pe un număr mare de tranzistori de acelaşi tip, s-a constatat că intensitatea de defectare este constantă, adică raportul

$$\frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{N(T)},$$

unde $N(t)$ este numărul de tranzistori în stare de funcţionare la momentul t, este aproximativ acelaşi pentru toate valorile lui t.

Calculând

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t) - N(t+\Delta t)}{N(t)} = -\frac{dN(t)}{dt}$$

[2] $0(\Delta t)$ este neglijabilă în raport cu Δt, adică $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

în ipoteza făcută, rezultă că

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda, \quad \lambda > 0,$$

de unde

$$N(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad C = \text{const}.$$

Scriind că probabilitatea $p(t)$ de defectare în intervalul $[0, t]$ este aproximativ egală cu frecvenţa relativă, se obţine

$$p(t) = \frac{N(0) - N(t)}{N(0)} = \frac{C - Ce^{-\lambda t}}{C} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Prin urmare, durata de funcţionare neîntreruptă urmează o repartiţie exponenţială.

3.10 Repartiţia Weibull

Densitatea de repartiţie Weibull este

$$p(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right], \quad \gamma \le x < \infty,$$

unde β, γ şi η reprezintă parametri pozitivi (*β-parametrul de formă*, *η-parametrul de scală*, *γ-parametrul de locaţie*).

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \gamma + \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ [3];
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \eta^2\left[\Gamma(1 + 4\beta) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]$; (3.9)
- Modul $M_0 = \gamma + \eta\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{1/\beta}$;
- Mediana $m = \gamma + \eta(\ln 2)^{1/\beta}$.

Pentru $\beta = 1$ se obţine repartiţia exponenţială.

Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}.$$

[3] Funcţia Γ este funcţia euleriană $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} dx$.

Legea Weibull se mai poate prezenta astfel:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b} \quad x \geq 0 \quad a, b > 0;$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^k}{\lambda}} \quad x \geq 0 \quad k, \lambda > 0;$$

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x^k} \quad x \geq 0 \quad \theta, k > 0.$$

Dacă X este repartizată Weibull (cu parametri θ, k), atunci X^k este repartizată exponenţial.

Legea Weibull este utilizată în teoria fiabilităţii, atunci când se iau în consideraţie şi fenomenele de uzură.

3.11 Repartiţia Rayleigh

Repartiţia Rayleigh este un caz particular al legii Weibull pentru $\beta = 2$ (vezi §3.10). Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x^2}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

3.12 Repartiţia Gamma

Densitatea de repartiţie Gamma este

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, & x > 0 \end{cases}$$

unde $a, p > 0$, iar Γ este funcţia euleriană

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{p}{a}$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{p}{a^2}$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{it}{a}\right)^p}$, $t \in \mathbf{R}$.

Pentru $p = 1$ se obţine legea exponenţială cu parametrul a.
Pentru $p = k \in \mathbf{N}$ şi $a = \lambda k$ se obţine

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda k x}, & x > 0 \end{cases}$$

care este numită *repartiţia Erlang.* Pentru $p = \dfrac{n}{2}$ şi $a = \dfrac{1}{2\sigma^2}$ $(\sigma > 0)$ se obţine repartiţia χ^2 (vezi §3.14).

3.13 Repartiţia Beta

V.a. X este repartizată Beta cu parametrii $\mu, \nu > 0$, dacă are densitatea de repartiţie

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Funcţia de repartiţie este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{\int_0^x y^{\mu-1}(1-\mu)^{\nu-1}dy}{B(\mu,\nu)}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

unde funcţia B este funcţia euleriană

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \text{cu} \quad p > 0,\ q > 0.$$

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{\mu}{\mu+\nu}$;

- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2(\mu+\nu+1)}$; (3.10)

- Momentul de ordinul r $E(X^r) = \dfrac{\Gamma(\mu+\nu)\Gamma(\mu+r)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\nu+r)}$.

Pentru $\mu = \nu = 1$ se obţine legea uniformă (vezi §3.8).

3.14 Repartiţia χ^2 (hi pătrat)

Densitatea de repartiţie χ^2 este

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{n/2-1}e^{-x/2\sigma^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

unde $n \in \mathbf{N}^*$ reprezintă numărul gradelor de libertate şi $\sigma > 0$.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = n\sigma^2$;
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = 2n\sigma^4$;
- Momentul de ordinul r $E(X^r) = 2^r \left(\frac{n}{2} + r - 1\right) \dots \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{n}{2}\right) \sigma^{2r}$;
- Funcţia caracteristică $\varphi_X(t) = (1 - 2\sigma^2 it)^{-n/2}$, $t \in \mathbf{R}$.

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independente repartizate $N(m, \sigma)$ (vezi §3.6). Se consideră v.a. $Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)^2$ a cărei repartiţie se cere. Să calculăm funcţia de repartiţie $F_Y(x)$ a v.a. Y. Este evident că $F_Y(x) = 0$ pentru $x < 0$; pentru $x \geq 0$, conform relaţiei (2.7) rezultă

$$F_Y(x) = \int_{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 \leq \sigma^2 x\right\}} \dots \int p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Deoarece v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt independente şi identic repartizate $N(m, \sigma)$, rezultă că

$$p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

şi se obţine

$$F_Y(x) = \int_{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 \leq x\right\}} \dots \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{2}} dy_1 \dots dy_n,$$

în urma schimbării de variabile $\frac{x_i - m}{\sigma} = y_i$, $i = \overline{1, n}$. Pentru a calcula integrala se trece la coordonate sferice generalizate, adică

$$y_1 = \rho \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \cos\theta_{n-1}$$

$$y_2 = \rho \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \sin\theta_{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = \rho \sin\theta_1$$

unde

$$\rho > 0, \ \theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \theta_{n-1} \in (0, 2\pi)$$

şi se obţine

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{n-1} D(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) d\rho d\theta_{n-1} \ldots d\theta_1 = \\ &= C_n \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{n-1} d\rho, \end{aligned}$$

unde $\rho^{n-1}D(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ este valoarea absolută a jacobianului transformării şi

$$C_n = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_0^{2\pi} D(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) d\theta_{n-1} \ldots d\theta_1.$$

Constanta C_n se determină utilizând ecuaţia

$$F_Y(+\infty) = 1 = C_n \int_0^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho^{n-1} d\rho = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1}.$$

Prin urmare

$$F_Y(x) = \frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{x}} \rho^{n-1} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho$$

şi prin derivare se găseşte densitatea de repartiţie a v.a. Y

$$p_Y(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Deci Y urmează o repartiţie χ^2 cu n grade de libertate.

3.15 Repartiţia t a lui Student

V.a. X este repartizată Student cu $s(s > 0)$ grade de libertate, dacă are densitatea de repartiţie

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{s}\right)^{-(s+1)/2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Momentele de ordin impar sunt nule, iar cele de ordin par sunt

$$E(X^{2p}) = s^p \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} - p\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}, \quad p < \frac{s}{2}.$$

Prin urmare $E(X) = 0$ şi $\text{Var}(X) = \dfrac{s}{(s-2)}$.

3.16 Repartiţia F a lui Snedecor-Fisher

Densitatea de repartiţie Snedecor-Fisher este

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{s_1+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s_2}{2}\right)} \left(\dfrac{s_1}{s_2}\right)^{\frac{s_1}{2}} x^{\frac{s_1}{2}-1} \left(1+\dfrac{s_1}{s_2}x\right)^{-\frac{s_1+s_2}{2}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

unde $s_1, s_2 > 0$ sunt grade de libertate.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{s_2}{s_2-2}$, $\quad s_2 > 2$;

- Varianţa $\text{Var}(X) = \dfrac{2s_2^2(s_1+s_2-2)}{s_1(s_2-2)^2(s_2-4)}$, $\quad s_2 > 4$. (3.11)

3.17 Repartiţia Z a lui Fisher

Se consideră v.a. $Y = \dfrac{1}{2}\ln X$, unde X este o v.a. repartizată F, cu s_1 şi s_2 grade de libertate (vezi §3.16). Atunci densitatea de repartiţie Z a lui Fisher este

$$p_Y(x) = 2\frac{\Gamma\left(\dfrac{s_1+s_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s_2}{2}\right)} \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{\frac{s_1}{2}} e^{s_1 x} \left(1+\frac{s_1}{s_2}e^{2x}\right)^{-\frac{s_1+s_2}{2}}.$$

3.18 Repartiţia Cauchy

Densitatea de repartiţie Cauchy $C(m, a)$ este

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+(x-m)^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

unde $a > 0$ şi $m \in \mathbf{R}$.

Funcţia caracteristică este

$$\varphi_X(t) = e^{imt - a|t|},\ t \in \mathbf{R}.$$

Această repartiţie are media infinită.

3.19 Repartiţia Pareto

Densitatea de repartiţie Pareto $Pa(k, \alpha)$ este

$$p(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{x^{\alpha+1}},\ x > k,$$

unde $k > 0$ şi $\alpha > 0$.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = \dfrac{\alpha k}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1;$
- Varianţa $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{\alpha k^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}, \quad \alpha > 2.$

3.20 Repartiţia normală n-dimensională

Vectorul aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ are repartiţia normală n-dimensională dacă densitatea sa de repartiţie este

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det A}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t A^{-1}(x-m)},$$

unde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

m este un vector $n \times 1$, $A = (\sigma_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ este o matrice $n \times n$ pozitiv definită, iar $(x-m)^t$ este transpusul lui $(x-m)$.

Caracteristici principale:

- Media $E(X) = m^t = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}^t;$
- Matricea de covarianţă are elementele

$$\mathrm{cov}\,(X_i, X_j) = \sigma_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n$$

(vezi §2.4).

Dacă matricea de covarianţă este astfel încât $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$, atunci $p(x_1, \ldots, x_n)$ este produsul densităţilor a n v.a. necorelate $X_1, X_2, \ldots, X_n$, repartizate respectiv $N(m_i, \sigma_i)$, $i = \overline{1,n}$, $(\sigma_i = \sigma_{ii})$.

3.21 Repartiţia multinomială

Se consideră vectorul aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$, fiecare din v.a. discrete X_i, $i = \overline{1,m}$ putând lua valorile întregi $0, 1, 2, \ldots, n$, astfel încât

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_m = n.$$

Presupunem că funcţia de frecvenţă a vectorului aleator $(X_1, X_2, \ldots, X_{m-1})$ este

$$\begin{aligned} P(X_1 &= k_1,\ X_2 = k_2, \ldots, X_{m-1} = k_{m-1}) = \\ &= P(X_1 = k_1, \ldots, X_{m-1} = k_{m-1}, X_m = k_m) = \\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

unde

$$k_1 + k_2 + \ldots k_m = n,\ p_j, \quad j = \overline{1,m},$$

sunt numere pozitive date şi $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Expresia din membrul drept al relaţiei (3.12) este termenul general al dezvoltării $(p_1 + p_2 + \ldots + p_m)^n$.

Observaţie. Experimentul ce serveşte drept model de repartiţie multinomială genera-lizează schema lui Bernoulli cu bila repetată (vezi §3.1 şi exemplul 2, §1.3). Generalizarea constă în faptul că urna conţine bile de m culori, iar probabilitatea de a extrage o bilă de culoare j este p_j, $j = \overline{1,m}$. Prin urmare, X_j desemnează numărul de bile de culoare j, obţinute după n extrageri, punându-se bila în urnă după fiecare extragere.

Caracteristici principale:

- Media $E(X_j) = np_j \quad 1 \leq j \leq m$; (3.13)
- Varianţa $\mathrm{Var}(X_j) = np_j(1 - p_j) \quad 1 \leq j \leq m$;
- Covarianţa $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j, \quad 1 \leq i, j \leq n$.
- Funcţia caracteristică este

$$\varphi_X(t_1, t_2, \ldots, t_m) = (p_1 e^{it_1} + p_2 e^{it_2} + \ldots + p_m e^{it_m})^n.$$

Fie $l_j = k_j - np_j$ şi $a, b \in \mathbf{R}_+$ astfel încât

$$a\sqrt{n} \leq l_j \leq b\sqrt{n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Atunci pentru $n \to \infty$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_m = k_m) \cong \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{l_j^2}{np_j}}}{(2\pi n)^{\frac{(m-1)}{n}} \sqrt{p_1 p_2 \ldots p_m}}. \quad (3.14)$$

Relaţia (3.14) reprezintă *expresia asimptotică pentru repartiţia multinomială.*

De asemenea, vectorul aleator

$$\left(\frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1}}, \frac{X_2 - np_2}{\sqrt{np_2}}, \ldots, \frac{X_{m-1} - np_{m-1}}{\sqrt{np_{m-1}}} \right)$$

urmează la limită (convergenţă în repartiţie conform §4.1) o repartiţie normală $(m-1)$-dimensională (vezi §3.20).

Observaţie. Experimentul urnei de mai sus poate fi generalizat, înlăturând presupunerea referitoare la punerea bilei în urnă după fiecare extragere. În acest fel, se obţine şi o generalizare a experimentului ce conduce la repartiţia hipergeometrică (vezi §3.4).

Funcţia de frecvenţă corespunzătoare va fi

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_m = k_m) = \frac{C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2} \ldots C_{N_m}^{k_m}}{C_N^n} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m},$$

unde $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$; N este numărul total de bile din urnă, iar N_j $j = \overline{1,m}$, este numărul de bile de culoare j; $N_1 + \ldots + N_m = N$.

Caracteristici principale:

- Media $E(X_j) = np_j$;

- Varianţa $\mathrm{Var}(X_j) = np_j(1 - p_j)\dfrac{N-n}{N-1}$;

- Covarianţa $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = np_i p_j \dfrac{N-n}{N-1}$.

3.22 Repartiţia Poisson multidimensională

Se consideră vectorul aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, fiecare din v.a. X_i luând valori în mulţimea $\mathbf{N}$. Atunci funcţia de frecvenţă este dată de

$$P(X_1 = k_1,\ X_2 = k_2, \ldots, X_n = k_n) = \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_n^{k_n}}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\, e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j},$$

unde $k_j \in \mathbf{N}$, $j = \overline{1,n}$, iar $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1,n}$, sunt constante date.

Repartiţia Poisson multidimensională se obţine ca un caz limită al repartiţiei multinomiale pentru $p_i \to 0$ $(i = \overline{1,n})$, $p_{n+1} \to 1$ când $n \to \infty$, astfel încât $np_i = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$.

Capitolul 4

Şiruri de variabile aleatoare

4.1 Tipuri de convergenţă

În teoria probabilităţilor există diverse tipuri de convergenţă. Deoarece v.a. sunt funcţii măsurabile particulare, rezultă că pentru ele au sens tipurile de convergenţă definite pentru funcţiile măsurabile. Trei dintre acestea şi anume convergenţa în probabilitate, aproape sigură, în medie de ordinul r, sunt importante în teoria probabilităţilor. Un alt tip de convergenţă, specifică teoriei probabilităţilor, este convergenţa în repartiţie sau slabă.

Fie X_n, $(n \in \mathbf{N}^*)$ şi X v.a. reale definite pe un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Problema convergenţei şirului $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ către v.a. X este concepută în următoarele moduri:

1) Şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge în probabilitate* către X ($X_n \xrightarrow{p} X$, $n \to \infty$), dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty.$$

2) Şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge aproape sigur* [1] către X ($X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $n \to \infty$), dacă

$$P(\{\omega | X_n(\omega) \to X(\omega), \quad n \to \infty\}) = 1.$$

3) Şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge în medie de ordinul* r [2] către X ($X_n \xrightarrow{r} X$, $n \to \infty$), dacă există momentele absolute $E(|X_n|^r)$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi $E(|X|)$ şi dacă

$$E(|X_n - X|^r) \to 0, \quad n \to \infty.$$

4) Şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge în repartiţie sau slab* către X ($X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$), dacă

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x), \quad n \to \infty \quad \forall x \in C(F_X),$$

---

[1] Convergenţa aproape sigură se mai numeşte şi *convergenţa cu probabilitate 1.*

[2] Convergenţa în medie de ordinul r se mai numeşte şi *convergenţă în r-medie.* Dacă $r = 2$, convergenţa în 2-medie se mai numeşte şi *convergenţă în medie pătratică.*

unde F_{X_n}, $n \in \mathbf{N}^*$ şi F_X sunt funcţiile de repartiţie ale v.a. X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ şi respectiv X, iar $C(F_X) = \{x | \, F_X(x) \text{ este continuă în} x\}$ reprezintă mulţimea de continuitate a lui F_X.

Trebuie remarcat că v.a. limită este unic definită în sensul următor . Dacă $X_n \to X$ şi $X_n \to Y$, $n \to \infty$, aproape sigur, în probabilitate sau în r-medie, atunci $X = Y$ aproape sigur (a.s.), adică $P(X = Y) = 1$ (echivalent cu $P(\{\omega | \, X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$). Pentru convergenţa în repartiţie, unicitatea limitei se traduce prin $F_X(x) = F_Y(x)$ pentru orice x, adică X şi Y sunt identic repartizate. Aceste precizări fiind făcute, se poate enunţa următoarea teoremă.

Teorema 4.1. *Dacă $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge aproape sigur, în probabilitate, în r-medie sau în repartiţie, atunci v.a. limită este unică.*

Se pune, evident, întrebarea dacă tipurile de convergenţă, introduse mai sus, sunt într-adevăr diferite şi dacă sunt, în ce relaţie se află unele faţă de altele. Compararea acestor moduri de convergenţă a dus la următoarele rezultate secundare

a) dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $n \to \infty$, atunci $X_n \xrightarrow{p} X$, $n \to \infty$ [3] ;

b) dacă $X_n \xrightarrow{p} X$, $n \to \infty$, atunci există un subşir $(X_{n_k})_{k\in\mathbf{N}^*}$ astfel încât $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$, $k \to \infty$;

c) dacă $X_n \xrightarrow{r} X$, $n \to \infty$, atunci $X_n \xrightarrow{p} X$, $n \to \infty$[4];

d) dacă $X_n \xrightarrow{r} X$, $n \to \infty$, atunci $X_n \xrightarrow{r'} X$, $n \to \infty$, pentru $r' < r$;

e) dacă $X_n \xrightarrow{p} X$, $n \to \infty$, atunci $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$.

Observaţie. Conceptele de convergenţă aproape sigură şi convergenţă în r-medie nu pot fi comparate, deoarece nici unul nu-l implică pe celălalt (vezi exemplul 2).

În fine, se poate conchide cu următorul rezultat

Teorema 4.2. *Dacă X şi $X_1, X_2, \dots$ sunt v.a. definite pe acelaşi câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, atunci au loc următoarele implicaţii când $n \to \infty$*

$$\begin{array}{ccc} X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow & X_n \xrightarrow{p} X & \Rightarrow X_n \xrightarrow{w} X \\ & \Uparrow & \\ & X_n \xrightarrow{r} X. & \end{array}$$

În plus, faţă de acest rezultat general, se mai poate stabili echivalenţa convergenţelor în probabilitate şi în repartiţie, dacă v.a. limită este degenerată

[3] Exemplul 1, §4.1, arată că cele două tipuri de convergenţă nu sunt echivalente.

[4] Implicaţia reciprocă nu are loc, în mod banal, deoarece $E(|X_n - X|^r)$ s-ar putea să nu existe (vezi exemplul 2 şi exemplul 5, §4.1).

(adică este o constantă). Dacă v.a. limită X este constanta c, atunci funcţia de repartiţie corespunzătoare ei este δ_c, unde

$$\delta_c(x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c. \end{cases}$$

În §2.5 s-a văzut utilitatea transformatelor în determinarea repartiţiilor unor v.a. În acest paragraf se va stabili că transformatele sunt utile în demonstrarea convergenţei în repartiţie. Astfel pentru a arăta că $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$, este suficient să demonstrăm că transformatele v.a. X_n converg la transformata v.a. X. Au loc următoarele rezultate[5].

Teorema 4.3. *Fie $X, X_1, X_2, \dots$ v.a. discrete cu valori întregi nenegative. Dacă $g_{X_n}(t) \to g_X(t)$, $n \to \infty$, atunci $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$.*

Teorema 4.4. *Fie $X, X_1, X_2, \dots$ v.a. astfel încât $\psi_{X_n}(t)$ există pentru $|t| < h$, pentru un anume $h > 0$ şi orice $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă funcţia generatoare de momente a v.a. X, $\psi_X(t)$, există pentru $|t| \leq h_1 < h$, $h_1 > 0$ şi $\psi_{X_n}(t) \to \psi_X(t)$, $n \to \infty$, pentru $|t| \leq h_1$, atunci $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$.*

Teorem 4.5 (Helly). *Dacă $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$, atunci şirul $(\varphi_{X_n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniform în orice interval mărginit către φ_X. Reciproc, dacă şirul $(\varphi_{X_n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge punctual pe $\mathbf{R}$ către o funcţie φ continuă în origine, atunci există o v.a. X cu funcţia caracteristică $\varphi_X = \varphi$ astfel încât $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$.*

Exemplul 1. Fie $X_1, X_2, \dots$ v.a. independente astfel încât $P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}$ şi $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$, $n > 1$. Să se arate că $X_n \xrightarrow{p} 1$, $n \to \infty$, dar X_n nu converge aproape sigur la 1, când $n \to \infty$ ($X_n \overset{a.s.}{\not\to} 1$, $n \to \infty$).

Evident pentru orice $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 1| > \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Deci $X_n \xrightarrow{p} 1$, $n \to \infty$. Pentru a arăta că $X_n \overset{a.s.}{\not\to} 1$, $n \to \infty$, este necesar să facem apel la următoarea condiţie: $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $n \to \infty$, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi δ, $0 < \delta < 1$, există n_0 astfel încât pentru orice $n > n_0$

$$P\Big(\bigcap_{m>n} \{|X_m - X| < \varepsilon\}\Big) > 1 - \delta \tag{4.1}$$

sau echivalent

$$P\Big(\bigcup_{m>n} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\Big) < \delta.$$

[5] Astfel de rezultate sunt cunoscute sub denumirea de "teoreme de continuitate". Două aplicaţii importante vor fi date în paragrafele următoare şi anume legea numerelor mari şi teorema limită centrală.

Cum pentru orice $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0,1)$ şi $N > n$ se obţine

$$P\left(\bigcap_{m>n}\{|X_m - 1| < \varepsilon\}\right) \le P\left(\bigcap_{m=n+1}^{N}\{|X_m - 1| < \varepsilon\}\right) =$$

$$= \prod_{m=n+1}^{N} P(|X_m - 1| < \varepsilon) = \prod_{m=n+1}^{N} P(X_m = 1) = \prod_{m=n+1}^{N}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{n}{N} < 1 - \delta$$

cu condiţia să alegem N astfel încât $N > \dfrac{n}{1-\delta}$, rezultă că nu există nici un n_0, pentru care să aibă loc relaţia (4.1). Deci X_n nu converge a.s.

Exemplul 2. Fie $\alpha > 0$ şi $X_1, X_2, \ldots$ v.a. astfel încât $P(X_n = 1) = 1 - \dfrac{1}{n^\alpha}$ şi $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $n > 1$. Să se arate că $X_n \xrightarrow{p} 1, n \to \infty$ şi $X_n \xrightarrow{r} 1, n \to \infty$, când $r < \alpha$, dar X_n nu converge în r-medie când $r \ge \alpha$.

Cum $P(|X_n - 1| > \varepsilon) = P(X_n = n) = \dfrac{1}{n^\alpha} \to 0, n \to \infty$, rezultă că $X_n \xrightarrow{p} 1$, $n \to \infty$. Deoarece

$$E(|X_n - 1|^r) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right) + |n-1|^r \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{(n-1)^r}{n^\alpha},$$

rezultă că

$$E(|X_n - 1|^r) \to \begin{cases} 0, & r < \alpha \\ 1, & r = \alpha, \quad n \to \infty, \\ +\infty, & r > \alpha \end{cases}$$

ceea ce implică concluzia dorită.

Dacă $\alpha = 1$ şi în plus $X_1, X_2, \ldots$ sunt v.a. independente atunci se observă că: $X_n \xrightarrow{p} 1$; X_n nu converge aproape sigur; $E(X_n) \to 2$, $n \to \infty$; $X_n \xrightarrow{r} 1$, $n \to \infty$ pentru $0 < r < 1$ şi X_n nu converge în r-medie pentru $r \ge 1$.

Dacă $\alpha = 2$ şi $X_1, X_2, \ldots$ sunt v.a. independente atunci se observă că: $X_n \xrightarrow{p} 1$, $n \to \infty$; $X_n \xrightarrow{a.s.} 1$, $n \to \infty$; $E(X_n) \to 1$ şi $\mathrm{Var}(X_n) \to 1$, $n \to \infty$; $X_n \xrightarrow{r} 1$, $n \to \infty$, pentru $0 < r < 2$ şi X_n nu converge în r-medie pentru $r \ge 2$.

În concluzie, în cazul $\alpha = 1$ X_n converge în r-medie pentru $0 < r < 1$, dar nu converge aproape sigur; în cazul $\alpha = 2$ X_n converge aproape sigur, în timp ce X_n nu converge în r-medie pentru $r \ge 2$.

Exemplul 3. Se consideră câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ unde $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{K} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ şi P este măsura Lebesgue pe dreaptă. Fie şirul de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ definit astfel

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le \omega \le 1 \end{cases}$$

şi v.a.

$$X(\omega)=\begin{cases}1, & 0\le\omega<\dfrac{1}{2}\\ 0, & \dfrac{1}{2}\le\omega\le 1.\end{cases}$$

Să se arate că X_n nu converge în probabilitate către X, dar $X_n \xrightarrow{w} X$, $n\to\infty$. Cum $P(|X_n-X|=1)=1$, rezultă concluzia dorită. Funcţiile de repartiţie ale v.a. X_n, $n\in\mathbf{N}^*$ şi X sunt

$$F_{X_n}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

şi respectiv

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Cum $F_{X_n}(x)=F_X(x)\ \forall x\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}^*$, rezultă că $F_{X_n}(x)\to F_X(x)$, $n\to\infty$, $x\in\mathbf{R}$. Deci $X_n\xrightarrow{w}X$, $n\to\infty$.

Exemplul 4. Se consideră câmpul de probabilitate $(\Omega,\mathcal{K},P)$, unde $\Omega=[0,1)$, $\mathcal{K}=\mathcal{B}_{[0,1)}$ şi P este măsura Lebesgue de dreaptă. Pentru orice $m\in\mathbf{N}^*$, se consideră v.a. $X_1^{(m)},\ldots,X_m^{(m)}$ definite astfel

$$X_i^{(m)}(\omega)=\begin{cases}1, & \dfrac{i-1}{m}\le\omega<\dfrac{i}{m}\\ 0, & \text{în rest}\end{cases},\quad i=\overline{1,m}.$$

Să se arate că şirul de v.a.

$$X_1^{(1)},X_1^{(2)},X_2^{(2)},X_1^{(3)},X_2^{(3)},X_3^{(3)},\ldots,X_1^{(n)},X_2^{(n)},\ldots,X_n^{(n)},\ldots$$

unde $X_1^{(1)}(\omega)=1\quad\forall\omega\in[0,1)$, converge în probabilitate către zero, dar nu converge aproape sigur către zero.

Cum pentru orice $\varepsilon>0$

$$P(|X_k^{(n)}|\ge\varepsilon)=P\left(\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{1}{n},$$

iar $P(|X_k^{(n)}|\ge\varepsilon)<\eta$ dacă $n>N(\varepsilon,\eta)$, rezultă că $X_k^{(n)}\xrightarrow{P}0$, $k,n\to\infty$.

Dacă $\omega_0 \in [0,1)$, atunci pentru orice m există un i astfel încât $\omega_0 \in \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)$ şi deci $X_i^{(m)}(\omega_0) = 1$. Rezultă că în şirul

$$X_1^1(\omega_0), X_1^{(2)}(\omega_0), X_2^{(2)}(\omega_0), X_1^{(3)}(\omega_0), X_2^{(3)}(\omega_0), X_3^{(3)}(\omega_0), \ldots$$

oricare ar fi rangul termenului din şir, găsim după el termeni ai şirului egali cu 1. Deci $X_k^{(n)}$ nu converge aproape sigur către zero.

Exemplul 5. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. astfel încât fiecare v.a. X_n poate lua numai valorile $0, -n$ şi n cu probabilităţile

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Să se arate că şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge în probabilitate către zero, dar nu converge în medie pătratică către zero.

Cum pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$ există $N(\varepsilon, \eta)$ astfel încât

$$P(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{2n^2} < \eta \quad \forall n > N(\varepsilon, \eta),$$

rezultă că $X_n \xrightarrow{p} 0$, $n \to \infty$. Deoarece

$$E(|X_n - 0|^2) = E(X_n^2) = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = 1$$

rezultă că X_n nu converge în medie pătratică către zero.

Exemplul 6. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente, care au repartiţie exponenţială, iar $E(X_k) = ck^\alpha$, unde $c > 0$ şi $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Să se arate că şirul $\left(\bar{X}_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$, unde $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, converge în probabilitate către zero.

Fie v.a. $Y_n = \bar{X}_n - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}$. Atunci se obţine

$$E(Y_n) = E(\bar{X}_n) - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1} = \frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1} = c\frac{n^\alpha}{n}\left(\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha - \frac{n}{\alpha+1}\right).$$

Cum X_k are repartiţie exponenţială cu media ck^α, rezultă că densitatea de probabilitate a v.a. X_k este

$$p_{X_k}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{ck^\alpha} e^{-\frac{x}{ck^\alpha}}, & x > 0. \end{cases}$$

Printr-un calcul simplu rezultă că $E(X_k^2) = 2c^2k^{2\alpha}$ şi $\mathrm{Var}(X_k) = c^2k^{2\alpha}$. Atunci

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{cn^\alpha}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \frac{c^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha}.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha+1}$$

şi $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(Y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{c^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = c^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-2\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha+1}}\sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha} = 0.$$

Din inegalităţile

$$P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq P\left(|Y_n - E(Y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4\mathrm{Var}(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

rezultă că $Y_n \xrightarrow{p} 0$, $n \to \infty$.

Exemplul 7. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente pentru care

$$P(X_n = 3^{n-1}) = P(X_n = -3^{n-1}) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că şirul de v.a.

$$Y_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

unde $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$, nu converge în probabilitate către zero.

Se observă că $|X_n| = 3^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Cum

$$\begin{aligned} |X_n| &= |X_n + X_{n-1} - X_{n-1}| \leq |X_n + X_{n-1}| + |X_{n-1}| \leq \\ &\leq |X_n + X_{n-1} + \ldots + X_1| + |X_{n-1}| + \ldots + |X_1| \end{aligned}$$

rezultă că

$$|Y_n| \geq \frac{|X_n| - |X_1| - |X_2| - \ldots - |X_{n-1}|}{\sigma_n}.$$

V.a. X_n, $n \in \mathbf{N}^*$, fiind independente se obţine

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 3^{2(k-1)} = \frac{3^{2n}-1}{3^2-1} = \frac{9^n-1}{8}$$

deoarece $E(X_k) = 0$ şi $E(X_k^2) = 3^{2(k-1)}$. Atunci $\sigma_n = \sqrt{\frac{9^n-1}{8}}$ şi

$$|Y_n| \geq \frac{3^{n-1} - (1+3+\ldots+3^{n-2})}{\sqrt{\dfrac{9^n-1}{8}}} > \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Deci $P\left(|Y_n| > \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) = 1$. În concluzie $P(|Y_n| > \varepsilon) \to 0$ dacă $\varepsilon \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$, adică Y_n nu converge în probabilitate către zero.

Exemplul 8. Un fapt important este aproximarea repartiţiei Poisson de parametru λ (vezi §3.5) cu repartiţia binomială de parametri n şi p (vezi §3.1). Mai precis, pentru n suficient de mare, p mic, astfel încât să se poată considera produsul $np = \lambda$ de valoare constantă, şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de v.a. repartizate binomial de parametri n şi p converge în repartiţie către o v.a. X repartizată Poisson. Cum

$$g_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}t\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(t-1)}{n}\right)^n \to e^{\lambda(t-1)},\ n \to \infty,$$

iar $g(t) = e^{\lambda(t-1)}$ reprezintă funcţia generatoare a unei v.a. X repartizată Poisson, rezultă conform teoremei 4.3 că $X_n \xrightarrow{w} X$, $n \to \infty$.

Exemplul 9. Fie $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir strict crescător de numere strict pozitive ce tinde la $+\infty$, iar $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. astfel încât, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$, v.a. X_n este repartizată Poisson cu parametrul λ_n (vezi §3.5). Să se arate că şirul de v.a.

$$Y_n = \frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

converge în repartiţie către o v.a. Y repartizată normal $N(0,1)$.

Funcţia caracteristică $\varphi_{Y_n}(t)$ a v.a Y_n (vezi §2.5 şi §3.5) este

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}\exp[\lambda_n(e^{it/\sqrt{\lambda_n}} - 1)].$$

Folosind dezvoltarea în serie Maclaurin a funcţiei exponenţiale se obţine

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_n}(t) &= \exp\left[-i\sqrt{\lambda_n}t + \lambda_n\left(\frac{it}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{t^2}{2\lambda_n} + o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \lambda_n o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\right]\end{aligned}$$

şi prin urmare $\varphi_{Y_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, $n \to \infty$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Cum $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in \mathbf{R}$, reprezintă funcţia caracteristică a unei v.a Y repartizată normal $N(0,1)$ (vezi §3.6), rezultă conform teoremei 4.5 că $Y_n \xrightarrow{w} Y$, $n \to \infty$.

Exemplul 10 (*Teorema integrală De Moivre-Laplace*). Se consideră v.a. bernoulliene $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, (vezi exemplul 3, §2.4), adică

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{cu probabilitatea } p \\ 0, & \text{cu probabilitatea } q = 1-p \end{cases}$$

$\forall i = \overline{1,n}$ şi v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că şirul $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de v.a.

$$Y_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

converge în repartiţie către o v.a. repartizată normal $N(0,1)$ (vezi §3.6).

Deoarece v.a X_n, $n \in \mathbf{N}^*$, sunt independente (vezi §3.1) şi fiecare din ele are funcţia caracteristică $\varphi(t) = pe^{it} + q$, rezultă conform propoziţiei 2.10 că funcţia caracteristică a v.a $Y_n = \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{X_i - p}{\sqrt{npq}}$ este

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(qe^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} + pe^{it\sqrt{\frac{q}{np}}}\right)^n.$$

Folosind dezvoltarea în serie Maclaurin a funcţiei exponenţiale se obţine

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= \left[q\left(1 - it\sqrt{\frac{p}{nq}} - t^2\frac{p}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + p\left(1 + it\sqrt{\frac{q}{np}} - \right.\right. \\ &- \left.\left. t^2\frac{q}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n. \end{aligned}$$

Deci

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{-n\left[\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad n \to \infty.$$

Prin urmare pentru fiecare $t \in \mathbf{R}$, $\varphi_{Y_n}(t)$ converge către funcţia caracteristică a repartiţiei normale $N(0,1)$ şi conform teoremei 4.5 rezultă că Y_n converge în repartiţie către o v.a. repartizată $N(0,1)$.

4.2 Legea numerelor mari

Legătura dintre frecvenţă ca v.a. şi probabilitate constituie elementul de bază al aplicaţiilor practice ale teoriei probabilităţilor. Diversele rezultate privind această problemă fundamentală sunt cunoscute sub numele de *variante ale legii numerelor mari*.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. reale definite pe acest câmp şi $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de aplicaţii ale lui $\mathbf{R}^n$ în $\mathbf{R}$, măsurabile Borel, simetrice în argumentele lor. Se consideră şirul de v.a. $\tau_n(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

În acest paragraf se studiază condiţiile în care există un şir de numere reale $(a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ astfel încât

1) $\tau_n(X_1,\ldots,X_n) - a_n \xrightarrow{p} 0,\ n\to\infty$

sau

2) $\tau_n(X_1,\ldots,X_n) - a_n \xrightarrow{a.s.} 0,\ n\to\infty.$

În cazul 1 (2) se spune că şirul $(X_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ satisface *legea slabă a numerelor mari* (*legea tare a numerelor mari*) sau că $(X_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este *slab stabil* (*tare stabil*) în raport cu (τ_n, a_n). De obicei se consideră cazul în care

$$\tau_n(X_1,\ldots,X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ şi } a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k), \quad n\in \mathbf{N}^*.$$

În această situaţie, pentru simplificarea scrierii, se adoptă notaţiile

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

$$\bar{X}_n = \tau(X_1,\ldots,X_n) = \frac{S_n}{n}.$$

Pentru a descrie o situaţie concretă de la care provine formularea problemei de mai sus, enunţăm în condiţii destul de restrictive următoarea teoremă, cunoscută sub denumirea *legea slabă a numerelor mari.*

Teorema 4.6 (Hincin)[6]. *Fie $(X_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente, identic repartizate, având valoarea medie, m, finită ($m<\infty$). Atunci $\bar{X}_n \xrightarrow{p} m,\ n\to\infty$.*

Observaţia 1. Cazul particular al teoremei 4.6, în care v.a. sunt bernoulliene, a fost demonstrat prima oară de Bernoulli[7]. Pentru timpul respectiv, acest rezultat a fost considerat un foarte mare succes. Teorema Bernoulli explică stabilitatea frecvenţei relative (vezi §1.2) pentru un număr mare de experimente. O formulare a teoremei Bernoulli este următoarea: dacă se fac n exprimente independente, în fiecare experiment probabilitatea evenimentului A fiind p, atunci cu o probabilitate oricât de apropiată de 1, abaterea frecvenţei relative de apariţie a evenimentului A faţă de p, va fi oricât de mică în valoare absolută cu condiţia ca numărul n al experimentelor să fie suficient de mare.

Uneori această teoremă se enunţă şi sub forma: frecvenţa tinde în probabilitate către probabilitate (evident în această formulare cuvântul probabilitate intervine în două sensuri diferite, însă bine definite). Deci

$$\frac{N_n(A)}{n} \xrightarrow{p} p, \quad n\to\infty,$$

[6] A. Ja. Hincin (1894-1959) a fost unul din probabiliştii de seamă ai şcolii ruseşti.

[7] Jakob Bernoulli (1654-1705), matematician şi fizician elveţian, a pus bazele calculului probabilităţilor în tratatul său apărut postum *Ars Conjectandi* (1713).

unde $N_n(A)$ reprezintă numărul de apariţii ale evenimentului A în cele n experimente, $\frac{N_n(A)}{n}$ frecvenţa relativă de apariţie a evenimentului A, iar p probabilitatea evenimentului A.

Trebuie remarcat că teorema Bernoulli nu afirmă faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} = p$, ci numai că pentru n suficient de mare frecvenţa relativă se va deosebi oricât de puţin de probabilitatea p.

O extensie a teoremei 4.6 constă în următoarea teoremă, în care v.a. X_n, $n \in \mathbf{N}^*$, nu mai sunt neapărat identic repartizate.

Teorema 4.7 (Cebîşev). *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente astfel încât*

$$E(X_i) = m_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2, \quad \forall i \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă există o constantă $M < \infty$ astfel încât $\sigma_i^2 \leq M$ $\forall i \in \mathbf{N}^*$, atunci

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}, \quad n \to \infty.$$

Observaţia 2. În ce constă esenţa teoremei lui Cebîşev ? În virtutea ei, deşi v.a. independente pot lua valori depărtate de mediile lor, media aritmetică a unui număr suficient de mare de astfel de v.a. ia cu o probabilitate mare valori apropiate de un număr constant şi anume $\frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}$. În acest fel, între comportarea fiecărei v.a. şi a mediei lor aritmetice există o mare deosebire: nu este posibil să se prevadă ce valoare va lua fiecare dintre v.a., însă cu o probabilitate mare se poate prevedea ce valoare va lua media aritmetică a acestor v.a. În concluzie, media aritmetică a unui număr suficient de mare de v.a. (având bineînţeles varianţe mărginite) îşi pierde caracterul de v.a. Explicaţia acestui fapt constă în aceea că abaterile diverselor v.a. sunt unele negative, altele pozitive şi astfel ele se compensează.

Demonstraţia[8] teoremei 4.7 se bazează pe inegalitatea lui Cebîşev (vezi (2.15), §2.4). Acest rezultat celebru, dar simplu, are din punct de vedere teoretic o mare importanţă. În schimb, pentru practică, are o importanţă limitată deoarece dă o evaluare grosolană (uneori banală). De exemplu, dacă $E(X^2) \leq a^2$ (a = constantă) rezultă

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(X^2)}{a^2} \leq \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad \text{(nimic util)}.$$

Alte extensii importante ale teoremei lui Hincin sunt următoarele

[8] Demonstraţiile teoremelor 4.6 şi 4.7 sunt relativ simple, de aceea pare surprinzător că au trecut două secole de la Bernoulli, până când Cebîşev a descoperit teorema care îi poartă numele. Însuşi Cebîşev şi-a îngreunat demonstraţia cu detalii laborioase şi inutile. Succesorii lui au redactat demonstraţia teoremei într-o formă mult simplificată.

Teorema 4.8. *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente două câte două astfel încât*

$$E(X_i) = m_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2, \quad \forall i \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 0,$$

atunci

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}, \quad n \to \infty.$$

Teorema 4.9 (Markov[9]). *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. astfel încât*

$$E(X_i) = m_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2, \quad \forall i \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă

$$\lim \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0,$$

atunci

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}, \quad n \to \infty.$$

Teorema 4.10. *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ să satisfacă legea slabă a numerelor mari este*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))\right)^2}{n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))\right)^2}\right] = 0.$$

În cazul bernoullian, E. Borel a descoperit în 1909 un rezultat celebru ce se poate formula astfel

$$\frac{N_n(A)}{n} \xrightarrow{a.s.} p, \quad n \to \infty,$$

ceea ce este echivalent cu

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} = p\right) = 1.$$

Această esenţială îmbunătăţire a legii slabe a numerelor mari, în forma Bernoulli, stabileşte existenţa limitei frecvenţei, fiind egală cu probabilitatea teoretică p, pentru orice eveniment elementar ω, cu excepţia unei mulţimi de probabilitate nulă.

[9]P.L.Cebîşev (1821-1894) împreună cu A.A. Markov (1856-1922) şi A.M. Liapunov (1857-1918) au fost fondatorii şolii ruseşti de teoria probabilităţilor.

Astfel printr-o sofisticată teoremă se justifică teoria empirică a frecvenţei. De aceea legea tare a numerelor mari reprezintă fundamentul teoriei matematice a probabilităţilor, bazată pe conceptul de frecvenţă. Legea tare a numerelor mari este indispensabilă unor investigaţii teoretice, fiind într-un sens mai bună decât legea slabă, deşi părerile multor matematicieni sunt controversate în legătură cu acest subiect (vezi p.152 [Feller] şi p.98 [van der Waerden, Mathematische Statistik, Springer-Verlag, 1971]).

Teoreme similare celor prezentate mai sus, dar în care convergenţa în probabilitate este înlocuită cu convergenţa aproape sigură au fost demonstrate de Kolmogorov.

Teorema 4.11 (Kolmogorov). *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente astfel încât*

$$E(X_i) = m_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2 < \infty, \quad \forall i \in \mathbf{N}^*.$$

Dacă

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{\sigma_i^2}{n^2} < \infty, \quad \textit{atunci} \quad \bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}, \quad n \to \infty.$$

Corolarul 4.12 *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente astfel încât*

$$E(X_i) = m_i, \quad \mathrm{Var}(X_i) \leq M < \infty, \quad \forall i \in \mathbf{N}^*.$$

Atunci

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}, \quad n \to \infty.$$

Teorema 4.13 (Kolmogorov). *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente, identic repartizate, având valoarea medie m. Atunci $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} m, \quad n \to \infty$, dacă şi numai dacă $m < \infty$.*

Observaţia 3. Ţinând seama de rezultatele prezentate în §4.1 referitoare la compararea tipurilor de convergenţă rezultă că un şir de v.a. ce satisface legea tare a numerelor mari, satisface şi legea slabă a numerelor mari.

Exemplul 1. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente care pot lua valorile $\pm\sqrt{n}$ şi 0 cu probabilităţile $P(X_1 = 0) = 1$ şi

$$P(X_k = \sqrt{k}) = P(X_k = -\sqrt{k}) = \frac{1}{k}, \quad P(X_k = 0) = 1 - \frac{2}{k}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Să se arate că şirul dat satisface legea slabă a numerelor mari.

Deoarece $E(X_k) = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ şi $\mathrm{Var}(X_k) = 2$, $k = 2, 3, \ldots$ rezultă că sunt îndeplinite condiţiile teoremei 4.7. Deci şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisface legea slabă a numerelor mari.

Exemplul 2. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente care pot lua valorile $\pm\sqrt{\ln n}$ cu probabilităţile $P(X_1 = 0) = 1$ şi

$$P(X_k = \sqrt{\ln k}) = P(X_k = -\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Să se arate că şirul dat satisface legea slabă a numerelor mari

Deoarece $E(X_k) = 0$ şi $\mathrm{Var}(X_k) = \ln k$, $\quad k = 2, 3, \ldots$ rezultă

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0,$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Însă $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$ poate fi majorată după cum urmează

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k < \int_1^{n+1} \ln x dx = x\ln x|_1^{n+1} - \int_1^{n+1} dx = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

Deci

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) < \frac{(n+1)\ln(n+1) - n}{n^2},$$

de unde urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = 0$. Atunci conform teoremei 4.8, şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisface legea slabă a numerelor mari.

Exemplul 3. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente de valori medii $E(X_n) = 0$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi varianţe $\mathrm{Var}(X_n) = n^\lambda$, $n \in \mathbf{N}^*$, unde $0 < \lambda < 1$. Să se arate că şirul dat satisface legea slabă a numerelor mari.

Din condiţiile cuprinse în enunţ rezultă

$$E(\bar{X}_n) = 0 \quad \text{şi} \quad \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^\lambda.$$

Iar din majorarea

$$\sum_{k=1}^{n} k^\lambda < \int_1^{n+1} x^\lambda dx = \frac{(n+1)^{\lambda+1} - 1}{\lambda + 1}$$

rezultă că

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) < \frac{(n+1)^{\lambda+1} - 1}{(\lambda+1)n^2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

întrucât $\lambda + 1 < 2$. Atunci conform teoremei 4.8, şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisface legea slabă a numerelor mari.

Exemplul 4. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente cu densităţile de repartiţie

$$p_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{n}} \exp\left[-\frac{(x-a^n)^2}{\sqrt{n}}\right], \ 0 \le a < 1, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se arate că şirul dat satisface legea slabă a numerelor mari.

Se obţine

$$E(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X_k}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{k}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-a^k)^2}{\sqrt{k}}\right] dx = a^k,$$

$$\operatorname{Var}(X_k) = E(X_k - a^k)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a^k)^2 p_{X_k}(x)dx = \frac{\sqrt{k}}{2}, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

Cum

$$\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{2} < \frac{n\sqrt{n}}{2n^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\bar{X}_n) = 0$. Atunci conform teoremei 4.8 şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisface legea slabă a numerelor mari.

Exemplul 5. Fie S_n numărul de apariţii ale unui eveniment A în n experimente independente şi p_k probabilitatea lui A în experimentul de rang k. Acest model este o generalizare a modelului lui Bernoulli cu bila repetată în care $p_k = p$, pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$ (vezi §3.1). Considerând v.a. independente X_k, $k \in \mathbf{N}^*$, ce semnifică rezultatul experimentului de rang k, cuantificat prin 1 sau 0, în acord cu apariţia evenimentului A sau a evenimentului contrar $\bar{A}$, se obţine $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Deoarece $E(X_k) = p_k$ şi $\operatorname{Var}(X_k) = p_k(1-p_k) \le \frac{1}{4}$ pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$, rezultă conform corolarului 4.12 că

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n}, \quad n \to \infty.$$

Deci şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisface legea tare a numerelor mari.

4.3 Problema limită centrală

Problema limită centrală este un caz particular dintr-o problematică mai generală şi anume aceea a studiului repartiţiei limită a sumelor de v.a. independente.

O multitudine de aplicaţii, în special în statistica matematică, arată importanţa acestei probleme.

Rezolvarea ei a fost, o lungă perioadă de timp, problema cheie a teoriei probabilităţilor.

În acest paragraf se vor considera numai şiruri de v.a. independente $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ care admit varianţe finite. Se introduc notaţiile

$$a_k = E(X_n), \quad \sigma_k^2 = \mathrm{Var}(X_k), \quad \sigma_{(n)}^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

Problema limită centrală constă în stabilirea condiţiilor în care funcţia de repartiţie $F_{(n)}$ a v.a. normate (pentru că are valoarea medie nulă şi varianţa egală cu 1)

$$X_{(n)} = \frac{1}{\sigma_{(n)}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)$$

converge către funcţia de repartiţie normală $N(0,1)$, deci către funcţia

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \quad \text{când } n \to \infty.$$

Aşadar, este vorba despre o convergenţă în repartiţie. Teoremele care stabilesc aceste condiţii de convergenţă se numesc *teoreme limită centrale*. Spre exemplu, teorema De Moivre-Laplace[10] (vezi exemplul 10, §4.1) este o teoremă limită centrală.

Teorema 4.14 (Lindeberg-Feller). *Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente. Pentru ca*

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \Phi(x), \; x \in \boldsymbol{R} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \frac{\sigma_k^2}{\sigma_{(n)}^2} = 0$$

este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{(n)}^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|x-a_k|>\varepsilon\sigma_{(n)}\}} (x - a_k)^2 dF_k(x) = 0^{11}$$

unde F_k este funcţia de repartiţie a v.a. X_k, $k \in \mathbf{N}^*$.

Corolarul 4.15. *Dacă v.a. $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, sunt independente, identic repartizate şi admit varianţe finite, atunci $\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$.*

[10] Cazul particular, în care v.a. $X_1, X_2, \ldots$ sunt bernoulliene a fost tratat prima oară de Abraham De Moivre ((1667-1754) considerat succesorul lui Newton) în lucrarea sa "Doctrină a şanselor" (1714). Mai târziu, Laplace a extins şi a realizat importanţa acestui rezultat în tratatul său "Teoria analitică a probabilităţilor" (1812).

[11] Integrala este Lebesgue-Stieltjes (vezi Gnedenko 1969). Dacă F_k admite densitatea de repartiţie p_k, atunci $dF_k(x)$ se înlocuieşte cu $p_k(x)dx$.

Corolarul 4.16. *Dacă v.a.* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *sunt independente şi* $|X_n| \leq M < \infty$ *pentru orice* $n \in \mathbf{N}^*$, *iar* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{(n)} = \infty$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

Teorema 4.17 (Liapunov). *Dacă pentru şirul de v.a. independente* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *se poate alege un număr* $\eta > 0$ *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{(n)}^{\eta+2}} \sum_{k=1}^{n} E(|X_k - a_k|^{\eta+2}) = 0,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Corolarul 4.18. *Dacă pentru şirul de v.a. independente* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *există* $\rho_k^3 = E(|X_k - a_k|^3)$, $k \in \mathbf{N}^*$, *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_{(n)}}{\sigma_{(n)}} = 0$, *unde* $\rho_{(n)}^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k^3$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Teorema 4.19 (Cebîbşev). *Fie* $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *un şir de funcţii de repartiţie care admit momente de orice ordin, adică există mărimile* $\alpha_j^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^j\, dF_n(x)$, $j, n \in \mathbf{N}^*$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_j^{(n)} = \alpha_j$, $j \in \mathbf{N}^*$, *unde* α_j, $j \in \mathbf{N}^*$, *sunt momentele funcţiei de repartiţie normală* $N(0,1)$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Exemplul 1. În multe ramuri ale industriei se produc mari cantităţi de produse identice. Să presupunem că ne interesează o caracteristică numerică a unui astfel de produs. Cu toate că produsul este fabricat după anumite standarde, există întotdeauna o anumită abatere de la această valoare standard. Această abatere este provocată de un număr mare de factori aleatori, acţiunea fiecăruia din ei luat separat fiind neglijabilă. Totuşi însumarea efectelor tuturor acestor factori poate fi observabilă. În loc de a studia suma unui mare număr de v.a. (suma abaterilor) se va considera un şir de sume cu un număr din ce în ce mai mare de termeni şi se va studia repartiţia limită a funcţiilor de repartiţie ale sumelor. Prin urmare, dacă se consideră un şir de v.a. independente $X_1, X_2, \ldots$, atunci

$$\frac{1}{\sigma_{(n)}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)$$

apreciază abaterea de la norma standard.

Exemplul 2. Fie $\lambda > 0$. Se consideră şirul de v.a. independente $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ cu funcţiile de frecvenţă

$$X_k : \begin{pmatrix} k^\lambda & -k^\lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

Se obţine $a_k = E(X_k) = 0$, $\sigma_k^2 = k^{2\lambda}$ şi

$$\sigma_{(n)}^2 = 1^{2\lambda} + 2^{2\lambda} + \ldots + n^{2\lambda} \sim \frac{n^{2\lambda+1}}{2\lambda+1}.$$[12]

Se observă că dacă $\lambda < \frac{1}{2}$, atunci este îndeplinită condiţia din teorema 4.8, ceea ce arată că în acest caz şirul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisface legea slabă a numerelor mari.

De asemenea, avem $|X_k| = k^\lambda \leq n^\lambda$ pentru $k = \overline{1,n}$ şi există $n_0 \in \mathbf{N}^*$ astfel încât

$$\sigma_{(n)}^2 \geq \frac{n^{2\lambda+1}}{2(2\lambda+1)}$$

pentru orice $n \geq n_0$.

Prin urmare, pentru $n \geq \max(n_0, 2(2\lambda+1)\varepsilon^{-2})$ şi $\varepsilon > 0$ rezultă

$$|X_k|^2 \leq n^{2\lambda} \leq \frac{\varepsilon^2 n^{2\lambda+1}}{2(2\lambda+1)} \leq \varepsilon^2\sigma_{(n)}^2, \quad k = \overline{1,n},$$

ceea ce arată că este îndeplinită condiţia din teorema 4.14 astfel că

$$\lim_{n\to\infty} P\{\alpha \leq X(n) \leq \beta\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \quad \alpha,\beta \in \mathbf{R},$$

unde

$$X_{(n)} = \left(\frac{2\lambda+1}{n^{2\lambda+1}}\right)^{\frac{1}{2}} (X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

Această relaţie arată că suma $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ are acelaşi ordin de mărime cu $n^{\lambda+\frac{1}{2}}$ pentru $n \to \infty$; deci pentru $\lambda \geq \frac{1}{2}$ nu poate fi îndeplinită condiţia din teorema 4.10.

În concluzie teorema limită centrală este adevărată pentru orice $\lambda > 0$, în timp ce legea slabă a numerelor mari numai pentru $\lambda < \frac{1}{2}$.

Exemplul 3. Se consideră experimentul ce constă în aruncarea de n ori a unui zar. Fie X_k v.a. ce reprezintă numărul de puncte obţinut la aruncarea de rang k. Se obţine

$$E(X_k) = \frac{(1+2+3+4+5+6)}{6} = 3,5$$

[12]Scriem $a_n \sim b_n$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

şi

$$\operatorname{Var}(X_k) = \frac{(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)}{6} - (3,5)^2 = \frac{35}{12}.$$

Valoarea $\dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ reprezintă numărul mediu de puncte obţinut. Întrucât sunt îndeplinite condiţiile din corolarul 4.15 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|x_1+\ldots+X_n-3,5n| \le \alpha\left(\frac{3,5n}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = \Phi(\alpha)-\Phi(-\alpha), \quad \alpha\in\mathbf{R}.$$

Dacă $n = 1000$ şi $\alpha = 1$ se obţine $P(3450 < X_1+\ldots+X_n < 3550) \simeq 0,68$. Dacă $\alpha_0 = 0,6744$, valoare ce îndeplineşte condiţia $\Phi(\alpha_0)-\Phi(-\alpha_0) = \dfrac{1}{2}$, se obţine că probabilitatea ca suma $X_1+\ldots+X_n$ să fie în intervalul $(3500-36,\ 3500+36)$ este egală cu probabilitatea ca suma să se afle în afara acestui interval.

Exemplul 4. Fie $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente cu funcţiile de frecvenţă

$$X_n : \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n^\beta} & \dfrac{-1}{n^\beta} & 0 \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}, \quad n\in\mathbf{N}^*,$$

unde $\dfrac{1}{3} < \beta \le \dfrac{1}{2}$ şi $0 < p < \dfrac{1}{2}$. Deoarece

$$E(X_k) = 0,\ E(X_k^2) = \frac{2p}{n^{2\beta}},\ E\left(|X_k|^3\right) = \frac{2p}{n^{3\beta}},\ k\in\mathbf{N}^*$$

rezultă

$$\sigma_{(n)}^2 = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = 2p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2\beta}}, \quad \rho_{(n)}^3 = \sum_{k=1}^{n} E\left(|X_k|^3\right) = 2p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{3\beta}}.$$

Din felul cum a fost ales β rezultă că seria $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}^*}\dfrac{1}{k^{2\beta}}$ este divergentă, iar seria $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}^*}\dfrac{1}{k^{3\beta}}$ este convergentă. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\rho_{(n)}}{\sigma_{(n)}} = 0$. Astfel condiţiile corolarului 4.18 sunt îndeplinite.

4.4 Legea logaritmului iterat

În acest paragraf $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ va fi un şir de v.a. independente şi identic repartizate, definite pe $(\Omega,\mathcal{K},P)$, cu $E(X_n) = 0$, $n\in\mathbf{N}^*$. Se notează $S_n = X_1+\ldots+X_n$.

În aceste condiţii (vezi teorema 4.13) rezultă că $S_n = o(n)$ a.s[13]. Însă, uneori suntem interesaţi în aproximări mai exacte ale lui S_n, ceea ce se poate obţine în condiţii destul de generale.

Teorema 4.20.

a) (**Hausdorff**). *Dacă repartiţia comună a v.a.* X_i, $1 \le i \le n$, *pentru orice* $n \in \mathbf{N}^*$, *are momente finite şi pozitive de orice ordin, atunci* $S_n = o(n^{1/2+\varepsilon})$ *a.s. pentru orice* $\varepsilon > 0$.

b) (**Hardy şi Littlewood**). *Dacă* $|X_i| \le M$ *a.s.* $i = 1, 2, \ldots$, *atunci*

$$S_n = o(\sqrt{n \ln n}) \quad a.s.$$

c) (**Hincin**). *Dacă* $|X_i| \le M$ *a.s. şi* $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, *atunci*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{\sigma\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{\sigma\sqrt{2n \ln\ln n}} = -1$$

în toate punctele ω *cu eventual excepţia unei mulţimi de puncte, constituind un eveniment de probabilitate nulă.*

Prima dintre relaţiile de la punctul c) arată că, pentru $\lambda > 1$, cu probabilitatea 1, inegalitatea $S_n > \lambda(2n\sigma^2 \ln\ln n)^{1/2}$ are loc pentru un număr finit de valori ale lui n, în timp ce, pentru $\lambda < 1$, această inegalitate are loc pentru o infinitate de valori ale lui n.

---

[13] Dacă $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este un şir de v.a. pentru care $\dfrac{Y_n}{n^\alpha} \xrightarrow{a.s.} 0$, când $n \to \infty$, se scrie $Y_n = o(n^\alpha)$ a.s. $(\alpha > 0)$. De asemenea, dacă există $M > 0$ şi $A \in \mathcal{K}$ cu $P(A) = 0$ astfel încât pentru orice $\omega \in \Omega \setminus A$, şirul $|Y_n(\omega)/n^\alpha| \le M$, atunci scriem $Y_n = o(n^\alpha)$ a.s.

Capitolul 5

Funcţii aleatoare de ordinul al doilea

5.1 Conceptul de proces stocastic (funcţie aleatoare)

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi T o mulţime nevidă. O funcţie $\xi : \Omega \times T \to S$, unde S (*spaţiul stărilor*) este o mulţime pe care s-a introdus o σ-algebră, se numeşte *proces stocastic (funcţie aleatoare)* dacă pentru fiecare $t \in T$, fixat, $\xi(\cdot, t) = \xi_t(\cdot)$ este o v.a. pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, iar pentru fiecare $\omega \in \Omega$, fixat, $\xi(\omega, \cdot) = \xi_\omega(\cdot)$ este o funcţie definită pe T.

De obicei un proces stocastic se notează prin $\{\xi_t | t \in T\}$ sau $\{\xi(t) | t \in T\}$. Funcţiile $\xi_\omega(\cdot)$ definite pe T se numesc *traiectorii* ale procesului, iar T se numeşte *mulţimea parametrilor.*

Remarcăm deci, că un proces stocastic apare fie ca o familie de v.a. $\{\xi_t | t \in T\}$, fie ca o familie de funcţii $\{\xi_\omega(\cdot) | \omega \in \Omega\}$, ce urmează o lege probabilistă.

Dacă T este o mulţime discretă, de exemplu, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, atunci spunem că $\{\xi_t | t \in T\}$ este un *proces stocastic cu parametru discret* sau *lanţ*. În acest caz traiectoriile sunt şiruri.

Dacă T este un interval, atunci spunem că $\{\xi_t | t \in T\}$ este un *proces stocastic cu parametru continuu.* Cazul particular $T = [0, \infty)$ are o mare importanţă în aplicaţii, parametrul t având de cele mai multe ori o interpretare temporală.

Cea mai importantă clasificare a proceselor stocastice este făcută pe baza interdependenţelor existente între repartiţiile v.a. ξ_t, care alcătuiesc procesul.

Un exemplu foarte simplu de proces stocastic îl constituie un şir $\{\xi_n | n \in \mathrm{N}\}$ de v.a. independente.

5.2 Funcţia de corelaţie

Să presupunem că, pentru $t \in T \subset \mathbf{R}$ fixat, v.a. reală $\xi(t)$ admite densitatea de probabilitate $p_1(x;t)$ (*densitatea de probabilitate unidimensională a funcţiei aleatoare*), iar pentru $t_1, t_2 \in T$ fixaţi, v.a. $\xi(t_1)$ şi $\xi(t_2)$ admit densitatea comună de probabilitate $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ (*densitatea de probabilitate bidimensională a funcţiei aleatoare*). Atunci (vezi relaţia (2.5))

$$p_1(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2. \tag{5.1}$$

Densitatea de probabilitate n-dimensională a funcţiei aleatoare se defineşte similar.

Dacă spaţiul stărilor este mulţimea numerelor reale sau complexe şi $E(|\xi(t)|^2) < \infty$ pentru orice $t \in T$, atunci funcţia $K(s,t) = E(\xi(s)\overline{\xi(t)})$ [1] definită pentru orice $t, s \in T$ este numită *funcţia de corelaţie* a procesului. Descrierea procesului $\{\xi(t) | t \in T\}$, care este bazată în întregime pe funcţia K, depinde numai de densitatea bidimensională $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Studiul acestui aspect al proceselor stocastice este denumit uneori *teoria funcţiilor aleatoare de ordin doi* sau *teoria corelaţiei funcţiilor aleatoare.*

Funcţia de corelaţie are următoarele proprietăţi

1) $K(t,t) \geq 0$ pentru orice $t \in T$.

2) $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ pentru orice $s, t \in T$.

3) $|K(s,t)| \leq \sqrt{K(s,s)}\sqrt{K(t,t)}$ pentru orice $s, t \in T$.

4) Pentru orice numere complexe x_j şi pentru orice numere reale t_j, $1 \leq j \leq n$, are loc relaţia

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(t_i, t_j) x_i \bar{x}_j \geq 0.$$

Această proprietate exprimă faptul că funcţia $K : T \times T \to \mathbf{C}$ este o *funcţie de tip pozitiv.* Este adevărată şi reciproca acestei afirmaţii şi anume că orice funcţie de tip pozitiv este o funcţie de corelaţie.

5) Fie funcţiile $\varphi_j : T \to \mathbf{C}$, $1 \leq j \leq n$. Se consideră funcţia aleatoare

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \xi(t_j), \quad t \in T,$$

cu funcţia de corelaţie $K_1(s,t)$. Atunci are loc relaţia

$$K_1(s,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(s) K(s,t) \overline{\varphi_j(t)}, \quad s, t \in T.$$

---

[1] $\overline{\xi(t)}$ este complex conjugatul lui $\xi(t)$.

6) Suma şi produsul a două funcţii de corelaţie este o funcţie de corelaţie.

7) Orice combinaţie liniară finită cu coeficienţi pozitivi de funcţii de corelaţie este o funcţie de corelaţie.

5.3 Staţionaritatea

Să presupunem că $T \subset \mathbf{R}$ este un interval şi că spaţiul stărilor este $\mathbf{R}$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ considerăm funcţiile de repartiţie n-dimensionale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n) = P(\xi(t_1) \leq x_1, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n).$$

Aceste funcţii caracterizează complet funcţia aleatoare $\xi(t)$.

Funcţia aleatoare $\xi(t)$ este *staţionară în sens restrâns* dacă pentru orice $\tau \in \mathbf{R}$ şi $n \in \mathbf{N}^*$

$$F(x_1, \ldots, x_n;\ t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = F(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

oricare ar fi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ şi $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

Din această definiţie rezultă că, pentru o funcţie aleatoare staţionară în sens restrâns, $\xi(t)$, funcţiile de repartiţie unidimensionale coincid, adică $F(x; t)$ nu depinde de t, iar funcţiile de repartiţie bidimensionale depind numai de diferenţa $t_2 - t_1$. De asemenea, funcţia de corelaţie $K(s, t)$ a unei funcţii aleatoare staţionare în sens restrâns depinde numai de diferenţa $t - s$.

Funcţia aleatoare $\xi(t)$ este *staţionară în sens larg* dacă $E(|\xi(t)|) < \infty$, $E(|\xi(t)|^2) < \infty$, $E(\xi(t))$ nu depinde de t, iar funcţia de corelaţie $K(s, t)$ depinde numai de diferenţa $t - s$. Evident, o funcţie aleatoare staţionară în sens restrâns este staţionară şi în sens larg, în timp ce reciproca nu este în general adevărată.

5.4 Derivata şi integrala în medie de ordinul al doilea

O funcţie aleatoare $\xi(t)$ este continuă în medie de ordinul al doilea în punctul $t_0 \in T$, dacă

$$\lim_{h \to 0} E(|\xi(t_0 + h) - \xi(t_0)|^2) = 0.$$

O funcţie aleatoare $\xi(t)$ este *derivabilă în medie de ordinul al doilea* în punctul $t_0 \in T$, dacă există v.a. $\xi'(t_0)$ astfel încât

$$\lim_{h \to 0} E\left(\left|\frac{\xi(t_0 + h) - \xi(t_0)}{h} - \xi'(t_0)\right|^2\right) = 0.$$

În acest caz, $\xi'(t_0) = \left.\dfrac{d\xi(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$ este derivata în medie a lui $\xi(t)$ în punctul t_0.

Dacă $T = [T_1, T_2]$, fie $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T_2$ o diviziune δ a lui T, iar $t_j \leq \tau_j < t_{j+1}$, $0 \leq j \leq p-1$; se consideră v.a.

$$I(\delta, \tau_j) = \sum_{j=1}^{p-1} \xi(\tau_j)(t_{j+1} - t_j).$$

Funcţia aleatoare $\xi(t)$ este *integrabilă Riemann în medie de ordinul al doilea* dacă există o v.a. I, notată $\int_{T_1}^{T_2} \xi(t)dt$, astfel încât

$$\lim_{\|\delta\| \to 0} E(|I(\delta, \tau_j) - I|^2) = 0,$$

unde

$$\|\delta\| = \max_{0 \leq j \leq p-1} (t_{j+1} - t_j).$$

Această integrală are proprietăţi analoage celor ale integralei obişnuite. Astfel, de exemplu, să presupunem că funcţia aleatoare $\xi(t)$ este integrabilă Riemann în medie de ordinul al doilea pe T; pentru $t \in T$ considerăm integrala nedefinită $I(t) = \int_{T_1}^{t} \xi(u)du$; această integrală este pentru orice t fixat o v.a., deci când t variază obţinem o funcţie aleatoare. Dacă funcţia aleatoare $\xi(t)$ este continuă în medie, deci integrabilă în medie, atunci $I(t)$ este derivabilă în medie şi $\frac{dI(t)}{dt} = \xi(t)$ a.s. De asemenea, are loc relaţia

$$\int_T E(\xi(t))dt = E\left(\int_T \xi(t)dt\right),$$

unde prima integrală este cea riemanniană obişnuită, iar a doua integrală este riemanniană în medie de ordinul al doilea.

Teorema 5.1. *Pentru ca funcţia aleatoare $\xi(t)$ să fie derivabilă în medie în punctul $t \in T$, este necesar şi suficient ca derivata a doua generalizată*[2] *a funcţiei sale de corelaţie K să existe şi să fie finită în punctul $(t, t) \in T \times T$.*

Pentru ca o funcţie aleatoare $\xi(t)$ să fie integrabilă Riemann în medie de ordinul al doilea pe T, este necesar şi suficient ca funcţia sa de corelaţie K să fie integrabilă Riemann pe $T \times T$.

---

[2]Prin *derivata a doua generalizată* în raport cu s şi t a unei funcţii $K : T \times T \to \mathbf{C}$ înţelegem limita

$$\frac{\partial^2 K(s,t)}{\partial s \partial t} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{1}{hk}[K(t+h, s+k) - K(t+h, s) - K(t, s+k) + K(t, s)].$$

Această noţiune se extinde imediat pentru derivata de orice ordin (pentru ordinul întâi derivata generalizată coincide cu derivata ordinară); toate derivatele generalizate ale lui K vor fi notate cu simbolurile pentru derivarea obişnuită. Dacă derivata ordinară există şi este continuă, atunci derivata generalizată există de asemenea şi este egală cu ea.

5.5 Reprezentarea canonică

Dacă funcţia aleatoare $\xi(t)$ poate fi scrisă sub forma

$$\xi(t) = E(\xi(t)) + \sum_{k\in\mathbf{N}^*} \nu_k X_k(t)$$

unde $\nu_k, (E(\nu_k) = 0,\ E(\nu_i\nu_j) = 0,\ i \neq j)$, sunt v.a. necorelate cu valori complexe, atunci expresia de mai sus poartă denumirea de *reprezentarea (descompunerea) canonică a funcţiei aleatoare* $\xi(t)$. Funcţiile $X_k(t)$ (care nu sunt aleatoare) se numesc *coordonatele reprezentării*, iar ν_k *coeficienţii reprezentării*. Pentru funcţia de corelaţie avem

$$K(s,t) = \sum_{k\in\mathbf{N}^*} \mathrm{Var}_k X_k(s) X_k(t),$$

unde $\mathrm{Var}_k = \mathrm{Var}(\nu_k)$, numită *reprezentarea canonică a funcţiei de corelaţie.*

O funcţie aleatoare este numită *zgomot alb* dacă funcţia de corelaţie are forma $K(s,t) = G(t)\delta(t-s)$, unde $\delta(t-s) = 0$ pentru $t \neq s$. Dacă *intensitatea* $G(t)$ a zgomotului alb este constantă, atunci zgomotul alb este *staţionar în sens larg*. Reprezentarea funcţiei aleatoare $\xi(t)$ sub forma

$$\xi(t) = E(\xi(t)) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \nu(\lambda) X(t,\lambda) d\lambda,$$

unde $\nu(\lambda)$ este zgomotul alb cu parametrul $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, poartă denumiera de *reprezentare canonică integrală*. Pentru funcţia de corelaţie vom avea

$$K(s,t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} G(\lambda) X(s,\lambda) \overline{X(t,\lambda)} d\lambda.$$

Orice funcţie aleatoare staţionară în sens larg admite reprezentarea (descompunerea spectrală)

$$\xi(t) = E(\xi(t)) + \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\omega) e^{i\omega t}. \tag{5.2}$$

Aici funcţia aleatoare $\nu(\omega)$ are valoarea medie nulă şi funcţia de corelaţie

$$K_\nu(\omega,\omega') = S(\omega) S(\omega - \omega'),$$

unde

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

(*densitatea spectrală* a funcţiei aleatoare $\xi(t)$). Mai au loc relaţiile

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad \mathrm{Var}(\xi(t)) = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

O clasă de funcţii aleatoare staţionare în sens larg sunt cele de forma $\eta(t) = f(t)\xi(t) + g(t)$, unde $\xi(t)$ este o funcţie aleatoare în sens larg, iar $f(t)$ şi $g(t)$ sunt funcţii reale nealeatoare. Pentru aceste funcţii aleatoare avem relaţiile

$$E(\eta(t)) = f(t)E(\xi(t)) + g(t); \quad K_\eta(s,t) = f(s)f(t)B_\xi(s-t),$$

$$\text{Var}(\eta(t)) = f^2(t)B_\xi(0).$$

Dacă

$$\eta(t) = \text{Var}(\eta(t)) + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \nu_k Y_k(t)$$

este reprezentarea canonică a funcţiei $\eta(t)$, atunci coeficienţii acestei reprezentări sunt daţi de

$$Y_k(t) = f(t)e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{\pi k}{2T}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

În ceea ce priveşte descompunerea spectrală avem

$$\eta(t) = E(\eta(t)) + \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\omega)Y(t,\omega)d\omega,$$

unde

$$Y(t,\omega) = f(t)e^{i\omega t}.$$

Exemplul 1. Emisia de semnale a unui telegraf poate fi descrisă de o funcţie aleatoare $\xi(t)$ cu proprietatea că, pentru t fixat, $\xi(t)$ ia, cu probabilităţi egale, valorile 1 sau 0 după cum la momentul t, telegraful emite sau nu semnal. Evident, traiectoria lui $\xi(t)$ este o funcţie ce ia valorile 0 şi 1. Presupunem că numărul de salturi ale acestei funcţii în intervalul $[0,T]$ este repartizat Poisson; mai precis, probabilitatea de a avea k salturi în intervalul $[0,T]$ este

$$P(k,T) = \frac{(aT)^k}{k!}e^{-aT}, \quad a > 0.$$

De asemenea, presupunem că salturile se produc independent. În aceste ipoteze avem

$$E(\xi(t)) = 0 \cdot P(\xi(t) = 0) + 1 \cdot P(\xi(t) = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$K(s,t) = (0\cdot 0)P(\xi(s) = 0, \xi(t) = 0) + (0\cdot 1)P(\xi(s) = 0, \xi(t) = 1) +$$

$$+(1\cdot 0)P(\xi(s) = 1, \xi(t) = 0) + (1\cdot 1)P(\xi(s) = 1, \xi(t) = 1) = P(\xi(s) = 1, \xi(t) = 1).$$

Probabilitatea $P(\xi(s)=1,\ \xi(t)=1)$ este egală cu probabilitatea ca $\xi(t)=1$ şi ca în intervalul de lungime $t-s=\tau$ să aibă loc un număr par de salturi. Deci

$$P(\xi(s)=1,\ \xi(t)=1)=\frac{1}{2}\sum_{s\in\mathbf{N}}\frac{(a|\tau|)^{2s}}{(2s)!}e^{-a|\tau|}.$$

Prin urmare

$$B(\tau)=\frac{1}{4}(1+e^{-2a|\tau|}).$$

Exemplul 2. Fie $\xi(t)=\xi f(t)$, unde ξ este o v.a. reală, iar $f(t)$ este o funcţie cu valori complexe.

Se va studia în ce condiţii funcţia aleatoare $\xi(t)$ este staţionară în sens larg. Din condiţia $E(\xi(t))=0$ rezultă $E(\xi)=0$; apoi

$$E[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}]=f(t+\tau)\overline{f(t)}E(|\xi|^2)$$

şi prin urmare, este necesar ca produsul $f(t+\tau)\overline{f(t)}$ să nu depindă de t. Punând $\tau=0$ obţinem $|f(t)|^2=r^2=\text{const}$. Deci $f(t)=r\,e^{i\varphi(t)}$, unde $r\in\mathbf{R}$, iar φ este o funcţie reală. Aşadar

$$E[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}]=r^2e^{i[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]}E(|\xi|^2),$$

de unde rezultă că diferenţa $\varphi(t+\tau)-\varphi(t)$ nu trebuie să depindă de t; dacă presupunem că φ este derivabilă, vom avea

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t+\tau)-\varphi(t)]=0,$$

adică $\varphi'(t+\tau)=\varphi'(t)$ şi cum τ este arbitrar avem $\varphi'(t)=\lambda$, de unde $\varphi(t)=\lambda t+\mu$. În concluzie

$$f(t)=r\,e^{i(\lambda t+\mu)},\quad \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$$

Exemplul 3. Procesul aleator $\xi(t)$ se numeşte *gaussian* dacă repartiţiile sale finit dimensionale sunt normale (vezi §3.6). Dacă procesul gaussian este staţionar în sens larg, atunci el este staţionar şi în sens restrâns. Un proces gaussian este definit dacă i se cunoaşte valoarea medie şi funcţia de corelaţie.

Vectorul aleator $(\xi(t_1),\xi(t_2),\ldots,\xi(t_n))$ are densitatea de probabilitate de forma

$$p(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^nD}e^{-\frac{1}{2D}\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)},$$

unde

$$D=\begin{vmatrix}k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn}\end{vmatrix}\qquad (k_{ij}=k_{ji},\quad D>0)$$

este matricea de corelaţie,

$$k_{ij} = K(t_i, t_j),$$

iar $\dfrac{A_{ij}}{D}$ sunt elementele inversei matricei $(k_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Pentru procese staţionare avem

$$K(t_i, t_j) = K(t_i - t_j) = B(\tau_{ij}), \quad \tau_{ij} = t_i - t_j.$$

Capitolul 6

Teoria reînnoirii

6.1 Funcţia de reînnoire

Fie $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente, identic repartizate cu funcţia de repartiţie F, $F(0) = 0$, definite pe un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Şirul $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$, unde

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad S_0 = 0,$$

se numeşte *şir de reînnoire.*

În problemele practice care au condus la constituirea teoriei reînnoirii, v.a. $S_1, S_2, \ldots$ reprezintă momentele în care are loc înlocuirea (reînnoirea) componentei defecte, iar $X_1, X_2, \ldots$ sunt duratele de funcţionare. Valoarea medie $\mu = E(X_k)$, care există putând fi eventual infinită, se numeşte *durata medie de funcţionare.*

Din punct de vedere practic, este important de luat în considerare v.a. $N(t)$, ce desemnează *numărul de reînnoiri* într-un interval de timp $[0, t]$. Mai precis,

$$N(t) = \max\{n | S_n \leq t\}.$$

Se demonstrează că

$$P(N(t) = n) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t), \tag{6.1}$$

unde $F^{(n)}(t)$ este convoluţia de ordinul n a funcţiei F[1];

$$E(N(t)) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} F^{(n)}(t). \tag{6.2}$$

[1] Mai precis, $F^{(n)}$ se defineşte prin recurenţă astfel:

$$F^{(1)} = F; \quad F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-y) dF(y), \quad n \geq 2.$$

Integrala este Lebesgue-Stieltjes. Dacă F admite densitatea p, $dF(y)$ se înlocuieşte cu $p(y)dy$.

Funcţia $U(t) = E(N(t))$, dată de relaţia (6.2), se numeşte *funcţie de reînnoire*. Funcţia de reînnoire verifică relaţia

$$U(t) = F(t) + \int_0^t U(t-y)dF(y), \tag{6.3}$$

numită *ecuaţia de reînnoire*.

În legătură cu funcţia de reînnoire există următorul rezultat.

Teorema 6.1 (Blackwell). *Dacă F nu este aritmetică*[2]*, atunci pentru orice $h > 0$,*

$$\lim_{t\to\infty}[U(t) - U(t-h)] = \frac{h}{\mu}, \quad unde \quad \mu = E(X_n)$$

cu convenţia $\frac{1}{\infty} = 0$.

6.2 Extinderi ale conceptului de reînnoire

În teoria reînnoirii sunt întâlnite următoarele două generalizări.

1. Admitem posibilitatea ca la fiecare moment de reînnoire procesul să poată fi oprit cu probabilitatea $q \in (0,1)$ şi continuat cu probabilitatea $p = 1-q$, independent de evoluţia procesului până la acel moment. Fie $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de v.a. independente şi identic repartizate cu

$$P(\tau_n = 0) = q, \quad P(\tau_n = 1) = 1-q, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Presupunem că şirurile (τ_n) şi (X_n) sunt independente. V.a. τ_n ia valorile 0 sau 1, după cum la cea de a n - a reînnoire se decide stoparea sau respectiv continuarea procesului. Fie

$$G(t) = P(X_n \le t,\ \tau_n = 1) = P(X_n \le t)p = pF(t),$$

de unde $G(\infty) = p$. Prin urmare, se poate considera că evoluţia procesului ce poate fi stopat este descrisă de un şir de v.a. independente şi identic repartizate, ce pot lua valoarea $+\infty$, având funcţia de repartiţie G. Dacă $X_n = +\infty$ înseamnă că procesul a fost oprit la cea de a n - a reînnoire.

Funcţia de reînnoire verifică şi în acest caz o ecuaţie de reînnoire de forma (6.3) şi numărul mediu de reînnoiri în intervalul $[0,\infty)$ este

$$U(\infty) = \frac{1}{1-p}.$$

[2] O funcţie de repartiţie F, nulă pe semiaxa negativă, se numeşte *aritmetică* dacă există o constantă $d > 0$ astfel încât F să fie constantă pe orice interval deschis de forma $(nd, (n+1)d)$, $n \in \mathbf{N}$.

De asemenea, probabilitatea ca procesul să fie stopat până la momentul t este $qU(t)$, deci $H(t) = qU(t)$ este repartiţia "timpului de viaţă" al procesului. Funcţia H verifică ecuaţia de reînnoire

$$H(t) = 1 - G(\infty) + \int_0^t H(t-y)dG(y).$$

2. V.a. X_1, deşi independentă de celelalte, are o altă repartiţie F_1. Aceasta corespunde situaţiei în care momentul începerii observării procesului este ulterior momentului intrării în funcţiune a componentei respective. Dacă $V(t)$ este numărul mediu de reînnoiri în intervalul $[0,t]$, atunci $V(t)$ verifică ecuaţia de reînnoire

$$V(t) = F_1(t) + \int_0^t V(t-y)dF(y).$$

De asemenea, se demonstrează că dacă F nu este aritmetică, atunci

$$V(t) \sim \mu^{-1}t,$$

când $t \to \infty$, unde

$$\mu = E(X_n), \quad n \geq 2, \quad (\text{adică} \lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{\mu^{-1}t} = 1),$$

rezultat cunoscut sub numele de *teorema elementară a reînnoirii.*

Următoarele trei v.a. prezintă interes în aplicaţiile teoriei reînnoirii.

a. $$Y(t) = S_{N(t)+1} - t$$

reprezintă timpul rezidual de aşteptare de la momentul t până la următoarea reînnoire. Dacă prima v.a. X_1 are repartiţia F_1, iar $V(t)$ este funcţia de reînnoire, atunci repartiţia v.a. $Y(t)$ este dată de

$$\begin{aligned} P(Y(t) \leq y) &= [V(t+y) - V(t)][1 - F(y)] + \\ &+ \int_0^y [V(t+y) - V(t+y-s)]dF(s). \end{aligned}$$

Dacă F nu este aritmetică, atunci

$$\lim_{t\to\infty} P(Y(t) \leq y) = \int_0^y \frac{1-F(s)}{\mu} ds.$$

b. $$X(t) = t - S_{N(t)}$$

reprezintă timpul scurs de la ultima reînnoire până la momentul t. În ceea ce priveşte repartiţia v.a. $X(t)$, au loc relaţiile

$$P(X(t) \leq x \mid X(0) = x_0) = \begin{cases} \int_{t-x}^{t} [1 - F(t-s)]dU(s), & 0 \leq x < t \\ \dfrac{F(x_0 + t) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}, & t \leq x < t + x_0 \\ 1, & x \geq x_0 + t \end{cases}$$

$$\lim_{t \to \infty} P(X(t) \leq x \mid X(0) = x_0) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(s)]ds,$$

limita fiind nulă dacă $\mu = \infty$.

c. $$L(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = X_{N(t)+1}$$

reprezintă durata dintre acele reînnoiri consecutive între care se află momentul t.

Funcţia de repartiţie a v.a. $L(t)$ este

$$P(L(t) \leq x) = \begin{cases} \int_{t-x}^{t} [F(x) - F(t-y)]dU(y), & 0 < x \leq t \\ F(x) - F(t) + \int_0^t [F(x) - F(t-y)]dU(y), & x > t. \end{cases}$$

Dacă F nu este aritmetică, atunci

$$\lim_{t \to \infty} P(L(t) \leq x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x y dF(y),$$

limita fiind nulă dacă $\mu = \infty$.

Exemplul 1. Se consideră un proces de reînnoire pentru care funcţia de repartiţie F este exponenţială cu parametrul $\lambda > 0$. În acest caz

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx,$$

de unde se poate deduce că

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}; \quad \text{deci} \quad U(t) = E(N(t)) = \lambda t.$$

De asemenea,

$$P(X(t) \leq x \mid X(0) = x_0) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x < t \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \leq x < t + x_0 \\ 1, & x \geq t + x_0 \end{cases}$$

$$P(Y(t) \leq y) = 1 - e^{-\lambda y},$$

$$P(L(t) \leq x) = \begin{cases} 1 - (1 - \lambda x)e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq t \\ 1 - (1 + \lambda t)e^{-x}, & x > t. \end{cases}$$

Exemplul 2. Presupunem că $X_1, X_2, \ldots$ reprezintă duratele de viaţă ale unei componente care în momentul defectării este înlocuită instantaneu cu una identică. Prin urmare, v.a. pozitive $X_1, X_2, \ldots$ sunt independente şi identic repartizate cu funcţia de repartiţie F şi valoarea medie μ.

Numărul mediu de înlocuiri în intervalul $[0, t]$ este $U(t)$, iar teorema elementară a reînnoirii arată că

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

şi deci, pentru valori mari ale lui t, rata (intensitatea) înlocuirilor este $\dfrac{1}{\mu}$. Aşadar, orice strategie de înlocuire, care prescrie înlocuirea componentei înainte de defectare, va conduce la folosirea în medie a mai mult de $\dfrac{1}{\mu}$ componente pe unitatea de timp. Cu toate acestea, există situaţii în care trebuie evitată defectarea în timpul serviciului (căi ferate, echipamente aeronautice etc.)

Să considerăm strategia înlocuirii la o vârstă fixată T, în care componenta este înlocuită fie la vârsta T, fie la momentul defectării, dacă aceasta are loc înaintea împlinirii vârstei T.

Pentru valori mari ale lui t, ne aşteptăm ca procentul de componente înlocuite până la momentul t din cauza defectării lor să fie $F(T)$, iar a celor înlocuite datorită vârstei să fie $1 - F(T)$. Notăm

$$F_T(x) = \begin{cases} F(x), & x < T \\ 1, & x \geq T. \end{cases}$$

Atunci valoarea medie corespunzătoare este

$$\mu_T = \int_0^\infty [1 - F_T(x)]dx = \int_0^T [1 - F(x)]dx < \mu.$$

Prin urmare, pentru t suficient de mare, rata înlocuirilor în cadrul strategiei va fi

$$\frac{1}{\mu_T} > \frac{1}{\mu}.$$

Se poate arăta că rata înlocurilor datorate defectărilor este (pentru valori mari ale lui t) mai mică decât $\frac{1}{\mu_T}$; de asemenea, pentru anumite repartiţii, această rată este mai mică chiar decât $\frac{1}{\mu}$. În cazul în care F este exponenţială cele două rate sunt egale.

Capitolul 7

Lanţuri Markov finite

Lanţul Markov constituie cel mai simplu tip de proces stocastic cu v.a. dependente dar, în acelaşi timp, este tipul fundamental de astfel de proces. Este de remarcat faptul că puţine concepte matematice se bucură de potenţialităţi comparabile cu cele ale conceptului de dependenţă markoviană[1]. În afară de potenţialităţi matematice incontestabile, conceptul de dependenţă markoviană are şi importante potenţialităţi aplicative. Astfel, teoria dependenţei markoviene a fost aplicată în diverse domenii ca: controlul statistic al calităţii producţiei industriale, siguranţa în funcţionare a sistemelor tehnice complexe, biologie şi medicină, demografie, geografie, geofizică, teoria mobilităţii sociale, sisteme de educaţie, economie, poluare, marketing, operaţii financiare, mobilitatea forţei de muncă, circulaţia bancnotelor, teoria metrică a numerelor.

7.1 Proprietatea Markov. Matricea de trecere

Fie $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un proces stocastic cu parametru discret şi cu valori într-o mulţime finită S, numită *spaţiul stărilor.*

Dacă pentru orice stări $i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ şi orice $n \in \mathbf{N}^*$ este verificată relaţia (numită *proprietatea Markov*)

$$P(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n, \ldots, \xi_1 = i_1) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1} \mid \xi_n = i_n),$$

atunci $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este numit *lanţ Markov finit.*

Se poate spune că un lanţ Markov finit păstrează despre evoluţia trecută amintirea cea mai recentă.

[1]Conceptul de dependenţă markoviană a fost introdus pentru prima dată într-o formă explicită de matematicianul rus A.A. Markov (1856-1922) în anul 1906. Dar cu mult timp înainte, au fost întâlnite şiruri de v.a. care sunt lanţuri Markov în terminologia actuală. Astfel, un exemplu celebru este lanţul Markov asociat modelului Bernoulli expus în exemplul 2, §7.4.

Dacă probabilitatea condiţionată $p_{ij} = P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i)$ depinde numai de stările $i, j \in S$ şi este independentă de n, atunci lanţul Markov este numit *omogen.* În acest caz, matricea $P = (p_{ij})$, $i, j \in S$, este numită *matricea probabilităţilor de trecere.* În continuare se va presupune că lanţul Markov este omogen.

Este evident că $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S$, motiv pentru care P este numită *matrice stocastică.*

Se observă că, dacă pentru orice $i, j \in S$, fixaţi, notăm

$$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_{m+n} = j \mid \xi_m = i),$$

($p_{ij}^{(n)}$ se numeşte *probabilitate de trecere din starea i în starea j după n paşi*), atunci $p_{ij}^{(n)}$ este elementul din linia i şi coloana j al matricei P^n, puterea a n - a a matricei de trecere P.

Ţinând seama de aceasta, rezultă că

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad i, j \in S, \quad m, n \in \mathbf{N}^*.$$

Această relaţie se numeşte *relaţia Chapman*[2]*-Kolmogorov.*

Dacă $p = (p_i)$, $i \in S$, este o repartiţie de probabilitate pe S, adică $p_i \geq 0$, $i \in S$, $\sum_{i \in S} p_i = 1$ şi dacă $P(\xi_0 = i) = p_i$, $i \in S$, atunci p este numită *repartiţia iniţială a lanţului Markov.*

Orice lanţ Markov finit cu r stări poate fi reprezentat cu ajutorul unui sistem de urne astfel: considerăm r urne numerotate $1, 2, \ldots, r$ care conţin fiecare bile de r tipuri diferite marcate de asemenea $1, 2, \ldots, r$. Probabilitatea de a extrage o bilă de tipul j din urna i este egală cu p_{ij}. La momentul iniţial alegem o urnă conform repartiţiei de probabilitate $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$. Apoi din această urnă extragem o bilă, pe care o reintroducem în urnă. Dacă bila extrasă a fost de tipul i, atunci extragerea următoare o vom face din urna i, ş.a.m.d. Astfel, şirul tipurilor de bile extrase succesiv este un lanţ Markov cu spaţiul stărilor $S = \{1, 2, \ldots, r\}$, repartiţia iniţială $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ şi probabilităţile de trecere p_{ij}.

În continuare vom discuta câteva consecinţe imediate ale proprietăţii Markov.

Spunem că un eveniment A este *anterior* momentului $n \geq 0$ într-un lanţ $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dacă este determinat de v.a. $\xi_0, \ldots, \xi_n$ ale lanţului.

Spunem că un eveniment B este *posterior* momentului $n \geq 0$ într-un lanţ Markov $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dacă este determinat de v.a. $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$

Pentru un lanţ Markov, se poate arăta imediat următoarea egalitate care generalizează proprietatea Markov şi anume

$$P(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \, \xi_n = i_n, A) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1} | \, \xi_n = i_n)$$

[2]Sydney Chapman (1888-1970), matematician englez.

oricare ar fi evenimentul A anterior momentului n, ori de câte ori membrul întâi este definit.

Mai mult, proprietatea Markov poate fi extinsă în continuare considerând evenimentele A şi B, anterior şi respectiv posterior momentului n, astfel

$$P(B|\,\xi_n = i_n, A) = P(B|\xi_n = i_n).$$

Se remarcă că extinderile succesive ale proprietăţii Markov sunt de fapt echivalente cu aceasta; de aceea, oricare din ele poate fi luată ca definiţie. O extensie a proprietăţii Markov, dar calitativ diferită, este proprietatea tare Markov.

O v.a. $\tau : \Omega \to \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ se numeşte *timp de oprire* (sau *opţională*) pentru un lanţ Markov $(\xi_n)_{n\in\mathrm{N}}$ dacă oricare ar fi $k = 0, 1, 2, \ldots$ evenimentul $\{\tau = k\}$ este anterior momentului k în lanţul considerat, adică este determinat de v.a. $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$.

Spunem că un eveniment A este *anterior timpului de oprire* τ dacă oricare ar fi $k = 0, 1, \ldots$ evenimentul $A \cap \{\tau = k\}$ este anterior momentului k în lanţul Markov considerat, adică A este determinat de v.a. $\xi_0, \ldots, \xi_\tau$. Analog, un eveniment B este *posterior timpului de oprire* τ dacă este determinat de v.a. $\xi_\tau, \xi_{\tau+1}, \ldots$

Se poate arăta că proprietatea Markov rămâne adevărată şi pentru timpii de oprire. Fie τ un timp de oprire pentru lanţul Markov $(\xi_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Dacă A este un eveniment anterior lui τ, atunci

$$P(\xi_{\tau+1} = j|\,\xi_\tau = i, A) = P(\xi_{\tau+1} = j|\,\xi_\tau = i) = p_{ij}$$

oricare ar fi $i, j \in S$, ori de câte ori membrul întâi este definit. Dacă A şi B sunt evenimente anterior, respectiv posterior lui τ, atunci

$$P(B|\,\xi_\tau = i, A) = P(B \mid \xi_\tau = i) \quad \forall i \in S,$$

ori de câte ori membrul întâi este definit. Această relaţie reprezintă *proprietatea tare Markov.* Să remarcăm că ea este implicată de proprietatea Markov şi se reduce la aceasta în cazul în care τ este un timp nealeator. Rezultă că cele două proprietăţi sunt, în fapt, echivalente.

7.2 Clasificarea stărilor

Stările unui lanţ Markov pot fi grupate în clase după criteriul comunicării. Vom spune că starea j este *accesibilă* din starea i şi vom scrie $i \to j$ dacă există $n \in \mathrm{N}^*$ astfel încât $p_{ij}^{(n)} > 0$. Se observă că această relaţie este tranzitivă. Starea i este *reflexivă* dacă $i \to i$ şi nereflexivă în caz contrar, deci, dacă $p_{ii}^{(n)} = 0$ pentru orice $n \in \mathrm{N}^*$. Un caz particular de stare reflexivă este starea *absorbantă*; se spune că o stare i este absorbantă dacă $p_{ii} = 1$. Pentru o stare reflexivă i, se defineşte perioada d_i a sa, ca cel mai mare divizor comun al numerelor $n \geq 1$ pentru care $p_{ii}^{(n)} > 0$.

O stare i se numeşte *periodică* sau *aperiodică* după cum $d_i > 1$ sau $d_i = 1$. Vom spune că stările i şi j *comunică* şi vom scrie $i \leftrightarrow j$ dacă $i \to j$ şi $j \to i$. Se observă că relaţia $\leftrightarrow$ este o relaţie de echivalenţă în mulţimea stărilor reflexive din S. Cu ajutorul acestei relaţii, mulţimea stărilor reflexive din S se împarte în clase, astfel încât două stări aparţin aceleiaşi clase dacă şi numai dacă ele comunică. Prin definiţie, orice stare nereflexivă formează ea însăşi o clasă.

O proprietate a stărilor unui lanţ Markov se numeşte *proprietate de clasă* dacă verificarea ei pentru o stare $i \in S$, atrage după sine verificarea ei pentru toate stările din clasa care conţine starea i.

O stare i se numeşte *esenţială* dacă relaţia $i \to j$ atrage după sine $j \to i$; în caz contrar, starea se numeşte *neesenţială*.

Proprietatea unei stări de a fi esenţială (neesenţială), precum şi proprietatea de a avea perioada d sunt proprietăţi de clasă.

Un lanţ pentru care spaţiul stărilor formează o singură clasă esenţială se numeşte *ireductibil*. Un lanţ ireductibil se numeşte *aperiodic* dacă o stare a sa (şi deci toate) are perioada 1.

Fie $f_{ij}^{(n)}$ probabilitatea ca lanţul să ajungă pentru prima dată în starea j după n paşi, ştiind că a pornit din starea i; deci

$$f_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = j,\, \xi_k \neq j, \quad 1 \leq k \leq n-1 \mid \xi_0 = i).$$

Să notăm cu $f_{ij} = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} f_{ij}^{(n)}$ probabilitatea ca lanţul să ajungă vreodată în starea j, ştiind că a pornit din starea i. O stare i se numeşte *recurentă* sau *nerecurentă* (*tranzientă*) după cum $f_{ii} = 1$ sau $f_{ii} < 1$. Recurenţa sau nerecurenţa sunt proprietăţi de clasă. Lanţul se numeşte *recurent* dacă toate stările sale sunt recurente.

Dacă lanţul Markov pleacă dintr-o stare nerecurentă, atunci cu probabilitatea 1, el face un număr finit de paşi în mulţimea stărilor nerecurente, după care intră într-una din clasele recurente unde rămâne la nesfârşit.

Se poate demonstra că o stare recurentă este esenţială, iar o stare neesenţială este nerecurentă.

Pentru $j \in S$, fixat, fie τ_j v.a. care indică momentul primei treceri a lanţului prin starea j. Se arată că

$$P(\tau_j = n \mid \xi_0 = i) = f_{ij}^{(n)}, \quad P(\tau_j = \infty \mid \xi_0 = i) = 1 - f_{ij},$$

iar valoarea medie a v.a. τ_j condiţionată de $(\xi_0 = i)$ este

$$\nu_{ij} = E(\tau_j \mid \xi_0 = i) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} nf_{ij}^{(n)} + \infty\cdot(1-f_{ij}).^3$$

Cantitatea ν_{ij} se numeşte *durata medie a primei treceri* din starea i în starea j, iar $m_{ij} = \dfrac{1}{\nu_{ij}}$ (cu convenţia $\dfrac{1}{0} = \infty$, $\dfrac{1}{\infty} = 0$) se numeşte *frecvenţa medie a primei treceri* din starea i în starea j. În particular $m_i = m_{ii}$ se numeşte *timp mediu de recurenţă* al stării i. O stare $i \in S$ se numeşte *pozitivă* sau *nulă* după cum $m_i > 0$ sau $m_i = 0$. Proprietatea de a fi pozitivă sau nulă este o proprietate de clasă.

7.3 Teoreme limită

Un lanţ Markov se numeşte *regulat* dacă limita $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$, $i,j \in S$, există, este strict pozitivă şi independentă de $i \in S$.

În notaţia matriceală, regularitatea unui lanţ Markov finit revine la convergenţa matricei P^n către o matrice A care are toate liniile identice şi strict pozitive.

Se spune că repartiţia iniţială $p = (p_i)_{i\in S}$ a unui lanţ Markov este *staţionară* dacă $p_i = \sum\limits_{j\in S} p_j p_{ji}$ pentru orice $i \in S$.

Teorema 7.1. *Dacă $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un lanţ Markov finit atunci:*

1) Există totdeauna limitele

$$\pi_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}, \quad i,j\in S.$$

Dacă aceste limite sunt strict pozitive şi nu depind de i, $i \in S$, lanţul se numeşte ergodic.

2) Lanţul Markov este ergodic dacă şi numai dacă este ireductibil şi pozitiv recurent.

3) Lanţul Markov este regulat dacă şi numai dacă este ergodic şi aperiodic, caz în care $\pi_{jj} = \dfrac{1}{m_j}$.

4) Lanţul Markov este regulat dacă şi numai dacă există $r \in \mathbf{N}^*$ astfel încât matricea P^r să aibă toate elementele strict pozitive. În aceste condiţii, cantităţile $|p_{ij}^{(n)} - \pi_{jj}|$, $i,j \in S$, converg exponenţial către zero.

5) Dacă lanţul este ireductibil pozitiv recurent (în particular dacă lanţul este regulat), există o repartiţie unică staţionară ale cărei componente sunt $\pi_i = \dfrac{1}{m_i}$, $i \in S$.

---

[3] Prin convenţie se consideră $0\cdot\infty = 0$.

7.4 Lanţuri Markov absorbante

Un lanţ Markov finit în care toate stările recurente sunt absorbante se numeşte *lanţ absorbant.* În acest caz matricea lanţului are forma canonică

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & T \end{pmatrix},$$

unde I este matricea unitate, iar R şi T sunt matrice ce corespund probabilităţilor de trecere din stări tranziente în stări absorbante şi respectiv în stări de asemenea tranziente.

Dacă notăm cu ν_j numărul apariţiilor stării tranziente j, atunci se demonstrează că $E(\nu_j|\xi_0 = i)$ (deci valoarea medie a lui ν_j condiţionată de faptul că lanţul a plecat din i) este elementul ce se află la intersecţia dintre linia i şi coloana j din matricea $N = (I - T)^{-1}$ numită *matricea fundamentală.*

Dacă se notează cu a_{ik} probabilitatea ca lanţul Markov, plecând din starea tranzientă i, să ajungă în starea absorbantă k, atunci are loc egalitatea matriceală

$$(a_{ik})_{i\in T,\, k\in S\setminus T} = NR.$$

Exemplul 1. (*Mers la întâmplare cu frontiere absorbante*). Ne imaginăm un şir infinit de experimente Bernoulli independente $E_1, E_2, \ldots$ având fiecare două rezultate posibile α şi $\bar{\alpha}$ cu probabilităţile p, respectiv q, $(p+q = 1)$ (vezi exemplul 2, §1.3.). Se consideră o particulă care se poate deplasa pe o axă orientată, putând ocupa numai punctele de abscisă întreagă $0, 1, 2, \ldots, l$; la fiecare moment n particula rămâne imobilă dacă se află într-unul din punctele 0 sau 1, iar, în caz contrar, ea face un salt de o unitate spre dreapta sau spre stânga după cum E_n a avut rezultatul α sau $\bar{\alpha}$. Poziţia particulei poate fi reprezentată de un lanţ Markov cu spaţiul stărilor $S = \{0, 1, \ldots, l\}$ şi cu matricea de trecere

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stările 0 şi 1 sunt absorbante, iar celelalte sunt tranziente. Matricea T din forma canonică este

$$T = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 \end{pmatrix}$$

şi prin calcul direct se arată că elementele n_{ij} ale matricei fundamentale N au valorile

$$n_{ij} = \frac{1}{(p-q)(a^l-1)} \cdot \begin{cases} (a^j-1)(a^{l-1}-1), & j \leq i \\ (a^i-1)(a^{l-i}-a^{j-i}), & j > i \end{cases}$$

pentru $p \neq \frac{1}{2}$, unde $a = \frac{p}{q}$ şi

$$n_{ij} = \frac{2}{l} \cdot \begin{cases} j(l-i), & j \geq i \\ i(l-j), & j > i \end{cases}$$

pentru $p = \frac{1}{2}$. Matricea R este dată de

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că elementele a_{ij} ale matricei NR sunt

$$a_{i0} = \begin{cases} \dfrac{a^{l-i}-1}{a^l-1}, & p \neq \dfrac{1}{2} \\ 1-\dfrac{i}{l}, & p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_{il} = 1 - a_{i0}, \quad 1 \le i \le l-1,$$

care reprezintă probabilităţile ca lanţul să fie absorbit de 0, respectiv de 1.

Mersul la întâmplare cu frontiere absorbante poate fi formulat sub forma aşa numitei *probleme a ruinei jucătorului*: doi jucători care dispun împreună de un capital de l unităţi monetare, joacă un anumit joc pe care unul dintre ei îl câştigă cu probabilitatea p, iar celălalt cu probabilitatea q, $p+q=1$. Jucătorul care pierde dă celuilalt o unitate monetară. Jocul se repetă până când unul din jucători intră în posesia întregului capital l, iar celălalt se ruinează.

Exemplul 2 (*Modele fizice de tip mers la întâmplare*). Un mers la întâmplare mai general decât cel din exemplul precedent se obţine presupunând că ori de câte ori particula se află într-o poziţie $i \neq 0, l$, ea face un salt de o unitate spre dreapta sau spre stânga cu probabilităţile p_i, respectiv q_i, sau rămâne pe loc cu probabilitatea r_i, $p_i+q_i+r_i=1$. Din poziţia 0 particula face un salt în poziţia 1 cu probabilitatea p_0, rămânând pe loc cu probabilitatea r_0; analog, din poziţia l particula face un salt în poziţia $l-1$ cu probabilitatea q_l, rămânând pe loc cu probabilitatea r_l. Evident, $p_0 + r_0 = q_l + r_l = 1$. Lanţul Markov descriind mişcarea particulei va avea matricea de trecere

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{l-1} & r_{l-1} & p_{l-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_l & r_l \end{pmatrix}.$$

Există două modele celebre ale unor fenomene fizice care sunt mersuri la întâmplare de acest tip (şi care au fost concepute fără nici o legătură cu lanţurile Markov).

Primul model, propus de Daniel Bernoulli (1700-1782) în anul 1769, descrie difuzia a două lichide incompresibile între două containere. Acestea sunt reprezentate prin două urne, fiecare conţinând l bile. Bilele joacă rolul moleculelor celor două lichide. Dintre cele $2l$ bile, l bile sunt albe, iar l bile sunt negre. Deoarece bilele reprezintă moleculele de lichide incompresibile, ele se pot mişca între cele două urne astfel încât la orice moment, fiecare urnă conţine l bile. Putem imagina această mişcare a bilelor dintr-o urnă în cealaltă în felul următor: din ambele urne se extrage câte o bilă la fiecare moment; bila extrasă din prima urnă se introduce în a doua urnă şi invers. Putem caracteriza starea sistemului astfel: spunem că sistemul se află în starea i, $0 \le i \le l$, dacă prima urnă conţine i bile albe şi a doua urnă conţine $l-i$ bile albe. Este uşor de văzut că probabilităţile de trecere într-un pas sunt

$$p_{ii-1} = q_i = \frac{i}{l}\cdot\frac{i}{l} = \left(\frac{i}{l}\right)^2, \quad 1 \le i \le l,$$

$$p_{ii+1} = p_i = \frac{l-i}{l}\cdot\frac{l-i}{l} = \left(1-\frac{i}{l}\right)^2, \quad 1 \le i \le l-1,$$

$$p_{ii} = r_i = \frac{i}{l}\cdot\frac{l-i}{l} + \frac{l-i}{l}\cdot\frac{i}{l} = 2\frac{i}{l}\left(1-\frac{i}{l}\right), \quad 0 \le i \le l.$$

Astfel lanţul Markov ce descrie mişcarea moleculelor va avea matricea de trecere

$$\begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & r_{n-1} & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_n & r_n \end{pmatrix}.$$

Să mai remarcăm că lanţul Markov asociat modelului Bernoulli este ireductibil.

Al doilea model propus de Tatiana şi Paul Ehrenfest în anul 1907, descrie schimbul de căldură între două corpuri izolate, de temperaturi diferite, din punctul de vedere al teoriei cinetice a materiei. Astfel temperaturile sunt reprezentate prin numerele de bile aflate în două urne care conţin în total $2l$ bile numerotate cu $1, 2, \dots, 2l$. Schimbul de căldură este imaginat astfel: la fiecare moment se alege la întâmplare un întreg între 1 şi $2l$, iar bila numerotată astfel este mutată din urna în care se află în cealaltă. Spunem că sistemul se află în starea i, $0 \le i \le 2l$, dacă prima urnă conţine i bile (deci a doua urnă conţine $2l-i$ bile). În acest caz, probabilităţile de trecere într-un pas sunt

$$p_{ii} = r_i = 0, \qquad 0 \le i \le 2l,$$

$$p_{ii-1} = q_i = \frac{i}{2l}, \qquad 1 \le i \le 2l,$$

$$p_{ii+1} = p_i = 1 - \frac{i}{2l}, \quad 0 \le i < 2l.$$

De asemenea, lanţul Markov asociat modelului Ehrenfest este ireductibil. Modelul Ehrenfest poate fi folosit pentru a explica unele fenomene de reversibilitate din mecanica statistică.

Exemplul 3. Să presupunem că un proces de şcolarizare constă din 5 stadii, fiecare având o durată de o unitate de timp, să spunem, un an. La sfârşitul fiecărui stadiu, promovarea în stadiul următor (sau terminarea şcolarizării) se decide în urma unui examen.

Vom admite că un cursant se poate retrage de la cursuri în orice moment, dar odată retras el nu mai revine niciodată. Astfel, situaţia unui cursant la sfârşitul unui an de studii poate fi descrisă printr-una din următoarele alternative:

a. cursantul promovează examenul şi urmează să frecventeze stadiul următor;

b. cursantul nu promovează examenul şi repetă stadiul;

c. cursantul se retrage înainte de a se prezenta la examen.

Să admitem că probabilităţile de promovare într-un stadiu superior, de repetare a stadiului încheiat sau de retragere, nu depind de rezultatele obţinute de cursant în anii anteriori. În aceste condiţii, procesul de parcurgere a stadiilor succesive de către cursant, care se poate termina fie prin încheierea cu succes a şcolarizării, fie prin retragere, poate fi descris de un lanţ Markov cu stările 0,1,2,3,4,5,6. Starea 0 caracterizează un cursant în primul stadiu de şcolarizare, starea 5 un cursant care a încheiat cu succes şcolarizarea, starea 6 un cursant care s-a retras, iar o stare intermediară $1 \leq i \leq 4$ un cursant care a promovat primele i stadii de şcolarizare. Evident stările 5 şi 6 sunt absorbante, iar celelalte tranziente. Matricea de trecere a lanţului va avea forma

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 & 0 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & p_5 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

probabilităţile p_i, r_i, q_i, $1 \leq i \leq 5$, fiind asociate alternativelor a, b, c de mai înainte. Matricea T corespunzătoare este

$$T = \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 \end{pmatrix},$$

iar elementele matricei N vor fi

$$n_{ii} = (1 - r_{i+1})^{-1}, \qquad 0 \le i \le 4,$$
$$n_{ij} = p_{i+1}p_{i+2}\dots p_j(1 - r_{i+1})^{-1}\dots(1 - r_{j+1})^{-1}, \quad i < j,$$
$$n_{ij} = 0, \qquad i > j.$$

Întrucât matricea R este

$$R = \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ 0 & q_2 \\ 0 & q_3 \\ 0 & q_4 \\ 0 & q_5 \end{pmatrix},$$

rezultă că probabilităţile de absorbţie sunt

$$a_{i5} = p_{i+1}\dots p_5(1 - r_{i+1})^{-1}\dots(1 - r_5)^{-1}, \; a_{i6} = 1 - a_{i5}, \quad 0 \le i \le 4.$$

Exemplul 4. (*Model de transmitere a unei boli contagioase într-o colectivitate mică).* Cadrul de dezvoltare a unui proces epidemiologic este o colectivitate presupusă de volum invariabil în timp care conţine două categorii de indivizi: indivizii contaminaţi şi indivizii necontaminaţi, dar succeptibili de contaminare. În modelul Greenwood, prezentat aici, dinamica procesului epidemiologic este următoarea: se presupune că există o perioadă de incubaţie de lungime fixă (folosită ca unitate de timp) şi o perioadă de infecţiozitate redusă la un singur punct, în care se pot realiza contaminări. Astfel dacă la momentul iniţial 0 există un număr de indivizi infecţioşi (adică contaminaţi şi care pot transmite boala mai departe), următoarele cazuri de îmbolnăvire apar în grupuri la intervale egale cu perioada de incubaţie. Fie r volumul populaţiei considerate şi ξ_m, $m \in \mathbf{N}$, numărul indivizilor care devin infecţioşi imediat după momentul m, iar X_n, $n \in \mathbf{N}$, numărul indivizilor rămaşi necontaminaţi la momentul n. Atunci avem $X_n = \xi_{n+1} + X_{n+1}$. Definim şansa de contagiune $0 < p = 1 - q < 1$ ca probabilitatea ca un contact între un individ necontaminat şi unul infecţios să ducă la contaminarea primului. Presupunând că toate contactele se realizează independent unul de altul, probabilitatea ca i contacte (individ necontaminat - individ infecţios) să conducă la k contaminări, $k \le i$, este egală cu $C_i^k p^k q^{i-k}$ (suntem în cazul experimentului Bernoulli repetat de i ori). Putem scrie

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(\xi_{n+1} = X_n - j \mid X_n = i) =$$
$$P(\xi_{n+1} = i - j \mid X_n = i) = \begin{cases} C_i^j p^{i-j} q^j, & i \ge j \\ 0, & i < j \end{cases}.$$

Repartiţia lui X_{n+1} nu depinde de valorile luate de v.a. X_m, $m < n$. Deci $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un lanţ Markov cu stările $0, 1, \ldots, r$ şi matricea de trecere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p & q & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ p^r & rp^{r-1}q & C_r^2 p^{r-2}q^2 & \ldots & q^r \end{pmatrix}.$$

Observăm că lanţul are o stare absorbantă 0 şi r clase formate din câte o stare i, $1 \leq i \leq r$.

Exemplul 5. În modelul stocastic de învăţare bazat pe teoria selectării stimulilor propus de W.K.Estes în anul 1950, se consideră un lanţ Markov cu două stări. Astfel starea 1 semnifică faptul că subiectul a învăţat, de exemplu, să primească o alună sau să evite un şoc electric. Starea 2 semnifică faptul că subiectul nu a învăţat încă. Se presupune că de îndată ce subiectul a învăţat el nu mai uită, iar dacă nu a învăţat încă, el va reuşi cu probabilitatea α să înveţe după fiecare încercare. Să se determine matricea de trecere şi să se calculeze $p_{21}^{(n)}$ şi $f_{21}^{(n)}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Avem $p_{11} = 1$, $p_{12} = 0$, $p_{21} = \alpha$ şi $p_{22} = 1 - \alpha$. Deci matricea de trecere este

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Pentru a obţine $p_{21}^{(n)}$, probabilităţile de trecere din starea 2 în starea 1 după n paşi, ridicăm matricea de trecere la puterea a $n-$ a. Cum

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-(1-\alpha)^n & (1-\alpha)^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

rezultă că $p_{21}^{(n)} = 1 - (1-\alpha)^n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Avem $f_{21}^{(1)} = p_{21} = \alpha$ şi $f_{21}^{(n)} = P(\xi_v \neq 1,\ 1 \leq v \leq n-1,\ \xi_n = 1 \mid \xi_0 = 2)$, $n \geq 2$. Obţinem $f_{21}^{(2)} = (1-\alpha)\alpha$ şi $f_{21}^{(3)} = (1-\alpha)^2\alpha$. În fine, făcând un raţionament prin inducţie după $n \in \mathbf{N}^*$, obţinem

$$f_{21}^{(n)} = (1-\alpha)^{n-1}\alpha, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Exemplul 6. În urma unei reacţii nucleare este posibil ca o particulă subatomică să se dezintegreze în alte particule; un copil de sex masculin, ducând mai departe numele de familie, poate avea sau nu descendenţi de sex masculin. Asemenea procese care se pot repeta până la întrerupere sunt exemple de *procese de ramificare*. Să se calculeze probabilitatea de întrerupere a procesului.

Presupunem că la început a existat o singură particulă $X_0 = 1$, care a dat naştere la X_1, descendenţi din prima generaţie cu

$$P(X_1 = j) = a_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.1}$$

În afară de cazul $X_1 = 0$, fiecare particulă din prima generaţie va da naştere la descendenţi din a doua generaţie (al căror număr reprezintă o v.a. a cărei repartiţie este dată de (7.1)). De asemenea, presupunem că acţiunile diferiţilor descendenţi sunt stocastic independente. Considerăm funcţia generatoare g a v.a. X

$$g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j.$$

Presupunem că numărul de particule din prima generaţie este j. Considerăm v.a. $Z_1, \ldots, Z_j$ care reprezintă numărul descendenţilor fiecărei particule din prima generaţie. V.a. $Z_1, \ldots, Z_j$ sunt independente şi au aceeaşi funcţie generatoare g. Apoi, numărul total de particule din generaţia a doua este

$$X_2 = Z_1 + \ldots + Z_j.$$

V.a. X_2 are funcţia generatoare g^j, datorită independenţei v.a. $Z_1, \ldots, Z_j$. Obţinem

$$E(t^{X_2} \mid X_1 = j) = [g(t)]^j \tag{7.2}$$

şi prin urmare

$$\begin{aligned} E(t^{X_2}) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X_1 = j) \cdot E(t^{X_2} \mid X_1 = j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot [g(t)]^j = g(g(t)). \end{aligned}$$

Fie g_n funcţia generatoare a v.a. X_n astfel încât $g_1 = g$. Atunci conform celor obţinute mai sus, avem $g_2 = g(g_1)$. Acelaşi argument dă

$$g_n = g(g_{n-1}) = \underbrace{g \circ g \ldots \circ g}_{n \text{ ori}}.$$

Avem

$$g_n(t) = E(t^{X_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) t^k. \tag{7.3}$$

Întrucât repartiţia numărului de descendenţi din fiecare generaţie este determinată numai de numărul de descendenţi din generaţia anterioară, este evident că şirul $(X_n)_{n \geq 0}$ are proprietatea Markov. Cum legea de reproducere este aceeaşi la fiecare generaţie, atunci $(X_n)_{n\geq 0}$ este un lanţ Markov omogen. De fapt, din relaţia (7.2) observăm că probabilitatea de trecere p_{jk} reprezintă coeficientul lui t^k din seria de puteri $[g(t)]^j$.

Excluzând cazurile triviale, să presupunem că $0 < a_0 < a_0 + a_1 < 1$. Atunci mulţimea stărilor este mulţimea numerelor întregi nenegative. Ipoteza precedentă implică faptul să toate stările conduc la starea 0, care este o stare absorbantă. Deci toate stările cu excepţia lui 0 sunt stări tranziente. Făcând $t = 0$ în relaţia (7.3) obţinem $g_n(0) = p_{10}^{(n)}$. Atunci probabilitatea de întrerupere a procesului, notată cu α, este

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} p_{10}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} g_n(0). \tag{7.4}$$

Întrucât $g_n(0) = g(g_{n-1}(0))$, făcând $n \to \infty$, obţinem

$$\alpha = g(\alpha). \tag{7.5}$$

Astfel α este soluţia ecuaţiei $\varphi(t) = g(t) - t = 0$. Pentru că $g(1) = 1$, o soluţie este $t = 1$. Apoi

$$\varphi''(t) = g''(t) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j t^{j-2} > 0, \quad t > 0.$$

Deci φ' este o funcţie monoton crescătoare. Rezultă că $\varphi = 0$ are cel mult două soluţii în [0,1]. Astfel $\varphi = 0$ are cel mult o soluţie diferită de 1 în [0,1].

Cazul 1. $\varphi = 0$ nu are nici o soluţie în [0,1). Cum $\varphi(0) = a_0 > 0$, trebuie ca $\varphi(t) > 0\ \forall t \in [0,1)$. Obţinem

$$\varphi(1) - \varphi(t) < \varphi(1) = 0, \quad 0 \leq t < 1$$

şi rezultă că

$$\varphi'(1) = \lim_{t\uparrow 1} \frac{\varphi(1) - \varphi(t)}{1 - t} \leq 0.$$

Deci $g'(1) \leq 1$.

Cazul 2. $\varphi = 0$ are o unică soluţie în [0,1). Atunci $\varphi' = 0$ are o soluţie s în $[r, 1]$, adică $\varphi'(s) = g'(s) - 1 = 0$ şi cum g' este o funcţie crescătoare obţinem $g'(1) > g'(s) = 1$. Rezumând, ecuaţia $g(t) = t$ are o soluţie pozitivă mai mică decât 1 dacă şi numai dacă $g'(1) > 1$.

În cazul 1, trebuie să avem $\alpha = 1$ deoarece $0 \leq \alpha \leq 1$ şi α este soluţie conform (7.5).

În cazul 2, vom arăta că α este soluţia $r < 1$. Avem $g(0) < g(r) = r$. Presupunând $g_{n-1}(0) < r$ rezultă

$$g_n(0) = g(g_{n-1}(0)) < g(r) = r$$

deoarece g este o funcţie crescătoare. Astfel $g_n(0) < r$ pentru orice n şi conform (7.4) obţinem $\alpha \leq r$. Dar α trebuie să fie egală cu r, ambele fiind soluţii din $[0,1)$ ale ecuaţiei.

Capitolul 8

Procese Markov omogene

8.1 Funcţia matriceală de trecere

Fie S o mulţime cel mult numărabilă[1], iar $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in S}$, $t \in \mathbf{R}_+$, o matrice de funcţii cu proprietăţile

$$\begin{aligned} & p_{ij}(t) \geq 0, \quad i,j \in S, \quad t \in \mathbf{R}_+ \\ & \sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1, \quad i \in S, \quad t \in \mathbf{R}_+ \\ & \lim_{t\to+0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad i,j \in S \end{aligned} \tag{8.1}$$

(δ_{ij} este simbolul lui Kronecker).

O familie de v.a. $(\xi_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ cu valori în S este numită *proces Markov omogen în timp* cu mulţimea de stări S, dacă

$$\begin{aligned} & P\left(\xi_{t_n+t} = j \mid \xi_{t_n} = i,\ \xi_{t_k} = i_k, \quad 0 \leq k \leq n-1\right) = \\ & = P\left(\xi_{t_n+t} = j \mid \xi_{t_n} = i\right) = p_{ij}(t) \end{aligned} \tag{8.2}$$

pentru orice $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t \geq 0$, $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$, $i,j \in S$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Prima egalitate (8.2), numită *proprietatea Markov*, se poate interpreta sub forma

$$\text{P(viitor} \mid \text{prezent, trecut)} = \text{P(viitor} \mid \text{prezent)},$$

dacă se convine ca momentul t_n să fie cel prezent.

Cea de-a doua egalitate (8.2) este proprietatea de *omogenitate temporală*.

Matricea P, numită *funcţia matriceală de trecere* a procesului, verifică *relaţia Chapman-Kolmogorov*

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad i,j \in S, \quad s,t \geq 0 \tag{8.3}$$

[1]Finită sau numărabilă.

care în formă matriceală se scrie

$$P(s+t) = P(s) \cdot P(t), \quad s,t \geq 0.$$

Funcţiile $p_{ij}(t)$ au câteva proprietăţi remarcabile:

1) Pentru orice $i,j \in S$, funcţia $p_{ij}(t)$ este uniform continuă pe $[0,\infty)$.

2) Pentru orice $i,j \in S$, funcţia $p_{ij}(t)$ este fie identic nulă, fie strict pozitivă pe $(0,\infty)$.

3) Pentru $i \neq j \in S$, $q_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{p_{ij}(t)}{t}$ există şi este finită.

4) Pentru orice $i \in S$, $q_i = -p'_{ii}(0) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1-p_{ii}(t)}{t}$ există şi $\dfrac{1-p_{ii}(t)}{t} \leq q_i$. Dacă S este finită, atunci $q_i < \infty$.

8.2 Ecuaţiile lui Kolmogorov

Dacă $q_i < \infty$, $i \in S$, atunci matricea $Q = (q_{ij})$, $i,j \in S$, unde $q_{ii} = -q_i$ (vezi §8.1) este numită *matricea intensităţilor de trecere.* În general, avem $q_{ij} \geq 0$ dacă $i \neq j$, $q_{ij} \leq 0$ dacă $i \neq j$ şi

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} \leq -q_{ii}. \tag{8.4}$$

Dacă S este finită, atunci (8.4) devine

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = -q_{ii} < \infty, \quad i \in S. \tag{8.5}$$

Relaţia (8.5) reprezintă o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $p_{ij}(t)$ să verifice ecuaţiile diferenţiale

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} q_{ik}p_{kj}(t), \quad i,j \in S, \quad t \geq 0 \tag{8.6}$$

care se scriu matriceal

$$P'(t) = QP(t), \quad t \geq 0.$$

Ecuaţiile (8.6) sunt numite *ecuaţiile lui Kolmogorov inverse.*

De asemenea, dacă $q_j < \infty$, $j \in S$ şi limita

$$\lim_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij}, \quad j \in S$$

este uniformă în raport cu $i \neq j$, atunci avem

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)q_{kj}, \quad i,j \in S, \quad t \geq 0. \tag{8.7}$$

Ecuaţiile (8.7) sunt numite *ecuaţiile lui Kolmogorov directe.*

Trebuie remarcat faptul important că, dacă S este finită, atunci au loc atât ecuaţiile (8.6), cât şi ecuaţiile (8.7). În acest caz, prin rezolvarea acestor sisteme de ecuaţii cu condiţiile iniţiale $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $i, j \in S$ (sau matriceal $P(0) = I$), se obţine

$$P(t) = \exp(Qt) = I + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{Q^n t^n}{n!}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Deci, matricea intensităţilor de trecere Q determină în mod unic funcţia matriceală de trecere $P(t)$.

Fie $p_i(t) = P(\xi_t = i)$, $i \in S$, $t \geq 0$, numite *probabilităţi absolute*, iar $(p_j)_{j \in S}$ o probabilitate pe S, adică $p_j \geq 0$, $j \in S$, şi $\sum_{j \in S} p_j = 1$, numită *repartiţie iniţială.*

Dacă $p_j = p_j(0) = P(\xi_0 = j)$, $j \in S$, atunci probabilităţile absolute verifică ecuaţiile

$$p_j(t) = p_j + \sum_{k \in S} \int_0^t q_{kj} p_k(u) du, \quad j \in S. \tag{8.8}$$

O probabilitate $(p_j)_{j \in S}$ pe S va fi numită *repartiţie staţionară* dacă $p_j(t) = P(\xi_t = j) = P(\xi_0 = j) = p_j$, $j \in S$, $t \geq 0$. Din (8.8) se deducă că $(p_j)_{j \in S}$ este o repartiţie staţionară dacă şi numai dacă $\sum_{k \in S} q_{kj} p_k = 0$, $j \in S$.

8.3 Câteva clase remarcabile de procese Markov

1. Procesul Poisson

Se consideră un proces Markov omogen în timp, $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, cu mulţimea de stări $\mathbf{N}$ care verifică axiomele:

(1) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea $i \in \mathbf{N}$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se găsească în starea $i + 1$ este $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, unde $\lambda > 0$ este o constantă dată; deci $p_{ii+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

(2) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea $i \in \mathbf{N}$, atunci probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să se petreacă mai multe treceri dintr-o stare în alta sau ca la momentul $t + \Delta t$ să se găsească într-o stare $j \neq i + 1$, $j \neq i$, este $o(\Delta t)$; deci $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$, $j \neq i$, $j \neq i + 1$.

(3) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea $i \in \mathbf{N}$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se găsească tot într-o stare i este $1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$; deci $p_{ii}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

Se observă imediat că matricea intensităţilor de trecere este dată de

$$q_{ii} = -\lambda, \quad i \in \mathbf{N},$$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda, \ j \neq i+1 \\ 0, \ j \neq i+1 \end{cases}$$

şi din (8.6) şi (8.7) rezultă

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1j}(t), \quad i,j \in \mathbf{N}, \\ p'_{ij}(t) &= -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{ij-1}(t), \quad i \in \mathbf{N}, \quad j \in \mathbf{N}^*, \\ p'_{i0}(t) &= -\lambda p_{i0}(t), \quad i \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Se verifică cu uşurinţă că soluţia acestor ecuaţii cu condiţia iniţială $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ este

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, & j \geq 1 \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Relaţia (8.8) pentru procesul Poisson devine

$$\begin{aligned} p_j(t) &= p_j - \lambda \int_0^t [p_j(u) + p_{j-1}(u)]du, \quad j \geq 1, \\ p_0(t) &= -\lambda \int_0^t p_0(u)du \end{aligned}$$

şi prin derivare

$$\begin{aligned} p'_j(t) &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t), \quad j \geq 1, \\ p'_0(t) &= -\lambda p_o(t). \end{aligned}$$

Întrucât

$$p_j(0) = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

rezultă $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, apoi $p_1(t) = \lambda t \, e^{-\lambda t}$ şi în general

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

ceea ce arată că v.a. $\xi(t)$ urmează o repartiţie Poisson (vezi §3.5) cu parametrul λt. Se spune că $\xi(t)$ generează un *flux poissonian.*

2. Procesul de naştere

Se consideră un proces Markov omogen $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, cu spaţiul stărilor $\mathbf{N}$. Axiomele (1)-(3) verificate de procesul Poisson sunt verificate şi de către procesul de naştere cu deosebire că probabilităţile de la (1) şi (3) vor fi $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$ şi respectiv $1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, unde λ_i, $i \in \mathbf{N}$, este un şir de constante pozitive; trecerea procesului din starea i în starea $i+1$ este "o naştere".

Se deduce cu uşurinţă că matricea intensităţilor de trecere este

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & j = i \\ \lambda_i, & j = i+1 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Prin urmare, ecuaţiile (8.6) şi (8.7) devin

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1j}(t), && i,j \in \mathbf{N}, \\ p'_{ij}(t) &= -\lambda_j p_{ij}(t) + \lambda_{j-1} p_{ij-1}(t), && i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N}^*, \\ p'_{i0}(t) &= -\lambda_0 p_{i0}(t), && i \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Dacă constantele λ_i, $i \in \mathbf{N}$, sunt distincte şi strict pozitive, atunci soluţia acestui sistem, cu condiţiile $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbf{N}$, este

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \left(\prod\limits_{k=i}^{j-1} \lambda_k\right) \sum\limits_{k=i}^{j} \dfrac{e^{-\lambda_k t}}{\prod\limits_{r=i, r\neq k}^{j} (\lambda_r - \lambda_k)}, & j > i \\ e^{-\lambda_i t}, & j = i \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

Pentru probabilităţile absolute, din (8.8) se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= -\lambda_i p_i(t) + \lambda_{i-1} p_{i-1}(t), \quad i \in \mathbf{N}^*, \\ p'_0(t) &= -\lambda_0 p_0(t). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Soluţia acestor ecuaţii cu condiţiile iniţiale $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$, $i \in \mathbf{N}^*$, este

$$\begin{aligned} p_0(t) &= e^{-\lambda_0 t}, \\ p_i(t) &= \lambda_{i-1} e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{\lambda_i x} p_{i-1}(x) dx, \quad i \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$

Dacă $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$ pentru orice $t \in \mathbf{R}_+$, atunci procesul de naştere se numeşte *regulat.* O condiţie necesară şi suficientă care asigură regularitatea este

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty. \tag{8.11}$$

Un caz particular important este acela pentru care $\lambda_i = i\lambda$, $i \in \mathbf{N}$, $\lambda > 0$. În acest caz, procesul este numit *proces liniar de naştere* (sau *proces Yule-Furry).*

Din (8.11) rezultă că acest proces este regulat. Relaţiile (8.9) devin

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -i\lambda p_{ij}(t) + i\lambda p_{i+1j}(t), && i,j \in \mathbf{N}, \\ p'_{ij}(t) &= -j\lambda p_{ij}(t) + (j-1)\lambda p_{ij-1}(t), && i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N}^*, \\ p'_{i0}(t) &= 0, && i \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

cu soluţia

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} C_{j-1}^{j-i} e^{-i\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}, & j \geq i \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

De asemenea, relaţiile (8.10) se scriu astfel

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= -i\lambda p_i(t) + (i-1)\lambda p_{i-1}(t), && i \in \mathbf{N}^*, \\ p'_0(t) &= 0. \end{aligned}$$

Întrucât $p_0(t) = \text{const.}$ există două posibilităţi: $p_0(t) = 1$, $t \in \mathbf{R}_+$, ceea ce înseamnă că procesul nu părăseşte starea 0 sau $p_0(t) = 0$, $t \in \mathbf{R}_+$, ceea ce înseamnă că spaţiul stărilor este de fapt $\mathbf{N}^*$. În cea de-a doua ipoteză[2] se consideră $p_1(0) = 1$ şi soluţia sistemului este

$$p_j(t) = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}, \quad j \in \mathbf{N}^*.$$

3. Procesul de moarte

Fie $n_0 \in \mathbf{N}^*$ şi $S = \{0, 1, 2, \ldots, n_0\}$. Se consideră un proces Markov omogen $\xi(t)$, $t \in R_+$, cu spaţiul stărilor S care verifică axiomele:

(1) $\xi(0) = n_0$.

(2) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea i, $(i = 1, 2, \ldots, n_0)$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se găsească în starea $i - 1$ este $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, unde $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n_0}$ sunt constante date; deci $p_{ii-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$.

(3) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea i, $(i = 1, 2, \ldots, n_0)$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se găsească tot în starea i este $1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$; deci $p_{ii}(\Delta t) = 1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$.

(4) Probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să aibă loc mai multe treceri dintr-o stare în alta sau să aibă loc o trecere diferită de cele descrise la (2) şi (3) este $o(\Delta t)$; deci $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$, $j \neq i - 1$, $j \neq i$.

Din (2) - (4) se deduce că matricea intensităţilor de trecere este

$$q_{ij} = \begin{cases} -\mu_i, & j = i;\ i = 1, 2, \ldots, n_0 \\ \mu_i, & j = i-1;\ i = 1, 2, \ldots, n_0 \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

---

[2]Se observă că (8.11) rămâne adevărată pentru că $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Din (8.6) şi (8.7) rezultă

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -\mu_i p_{i-1,j}(t) - \mu_i p_{ij}(t), \quad i = 1,2,\dots,n_0, \quad j \in S, \\ p'_{0j}(t) &= 0, \quad j \in S \end{aligned} \tag{8.12}$$

şi

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -\mu_{j+1} p_{ij+1}(t) - \mu_j p_{ij}(t), \quad i,j = S, \\ p'_{i0}(t) &= \mu_1 p_{i1}(t), \quad j \in S. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Ecuaţiile (8.12) şi (8.13), cu condiţiile iniţiale $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, se pot rezolva utilizând transformata Laplace.

Din (8.8) rezultă că probabilităţile absolute verifică ecuaţiile

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= -\mu_i p_i(t) + \mu_{i+1} p_{i+1}(t), \quad i = 0,1,\dots,n_0 - 1, \\ p'_{n_0}(t) &= -\mu_{n_0} p_{n_0}(t), \end{aligned}$$

cu condiţia iniţială $p_{n_0}(0) = 1$; rezultă $p_{n_0}(t) = e^{-\mu_{n_0} t}$ şi apoi celelalte probabilităţi absolute se deduc prin recurenţă.

Pentru cazul particular în care $\mu_i = i\mu$, $\mu > 0$, $i \in S$, probabilităţile absolute sunt

$$p_i(t) = C_{n_0}^i e^{-n_0 \mu t} (e^{\mu t} - 1)^{n_0 - i}, \quad i \in S.$$

4. Procesul de naştere şi de moarte.

Se consideră un proces Markov omogen $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, cu spaţiul stărilor $\mathbf{N}$, care verifică următoarele axiome:

(1) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea $i \in \mathbf{N}$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se afle în starea $i+1$ este $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, unde λ_i, $i \in N$, sunt constante strict pozitive date; deci $p_{ii+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$.

(2) Dacă la momentul t procesul se găseşte în starea $i \in \mathbf{N}^*$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se afle în starea $i - 1$ este $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, unde μ_i, $i \in \mathbf{N}^*$, sunt constante strict pozitive date; deci $p_{ii-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$.

(3) Dacă la momentul t procesul se află în starea $i \in \mathbf{N}$, atunci probabilitatea ca la momentul $t + \Delta t$ să se afle tot în starea i este

$$1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + o(\Delta t), \quad i \in \mathbf{N}^*; \quad 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t), \; i = 0;$$

deci

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + o(\Delta t), \; i \in \mathbf{N}^*; \quad p_{00}(\Delta t) = 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t).$$

(4) Probabilitatea ca în intervalul $(t, t + \Delta t)$ să aibă loc mai multe treceri dintr-o stare în alta sau să aibă loc o trecere diferită de cele descrise la (1), (2) şi (3) este $o(\Delta t)$; deci $p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$; $j \neq i - 1$, $j \neq i$, $j \neq i + 1$.

Se deduce că matricea intensităţilor de trecere este

$$q_{ij} = \begin{cases} -(\lambda_i + \mu_i), & j = i \neq 0 \\ -\lambda_0, & j = i = 0 \\ \lambda_i, & j = i+1, \quad i \in \mathbf{N} \\ \mu_i, & j = i-1, \quad i \in \mathbf{N}^* \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Din (8.6) şi (8.7) rezultă

$$p'_{ij}(t) = \mu_i p_{i-1j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1j}(t), \quad i \in \mathbf{N}^*, j \in \mathbf{N},$$
$$p'_{0j}(t) = -\lambda_0 p_{0j}(t) + \lambda_0 p_{1j}(t), \quad j \in \mathbf{N}$$

şi

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{ij-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)p_{ij}(t) + \mu_{j+1} p_{ij+1}(t), \quad i \in \mathbf{N}, j \in \mathbf{N}^*,$$
$$p'_{i0}(t) = -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t), \quad i \in \mathbf{N}.$$

Soluţiile se pot obţine utilizând transformata Laplace. Conform relaţiei (8.8) probabilităţile absolute verifică

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_i(t) + \mu_{i+1} p_{i+1}(t), \quad i \in \mathbf{N}^*, \\ p'_0(t) &= \mu_1 p_1(t). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Dacă la momentul $t = 0$ procesul se găseşte în starea $k_0 \in \mathbf{N}$, atunci aceste ecuaţii se rezolvă cu condiţia iniţială $p_i(0) = \delta_{ik_0}$.

Dacă se notează

$$u_0 = 1, \quad u_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}, \quad k \in \mathbf{N}^*,$$

atunci $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ este o repartiţie staţionară (vezi §8.2). Mai mult, dacă $\sum_{i\in N} u_i < \infty$ avem

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \frac{u_j}{\sum_{k\in\mathbf{N}} u_k}.$$

Un caz particular important al procesului de naştere şi moarte este *procesul liniar de naştere şi de moarte (procesul Feller-Arley)* pentru care $\lambda_i = i\lambda$, $\mu_i = i\mu$, $i \in \mathbf{N}$, $\lambda, \mu > 0$.

Să considerăm funcţia generatoare (vezi §2.5)

$$g(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k.$$

Din (8.14) se deduce

$$\frac{\partial g(s,t)}{\partial t} = [\lambda s^2 - (\lambda+\mu)s + \mu]\frac{\partial g(s,t)}{\partial s}.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$g(s,t) = f\left(\frac{\mu - \lambda s}{1-s}e^{-(\lambda-\mu)t}\right),$$

unde f este o funcţie arbitrară de clasă C^1. Dacă $\xi(0)=1$, atunci $g(s,0)=s$, adică $s = f\left(\frac{\mu-\lambda s}{1-s}\right)$ şi prin urmare $f(x) = \frac{\mu - x}{\lambda - x}$.

Deci

$$g(s,t) = \frac{\mu(1-e^{(\lambda-\mu)t}) - (\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t})s}{\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \lambda(1-e^{(\lambda-\mu)t})s}. \tag{8.15}$$

După dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei (8.15), după puterile lui s, se obţine, pentru $\lambda \neq \mu$,

$$\begin{aligned} p_k(t) &= [1-\alpha(t)][1-\beta(t)][\beta(t)]^{k-1}, \quad k \in \mathbf{N}^*, \\ p_0(t) &= \alpha(t), \end{aligned} \tag{8.16}$$

unde

$$\alpha(t) = \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t}-1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}, \quad \beta(t) = \frac{\lambda(e^{(\lambda-\mu)t}-1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu}.$$

Tot cu ajutorul funcţiei (8.15) se obţine $m(t) = E[\xi(t)] = e^{(\lambda-\mu)t}$,

$$\mathrm{Var}[\xi(t)] = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}(e^{(\lambda-\mu)t}-1), \quad \lambda \neq \mu. \tag{8.17}$$

Un proces liniar de naştere şi moarte este numit *subcritic, critic sau supercritic* după cum $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ sau $\lambda > \mu$.

Pentru procese subcritice sau supercritice varianţa este dată de (8.17); în cazul critic $\mathrm{Var}[\xi(t)] = 2\lambda t$. De asemenea,

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = \begin{cases} 0, & \lambda < \mu \\ 1, & \lambda = \mu \\ \infty, & \lambda > \mu. \end{cases}$$

Pentru determinarea probabilităţii ca, pentru $t \to \infty$, procesul să intre în starea $i = 0$ (populaţia să dispară), se utilizează (8.16)

$$p_0(t) = \frac{\mu(e^{(\lambda-\mu)t}-1)}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu},$$

de unde

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \begin{cases} 1, & \lambda < \mu \\ \dfrac{\mu}{\lambda}, & \lambda > \mu. \end{cases}$$

Exemplul 1. În multe cazuri, modelul adecvat pentru descrierea funcţionării în timp a sistemelor complexe îl constitue procesele Markov finite, omogene. În decursul timpului, sistemul trece de la o stare la alta, pe măsură ce unele componente ale sale se defectează, iar altele sunt reparate. Aşadar, defectarea şi repararea diferitelor componente sunt evenimentele care marchează trecerea sistemului de la o stare la alta. Spre exemplu, dacă considerăm un sistem ale cărui componente funcţionează în serie, atunci acest sistem se defectează odată cu defectarea oricărei componente. Se presupune că numai o singură componentă poate fi defectată la un moment oarecare t (celelalte componente nu se pot defecta când sistemul nu funcţionează). Dacă numărul componentelor sistemului este n, se disting $n+1$ stări posibile în evoluţia sistemului. Prin urmare, fenomenul fizic poate fi descris de un proces Markov $(\xi_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ cu mulţimea stărilor $S = \{0, 1, \ldots, n\}$. Starea 0 semnifică faptul că toate componentele sunt în stare de funcţionare, iar starea i, $1 \le i \le n$, semnifică starea de defect a componentei a i - a.

Se va presupune că probabilitatea de defectare a componentei a i - a în intervalul Δt are forma $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, iar probabilitatea de reparare a aceleiaşi componente în intervalul Δt este $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, unde λ_i, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$; probabilitatea a două sau mai multe defecţiuni sau reparaţii în intervalul Δt este $o(\Delta t)$. Ne propunem să determinăm funcţia de repartiţie a perioadelor de funcţionare neîntreruptă; vom lua deci în consideraţie numai evoluţia procesului din starea 0 în stările $i, i = 1, 2, \ldots, n$. De aici deducem că matricea intensităţilor de trecere este

$$q_{0i} = \lambda_i, \quad q_{00} = -\lambda_0, \quad \lambda_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$
$$q_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Pentru probabilităţile absolute, din (8.8) avem

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t), \; p_0(0) = 1,$$
$$p_i'(t) = \lambda_i p_0(t), \; p_i(0) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

de unde se deduce

$$p_0(t) = e^{-\lambda_0 t}, \quad p_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}(1 - e^{-\lambda_0 t}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Deci o perioadă de funcţionare neîntreruptă are funcţia de repartiţie

$$F(t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}.$$

De asemenea, se deduce că $p_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}F(t)$; $\frac{\lambda_i}{\lambda_0}$ semnifică probabilitatea ca o perioadă de funcţionare să fie încheiată de defectarea componentei a i-a.

Pentru repartiţia perioadei de avarie neîntreruptă, se va lua în consideraţie numai evoluţia procesului din stările i, $i = 1, 2, \dots, n$ în starea 0. Matricea intensităţilor de trecere este $q_{0j} = 0$, $j = 0, 1, \dots, n$,

$$q_{i0} = \mu_i, \quad q_{ij} = -\mu_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

şi conduce la sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$p_0'(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i(t), \quad p_0(0) = 0,$$

$$p_i'(t) = -\mu_i p_i(t), \quad p_i(0) = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

cu soluţia

$$p_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}(1 - e^{-\mu_i t}), \quad p_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} e^{-\mu_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Deci funcţia de repartiţie a perioadei de avarie neîntreruptă este

$$G(t) = p_0(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_0}(1 - e^{-\mu_i t}).$$

Exemplul 2. Funcţionarea unui sistem format din n elemente identice, care funcţionează independent în paralel, poate fi descrisă de un proces de naştere şi moarte. Starea k, $k = 0, 1, \dots, n$, semnifică faptul că sunt defecte k din cele n elemente. În acest caz, $\lambda_j = 0$ pentru $j \geq n$ şi $\mu_j = 0$ pentru $j \geq n$ (vezi §8.3).

Exemplul 3. Pe un osciloscop sosesc impulsuri electrice de amplitudine aleatoare X_i la momente aleatoare de timp t_i, generând un flux poissonian; deci numărul de impulsuri $N(t)$ într-un interval $[0, t]$ verifică relaţia

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda_t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbf{N},$$

unde $\lambda > 0$ este o constantă dată.

După primirea impulsului de amplitudine X_i, pe ecranul osciloscopului se poate vizualiza funcţia

$$X_i \exp[-\alpha(t - t_i)]_+ = \begin{cases} 0, & t < t_i \\ X_i \exp[-\alpha(t - t_i)], & t \geq t_i \end{cases}$$

unde α este o constantă dată. Prin urmare, după valoarea amplitudinii X_i urmează o scădere exponenţială până la momentul următorului impuls (vezi fig. 8.1).

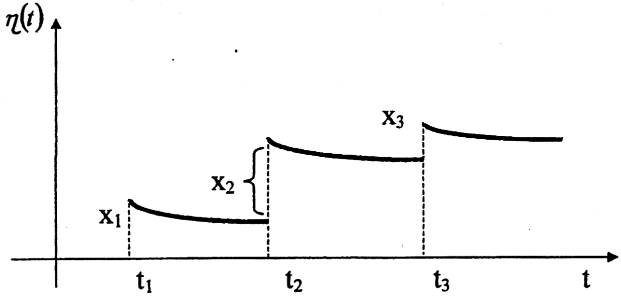


Fig. 8.1.

Dacă $\eta(t)$ este valoarea înregistrată la momentul t, atunci

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \exp[-\alpha(t - t_i)].$$

În practică, ne interesează repartiţia v.a. $\eta(t)$ sau echivalent funcţia sa caracteristică $\varphi_t(s)$.

Se presupune că v.a. X_i sunt independente şi identic repartizate cu densitatea de repartiţie $h(x)$, deci cu funcţia caracteristică

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{isx} h(x)dx.$$

Se poate demonstra că

$$\varphi_t(s) = \exp\left[-\lambda \int_0^t (1 - \psi(se^{-av}))dv\right]$$

şi deci

$$E[\eta(t)] = \lambda E(X_k)\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}.$$

Exemplul 4. Se consideră o populaţie formată din $n+1$ indivizi, omogenă, supusă riscului unei îmbolnăviri (epidemie). Fie $\xi(t)$ numărul de indivizi necontaminaţi la momentul t. Se presupune $\xi(0) = n$, deci la momentul iniţial

$t = 0$ un singur individ este contaminat. Se admite că $\xi(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, este un proces de moarte cu

$$\mu_k = k\mu(n-k+1), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \mu > 0.$$

În acest caz, probabilităţile absolute ale procesului, $p_k(t)$, verifică ecuaţiile (vezi §8.3 pct. 3) pentru $\mu = 1$

$$p_k'(t) = (k+1)(n-k)p_{k+1}(t) - k(n-k+1)p_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$p_n'(t) = -np_n(t).$$

Modelul prezentat se poate îmbunătăţi luându-se în consideraţie şi indivizii care nu mai sunt supuşi riscului de contaminare datorită izolării, vaccinării sau decesului.

Exemplul 5. Fie $\{\xi_1(t),\ t \in \mathbf{R}_+\}$ şi $\{\xi_2(t),\ t \in \mathbf{R}_+\}$ două procese Poisson independente de parametru λ_1 şi respectiv λ_2. Fie $\xi(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$. Se cere:

a) $\{\xi(t),\ t \in \mathbf{R}_+\}$ este un proces cu creşteri independente ?

b) $\{\xi(t),\ t \in \mathbf{R}_+\}$ este un proces Poisson ?

c) $P(\xi(t) - \xi(s) = k)$ pentru $0 \leq s < t$ şi $k = 0, \pm 1, \pm 2$;

a) Din definirea procesului $\xi(t)$ rezultă

$$\begin{aligned} \xi(t+s) - \xi(s) &= [\xi_1(t+s) - \xi_2(t+s)] - [\xi_1(s) - \xi_2(s)] = \\ &= [\xi_1(t+s) - \xi_1(s)] - [\xi_2(t+s) - \xi_2(s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(s) - \xi(0) &= [\xi_1(s) - \xi_2(s)] - [\xi_1(0) - \xi_2(0)] = \\ &= [\xi_1(s) - \xi_1(0)] - [\xi_2(s) - \xi_2(0)]. \end{aligned}$$

Deoarece cele patru v.a. care intervin sunt independente, rezultă că $\xi(t+s) - \xi(s)$ şi $\xi(s) - \xi(0)$ sunt independente. Deci procesul este cu creşteri independente.

b) Deoarece $\xi(t)$ ia toate valorile întregi, pozitive, negative sau nule, nu poate fi un proces Poisson.

c) Avem

$$P(\xi(t) - \xi(s) = k) = P([\xi_1(t) - \xi_1(s)] - [\xi_2(t) - \xi_2(s)] = k) =$$

$$= \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} P(\xi_1(t) - \xi_1(s) = \nu) P(\xi_2(t) - \xi_2(s) = \nu - k).$$

Ţinând seama că procesele $\xi_1(t)$ şi $\xi_2(t)$ sunt staţionare, obţinem

$$\begin{aligned} P(\xi_1(t) - \xi_1(s) = k) &= P(\xi_1(t-s) - \xi_1(0) = k) = \\ &= P(\xi_1(t-s) = k), \end{aligned}$$

$$P(\xi_2(t) - \xi_2(s) = k) = P(\xi_2(t-s) = k).$$

Punând $t - s = u$, rezultă

$$\sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} P(\xi_1(u) = \nu)P(\xi_2(u) = \nu - k) = P(\xi(u) = k).$$

$\xi(t)$ este deci un proces staţionar şi

$$\begin{aligned} P(\xi(u) = k) &= \sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty} e^{-\lambda_1 u}\frac{(\lambda_1 u)^\nu}{\nu!}e^{-\lambda_2 u}\frac{(\lambda_2 u)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} = \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)u}\sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty}\frac{(\lambda_1 u)^\nu(\lambda_2 u)^{\nu-k}}{\nu!(\nu-k)!}, \end{aligned}$$

de unde

$$P(\xi(t) - \xi(s) = k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)}\sum_{\nu=\sup(0,k)}^{\infty}\frac{(\lambda_1(t-s))^\nu(\lambda_2(t-s))^{\nu-k}}{\nu!(\nu-k)!}.$$

Capitolul 9

Procese semi-Markov

9.1 Matricea semi-Markov

Fie E o mulţime ce mult numărabilă. O matrice (eventual cu o infinitate de linii şi coloane) de funcţii pozitive $(Q_{ij}(t))_{i,j\in E}$ se numeşte *matrice semi-Markov* dacă

a) $Q_{ij}(t) = 0, \quad t \leq 0, \quad i,j \in E;$

b) $\sum\limits_{j\in E} Q_{ij}(\infty) = 1, \quad i \in E;$

c) $Q_{ij}(\cdot)$ este crescătoare şi continuă la dreapta pentru $i,j \in E$.

Din aceste proprietăţi rezultă:

1. Matricea $p = (p_{ij})_{i,j\in E}$, unde $p_{ij} = Q_{ij}(\infty)$, este o matrice stocastică (vezi cap.7).

2. $H_i(\cdot) = \sum\limits_{j\in E} Q_{ij}(\cdot)$ este o funcţie de repartiţie (vezi §2.2) pentru $i \in E$.

3. $F_{ij}(\cdot) = \dfrac{Q_{ij}(\cdot)}{p_{ij}}$ este o funcţie de repartiţie pentru $i,j \in E$.

Se observă că, pentru $i,j \in E$, funcţia $Q_{ij}(\cdot)$ are toate proprietăţile unei funcţii de repartiţie nule pe semiaxa negativă, cu excepţia proprietăţii $Q_{ij}(\infty) = 1$, (în fapt, avem $Q_{ij}(\infty) \leq 1$). O astfel de funcţie este numită *funcţie de masă.*

Pentru matricea de funcţii de masă, $(Q_{ij}(t))_{i,j\in E}$, se defineşte prin recurenţă convoluţia de ordin n, $n \in \mathrm{N}$, notată $Q_{ij}^{(n)}(t)$, în felul următor.

$$Q_{ij}^{(0)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \delta_{ij}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$Q_{ij}^{(1)}(t) = Q_{ij}(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

iar pentru $n \geq 2$

$$Q_{ij}^{(n)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sum_{k \in E} \int_0^t Q_{kj}^{(n-1)}(t-x) Q_{ik}(dx), & t \geq 0. \end{cases}$$ [1]

9.2 Sisteme semi-Markov

Se consideră un sistem care în fiecare moment de timp se poate găsi într-una din stările mulţimii E. Funcţionarea acestui sistem poate fi descrisă de un proces semi-Markov dacă:

1) la momentul iniţial $t = 0$ sistemul se găseşte într-una din stările din E, de exemplu, în starea $i \in E$, iar după scurgerea timpului aleator X_1 sistemul trece în starea $j \in E$ (timpul X_1 petrecut în starea i, înainte de trecerea în starea j, are funcţia de repartiţie $F_{ij}(\cdot)$);

2) trecerea sistemului din starea i în starea j are loc cu probabilitatea $p_{ij} > 0$ ($\sum\limits_{j \in E} p_{ij} = 1$ pentru orice $i \in E$) [2];

3) dacă sistemul trece din starea j în starea k, atunci sistemul rămâne în starea j un timp aleator X_2 cu funcţia de repartiţie $F_{jk}(\cdot)$, ş.a.m.d (vezi fig.9.1.)

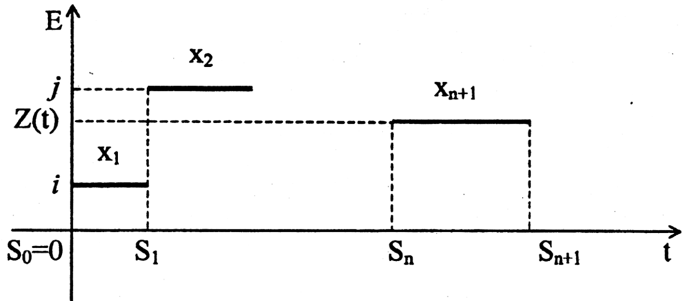


Fig. 9.1

[1]Integrala este Lebesgue-Stieltjes. Dacă $Q_{ik}(\cdot)$ este derivabilă, atunci $Q_{ik}(dx)$ se înlocuieşte cu $Q'_{ik}(x)dx$.

[2]Aici este luată în consideraţie posibilitatea trecerii din starea i în starea $i, i \in E$. În aplicaţiile practice, deoarece aceasta nu reprezintă o schimbare de stare, se consideră de obicei $p_{ii} = 0$, $i \in E$.

Se observă că funcţiile $Q_{ij}(\cdot) = p_{ij}F_{ij}(\cdot)$, $i,j \in E$, sunt funcţii de masă.

Momentele de "salt" (schimbarea de stare) ale sistemului sunt $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Starea sistemului la momentul S_n, $n \in \mathbf{N}$, va fi notată cu J_n. Se va presupune că procesul bidimensional (J_n, X_n), $n \in \mathbf{N}$, cu valori în $E \times \mathbf{R}_+$, verifică relaţia

$$P(J_{n+1}, X_{n+1} \leq t \mid J_0 = i_0,\ X_1 = x_1, \ldots, J_{n-1} = i_{n-1},\ X_{n-1} = x_{n-1}, \tag{9.1}$$
$$J_n = i,\ X_n = x_n) = Q_{ij}(t);\ i_0, i_1, \ldots, i_{n-1},\ i,j \in E;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{R}_+.$$

Relaţia (9.1) arată că (J_n, X_n), $n \in \mathbf{N}$, este un proces Markov de o factură specială, în sensul că cea de a doua componentă X_n nu influenţează evoluţia viitoare a procesului; un proces stocastic $(J_n, X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ care verifică relaţia (9.1) este numit *proces* J - X.

Din relaţia (9.1) rezultă:

- procesul $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un lanţ Markov cu spaţiul stărilor E şi matricea probabilităţilor de trecere $P = (p_{ij})_{i,j\in E}$, adică

$$P(J_{n+1} = j \mid J_n = i) = p_{ij}, \quad i,j \in E. \tag{9.2}$$

- procesul $(J_n, S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un proces Markov, cu valori în $E \times \mathbf{R}_+$ numit *proces Markov de reînnoire* care verifică relaţia

$$P(J_n = j,\ S_n \leq t \mid J_0 = i) = Q_{ij}^{(n)}(t). \tag{9.3}$$

- în ceea ce priveşte procesul $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ au loc relaţiile

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} \leq t \mid J_0 = i_0,\ J_1 = i_1, \ldots, J_{n-1} = i_{n-1},\ J_n = i) = \\ &= H_i(t), \quad i_0, i_1, \ldots, i_{n-1},\ i \in E,\ t \in \mathbf{R}_+, \end{aligned} \tag{9.4}$$

$$P(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i,\ J_{n+1} = j) = F_{ij}(t),\ i,j \in E,\ t \in \mathbf{R}_+, \tag{9.5}$$

unde funţiile $H_i(\cdot)$ şi $F_{ij}(\cdot)$ au fost definite în paragraful precedent.

Dacă notăm cu Z_t, $t \in \mathbf{R}_+$, starea sistemului la momentul t, se vede că $Z_t = J_n$ dacă $S_n \leq t < S_{n+1}$. Procesul $(Z_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ este numit *proces semi-Markov.*

Numărul de treceri ale procesului Z_t prin starea i în intervalul de timp $[0,t]$ este o v.a. ce va fi notată cu $N_i(t)$. De asemenea, se notează cu $N(t)$ v.a. care desemnează numărul total de salturi în intervalul $[0,t]$. Evident,

$$N(t) = \sum_{i\in E} N_i(t) = \max_{n\in\mathbf{N}}\{S_n \leq t\}.$$

Dacă $P(N(t) < \infty \mid Z_0 = i) = 1$ pentru orice $t \in \mathbf{R}_+$ şi $i \in E$, atunci procesul semi-Markov se numeşte *regulat.* O condiţie suficientă pentru regularitate este ca mulţimea E să fie finită. În continuare se vor considera numai procese regulate.

Procesele semi-Markov reprezintă o generalizare atât a proceselor Markov, cât şi a proceselor de reînnoire. Astfel, Z_t este un proces Markov dacă funcţiile de repartiţie $F_{ij}(\cdot)$ sunt de tip exponenţial (vezi §3.9)

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad t \in \mathbf{R}_+; \quad \lambda_i > 0, \quad i, j \in E.$$

Pe de altă parte, dacă mulţimea E este formată dintr-un singur element, se demonstrează că şirul de v.a. $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un şir de reînnoire (vezi §6.1).

9.3 Ecuaţia Markov de reînnoire

Se consideră ecuaţia integrală

$$U_i(t) - \sum_{j \in E} U_j(t-x) Q_{ij}(dx) = V_i(t), \quad i \in E, \tag{9.6}$$

scrisă pentru fiecare stare $i \in E$, cu $U_i(\cdot)$, $i \in E$, funcţii necunoscute, iar $V_i(\cdot)$, $i \in E$, funcţii date. O ecuaţie de forma (9.6) este numită *ecuaţie Markov de reînnoire*. Dacă mulţimea E este formată dintr-un singur element, atunci se obţine ecuaţia clasică de reînnoire (6.3) (vezi §6.1).

Ecuaţia (9.6) poate fi rezolvată prin utilizarea transformatei Laplace; astfel, dacă

$$\tilde{U}_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_i(t) dt, \quad \tilde{V}_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V_i(t) dt,$$

$$\tilde{Q}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{ij}(dt),$$

se obţine sistemul algebric

$$\tilde{U}_i(\lambda) - \sum_{j \in E} \tilde{Q}_{ij}(\lambda) \tilde{U}_j(\lambda) = \tilde{V}_i(\lambda), \quad i \in E. \tag{9.7}$$

Procesul semi-Markov este caracterizat de următoarele mărimi:

$p_{ij}(t) = P(Z_t = j \mid Z_0 = i)$ - probabilitatea ca procesul să se afle în starea j la momentul t, ştiind că la momentul iniţial $t = 0$ a fost în starea i;

$U_{ij}(t) = E[T_j(t) \mid J_0 = i]$ - unde $T_j(t)$ este v.a. ce desemnează timpul din intervalul $[0, t]$ petrecut de proces în starea j;

$R_{ij}(t) = E[N_j(t) \mid J_0 = i]$ - valoarea medie a numărului de treceri prin starea j în intervalul $[0, t]$, ştiind că la momentul iniţial $t = 0$, procesul a fost în starea i.

Ecuaţiile Markov de reînnoire corespunzătoare, pentru $i, j \in E$, sunt

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij}[1 - H_i(t)] + \sum_{k \in E} \int_0^t p_{kj}(t-x) Q_{ik}(dx), \tag{9.10}$$

$$U_{ij}(t) - \sum_{k \in E} \int_0^t U_{kj}(t-x) Q_{ik}(dx) = \delta_{ij}[t(1 - H_i(t)) + \int_0^t x H_i(dx)], \tag{9.11}$$

$$R_{ij}(t) = \delta_{ij} + \sum_{k \in E} \int_0^t R_{kj}(t-x) Q_{ik}(dx). \tag{9.12}$$

Exemplul 1. Se consideră un sistem complex a cărui funcţionare este descrisă de un proces stocastic (vezi exemplul 1, cap. 8). În exemplul amintit s-a considerat că acest proces stocastic este un proces Markov cu număr finit de stări, ceea ce atrage după sine faptul că perioadele de funcţionare neîntreruptă, precum şi cele de reparaţie sunt repartizate exponenţial. Dacă acest lucru nu poate fi acceptat (de exemplu, intervine fenomenul de uzură în timp a componentelor), atunci funcţionarea sistemului poate fi descrisă de un proces semi-Markov. Pentru calculul indicatorilor de fiabilitate se pot folosi ecuaţiile Markov de reînnoire (9.10) - (9.12).

Exemplul 2. Prin stoc se înţelege o cantitate de materiale (produse) păstrată în vederea unei viitoare vânzări sau necesară pentru producţie. Mărimea stocului la momentul $n \in \mathbf{N}$ se notează cu Z_n. Şirul $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ verifică relaţia de recurenţă

$$Z_{n+1} = Z_n + \eta_{n+1} - f(Z_n + \eta_{n+1}, \xi_{n+1}), \quad n \in \mathbf{N},$$

unde η_{n+1} este cantitatea de materiale intrată în stoc la momentul $n+1$, ξ_{n+1} este cantitatea cerută spre vânzare în intervalul $(n, n+1]$, iar $f(Z_n + \eta_{n+1}, \xi_{n+1})$ este cantitatea vândută (ieşită din stoc) la momentul $n+1$. Se presupune că cererile succesive $\xi_1, \xi_2, \ldots$ formează un şir de v.a. independente şi identic repartizate, intrările în stoc se fac după un anumit program de aprovizionare, iar funcţia f este prescrisă ţinând seama de acest program. Evident,

$$f(Z_n + \eta_{n+1}, \xi_{n+1}) \leq \xi_{n+1}.$$

O categorie importantă de modele de stocare sunt acelea pentru care intrările de materiale sunt aleatoare. Problema, care se pune, este de a optimiza cererile (ieşirile) pentru ca stocul să rămână la un nivel dorit. Aceste modele au aplicabilitate la rezervoarele de apă (sau lacuri de acumulare), motiv pentru care sunt de obicei numite "modele pentru rezervoare".

Fie Y_{n+1} cantitatea de apă furnizată în intervalul $(n, n+1]$, $n \in \mathbf{N}$; se presupune că v.a. $Y_1, Y_2, \ldots$ sunt independente şi identic repartizte. Rezervorul are o capacitate finită C. Atunci intrările efective de apă în rezervor sunt date de relaţia

$$\eta_{n+1} = \min(Y_{n+1}, C - Z_n), \quad n \in \mathbf{N},$$

unde Z_n este cantitatea de apă din rezervor la momentul $n \in \mathbf{N}$. Cererile de apă din rezervor la momentele $n = 1, 2, \ldots$, sunt $\xi_1, \xi_2, \ldots$; aceste v.a. sunt, de asemenea, independente şi identic repartizate. Se presupune, de asemenea, că şirul $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este independent de şirul $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. Livrările de apă din rezervor sunt date de

$$f(Z_n + \eta_{n+1}, \xi_{n+1}) = \min(Z_n + \eta_{n+1}, \xi_{n+1}), \quad n \in \mathbf{N}$$

şi prin urmare

$$Z_{n+1} = \max(0, Z_n + \eta_{n+1} - \xi_{n+1}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Se notează cu S_n, $n \in \mathbf{N}$, momentele aleatore la care are loc fie o intrare, fie o ieşire de apă. Se presupune că, în acelaşi moment, nu poate avea loc şi o intrare şi o ieşire, iar $S_0 = 0$.

Se definesc v.a. J_n, $n \in \mathbf{N}$, ce iau valorile 1 sau 2, după cum la momentul S_n a avut loc o intrare sau o ieşire.

Şirul (J_n, S_n), $n \in \mathbf{N}$, este un proces Markov de reînnoire cu mulţimea stărilor $\{1, 2\} \times \mathbf{R}_+$. Matricea semi-Markov corespunzătoare este

$$Q_{ij}(t) = P(J_{n+1} = j, \quad S_{n+1} - S_n \le t \mid J_n = i), \quad i, j = 1, 2.$$

Capitolul 10

Sisteme aleatoare cu legături complete

Un concept de dependenţă mai general decât dependenţa markoviană îl reprezintă dependenţa cu legături complete[1]. Mult timp, a existat prejudecata că teoria dependenţei cu legături complete nu depăşeşte cu mult teoria din cazul markovian sau chiar că se reduce la aceasta. Dar dezvoltarea, din ultimii ani, a acestei teorii a demonstrat prin rezultatele obţinute importanţa şi potenţialităţile sale aplicative.

10.1 Conceptul de sistem aleator cu legături complete

Fie T mulţimea numerelor întregi $\mathbf{Z}$ sau mulţimea numerelor naturale $\mathbf{N}$. Se consideră $(X, \mathcal{X})$ şi $(W, \mathcal{W})$ două spaţii măsurabile, $(u_t(\cdot,\cdot))_{t\in T}$ o familie de aplicaţii $u_t : W \times X \to W$, $(\mathcal{W} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{W})$-măsurabile şi $({}^tP(\cdot,\cdot))_{t\in T}$ o familie de funcţii ${}^tP : W \times \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ astfel încât

a) $\{(w, x^{(n)}) | \, u_t(w, x^{(n)}) \in A\} \in \mathcal{W} \times \mathcal{X}^{(n)}$ pentru orice $t \in T$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi $A \in \mathcal{W}$, unde

$$u_t(\cdot, x^{(n)}) = u_{t+n-1}(\cdot, x_n) \circ \ldots \circ u_t(\cdot, x_1)$$

cu $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$[2];

[1] Teoria dependenţei cu legături complete a fost iniţiată de matematicienii români Octav Onicescu (1892-1893) şi Gheorghe Mihoc (1906-1981) în anul 1935. Şcoala românească de teoria probabilităţilor a adus contribuţii deosebit de importante în acest domeniu. Lucrările matematicienilor Marius Iosifescu şi Ioan Cuculescu au o valoare remarcabilă.

[2] $(X^{(n)}, \mathcal{X}^{(n)}) = (\prod_n X, \bigotimes_n \mathcal{X})$.

b) ${}^tP$ este o *probabilitate de trecere* de la $(W, \mathcal{W})$ la $(X, \mathcal{X})$ pentru orice $t \in T$, adică ${}^tP(\cdot, \cdot) : W \times \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ satisface condiţiile

• $\forall w \in W$, ${}^tP(w, \cdot)$ este o probabilitate pe $(X, \mathcal{X})$

• $\forall A \in \mathcal{X}$, ${}^tP(\cdot, A)$ este o funcţie măsurabilă pe $(W, \mathcal{W})$.

Un cvadruplu $\{(W, \mathcal{W}), (X, \mathcal{X}), (u_t)_{t\in T}, ({}^tP)_{t\in T}\}$ de spaţii măsurabile, aplicaţii măsurabile şi probabilităţi de trecere care satisfac condiţiile (a) şi (b) se numeşte *sistem aleator cu legături complete*, pe scurt s.a.l.c.

Un s.a.l.c $\{(W, \mathcal{W}), (X, \mathcal{X}), (u_t)_{t\in T}, ({}^tP)_{t\in T}\}$ se numeşte *omogen* dacă aplicaţiile u_t şi probabilităţile de trecere ${}^tP$ nu depind de t, adică

$$u_t(\cdot, \cdot) = u(\cdot, \cdot) \quad \text{şi} \quad {}^tP(\cdot, \cdot) = P(\cdot, \cdot) \quad \forall t \in T.$$

Un s.a.l.c. omogen va fi notat $\{(W, \mathcal{W}), (X, \mathcal{X}), u, P\}$.

Teorema 10.1 (Teorema de existenţă). *Fie $T = \mathbf{N}$; pentru orice s.a.l.c. şi orice $w \in W$, fixat, există un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P_w)$ şi un şir $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de v.a. definite pe Ω şi cu valori în X astfel încât*

$$P_w(\xi_1 \in A) = {}^0P(w, A),$$

$$P_w(\xi_{n+1} \in A \mid \xi_j, \quad 1 \le j \le n) = {}^nP(u_0(w, \xi^{(n)}), A) \quad P_w - a.s.$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathcal{X}$, unde $\xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Astfel $\Omega = X^{\mathbf{N}^*}$ şi $\xi_n(\omega) = x_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, dacă $\omega = (x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, iar

$$P_w(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = \begin{cases} {}^0P(w, A_1), & n = 1 \\ \prod\limits_{i=0}^{n-1} \int_{A_{i+1}} {}^iP(u_0(w, x^{(i)}, dx_{i+1}), & n > 1 \end{cases}$$

unde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$. Pentru orice $l \in \mathbf{N}^*$ şi $t \in T$ se defineşte funcţia ${}^tP_l$ pe $W \times \mathcal{X}^{(l)}$ prin relaţiile

$${}^tP_l(w, A^{(l)}) = \begin{cases} {}^tP(w, A^{(1)}), & l = 1 \\ \prod\limits_{i=0}^{l-1} \int_X {}^{t+i}P(u_t(w, x^{(i)}), dx_{i+1})\chi_{A^{(i+1)}}(x^{(i+1)}), & l > 1. \end{cases}$$

Pentru orice $l, n \in \mathbf{N}^*$ şi $t \in T$ se defineşte funcţia ${}^tP_l^n$ pe $W \times \mathcal{X}^{(l)}$ prin relaţiile

$${}^tP_l^n(w, A^{(l)}) = \begin{cases} {}^tP_l(w, A^{(1)}), & n = 1 \\ \int_X {}^tP(w, dx)^{t+1}P_l^{n-1}(u_t(w, x), A^{(l)}), & n > 1. \end{cases}$$

Evident, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ se obţine

$${}^tP_l^n(w, A^{(l)}) = {}^tP_{l+n-1}(w, X^{(n-1)} \times A^{(l)})$$

punând $X^{(0)} \times A^{(l)} = A^{(l)}$.

Se remarcă că pentru $1 \leq r \leq n$ are loc următoarea relaţie

$$ {}^tP_l^n(w, A^{(l)}) = \int_{X^{(r)}} {}^tP_r(w, dx^{(r)})^{t+r}P_l^{(n-r)}(u_t(w, x^{(r)}), A^{(l)}). \qquad (10.1) $$

Relaţia (10.1) reprezintă analogul relaţiei Chapman-Kolmogorov. Evident, în cazul omogen, relaţia (10.1) devine

$$ P_l^n(w, A^{(l)}) = \int_{X^{(r)}} P_r(w, x^{(r)})P_l^{n-r}(u(w, x^{(r)}), A^{(l)}). $$

Dacă $T = \mathbf{N}$, interpretarea probabilistă a fucţiilor ${}^tP_l^n$ decurge din relaţiile

$$ {}^tP_l^n(w, A^{(l)}) = \begin{cases} P_w([\xi_n, \dots, \xi_{n+l-1}] \in A^{(l)}), & t = 0 \\ P_{w\prime}([\xi_{t+n}, \dots, \xi_{t+n+l-1}] \in A^{(l)}|\xi^{(t)})_{\xi^{(t)}=x^{(t)}}, & t \geq 1 \end{cases} $$

unde $w, w\prime$ şi $x^{(t)}$ satisfac relaţia $w = u_0(w\prime, x^{(t)})$.

10.2 Lanţul Markov asociat

Fie $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ şirul de v.a. pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P_w)$ construit în teorema 10.1. Pentru $w \in W$, fixat, se consideră şirul

$$ \zeta_n = u_0(w, \xi^{(n)}), \quad n \in \mathbf{N}^*. $$

Evident, avem

$$ P_w(\xi_1 \in A) = {}^\circ P(w, {}^\circ A_w), $$

$$ P_w(\zeta_{n+1} \in A|\zeta_j,\ 1 \leq j \leq n) = P_w(\zeta_{n+1} \in A|\zeta_n) = {}^nP(\zeta_n, {}^nA_{\zeta_n}), \quad n \in \mathbf{N}^*, $$

unde ${}^tA_w = \{x|u_t(w, x) \in A\}$, pentru $A \in \mathcal{W}$, $w \in W$, $t \in T$.

Fie ${}^tQ(w, A) = {}^tP(w, {}^tA_w)$. Este uşor de văzut că pentru orice $t \in T$, ${}^tQ$ este o probabilitate de trecere de la $(W, \mathcal{W})$ la $(W, \mathcal{W})$.

Propoziţia 10.2. *Şirul* $(\zeta_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de v.a. pe câmpul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{K}, P_w)$ *este un lanţ Markov având spaţiul stărilor* $(W, \mathcal{W})$, *probabilităţile de trecere* $({}^tQ)_{t\in\mathbf{N}}$ *şi repartiţia iniţială de probabilitate concentrată în* w.

Probabilităţile de trecere în n paşi se definesc prin

$$ {}^tQ^n(w, A) = {}^tP_n(w, {}^tA_w^{(n)}), $$

punând

$$ {}^tA_w^{(n)} = \{x^{(n)}|\ u_t(w, x^{(n)}) \in A\} $$

pentru orice $A \in \mathcal{W}$, $w \in W$, $t \in T$ şi $n \in \mathbf{N}^*$.

Sistemul $\{(W, \mathcal{W})({}^tQ)_{t\in T}\}$ se numeşte *sistemul Markov asociat s.a.l.c.*

$$\{(X, \mathcal{X}),\ (W, \mathcal{W}),\ (u_t)_{t\in T},\ ({}^tP)_{t\in T}\}.$$

Sistemul Markov asociat unui s.a.l.c. omogen se reduce la $\{(W, \mathcal{W}), Q\}$, unde probabilitatea Q este definită prin

$$Q(w, A) = P(w, A_w),$$

cu $A_w = \{x|\ u(w, x) \in A\}$. În acest caz, probabilităţile de trecere în n paşi sunt

$$Q^n(w, A) = P_n(w, A_w^{(n)})$$

cu

$$A_w^{(n)} = \{x^{(n)}|\ u(w, x^{(n)}) \in A\}.$$

Exemplul 1 (*Aproximarea stocastică*). Fie F_a, $a \in \mathbf{R}$, o familie de funcţii de repartiţie definite pe $\mathbf{R}$. Se presupune că

$$M(a) = \int_R y dF_a(y)$$

există şi că ecuaţia $M(a) = 0$ are o unică soluţie θ. Robbins şi Monro au dat în anul 1951 o metodă statistică pentru estimarea soluţiei θ. Astfel, se alege $\theta_0 \in \mathbf{R}$, arbitrar, şi se definesc v.a. θ_n prin relaţia de recurenţă

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{c}{n+1}\eta_{n+1},$$

unde c este o constantă pozitivă şi η_{n+1} este o v.a. a cărei funcţie de repartiţie condiţionată de $\theta_0, \ldots, \theta_n$ este F_{θ_n}. În anumite condiţii, se poate arăta că θ_n converge fie în probabilitate, fie aproape sigur către θ, când $n \to \infty$. Este clar că şirul $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este echivalent cu lanţul Markov asociat s.a.l.c. $\{(W, \mathcal{W}), (X, \mathcal{X}), (u_n)_{n\in\mathbf{N}}, P\}$ unde,

$$\begin{aligned}
&(W, \mathcal{W}) = (X, \mathcal{X}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}),\\
&u_n(w, x) = w - \frac{c}{n+1}x, \quad n \in \mathbf{N}, \quad w, x \in \mathbf{R},\\
&P(w, A) = \textstyle\int_A dF_w(y), \quad w \in \mathbf{R}, \quad A \in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Exemplul 2 (*Fracţii continue*). Acest exemplu, propus de Iosifescu în anul 1974, arată că dependenţa cu legături complete joacă un rol important în teoria metrică a fracţiilor continue. Fie Ω mulţimea numerelor iraţionale din intervalul $I = [0, 1]$. Orice număr iraţional $\omega \in \Omega$ poate fi reprezentat în mod unic printr-o fracţie continuă infinită

$$\omega = \cfrac{1}{a_1(\omega) + \cfrac{1}{a_2(\omega) + \cfrac{1}{\ddots}}} = [a_1(\omega), a_2(\omega), \ldots].$$

Numerele naturale $a_n(\omega)$, $n \in \mathbf{N}^*$, numite *câturile parţiale* din dezvoltarea lui ω în fracţie continuă, sunt determinate în modul următor. Se defineşte aplicaţia

$$\tau : \Omega \to \Omega, \quad \tau(\omega) = \left\{\frac{1}{\omega}\right\},$$

unde $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracţionară a unui număr real. Atunci se obţine

$$a_{n+1}(\omega) = a_n(\tau(\omega)) = a_1(\tau^n(\omega)), \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

$$a_1(\omega) = \frac{1}{\omega} - \tau(\omega) = \left[\frac{1}{\omega}\right],$$

unde $[\cdot]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real.

Notând

$$[a_1, \ldots, a_n] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

obţinem

$$\omega = \frac{1}{a_1(\omega) + \tau(\omega)} = [a_1(\omega), \ldots, a_{n-1}(\omega),\ a_n(\omega) + \tau^n(\omega)]$$

pentru orice $n \geq 2$.

Numerelor raţionale din $I = [0, 1]$ le corespund fracţii continue finite. Deoarece, în continuare, vor fi considerate numai fracţii continue infinite, acestea vor fi numite simplu *fracţii continue.*

Dacă intervalul I este înzestrat cu σ-algebra $\mathcal{B}_I$ a submulţimilor Borel din I, atunci a_n, $n \in \mathbf{N}^*$, sunt v.a. pe $(I, \mathcal{B}_I)$, definite aproape peste tot în raport cu orice probabilitate pe $\mathcal{B}_I$, ce asociază valoarea 0 mulţimii $I \setminus \Omega$ a numerelor raţionale din I (în particular, în raport cu măsura Lebesgue μ pe I).

Se consideră şirul

$$r_n = a_n + [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots],\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Evident, avem

$$r_n(\omega) = \frac{1}{\tau^{n-1}(\omega)}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad \tau^{\circ}(\omega) = \omega, \quad \omega \in \Omega.$$

Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ definim

$$y_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_n + [a_{n-1}, \ldots, a_1], & n \geq 2 \end{cases}$$

$$s_n = \frac{1}{y_n} = [a_n, \ldots, a_1], \quad u_n = r_n + s_{n-1}, \quad s_0 = 0.$$

Obţinem relaţia de recurnţă

$$s_{n+1} = \frac{1}{s_n + a_{n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad s_1 = \frac{1}{a_1}.$$

Pentru orice număr real $t \geq 1$ şi pentru orice $i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{N}^*$ are loc formula, cunoscută sub numele de *formula Brodén-Borel-Lévy*

$$\mu(r_1 > t) = \mu\left(\left[0, \frac{1}{t}\right]\right) = \frac{1}{t},$$

$$\mu(r_{n+1} > t | \, a_1 = i_1, \ldots, a_n = i_n) = \frac{s_n + 1}{s_n + t}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Cum evenimentele $\{a_n = i\}$ şi $\{i < r_n < i+1\}$ sunt echivalente, utilizând formula anterioară obţinem

$$\mu(a_1 = i) = \frac{1}{i(i+1)},$$

$$\mu(a_{n+1} = i | \, a_1 = i_1, \ldots, a_n = i_n) = \frac{s_n + 1}{(s_n + i)(s_n + i + 1)},$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $i, i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{N}^*$.

Se observă că $\{s_n | \, n \in \mathbf{N}^*\}$ este un lanţ Markov omogen pe $(I, \mathcal{B}_I, \mu)$ cu următorul mecanism de trecere: din starea $s \in I$ se poate trece într-un singur pas doar într-o stare de forma $\frac{1}{s+i}$, cu probabilitatea

$$\frac{s+1}{(s+i)(s+i+1)}, \quad i \in \mathbf{N}^*.$$

Considerăm s.a.l.c. $\{(W, \mathcal{W})(X, \mathcal{X}), u, P\}$, unde

$$W = I, \, \mathcal{W} = \mathcal{B}_I, \quad X = \mathbf{N}^*, \, \mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbf{N}^*),$$

$$u(w,x) = \frac{1}{w+x}, \; P(w,x) = \frac{w+1}{(w+x)(w+x+1)}, \quad w \in I, \quad x \in \mathbf{N}^*.$$

Evident, şirul $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este echivalent cu lanţul Markov asociat s.a.l.c de mai sus.

Exemplul 3 (*Model pentru turbulenţa în sisteme dinamice cu fricţiune internă*). Pentru studiul turbulenţei s-a adoptat următorul model. Pentru $x_0 \in \mathbf{R}^n$, se consideră

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) + \xi_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N},$$

unde $f_\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este o funcţie continuă depinzând de parametrul μ şi $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ un şir de vectori aleatori m-dimensionali, independenţi, identic repartizaţi şi având repartiţia de probabilitate comună p. Atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este echivalent cu lanţul Markov $(\zeta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\zeta_0 = x_0$, asociat s.a.l.c. $\{(W,\mathcal{W}),(X,\mathcal{X}),u,P\}$, unde

$$\begin{aligned}
&(W,\mathcal{W}) = (X,\mathcal{X}) = (\mathbf{R}^m,\mathcal{B}^m),\\
&u(w,x) = f_\mu(w) + x, \quad w,x \in \mathbf{R}^m,\\
&P(w,A) = p(A), \quad w \in \mathbf{R}^m, \quad A \in \mathcal{B}^m.
\end{aligned}$$

Exemplul 4 (*Formalizarea dinamicii dezbaterilor în grupuri mici*). Se consideră o mulţime $\mathcal{I}$ formată din h indivizi care au de îndeplinit o sarcină sau de rezolvat o problemă (de exemplu, de studiat o situaţie dată, de luat o decizie etc.).

Din momentul însuşirii informaţiei valabile, fiecare individ este caracterizat, în termenii psihologiei sociale, printr-o "atitudine", adică printr-o stare de spirit rezultată în cursul procesului de informare. (Starea de spirit este supusă schimbărilor, distorisunilor, interferenţelor etc). O asemenea structură subiectivă a informaţiei, aflată în raport cu sarcina de îndeplinit, este rezumată prin ceea ce vom numi o *predispoziţie.* Dacă se notează cu Z mulţimea (finită) a tuturor stărilor de spirit posibile, atunci $Z^{\mathcal{I}}$ reprezintă mulţimea tuturor predispoziţiilor posibile. Un element $z_n \in Z^{\mathcal{I}}$ reprezintă predispoziţia la momentul $n \in \mathbf{N}$.

Din punct de vedere etologic, în momentul întâlnirii celor h indivizi, începe şi apare să funcţioneze un sistem vast şi dinamic de corelaţii şi schimburi bazate pe o serie de comportamente. La nivel verbal acest fapt este exprimat prin compatibilităţi şi incompatibilităţi, potriviri şi dezacorduri, acceptarea sau respingerea altor percepţii. Cu alte cuvinte, între oricare doi indivizi din grup se stabilesc, în mod spontan, legături emoţionale; o asemenea legătură poate oscila în timp într-un registru bipolar de la simpatie la antipatie. Aceste legături pot fi reprezentate printr-o matrice pătratică de ordin h, $\theta = (\theta(i,j))_{i,j\in\mathcal{I}}$, numită *matrice de simpatie.* Elementele matricei aparţin intervalului unitate $[0,1]$. De exemplu, $\theta(i,j) = 1$ semnifică acordul deplin al lui i faţă de afirmaţiile făcute j. Evident, în general, $\theta(i,j) \neq \theta(j,i)$, $i \neq j$. În ceea ce priveşte relaţia între ceea ce gândeşte şi spune individul i, putem presupune că $\theta(i,i)$ reprezintă o măsură a autenticităţii modului de exprimare a individului i. Astfel, $\theta(i,i) = 1$ semnifică autenticitatea deplină a exprimării lui i. Se noteză cu $\theta_n = (\theta_n(i,j))_{i,j\in\mathcal{I}}$ matricea de simpatie la momentul $n \in \mathbf{N}$.

Un grup de indivizi poate exista şi funcţiona numai dacă există o oarecare coeziune între membrii grupului. Această coeziune - care poate fi percepută în mod obiectiv la nivelul funcţionării grupului printr-o serie de reguli, valori şi norme morale stabilite pentru întregul grup - apare ca un rezultat final al multor factori, cum ar fi, de exemplu, impactul prestigiului grupului asupra indivizilor săi, interesul faţă de scopurile urmărite de grup etc. Din acest motiv, fiecărui individ i se poate asocia o anume dorinţă de a participa la dezbaterile grupului. De aceea, se poate considera un coeficient care descrie gradul de integrare al fiecărui individ în grup şi măsura nivelului de adeziune şi solidaritate faţă de grup. Coeficientul de integrare variază între 0 şi 1. Notând cu $\alpha_n(i)$ coeficientul de integrare al individului i la momentul $n \in \mathbf{N}$, vectorul $\alpha_n = (\alpha_n(i))_{i\in\mathcal{I}} \in [0,1]^{\mathcal{I}}$ reprezintă coeziunea grupului la momentul $n \in \mathbf{N}$. De asemenea, se notează cu i_n individul care a intervenit în dezbatere la momentul n şi cu $a_n \in A$ intervenţia sa la acel moment $n \in \mathbf{N}^*$. (A reprezintă mulţimea finită a tuturor intervenţiilor posibile în legătură cu problema dezbătută).

Considerând v.a. $z_n, \theta_n, \alpha_n, i_{n+1}, a_{n+1}, n \in \mathbf{N}$, se poate presupune că tripletul $(z_{n+1}, \theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$ depinde atât de tripletul $(z_n, \theta_n, \alpha_n)$ la momentul anterior, cât şi de individul i_{n+1} şi intervenţia acestuia a_{n+1} la momentul actual. Deci

$$(z_{n+1}, \theta_{n+1}, \alpha_{n+1}) = F[(z_n, \theta_n, \alpha_n),\ i_{n+1},\ a_{n+1}], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Un individ poate interveni în dezbatere, în orice moment, cu probabilitatea $P(i_{n+1} = i|\ z_n, \theta_n, \alpha_n) = Q(z_n, \theta_n, \alpha_n; i)$, iar probabilitatea oricărei intervenţii este

$$P(a_{n+1} = a|\ z_n, \theta_n, \alpha_n) = m(z_n, \theta_n, \alpha_n, i_{n+1}; a), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Atunci şirul $(z_n, \theta_n, \alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este echivalent cu lanţul Markov asociat s.a.l.c $\{(W, \mathcal{W}), (X, \mathcal{X}), u, P\}$, unde

$$W = Z^{\mathcal{I}} \times [0,1]^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \times [0,1]^{\mathcal{I}}, \quad \mathcal{W} = \mathcal{P}(Z^{\mathcal{I}}) \otimes \mathcal{B}_{[0,1]}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \otimes \mathcal{B}_{[0,1]}^{\mathcal{I}},$$

$$X = \mathcal{I} \times A, \quad \mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathcal{I} \times A),$$

$$u = F,\ P(w,x) = m(z,\theta,\alpha,i;a)Q(z,\theta,\alpha;i),\ w = (z,\theta,\alpha) \in W; x = (i,a) \in X.$$

Capitolul 11

Teoria sondajului

Determinarea legilor probabilistice de comportare a fenomenelor de masă se bazează pe date numerice, obţinute în urma unor observaţii. Statistica matematică, prin metodele sale, urmăreşte să încadreze fenomenul studiat într-una din clasele de fenomene care se supun unor legi cunoscute sau să determine cu aproximaţie cât mai bună parametrii legii în care se încadrează fenomenul respectiv.

Datele culese se referă la una sau mai multe caracteristici comune unei mulţimi de elemente.

11.1 Prelucrarea datelor statistice

O mulţime de elemente care au cel puţin o însuşire comună şi este supusă unei prelucrări statistice se numeşte *populaţie statistică* sau *colectivitate statistică.* Populaţia poate fi alcătuită dintr-un ansamblu de persoane, obiecte, evenimente, idei sau opinii etc.

Numărul elementelor mulţimii se numeşte *volumul populaţiei.* Volumul unei populaţii statistice poate fi finit sau infinit.

Elementul unei populaţii statistice asupra căruia se efectuează nemijlocit observarea este numit *unitate statistică.* Culegerea informaţiei de la unităţile statistice reprezintă *observarea statistică.* De obicei, observarea statistică se referă la o însuşire comună unităţilor unei populaţii numită *caracteristică statistică.*

Caracteristica statistică capată accepţii sau valori diferite de la o unitate la alta sau de la un grup de unităţi la altul. Caracteristica este o v.a. discretă sau continuă. Însă, diverse motive cum ar fi facilitarea prelucrării ulterioare a datelor, precizia limitată a instrumentelor de măsură şi interesul practic pentru un anumit grad de precizie, fac ca în statistică să se utilizeze v.a. discrete.

Pentru obţinerea informaţiilor referitoare la valorile unei caracteristici, nu este posibilă cercetarea fiecărui element în parte al populaţiei considerate. Astfel, în mod natural, s-a ajuns la ideea cercetării pe bază de *sondaj* (metoda sondajului s-a dovedit a fi adeseori singura metodă de cercetare practic posibilă). Se cercetează doar un număr limitat de elemente prelevate astfel încât sondajul să fie reprezentativ. Obiectul cercetării îl formează o subpopulaţie. În teoria sondajului această subpopulaţie (precum şi valorile observate) se numeşte *eşantion* sau *selecţie*. Numărul de elemente dintr-un eşantion se numeşte *volumul eşantionului.*

Sondajul se numeşte *repetat* (presupunem că sondajul se face luând câte un element al populaţiei), dacă de fiecare dată elementul ales este reintrodus în populaţie, înainte de a se extrage următorul. În caz contrar, sondajul se numeşte *nerepetat.* Remarcăm că în cazul în care volumul populaţiei este foarte mare în raport cu volumul eşantionului, neintroducerea imediată a elementului ales în populaţie este fără efect practic.

Dacă un număr mare de valori ale unei caracteristici au fost notate în ordinea arbitrară în care au apărut în realitate, va fi dificil să tragem vreo concluzie cu privire la semnificaţia acestor date. De aceea, *valorile observate* (ale caracteristicii studiate) $x_1, \ldots, x_n$, obţinute într-un eşantion de volum n, se ordonează crescător. Dacă nu sunt toate diferite între ele, vor rămâne $m < n$ distincte. Astfel, făcând o renotare vom avea, în general, valorile distincte $y_1, y_2, \ldots, y_m$, $m \leq n$, ordonate crescător. Se face o fişă de observaţii cu două coloane, în prima coloană scriindu-se valorile y_k, iar în a doua de câte ori a apărut acea valoare.

Dacă volumul eşantionului este mare, se grupează valorile pe intervale. Astfel, se consideră un interval (a, b) în care se găsesc toate valorile x_i şi se împarte acest interval în r subintervale

$$I_1 = (a_0, a_1), \quad I_k = [a_{k-1}, a_k), \quad k = \overline{2, r}, \quad a_0 = a, \quad a_r = b.$$

De obicei, subintervalele se iau de lungimi egale. Subintervalele alese pentru grupare se numesc *intervale de grupare.*

Fie n_k numărul valorilor x_i din eşantionul $E_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ care aparţin subintervalului I_k. Numărul n_k se numeşte *frecvenţa absolută* a subintervalului I_k, înţelegând prin aceasta frecvenţa absolută a valorilor $x_i \in E_n$, $x_i \in I_k$.

Raportul $\nu_k = \dfrac{n_k}{n}$ se numeşte *frecvenţa relativă* sau frecvenţa lui I_k în cele n observaţii. Evident

$$\sum_{k=1}^{r} n_k = n, \quad \sum_{k=1}^{r} \nu_k = 1.$$

Numărul $\mu_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \nu_j$, adică frecvenţa valorilor $x_i \in E_n$, $x_i < a_k$, se numeşte *frecvenţa cumulată* corespunzătoare lui I_k. Datele se organizează ca în tabelul 11.1.

Intervale de grupare I_k	Frecvenţe absolute n_k	Frecvenţe relative $\nu_k = \frac{n_k}{n}$	Frecvenţe cumulate $\mu_k = \sum_{j=1}^{k} \nu_j$
$I_1 = (a_0, a_1)$	n_1	ν_1	μ_1
$I_2 = [a_1, a_2)$	n_2	ν_2	μ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$I_r = [a_{r-1}, a_r)$	n_r	ν_r	μ_r
TOTAL	n	1	

Tabelul 11.1

Deseori este convenabilă întocmirea unor grafice pe baza tabelului anterior. Astfel, datele experimentale pot fi prezentate prin grafice ca: histograma frecvenţelor relative, poligonul frecvenţelor relative, ogiva sau poligonul frecvenţelor cumulate.

Histograma frecvenţelor relative se obţine construind pe fiecare interval I_k câte un dreptunghi având baza segmentul de extremităţi a_{k-1}, a_k şi înălţimea ν_k (sau un număr proporţional cu ν_k) (vezi fig. 11.1).

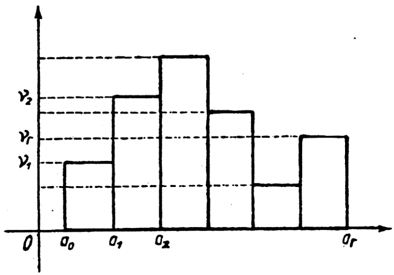


Fig. 11.1

Fie c_k centrul intervalului I_k. Se reprezintă punctele M_k de abscise c_k şi ordonate numere egale sau proporţionale cu frecvenţele ν_k, $k = 1, 2, \dots, r$. Unind punctele consecutive prin segmente de dreaptă, se obţine *poligonul frecvenţelor relative* (vezi fig.11.2).

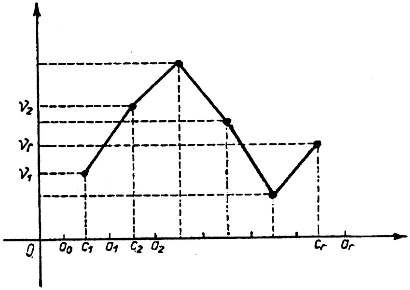


Fig. 11.2

Poligonul frecvenţelor cumulate se construieşte unind prin segmente de dreaptă punctele consecutive $M_k(c_k, \mu_k)$, $k = 1, 2, \dots, r$. Ordonatele μ_k pot fi înlocuite prin numere proporţionale cu acestea (vezi fig.11.3).

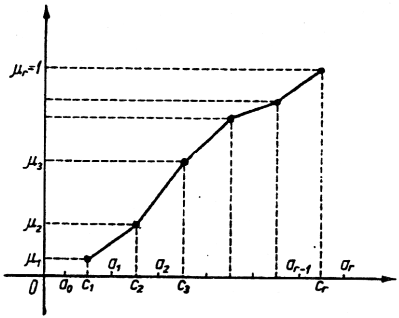


Fig. 11.3

11.2 Variabile de sondaj

Prin *experiment* vom înţelege un procedeu organizat, care poate fi repetat (ori de câte ori) în aceleaşi condiţii şi în urma căruia se obţin rezultate ce pot fi observate, măsurate şi apoi interpretate. Dacă rezultatele experimentului sunt complet determinate de condiţiile în care se desfăşoară, atunci avem de-a face cu un *experiment determinist*. Dacă rezultatele nu pot fi prevăzute cu exactitate, ştiindu-se doar o clasă de realizări ale acestuia, atunci experimentul este *aleator*.

Fie ξ caracteristica unei populaţii (ξ este o v.a.). Notăm cu $x_1, \ldots, x_n$ valorile lui ξ obţinute într-un eşantion de volum n. Cum aceste valori diferă, în general, de la un eşantion la altul, iar eşantioanele sunt alegeri întâmplătoare independente, valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pot fi considerate ca valori ale unor v.a. independente $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, având aceeaşi repartiţie ca şi caracteristica ξ.

Valorile observate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, numite *date de observaţie*, reprezintă o realizare a v.a. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ numite *variabile de sondaj* sau *variabile de selecţie* sau *variabilele eşantionului.*

Funcţia empirică de repartiţie corespunzătoare unui eşantion de volum n este definită prin relaţia

$$F_n(x) = \frac{n(x)}{n},$$

unde $n(x)$ este numărul v.a. ξ_i, $1 \leq i \leq n$, independente şi identic repartizate cu ξ, pentru care s-au obţinut valori mai mici sau egale cu $x \in \mathbf{R}$.

F_n este o funcţie în trepte (etajată) şi poate fi exprimată sub forma

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(x - x_k),$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt datele de observaţie, iar h este *funcţia lui Heaviside*

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, $F_n(x)$ poate fi privită şi ca o v.a. dacă o exprimăm cu ajutorul v.a. ξ_i, adică

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(x - \xi_k).$$

În cazul datelor grupate pe intervale,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ \mu_k, & x \in I_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, r-1, \\ \mu_r, & x \geq a_r, \end{cases}$$

unde μ_k este frecvenţa cumulată corespunzătoare intervalului I_k.

Legătura dintre F_n şi funcţia teoretică de repartiţie F_ξ a v.a. ξ este dată de următoarea teoremă.

Teorema 11.1 (Glivenko-Cantelli). *Cu notaţiile de mai sus are loc relaţia*

$$P(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} | F_n(x) - F_\xi(x) |= 0) = 1,$$

adică $F_n(x) \xrightarrow{a.s.} F_\xi(x)$, *uniform în* $x \in \mathbf{R}$, *când* $n \to \infty$.

Teorema următoare evaluează distanţa dintre $F_n(x)$ şi $F_\xi(x)$.

Teorema 11.2 (Kolmogorov). *Dacă* F_ξ *este o funcţie continuă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid F_n(x) - F\xi(x) \mid \leq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right] = K(\lambda) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

pentru $\lambda > 0$.

11.3 Valori tipice de sondaj (de selecţie)

Prin analogie cu indicatorii repartiţiilor teoretice se definesc diverşi indicatori sau valori tipice empirice pentru repartiţia empirică a unei caracteristici ξ.

Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele de observaţie ale v.a. ξ într-un eşantion de volum n, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. O funcţie $T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (sau $T(x_1, \ldots, x_n)$), unde $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este o funcţie măsurabilă Borel se numeşte *statistică.*

Momentul de sondaj (sau *momentul empiric*) *de ordinul* k este prin definiţie statistica

$$\bar{m}_k = \frac{\xi_1^k + \ldots + \xi_n^k}{n}.$$

Dacă se notează cu m_k momentul teoretic de ordinul k (adică momentul de ordinul k al v.a. ξ), atunci au loc relaţiile

$$E(\bar{m}_k) = m_k \quad \text{şi} \quad \mathrm{Var}(\bar{m}_k) = \frac{m_{2k} - m_k^2}{n}.$$

Momentul de sondaj de ordinul k converge în probabilitate (vezi §4.1) către momentul teoretic de ordinul k cu condiţia ca momentele teoretice de ordinul k, respectiv $2k$ să existe.

Pentru $k = 1$ se obţine *media de sondaj* sau *valoarea medie empirică* $\bar{m}_1$, notată cu $\bar{\xi}$, care are proprietăţile

$$E(\bar{\xi}) = E(\xi), \quad \mathrm{Var}(\bar{\xi}) = \frac{\mathrm{Var}(\xi)}{n}.$$

Trebuie remarcat că, în practică, momentul de sondaj de ordinul k este definit prin

$$\bar{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i x_i^k,$$

adică prin valorile $x_1, \ldots, x_l$ obţinute într-un eşantion de volum $n \geq l$ şi prin frecvenţele absolute n_i, $i = \overline{1,l}$, ale valorilor x_i; $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

adică $F_n(x) \xrightarrow{a.s.} F_\xi(x)$, *uniform în* $x \in \mathbf{R}$, *când* $n \to \infty$.

Teorema următoare evaluează distanţa dintre $F_n(x)$ şi $F_\xi(x)$.

Teorema 11.2 (Kolmogorov). *Dacă* F_ξ *este o funcţie continuă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{x\in\mathbf{R}} \mid F_n(x) - F\xi(x) \mid \le \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right] = K(\lambda) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

pentru $\lambda > 0$.

11.3 Valori tipice de sondaj (de selecţie)

Prin analogie cu indicatorii repartiţiilor teoretice se definesc diverşi indicatori sau valori tipice empirice pentru repartiţia empirică a unei caracteristici ξ.

Fie $x_1, \ldots, x_n$ datele de observaţie ale v.a. ξ într-un eşantion de volum n, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. O funcţie $T(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (sau $T(x_1, \ldots, x_n)$), unde $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este o funcţie măsurabilă Borel se numeşte *statistică*.

Momentul de sondaj (sau *momentul empiric*) *de ordinul* k este prin definiţie statistica

$$\bar{m}_k = \frac{\xi_1^k + \ldots + \xi_n^k}{n}.$$

Dacă se notează cu m_k momentul teoretic de ordinul k (adică momentul de ordinul k al v.a. ξ), atunci au loc relaţiile

$$E(\bar{m}_k) = m_k \quad \text{şi} \quad \mathrm{Var}(\bar{m}_k) = \frac{m_{2k} - m_k^2}{n}.$$

Momentul de sondaj de ordinul k converge în probabilitate (vezi §4.1) către momentul teoretic de ordinul k cu condiţia ca momentele teoretice de ordinul k, respectiv $2k$ să existe.

Pentru $k = 1$ se obţine *media de sondaj* sau *valoarea medie empirică* $\bar{m}_1$, notată cu $\bar{\xi}$, care are proprietăţile

$$E(\bar{\xi}) = E(\xi), \quad \mathrm{Var}(\bar{\xi}) = \frac{\mathrm{Var}(\xi)}{n}.$$

Trebuie remarcat că, în practică, momentul de sondaj de ordinul k este definit prin

$$\bar{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i x_i^k,$$

adică prin valorile $x_1, \ldots, x_l$ obţinute într-un eşantion de volum $n \ge l$ şi prin frecvenţele absolute n_i, $i = \overline{1,l}$, ale valorilor x_i; $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

Statistica $\bar{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{m}_1)^k$ se numeşte *momentul centrat de sondaj* (*momentul empiric centrat*) *de ordinul k*.

Pentru $k = 2$ se obţine *varianţa* (*dispersia*) *de sondaj*, notată cu s^2.

Dacă se notează cu μ_k momentul centrat teoretic de ordinul k, atunci $E(\bar{\mu}_k) = \mu_k + o\left(\frac{1}{n}\right)$; iar, dacă $E(\xi) = 0$ avem şi relaţia

$$\mathrm{Var}(\bar{\mu}_k) = \frac{\mu_{2k} - \mu_k^2 - 2k\mu_{k-1}\mu_{k+1} + k^2\mu_2\mu_{k-1}^2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

În practică, se utilizează pentru varianţa de sondaj valoarea $\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2$, deoarece $E(\bar{s}^2) = \mu_2$, în timp ce $E(s^2) = \mu_2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Următoarea teoremă dă informaţii referitoare la legea de repartiţie urmată de diverse statistici.

Teorema 11.3. *1) Dacă există valorile $E(\xi) = m$, $Var(\xi) = \sigma^2 \neq 0$ şi $E(|\ \xi - m\ |^3)$, atunci v.a. $\frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ este asimptotic normală $N(0,1)$*[1], *când $n \to \infty$.*

2) Dacă există momentele $E(\xi^r) = m_r$, $E(\xi^{2r}) = m_{2r}$ şi $E(|\ \xi^r - m_r\ |^3)$, atunci v.a. $\frac{\bar{m}_r - m_r}{\sqrt{\frac{m_{2r} - m_r^2}{r}}}$ este asimptotic normală $N(0,1)$, când $r \to \infty$.

3) Dacă ξ este repartizată normal $N(m,\sigma)$, atunci $\bar{\xi}$ urmează legea

$$N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

4) Dacă ξ urmează legea $N(m,\sigma)$, atunci $\bar{\xi}$ şi s^2 sunt independente, iar ns^2 este repartizată χ^2 cu $n-1$ grade de libertate şi cu parametrul σ (vezi §3.14).

5) Dacă ξ urmează legea $N(m,\sigma)$, atunci $\sqrt{n-1}\cdot\frac{\bar{\xi}}{s}$ urmează legea t cu parametrul $n-1$ (vezi §3.15).

Exemplul 1. Piesele lucrate de o anumită maşină, pentru a fi acceptate, trebuie să îndeplinească unele condiţii. Piesele acceptabile şi neacceptabile

[1]Aceasta înseamnă că şirul de v.a. $(\bar{\xi} - m)/\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ $n = 1, 2, \ldots$, converge în repartiţie (vezi §4.1) către o v.a. repartizată $N(0,1)$.

se distribuie după o lege de repartiţie, pe care presupunem că o cunoaştem în condiţii normale de funcţionare a maşinii. Piesele formează o populaţie statistică, iar legea ne dă repartiţia acestei populaţii. Cunoscând repartiţia, putem determina valoarea medie a numărului de piese acceptabile produse într-un interval de timp dat şi împrăştierea lor în jurul valorii medii, care poate fi considerată ca o piesă standard. De asemenea, putem sesiza momentul când maşina încetează să funcţioneze în condiţii normale.

Exemplul 2. Când medicul face o analiză a sângelui, el aplică metoda sondajului. El determină valoarea medie a diferiţilor corpusculi din sânge - valoarea medie a acestora fiind, în acest caz, caracteristica ce îl interesează - cercetând numai colectivitatea parţială de sânge luat pentru analiză.

Exemplul 3. Considerăm o producţie de N metri de pânză realizată într-un timp dat, într-o fabrică de textile. Ne interesează coeficientul de rezistenţă al pânzei. Pentru aceasta, aplicăm metoda sondajului, luând la întâmplare diferite bucăţi din pânza produsă şi determinăm coeficientul de rezistenţă respectiv. Metoda sondajului este, în acest caz, singura posibilă din punct de vedere economic, deoarece determinarea directă a coeficientului de rezistenţă al pânzei ar implica distrugerea întregii producţii.

Exemplul 4. Metoda sondajului este folosită şi în practica recensămintelor. Astfel, să presupunem că se urmăreşte determinarea unei caracteristici, care ar putea fi obţinută pe baza unui recensământ general, de exemplu, numărul animalelor dintr-o anumită regiune, folosite în agricultură. De multe ori, pentru realizarea acestui scop se foloseşte un recensământ parţial, considerându-se, la întâmplare numai 5% sau 10% din gospodăriile agricole din regiune. Se ajunge la un rezultat pe o cale mai rapidă, mai puţin costisitoare şi de multe ori şi mai exactă, pentru că reducerea materialului statistic de cules, la proporţii mai restrânse, dă posibilitatea unei investigaţii statistice mai precise.

Exemplul 5. Fie dată repartiţia discretă următoare

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_k	0,136	0,270	0,270	0,180	0,100	0,030	0,010	0,003	0,001	0

a) Să se aproximeze repartiţia dată cu ajutorul repartiţiei Poisson $P(\lambda)$.

b) Să se aproximeze repartiţia dată cu ajutorul repartiţiei binomiale $B(100,p)$ cu $p = \dfrac{\lambda}{100}$.

c) Să se compare cele două aproximări cu repartiţia dată.

a) Media aritmetică a repartiţiei este $1,989 \simeq 2$. Atunci recurgem la o repartiţie Poisson cu media $\lambda = 2$, dată de următoarea tabelă de valori

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0,13543	0,27067	0,27067	0,18045	0,09022	0,03608

k	6	7	8	9
p_k	0,01203	0,00343	0,0008	0,00019

b) Pentru calculul probabilităţilor p_k folosim formula $p_k = C_{100}^k p^k q^{100-k}$, unde $p = \frac{2}{100}$ şi $q = \frac{98}{100}$. Pentru $k = 0$, probabilitatea corespunzătoare este $p_0 = \left(\frac{98}{100}\right)^{100} = 0,13180$. Celelalte probabilităţi se calculează cu ajutorul relaţiei de recurenţă $p_{k+1} = \frac{100-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_k$. Rezultatele sunt date în tabela

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0,13280	0,13315	0,00876	0,04392	0,01721	0,00556

k	6	7	8	9
p_k	0,00152	0,00033	0,00007	0,00001

c) Funcţiile de repartiţie empirice, corespunzătoare celor trei repartiţii, sunt date în tabela

x	$x < 0$	0	1	2	3	4
Repartiţia dată F_n		0,136	0,406	0,676	0,856	0,956
Repartiţia Poisson F_n'		0,13534	0,40601	0,67668	0,85713	0,94735
Repartiţia binomială F_n''		0,13180	0,26495	0,35371	0,39763	0,41484

x	5	6	7	8	9	$x > 9$
Repartiţia dată F_n	0,986	0,996	0,999	1	1	1
Repartiţia Poisson F_n'	0,98343	0,99345	0,99889	0,99969	0,99988	1
Repartiţia binomială F_n''	0,42040	0,42192	0,42225	0,42232	0,42233	1

Deoarece $\sup_x |F_n(x) - F_n'(x)| = 0,01065$ şi $\sup_x |F_n(x) - F_n''(x)| = 0,57768$, rezultă că repartiţia Poisson aproximează mai bine repartiţia dată.

Exemplul 6. Dintr-un eşantion ordonat de 12 piese a căror caracteristică este înălţimea, s-au obţinut următoarele date

Nr. pieselor în ordinea creşterii înălţimii	1	2	3	4	5	6
Înălţimea (mm)	31,50	31,60	31,65	31,70	32,20	32,40

Nr. pieselor în ordinea creşterii înălţimii	7	8	9	10	11	12
Înălţimea (mm)	32,45	32,50	32,60	32,65	32,70	32,75

Să se calculeze următoarele funcţii empirice de repartiţie: $F_{12}(30)$,$F_{12}(32)$, $F_{12}(32,5)$.

Deoarece $F_n(x) = \dfrac{n(x)}{n}$, unde $n(x)$ este numărul valorilor din eşantion situate la stânga lui x, iar $n = 12$, obţinem $F_{12}(30) = 0$, $F_{12}(32) = \dfrac{4}{12}$, $F_{12}(32,5) = \dfrac{7}{12}$.

Să mai subliniem că, în prezent, nu ne putem imagina existenţa vreunui domeniu de cunoaştere în care să nu se folosească forme de observare şi cercetare pe bază de sondaj. În acest sens, cuvintele lui Poincaré sunt semnificative: "Slăbiciunea noastră nu ne permite să îmbrăţişăm tot universul şi suntem obligaţi să-l descompunem în bucăţi".

Capitolul 12

Teoria estimaţiei

În problemele apărute în tehnică sau în ştiinţele experimentale, în care intervin legi de probabilitate, aceastea depind de unul sau mai mulţi parametri.

Utilizarea în practică a unui proces stocastic pretinde nu numai cunoaşterea naturii lui, exprimată într-o formă matematică, dar şi valoarea exactă a parametrilor care intră în definiţia sa.

Teoria estimaţiei studiază ansamblul metodelor statisticii matematice, care permit determinarea valorilor parametrilor ce intră în alcătuirea unei repartiţii.

12.1 Funcţii de estimaţie (estimator)

Dacă repartiţia fenomenului studiat este dată de o funcţie cunoscută (de exemplu, lege de tip Poisson, lege normală) în care intră anumiţi parametri necunoscuţi, spunem că reprezintă o lege de *repartiţie specificată.* În cazul când cunoaştem valorile numerice luate de parametru, deci când repartiţia este cunoscută în întregime, avem o lege de *repartiţie complet specificată.*

În continuare, vom presupune că avem de determinat un parametru al unei legi specificate, ceilalţi (în caz că există) fiind cunoscuţi. Estimarea parametrului $\theta \in \mathbf{R}^k$ al densităţii de repartiţie $p(x;\theta)$ (sau al funcţiei de frecvenţă $p_i(\theta)$) urmată de v.a. ξ, se face pe baza rezultatelor experimentale sau a observaţiilor unui eşantion din populaţia corespunzătoare v.a. ξ. Mai general, se estimează o funcţie reală, măsurabilă, $g(\theta)$, care depinde de parametrul θ al legii respective.

Fie $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un eşantion de volum n corespunzător v.a. ξ (vezi §11.2). Un *estimator (funcţie de estimaţie)* al lui $g(\theta)$ este o statistică $U = U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ folosită pentru a determina funcţia $g(\theta)$. Valoarea $U(x_1, \ldots, x_n)$ pentru valorile observate x_i, $1 \leq i \leq n$, se numeşte *estimaţie.*

În continuare, valoarea medie şi varianţa corespunzătoare densităţii de repartiţie $p(x;\theta)$ vor fi notate cu E_θ, respectiv Var_θ.

Estimatorul $U(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ se numeşte ***nedeplasat*** dacă $E_\theta(U(\xi_1,\ldots,\xi_n)) = g(\theta)$ pentru orice θ, iar un estimator nedeplasat cu proprietatea

$$\mathrm{Var}_\theta(U(\xi_1,\ldots,\xi_n)) = o(1),$$

(unde $o(1) \to 0$ când $n \to \infty$) se numeşte ***absolut corect***; în acest caz (vezi §4.1) rezultă că U converge în medie pătratică către g, când $n \to \infty$. Dacă $U(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ converge în probabilitate către $g(\theta)$, se spune că $U(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ este un *estimator consistent*. Întrucât convergenţa în medie pătratică implică convegenţa în probabilitate (vezi §4.1), rezultă că un estimator absolut corect este consistent.

Dacă $E_\theta(U(\xi_1,\ldots,\xi_n)) = g(\theta) + o(1)$ şi $\mathrm{Var}_\theta(U(\xi_1,\ldots,\xi_n)) = o(1)$, atunci $U(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ este numit *estimator corect*. Evident, un estimator absolut corect este corect.

Un estimator nedeplasat $U(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ al lui $g(\theta)$, care are proprietatea de a avea cea mai mică varianţă în clasa tuturor estimatorilor nedeplasaţi ai lui $g(\theta)$ se numeşte *estimator eficient*. Valoarea minimă a varianţei unui estimator eficient este dată de următoarea teoremă.

Teorema 12.1 (Rao-Cramér-Fréchet). *Cu notaţiile precedente are loc relaţia*

$$\mathrm{Var}_\theta(U) \geq \frac{1}{nE_\theta\left[\left(\dfrac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{n\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)dx}.$$

Teorema următoare arată că valorile tipice de sondaj prezentate în §11.3 furnizează exemple importante de estimatori.

Teorema 12.2. *1) Momentele de sondaj sunt estimatori absoluţi corecţi ai momentelor teoretice.*

2) Statistica s^2 este un estimator corect pentru $Var(\xi)$.

3) Statistica $\bar{s}^2 = \dfrac{n}{n-1}s^2$ este un estimator absolut corect pentru $Var(\xi)$.

12.2 Metoda verosimilităţii maxime

Se consideră un eşantion $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ de volum n corespunzător v.a. ξ şi valorile observate $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Presupunem că densitatea de repartiţie (sau, în cazul discret, funcţia de frecvenţă) depinde de un parametru necunoscut θ care poate lua valori într-o mulţime $\Theta \subset \mathbf{R}^k$.

Vom numi *funcţie de verosimilitate* corespunzătoare valorilor $x_1,\ldots,x_n$ o funcţie $L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)$, considerată ca funcţie de θ, definită prin

$$L(x_1\ldots x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta),$$

unde $p(x;\theta)$ este fie densitatea de probabilitate a v.a. ξ, fie funcţia sa de frecvenţă (adică $p(x;\theta) = P(\xi = x)$, dacă ξ este discretă).

Estimatorul de verosimilitate maximă pentru θ, este acea valoare $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ cu proprietatea că

$$L(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \ldots, x_n; \theta).$$

Întrucât funcţiile L şi $\ln L$ au aceleaşi puncte de maxim rezultă că, dacă $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, atunci

$$\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n) = (\hat{\theta}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \hat{\theta}_k(x_1, \ldots, x_n))$$

trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Se demonstrează că estimatorul de verosimilitate maximă este consistent şi asimptotic eficient, când n este suficient de mare.

Exemplul 1. Se consideră v.a. ξ repartizată $N(m, \sigma)$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valorile v.a. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ care formează un eşantion de volum n relativ la v.a. ξ. Funcţia de verosimilitate corespunzătoare este

$$L(x_1, \ldots, x_n; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2 (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right)^2\right].$$

Estimatorii de verosimilitate maximă ai parametrilor m şi σ^2 sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii

$$\frac{\partial L}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0$$

şi sunt de forma

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{şi} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Exemplul 2. Se consideră v.a. ξ repartizată Poisson cu parametrul $\lambda > 0$. Utilizând aceleaşi notaţii ca în exemplul precedent, se găseşte funcţia de verosimilitate

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = e^{-n\lambda} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Estimatorul de verosilimitate maximă se obţine rezolvând ecuaţia $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ şi se obţine $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

Exemplul 3. Raza unui cerc este măsurată cu o eroare de observaţie care este normal repartizată în jurul lui 0, cu varianţa σ^2 necunoscută. Date fiind n măsurători independente ale razei, să se găsească o estimaţie absolut corectă pentru aria acestui cerc.

Dacă notăm cu R raza cercului şi cu r rezultatele măsurătorilor, atunci r este repartizată $N(R,\sigma)$, unde $E(r) = R$, $E((r-R)^2) = \sigma^2$. Rezultă că $E(r^2) = \sigma^2 + R^2$.

Fie $r_1, \ldots, r_n$ cele n măsurători independente şi $U(r_1, \ldots, r_n)$ o estimaţie absolut corectă a ariei cercului. Avem

$$E(U(x_1, \ldots, x_n)) = \pi R^2.$$

Luând

$$U(r_1, \ldots, r_n) = r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2$$

rezultă

$$E(r_1^2 + r_2^2, \ldots, r_n^2) = nE(r^2) = n(\sigma^2 + R^2)$$

sau

$$\frac{\pi}{n}E(r_1^2 + \ldots, r_n^2) - \pi\sigma^2 = \pi R^2.$$

Deci

$$\frac{\pi}{n}(r_1^2 + \ldots, r_n^2) - \pi\sigma^2$$

este o estimaţie absolut corectă pentru aria cercului πR^2.

Se ştie că $\dfrac{n}{n-1}s^2$ este un estimator absolut corect pentru σ^2, deoarece

$$E\left(\frac{n}{n-1}s^2\right) = \sigma^2.$$

Rezultă că dacă σ^2 este necunoscută, o estimaţie absolut corectă pentru aria cercului este

$$\frac{\pi}{n}(r_1^2 + \ldots + r_n^2) - \pi\frac{n}{n-1}s^2.$$

Capitolul 13

Verificarea ipotezelor statistice

13.1 Ipoteze statistice

Prin ipoteză statistică[1] se înţelege o ipoteză asupra uneia sau mai multor legi care caracterizează anumite populaţii, adică asupra valorilor parametrilor acestor legi sau asupra tipului legilor.

Verificarea ipotezelor statistice este un ansamblu de metode ale statisticii matematice care permit, plecând de la date experimentale, validarea sau infirmarea unei ipoteze statistice.

În ceea ce priveşte ipotezele statistice deosebim următoarele tipuri:

1. *Ipoteza parametrică* care se referă la valorile parametrilor unei legi de repartiţie specificate.

2. *Ipoteza neparametrică* care se referă la forma legii de repartiţie.

3. *Ipoteza nulă* H_0 este ipoteza ce urmează a fi verificată şi care se presupune apriori adevărată.

4. *Ipoteza alternativă* H_1 este orice ipoteză admisibilă cu care este confruntată ipoteza nulă H_0.

5. *Ipoteza simplă* este o ipoteză parametrică referitoare la parametrii $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, de forma $H_0 : \theta_1 = \theta_1^\circ, \ldots, \theta_k^\circ = \theta_k^\circ$.

6. *Ipoteza compusă* este o ipoteză parametrică de forma $H_0 : (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta$, unde $\Theta \subset \mathbf{R}^k$ este o submulţime (care nu se reduce la un punct) a mulţimii valorilor admisibile ale parametrilor.

[1] Remarcăm că ipotezele statistice nu sunt aproape niciodată echivalente cu ipotezele ştiinţifice, care în mod obişnuit sunt ipoteze asupra fenomenelor.

13.2 Teste statistice

Testul statistic este un criteriu pentru verificarea ipotezei statistice, constând în calculul unei statistici şi stabilirea unei reguli fixate în prealabil de acceptare sau respingere a ipotezei nule, cu o anumită probabilitate de a lua o decizie inexactă, când ipoteza nulă H_0 este confruntată cu ipoteza alternativă H_1.

Testul pentru verificarea egalităţii unui parametru estimat cu o valoare dată se numeşte *test de semnificaţie*. Testul pentru verificarea concordanţei dintre repartiţia empirică şi repartiţia teoretică este numit *test de concordanţă*.

Se consideră un eşantion $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de volum n corespunzător v.a. ξ şi valorile observate $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fie H_0 şi H_1 ipoteza nulă şi respectiv ipoteza alternativă. Mecanismul general pentru construirea unui test este următorul:

1. Se alege un număr α, apropiat de zero, numit *prag de semnificaţie*.

2. Se construieşte o statistică $T(x_1, \ldots, x_n)$ şi o mulţime $U \subset \mathbf{R}$ astfel încât $P(T(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in U) = \alpha$ dacă ipoteza H_0 este adevărată. Acest lucru se scrie sub forma $P(T(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in U |\, H_0) = \alpha$. Mulţimii U îi corespunde o mulţime $V \subset \mathbf{R}^n$ astfel încât $P((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in V |\, H_0) = \alpha$. Mulţimea V este numită *regiune critică* (sau *de respingere*), iar V^c este numită *regiune de acceptare*.

3. Dacă $(x_1, \ldots, x_n) \in V$, atunci ipoteza H_0 este respinsă (deci H_1 este acceptată); iar dacă $(x_1, \ldots, x_n) \in V^c$, atunci ipoteza H_0 este acceptată (deci H_1 este respinsă).

Regiunea critică nu este determinată în mod unic dacă se alege pragul de semnificaţie α.

În urma aplicării unui test se pot face două feluri de erori.

a. Respingerea eronată a ipotezei H_0, când ea este adevărată, este numită *eroare de genul întâi*. Probabilitatea erorii de genul întâi este

$$P((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in V |\, H_0) = \alpha.$$

b. Acceptarea eronată a ipotezei H_0, când ea este falsă, este numită *eroare de genul al doilea*. Probabilitatea erorii de genul al doilea, notată cu β, este

$$P((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in V^c |\, H_1) = \beta.$$

Cu cât probabilităţile α şi β sunt mai mici, cu atât testul este mai puternic. Nu putem face ca ambele probabilităţi α şi β să fie arbitrar de mici.

Dacă testul este parametric şi se referă la parametrul θ, atunci probabilitatea respingerii ipotezei nule H_0 se numeşte *puterea testului* şi se notează cu $\pi(V, \theta)$.

Evident, $\pi(V, \theta_0) = \alpha$ dacă $H_0 : \theta = \theta_0$ şi $\pi(V, \theta_1) = 1 - \beta$ dacă $H_1 : \theta = \theta_1$. Graficul funcţiei $\pi(V, \theta)$ se numeşte *curba puterii testului*.

13.3 Testul χ^2

Fie ξ o v.a. care ia valorile distincte $a_1, a_2, \ldots, a_m$ cu probabilităţile $p_1, \ldots, p_m$ respectiv. Să notăm cu $\nu_1, \ldots, \nu_m$ frecvenţele de apariţie ale valorilor $a_1, \ldots, a_m$ într-un eşantion de volum n $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = n)$. Se poate demonstra că v.a.

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

este, pentru $n \to \infty$, asimptotic repartizată χ^2 cu $m-1$ grade de libertate şi cu parametrul $\sigma = 1$ (vezi §3.14 şi §3.21). Ne propunem să verificăm ipoteza $H_0 : p_i = p_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Dacă ipoteza H_0 este adevărată trebuie să avem

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \le x\right) \simeq \frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

Alegem $x = x_\alpha$ (vezi anexa 2) astfel încât

$$\frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^{x_\alpha} t^{\frac{m-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt = 1 - \alpha,$$

unde α este pragul de semnificaţie, apropiat de zero.

Regiunea critică va rezulta din condiţia

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i^0)^2}{np_i^0} > x_\alpha, \tag{13.1}$$

iar regiunea de acceptare din condiţia

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \le x_\alpha. \tag{13.2}$$

Prin urmare, dacă în urma sondajului, valorile observate verifică (13.1) respingem ipoteza H_0, iar dacă verifică (13.2) acceptăm ipoteza H_0.

13.4 Testul F (Fisher-Snedecor)

Acest test este utilizat pentru verificarea egalităţilor varianţelor a două populaţii. Mai precis, considerăm două populaţii caracterizate de v.a. ξ şi η repartizate $N(m_1, \sigma_1)$ şi respectiv $N(m_2, \sigma_2)$. Fie $(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1})$ şi $(\eta_1, \ldots, \eta_{n_2})$ două eşantioane corespunzătoare celor două v.a., iar $x_1, \ldots, x_{n_1}$ şi $y_1, \ldots, y_{n_2}$ valorile observate. Ne propunem să verificăm ipoteza compusă

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

Se poate demonstra că dacă H_0 este adevărată, iar $\bar{s}_1^2$ şi $\bar{s}_2^2$ sunt varianţele de sondaj corespunzătoare (vezi §11.3), atunci v.a. $\frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2}$ urmează o repartiţie F (vezi §3.16) cu parametrii $n_1 - 1$ şi $n_2 - 1$.

Din tabele (vezi anexa 3) alegem F astfel încât

$$P\left(\frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2} \leq F_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Prin urmare, regiunea critică rezultă din condiţia $\frac{\bar{s}_1^2}{\bar{s}_2^2} > F_\alpha$. Deci, acceptăm ipoteza H_0, dacă obţinem

$$\frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - m_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(y_i - m_2)^2} \leq F_\alpha.$$

În caz contrar, respingem ipoteza H_0.

13.5 Testul t (Student)

Acest test parametric verifică ipoteza referitoare la media unei populaţii normale a cărei varianţă nu este cunoscută.

Se consideră o populaţie caracterizată de o v.a. ξ repartizată $N(m, \sigma)$ cu σ necunoscut. Ne propunem să verificăm ipoteza $H_0 : m = m_0$. Dacă $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ este un eşantion de volum n, atunci se demosntrează (vezi teorema 11.3 (5)) că v.a.

$$t = \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}}$$

urmează o repartiţie t cu $n - 1$ grade de libertate (vezi §3.15) ($\bar{\xi}$ şi $\bar{s}^2$ sunt media, respectiv varianţa de sondaj, (vezi §11.3)).

Din tabele (vezi anexa 4) alegem t_α astfel încât

$$P\left(\left|\frac{\bar{\xi} - m_0}{\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}}\right| \leq t_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

Prin urmare, regiunea critică rezultă din condiţia $\left|\frac{\bar{\xi} - m_0}{\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}}\right| > \alpha$. Deci, acceptăm ipoteza H_0 dacă valorile observate $x_1, \ldots, x_n$ verifică

$$\sqrt{n(n-1)}\frac{\bar{x}-m_0}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}} \leq t_\alpha$$

şi o respingem în caz contrar.

13.6 Testul Kolmogorov - Smirnov

Acest test este un test de concordanţă pentru verificarea ipotezei H_0 conform căreia funcţia de repartiţie a v.a. este F_0.

Presupunem că funcţia de repartiţie a v.a. este de tip continuu şi fie F_n funcţia empirică de repartiţie corespunzătoare eşantionului $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Conform teoremei 11.2 se poate scrie

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} = K(\lambda).$$

Prin urmare, pentru n suficient de mare construim un test bazat pe regiunea critică

$$V = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \middle| \sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F_0(x)| > \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}\right\},$$

unde λ_α se află din condiţia $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$ (vezi anexa 5).

Exemplul 1. Nouă bolnavi cărora le-a fost administrat un medicament oarecare semnalează următoarele variaţii ale presiunii sângelui lor: 7, 3, -1, 4, -3, 5, 6, -4, 1. Să se arate că aceste date nu indică că medicamentul este cauza acestor variaţii.

În ipoteza nulă, valorile de mai sus sunt privite ca un eşantion dintr-o populaţie de medie zero. Avem

$$\bar{\xi} = \frac{7+3-1+4-3+5+6-4+1}{9} = 2.$$

ξ_i	7	3	-1	4	-3	5	6	-4	1
$\xi_i - \xi$	5	1	-3	2	-5	3	4	-6	-1
$(\xi_i - \xi)^2$	25	1	9	4	-25	9	16	36	1

de unde rezultă

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum(\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1} = \frac{126}{8} = \frac{63}{4}$$

$$t = \frac{\bar{\xi}\sqrt{n}}{\bar{s}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{\sqrt{63}} = 1,51$$

Această valoare a lui t nu este semnificativă; prin urmare, nu medicamentul este cauza acestor variaţii.

Exemplul 2. Pentru a studia superioritatea unei semănători s-a împărţit un teren în loturi care au fost alternativ lucrate cu noua semănătoare şi cu cea veche. Pentru 10 perechi de loturi valorile excesului în greutate obţinute pentru noua semănătoare faţă de acelea obţinute cu ajutorul semănătorii obişnuite sunt: 2,4; 1; 0,7; 0; 1,1; 1,6; 1,1; 0,4; 0,1 şi 0,7. Să se testeze ipoteza superiorităţii noii semănători faţă de cea veche.

Din datele problemei rezultă

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \xi_i}{10} = \frac{9,1}{10} = 0,91, \quad \sum_{i=1}^{10} (\xi_i - \bar{\xi})^2 = 4,609,$$

de unde

$$\bar{s}^2 = \frac{4,609}{9} = 0,512.$$

În ipoteza nulă, media populaţiei este zero, iar

$$t = \frac{(\bar{\xi} - m)\sqrt{n}}{\bar{s}} = \frac{0,91 \cdot 3,1623}{0,715} = 4,027.$$

Pentru 9 grade de libertate şi un prag de 1% găsim $t = 3,25$ (vezi anexa 4). Prin urmare, respingem ipoteza nulă; deci semănătoarea nouă este superioară celei vechi.

Capitolul 14

Regresia

14.1 Curbe de regresie

Regresia este o metodă de cercetare a unei relaţii predeterminate exprimând legătura dintre o v.a. Y, numită *variabilă dependentă* şi una sau mai multe v.a. $X_1, X_2, \ldots$, numite *variabile independente.* Relaţia exactă sau *ecuaţia de regresie* a lui Y în funcţie de $X_1, X_2, \ldots$, pusă sub forma $y = f(x_1, x_2, \ldots)$ defineşte o *curbă* sau o *suprafaţă de regresie*; scopul ei este de a permite pentru nişte valori observate $x_1, x_2, \ldots$ ale v.a. $X_1, X_2, \ldots$ calculul unei estimaţii a lui Y.

În continuare, se va lua în consideraţie cazul unei singure variabile independente X (*regresie simplă*). În acest caz, ecuaţia de regresie este de forma $y = f(x)$; dacă f este o funcţie liniară, regresia este numită *liniară* sau *dreaptă de regresie.* Dacă f nu este liniară, atunci regresia este numită *curbilinie.*

14.2 Dreapta de regresie

Ecuaţia de regresie este de forma $y = a + bx$. Această dependenţă liniară este un model determinist şi nu reflectă exact legătura dintre X şi Y. Valorile observate (x_i, y_i) nu se găsesc exact pe dreapta $y = a + bx$ şi, de fapt, unei valori x_i îi pot corespunde mai multe valori y_i.

Dependenţa liniară dintre variabilele Y şi X se interpretează probabilist prin relaţia (vezi §2.4) $E(Y|\, X = x) = a + bx$; prin urmare, variabila dependentă este egală în medie cu o funcţie liniară de X, depinzând de parametrii necunoscuţi a şi b.

Abaterea unei valori observate y_i faţă de valoarea medie condiţionată $E(Y|\, X = x_i)$

$$y_i - E(Y|\, X = x_i) = y_i - a - bx_i$$

reprezintă *eroarea de observare.*

Să considerăm un eşantion de volum n şi fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabilele de sondaj corespunzătoare lui X, iar $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variabilele de sondaj corespunzătoare lui Y (vezi §11.2). V.a.

$$e_i = Y_i - a - bX_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

sunt numite *erori aleatoare* sau *reziduuri aleatoare* şi satisfac condiţiile

$$\begin{aligned} &E(e_i) = 0, \\ &\mathrm{Var}(e_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\mathrm{cov}\,(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Estimarea parametrilor a şi b se face prin *metoda celor mai mici pătrate*, adică în aşa fel încât suma pătratelor abaterilor între punctele observate şi punctele corespunzătoare ale dreptei să fie minimă. Mai precis, dacă $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sunt valorile observate corespunzătoare vectorilor aleatori $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ şi respectiv $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ se consideră

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

şi se determină valorile a şi b pentru care suma S este minimă. Minimul poate fi determinat rezolvând sistemul

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0,$$

de unde se obţin *ecuaţiile normale*

$$na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şi deci

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Fie $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2, s_y^2$ respectiv media de sondaj a lui X, media de sondaj a lui Y, varianţa de sondaj a lui X şi varianţa de sondaj a lui Y; de asemenea,

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

reprezintă o statistică ce estimează $\operatorname{cov}(X,Y)$ (vezi §11.3).

Se arată cu uşurinţă că dreapta de regresie trece prin punctul mediu $(\bar{x}, \bar{y})$, iar ecuaţia de regresie poate fi scrisă sub forma

$$y = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x^2}(x-\bar{x}) + \bar{y} \quad \text{sau} \quad y = r(x,y)\left(\frac{s_y}{s_x}\right)(x-\bar{x}) + \bar{y},$$

unde

$$r(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x s_y}.$$

Din reprezentarea grafică a dreptei de regresie (vezi fig. 14.1) se observă că $y = a$ când $x = 0$, iar panta dreptei este $\operatorname{tg}\theta = b$.

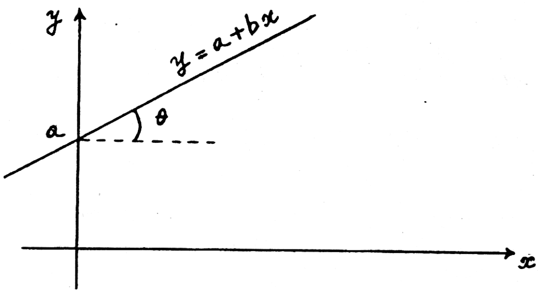


Fig.14.1

Prin urmare, variaţiile celor două fenomene se produc în acelaşi sens sau în sens invers, după cum $\operatorname{cov}(x,y) > 0$ (deci $b > 0$) sau $\operatorname{cov}(x,y) < 0$ (deci $b < 0$).

Exemplul 1. De un resort se atârnă diverse greutăţi (g) şi apoi se măsoară lungimea resortului y (mm); datele sunt prezentate în tabelul 14.1. Ecuaţiile normale sunt $7a+2800b = 261,1$ şi $2800a+1400000b = 118450$. După rezolvare se obţine $a = 17,29$ şi $b = 0,05$; deci ecuaţia de regresie este $y = 17,29+0,05x$. Lungimea previzibilă a resortului corespunzătoare unei mase $x = 550$ va fi $y = 17,29 + 0,5 \cdot 550 = 44,79$.

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
100	22,9	22290	10000
200	27,3	5640	40000
300	32,2	9660	90000
400	36,5	14600	160000
500	42,0	21000	250000
600	47,0	28200	360000
700	53,2	37240	490000
2800	261,1	118450	1400000

Tabelul 14.1

14.3 Regresie curbilinie

Cele mai întâlnite curbe de regresie sunt următoarele
$y = ax^p$ (funcţia putere),
$y = ab^x$ (funcţia exponenţială),
$y = a + b\ln x$ (funcţia logaritmică).

Studiul pentru aceste cazuri se reduce la regresia liniară. Într-adevăr:
- în cazul funcţiei putere se vor considera v.a. $U = \ln X$ şi $V = \ln Y$, relaţia dintre ele fiind dată de ecuaţia de regresie liniară $v = \ln a + pu$, pentru $a > 0$; cazul $a < 0$ se reduce cu uşurinţă la cel luat în consideraţie;
- în cazul funcţiei putere, $U = X$ şi $V = \ln Y$, rezultă $v = \ln a + u\ln b$, $a > 0$;
- în cazul funcţiei logaritmice, $U = \ln X$ şi $V = Y$, rezultă $v = a + bu$.

Dacă ecuaţia de regresie este de forma $y = a + bx + cx^2 + \ldots$ atunci se obţine *regresia polinomială.*

Coeficienţii $a, b, c, \ldots$ se determină prin metoda celor mai mici pătrate. În cazul în care valorile variabilei independente X sunt echidistante, coeficienţii regresiei polinomiale se pot determina prin *metoda polinoamelor ortogonale*, care constă în determinarea regresiei polinomiale sub forma $Y = b_0P_0(x) + \ldots + b_kP_k(x)$, unde $P_k(x)$ sunt polinoame de gradul k în x satisfăcând relaţia de ortogonalitate $\sum\limits_{k=1}^{n} P_i(x_k)P_j(x_k) = 0, \quad i \neq j$, pentru valorile observate $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pentru diferite valori ale lui n, s-au întocmit tabele care dau direct valorile polinoamelor $P_k(x)$. Cu ajutorul acestor valori se calculează coeficienţii regresiei polinomiale

$$b_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_iP_k(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_k^2(x_i)}.$$

NOTE ISTORICE

Istoria matematicii, referindu-se la creatorii teoriei probabilităţilor, consemnează următoarele fapte.

Matematicianul, filozoful şi fizicianul Blaise Pascal (1623-1662) precum şi matematicianul, literatul şi judecătorul Pierre de Fermat (1601-1655) au cunoscut un om de lume, inteligent şi fin, Antoine Gombaud Chevalier de Méré (1607-1685), versat în cunoaşterea oamenilor, posedând cunoştinţe foarte variate, cu idei originale, dar ignorant în matematică. Méré, pasionat jucător de cărţi, şi-a pus întrebarea dacă nu s-ar putea calcula şansele în joc. Astfel el a reuşit să rezolve empiric câteva situaţii simple, dar nu a putut merge mai departe. Convins fiind că matematica nu poate fi de nici un ajutor, ca o provocare, a pus matematicienilor două probleme de calcul.

Prima problemă constă în determinarea numărului de aruncări cu zarurile pentru a obţine un dublu şase. Pascal, Fermat şi Roberval (1602-1675) au rezolvat foarte uşor problema.

A doua problemă, mai grea, se referă la un joc de noroc, în care doi parteneri angajează o partidă la un anumit număr de puncte; la un moment dat al jocului, ei au un număr inegal de puncte şi întrerup partida înainte de a o termina. Întrebarea este cum trebuie împărţită, în mod echitabil, suma pusă în joc. Evident, fiecăruia i se cuvine o parte proporţională cu şansa de a câştiga partida, şansă determinată de numărul de puncte de care mai are nevoie, ca să ajungă la numărul de puncte convenit prin regula jocului.

Pascal şi Fermat au schimbat mai multe scrisori privitoare la această problemă pusă de Méré şi au reuşit, folosind fiecare în parte procedee oarecum deosebite, să o rezolve în acelaşi timp. Istoria matematicii atribuie conţinutului acestor scrisori originea calculului probabilităţilor, noua ramură a matematicii, ştiinţa hazardului, *aleae geometria*, cum îi spunea Pascal.

Totuşi sunt de remarcat şi alte aspecte privind naşterea teoriei probabilităţilor. Noţiunile de probabil, probabilitate, hazard sunt folosite de oameni dintotdeauna.

La popoarele vechi, greci, fenicieni etc., care făceau transporturi de mărfuri cu vapoare pe diferite itinerarii maritime, se practica asigurarea navelor sau a mărfurilor, fapt ce implica, prelucrarea datelor referitoare la aceste transporturi şi măsurarea pe această bază a şanselor de reuşită sau de eşec.

Chiar cu peste două milenii înaintea erei noastre, în China, cu ocazia unui recensământ general al populaţiei, s-a constatat că raportul dintre numărul de băieţi ce se nasc într-un an şi numărul global al copiilor este aproximativ de 0,5.

În Roma antică se făceau cercetări statistice cu privire la consumul unor bunuri, pentru a se calcula rezervele necesare.

Probleme, de genul celor puse de Méré, apar în preocupările matematicienilor cu mult timp înainte. Astfel Luca Paccioli (1445-1514), în lucrarea sa *Summa* (1494), Gerolamo Cardano (1501-1576) şi Nicola Fontana Tartaglia (1499-1557) s-au ocupat de problema privind repartizarea echitabilă a mizei într-un joc. De asemenea, Galileo Galilei (1564-1642) a scris *Considerazione sopra il Giuco dei Dadi.* Christian Huygens (1629-1695) în lucrarea sa *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Despre calculele la jocurile de noroc) (1657) rezolvă problema în forma cea mai generală. În anul 1669, într-o scrisoare, el sugerează folosirea probabilităţilor la întocmirea tabelelor de mortalitate.

Jakob Bernoulli (1654-1705), în opera sa *Ars Conjectandi* (Arta conjecturii) (1713), dezvoltă considerabil teoria probabilităţilor, arătându-i utilitatea în diverse activităţi omeneşti, printre care aplicarea ei la problema duratei vieţii omului. Bernoulli introduce, în paralel, atât noţiunea de probabilitate apriori, cât şi noţiunea de probabilitate aposteriori, legându-le prin vestita "lege a numerelor mari", pe care o demonstrează pentru prima dată, indicând totodată şi importanţa ei practică în variate domenii de activitate.

În timpul imediat următor, reflectând viaţa social-economică a epocii, direcţiile de folosire a teoriei probabilităţilor sunt extrem de variate, de exemplu: în tratarea jocurilor de noroc şi a pariurilor, în problema determinării vinovăţiei inculpatului împotriva căruia existau câteva mărturii, în problema declarării ca decedaţi a indivizilor dispăruţi fără urmă, la întocmirea tabelelor de mortalitate, în teoria rentelor viagere, în teoria tragerilor de artilerie etc.

Un prim rezultat al acestor preocupări este construirea statisticii demografice.

Un al doilea rezultat este folosirea calculului probabilităţilor în probleme de cercetare experimentală, concretizată prin întemeierea teoriei erorilor.

Abordările empirice s-au amplificat şi le regăsim concretizate în secolul al XVII-lea sub forma primei societăţi de asigurări în Anglia (1669). Cercetările statistice ale lui John Graunt (1620-1674), cu privire la structura populaţiei, ale lui Willian Petty (1623-1687), cu privire la cuantificarea fenomenelor economice, ale lui Edmund Halley (1656-1742) care introduce ideea de durată probabilă de viaţă şi lucrările lui Johann Peter Sussmilch (1707-1767), despre *aritmetica politică* (statistica), repurtează un succes decisiv.

Personalităţi ca Bayes (+1763), J. Bienaymé (1796-1878), Daniel Bernoulli (1700-1782), G. Boole (1815-1864), G.L.L. Buffon (1707-1788), P.L. Cebîşev (1821-1894), M.J.A. Condorcet (1743-1794), L. Euler (1707-1783), C.F. Gauss (1777-1855), P.S. Laplace (1749-1827), L. Lagrange (1736-1812), A. De Moivre (1667-1754), S.D. Poisson (1781-1840) au continuat, în secolele al XVIII-lea şi al XIX-lea, să ducă cu succes mai departe dezvoltarea teoretică şi direcţiile de aplicare a teoriei probabilităţilor.

De remarcat sunt lucrările lui Pierre Simon de Laplace *Théorie analytique des Probabilités* (1812) şi *Essai philosophique sur les Probabilités* (1814). Laplace a avut chiar intenţia, în lucrarea sa *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendus à la pluralité de voix* (1785), de a urmări realizarea binelui omenirii prin aplicarea teoriei probabilităţilor în viaţa social-politică, de exemplu, la alegeri, la votări şi la stabilirea legilor.

Tot în această perioadă, se constată preocupări de aplicare a teoriei probabilităţilor în geometrie. Primul, care s-a ocupat cu astfel de probleme, a fost naturalistul, literatul şi probabilistul George Louis Leclerc de Buffon. El a cercetat printre altele problema privind probabilitatea ca un disc circular aruncat peste o făşie dreptunghiulară, împărţită în pătrate, să cadă în întregime în interiorul unui pătrat. De asemenea, el a atacat probleme mai complicate de acest gen, în care discul circular este înlocuit cu o placă pătrată sau cu un ac.

Acest gen de probleme a dus la construirea metodei moderne de lucru a matematicii numită metoda numerelor întâmplătoare (cunoscută şi sub denumirea de metoda Monte Carlo), folosită cu succes în probleme de pură cercetare matematică şi de cercetare aplicativă.

De asemenea, reamintim lucrările lui Carl Friedrich Gauss, prin care se defineşte legea normală de repartiţie, sau ale lui Siméon Denis Poisson care descoperă legea de repartiţie a evenimentelor rare etc., la care se adaugă teorema limită centrală elaborată de Abraham de Moivre în anul 1738 şi dezvoltată de Laplace în anul 1813.

Fundamentarea riguros ştiinţifică a teoriei probabilităţilor s-a făcut de abia în anul 1933 de către matematicianul rus A.N. Kolmogorov (1903-1987) care a dat o definiţie axiomatică şi a legat noţiunea de probabilitate de teoria mulţimilor şi a măsurii, de matematica modernă.

În secolul al XX-lea, teoria probabilităţilor şi statistica matematică sunt desăvârşite ca ramuri ale matematicii de o pleiadă de matematicieni şi statisticieni dintre care amintim: E. Borel, F.P. Cantelli, H. Cramér, J.L. Doob, W. Doeblin, W. Feller, R.A. Fisher, M. Fréchet, B.V. Gnedenko, A.Ja. Hincin, A.M. Liapunov, M.G. Kendall, A.A. Markov, E.S. Pearson, H. Poincaré, Student, A. Wald ş.a.m.d.

O fază superioară în îmbogăţirea teoriei probabilităţilor o reprezintă modelarea stocastică. Conceptul de lanţ Markov, introdus de matematicianul rus A.A. Markov (1856-1922) în anul 1906, este unul din cele mai fecunde concepte ale teoriei probabilităţilor. Modelele probabiliste Markov şi semi-Markov reprezintă o clasă deosebit de importantă şi fac obiectul a numeroase aplicaţii şi cercetări făcute de B. Hostinsky, R.E. Baslow, S.N. Bernstein, K.L. Chung, D.A. Freedman, B.V. Gnedenko.

În această trecere în revistă se impune sublinierea deosebitei importanţe a şcolii româneşti de teoria probabilităţilor. Academicienii Octav Onicescu

(1892-1983) şi Gheorghe Mihoc (1906-1981), fondatori ai şcolii româneşti de teoria probabilităţilor, au adus contribuţii valoroase în dezvoltarea şi aplicarea teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice. Ei au fost iniţiatorii cercetării privind generalizarea conceptului de dependenţă markoviană. În prezent, stadiul cercetării româneşti este reprezentat la un nivel înalt de matematicienii Marius Iosifescu şi Ioan Cuculescu prin importantele lor contribuţii recunoscute pe plan internaţional.

Bibliografie

[1] Ash, R.B. (1970) Basic Probability Theory. Wiley, New York.

[2] Bachelier, L. (1912) Calcul des Probabilités. Gauthier-Villars, Paris.

[3] Bailey, N.T. (1990) The Elements of Stochastic Processes with Applications to the Natural Sciences. Wiley, New York.

[4] Barucha-Reid, A.T. (1960) Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. McGraw-Hill, New York.

[5] Bernoulli, J. (1713) Ars Conjectandi. Basileae impensis Thurnisiorum fratrum. Basilea, retipărită de Culture et Civilisation, Bruxelles, 1968.

[6] Chung, K.L. (1967) Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Springer, New York.

[7] Chung, K.L. (1974) Elementary Probability Theory with Stochastic Processes. Springer, New York.

[8] Ciucu, G.; Tudor, C. (1978) Probabilităţi şi procese stochastice, Vol. I, Ed. Academiei, Bucureşti.

[9] Cuculescu, I. (1993) Teoria probabilităţilor, Ed. All, Bucureşti.

[10] Doob, J.L. (1953) Stochastic Processes. Wiley, New York.

[11] Feller, W. (1968) An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Wiley, New York.

[12] Gnedenko, B.V. (1968) The Theory of Probability. Mir Publisher, Moskow.

[13] Iosifescu, M.; Mihoc, Gh., Theodorescu, R. (1966) Teoria probabilităţilor şi statistică matematică. Ed. Tehnică, Bucureşti.

[14] Iosifescu, M.; Theodorescu, R. (1969) Random Processes and Learning. Springer, New York.

[15] Iosifescu, M.; Tăutu, P. (1973) Stochastic Processes and Applications in Biology and Medicine. Ed. Academiei, Bucureşti.

[16] Iosifescu, M. (1980) Finite Markov Processes and Their Applications, Wiley & Ed. Tehnică, Chichester & Bucureşti.

[17] Iosifescu, M.; Grigorescu, Ş; Oprişan, Gh.; Popescu Gh. (1984) Elemente de modelare stochastică. Ed. Tehnică, Bucureşti.

[18] Iosifescu, M.; Moineagu, C.; Trebici, V.; Ursianu, E. (1985) Mică enciclopedie de statistică. Ed.Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti.

[19] Iosifescu, M.; Grigorescu, Ş. (1990) Dependence with Complete Connections and Its Applications. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[20] Karlin, S.; Taylor, H.M. (1975) A First Course in Stochastic Processes. Academic Press, New York.

[21] Kolmogorov, A.N. (1956) Foundations of the Theory of Probability. Chelsea, New York.

[22] Laplace, P.S. (1812) Théorie Analytique des Probabilités. Courcier, Paris.

[23] Mihoc, Gh. (1954) Elemente de calculul probabilităţilor. Ed. Tehnică, Bucureşti.

[24] De Moivre, A. (1967) The Doctrine of Chances or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. Chelsea, New York.

[25] Neveu, J. (1970) Bases mathématiques du calcul des Probabilités. Masson, Paris.

[26] Neveu, J. (1974) Cours de Probabilités. École Polytechnique, Paris.

[27] Onicescu, O. (1977) Probabilităţi şi procese aleatoare. Ed. Ştiinţifică şi Encliclopedică, Bucureşti.

[28] Onicescu, O.; Mihoc, Gh. (1958) Lecţii de statistică matematică. Ed. Tehnică, Bucureşti.

[29] Papoulis, A. (1965) Probability. Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, New York.

[30] Pearson, E.S.; Kendall, M.G. (1970) Studies in the History of Statistics and Probability. Griffin, London.

[31] Renyi, A. (1973) Dialog despre calculul probabilităţilor. Ed. Enciclopedică, Bucureşti.

[32] Todhunter, I. (1865) A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace. Macmillan, Cambridge & London.

[33] Ventsel, H. (1973) Théorie des probabilités. Ed. Mir, Moscou.

Anexa 1

Valori ale funcției $F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi(x) - 1$.

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
0,00	0,0000	0,60	0,4515	1,20	0,7699	1,80	0,9281
0,05	0,0000	0,65	0,4843	1,25	0,7887	1,85	0,9357
0,10	0,0797	0,70	0,5161	1,30	0,8064	1,90	0,9426
0,15	0,1192	0,75	0,5467	1,35	0,8230	2,00	0,9545
0,20	0,1585	0,80	0,5763	1,40	0,8385	2,25	0,9576
0,25	0,1974	0,85	0,6047	1,45	0,8529	2,50	0,9876
0,30	0,2358	0,90	0,6319	1,50	0,8664	2,75	0,9940
0,35	0,2737	0,95	0,6579	1,55	0,8789	3,00	0,99730
0,40	0,3108	1,00	0,6827	1,60	0,8904	3,50	0,99953
0,45	0,3473	1,05	0,7063	1,65	0,9011	4,00	0,99994
0,50	0,3829	1,10	0,7287	1,70	0,9109	4,417	$1-10^{-5}$
0,55	0,4177	1,15	0,7499	1,75	0,9199	4,892	$1-10^{-6}$

Anexa 2

Repartiția χ^2. Valorile lui x_α în funcție de probabilitățile $P(\chi^2 \leq x_\alpha^2) = 1 - \alpha$ și numărul gradelor de libertare.

1-α / n	0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0
1	0,000000 393	0,00000 157	0,0000 393	0,000 157	0,000C 982	0,00 393	0,158	0,0642	0,148	0,275
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,00100	0,00200	0,0100	0,201	0,0506	0,103	0,211	0,416	0,713	1,02
3	0,0153	0,00243	0,0171	0,115	0,216	0,352	0,548	1,00	1,42	1,87
4	0,639	0,0908	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,19	2,75
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	3,66
6	0,299	0,381	0,676	0,827	2,24	1,64	2,20	3,07	3,83	4,57
7	0,485	0,598	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	5,49
8	0,710	0,857	1,34	1,65	2,18	2,73	2,49	4,59	5,53	6,42
9	0,972	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	7,36
10	1,26	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	8,30
11	1,59	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	9,24
12	1,93	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	10,2
13	2,31	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	11,1
14	2,70	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	12,1
15	3,11	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	13,0
16	3,54	3,94	4,15	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	14,0
17	3,98	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	14,9
18	4,4	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	15,9
19	4,91	5,41	6,48	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	16,9
20	5,40	5,92	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,7	16,3	17,8
21	5,90	6,45	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	18,8
22	6,40	6,98	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	18,7
23	6,92	7,53	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	20,7
24	7,45	8,08	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	21,7
25	7,99	9,65	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	22,6
26	8,54	9,22	11,1	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	23,6
27	9,09	9,80	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	24,5
28	9,66	10,4	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	25,5
29	10,2	11,0	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	26,5
30	10,8	11,6	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	27,4
31	11,4	12,2	14,5	15,7	17,5	19,3	21,4	24,3	26,4	28,4
32	12,0	12,8	15,1	16,4	18,3	20,1	22,3	25,1	27,4	29,4
33	13,6	13,4	15,8	17,1	19,0	20,9	23,1	26,0	28,3	30,3
34	13,2	14,1	16,5	17,8	19,8	21,7	24,0	26,9	29,2	31,3
35	13,8	14,7	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	27,8	30,2	32,3
36	14,4	15,3	17,9	19,2	21,3	23,3	25,6	28,7	31,1	33,3
37	15,0	16,0	18,6	20,0	22,1	24,1	26,5	29,6	32,1	34,2
38	15,6	16,6	19,3	20,7	22,9	24,9	27,3	30,5	33,0	35,2
39	16,3	17,3	20,0	21,4	23,7	25,2	28,2	31,4	33,9	36,2
40	16,9	17,9	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	32,3	34,9	37,1
41	17,5	18,6	21,4	32,9	25,2	27,3	29,9	33,3	35,8	38,1
42	18,2	19,2	22,1	23,7	26,0	28,1	30,8	34,2	36,8	39,1
43	18,8	19,9	22,9	24,4	26,8	29,0	31,6	35,1	37,7	40,0
44	19,5	20,6	23,6	25,1	27,6	29,8	32,5	36,0	38,3	41,0
45	20,1	21,3	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	36,9	39,6	42,0
46	20,8	21,9	25,0	26,7	29,2	31,4	34,2	37,8	40,5	43,0
47	21,5	22,6	25,8	27,4	30,0	32,3	35,1	38,7	41,5	43,9
48	22,1	23,3	26,5	28,2	30,8	33,1	35,9	39,6	42,4	44,9
49	22,8	24,0	27,2	28,9	31,6	33,9	36,8	40,5	43,4	45,9
50	23,5	24,7	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	41,4	44,3	46,9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	24,1	25,4	28,7	30,5	33,2	35,6	38,6	42,4	45,3	47,8
52	24,8	26,1	29,5	31,2	34,0	36,4	39,4	43,3	46,2	48,8
53	25,5	26,8	30,2	32,0	34,8	37,3	40,3	44,2	47,2	49,8
54	26,2	27,5	31,0	32,8	35,6	38,1	41,2	45,1	48,1	50,8
55	26,9	28,2	31,7	33,7	36,4	39,0	42,1	46,0	49,1	51,7
56	27,6	28,9	32,5	34,3	37,2	39,8	42,9	47,0	50,0	52,7
57	28,2	29,6	33,2	35,1	38,2	40,6	43,8	47,9	51,0	53,7
58	28,9	30,3	34,0	35,9	38,8	41,5	44,7	48,8	51,9	54,7
59	29,6	31,0	34,8	36,7	39,7	42,3	45,6	49,7	52,9	55,6
60	30,3	31,7	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	50,6	53,8	56,6
61	31,0	32,5	36,6	38,3	41,3	44,0	47,3	51,6	54,8	57,6
62	31,7	33,2	37,1	39,1	42,1	44,9	48,2	52,5	55,7	58,6
63	32,5	33,9	37,8	39,9	43,0	45,7	49,1	53,4	56,7	59,6
64	33,2	34,6	38,6	40,6	43,8	46,6	50,0	54,3	57,6	60,5
65	33,9	35,4	39,4	41,4	44,6	47,4	50,9	55,3	58,6	61,5
66	34,6	36,1	40,2	42,2	45,4	48,3	51,8	56,2	59,5	62,5
67	35,3	36,8	40,9	43,0	46,3	49,2	52,7	57,1	60,5	63,5
68	36,0	37,6	41,7	43,8	47,1	50,0	53,5	58,0	61,4	64,4
69	36,7	38,3	42,5	44,6	47,9	50,9	54,4	59,0	62,4	65,4
70	37,5	39,0	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	59,9	63,3	66,4
71	38,2	39,8	44,1	46,2	49,6	52,6	56,2	60,8	64,3	67,4
72	38,9	40,5	44,8	47,1	50,4	53,5	57,1	61,8	65,3	68,4
73	39,6	41,3	45,6	47,9	51,3	54,3	58,0	62,7	66,2	69,2
74	40,4	42,0	46,4	48,7	52,1	55,2	58,0	63,6	67,2	70,3
75	41,1	42,8	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	64,5	68,1	71,3
76	41,8	43,5	48,0	50,3	53,8	56,9	60,7	65,5	69,1	72,3
77	42,6	44,3	48,8	51,1	54,6	57,8	61,6	66,4	70,0	73,2
78	43,3	45,0	49,6	51,9	55,5	58,7	62,5	67,3	71,0	74,2
79	44,1	45,8	50,4	52,7	56,3	59,5	63,4	68,3	72,0	75,2
80	44,8	46,5	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	69,9	72,9	76,2
81	45,5	47,3	52,0	54,4	58,0	61,3	65,2	70,1	73,9	77,2
82	46,3	48,0	52,8	55,2	58,8	62,2	66,1	71,1	74,8	78,1
83	47,0	48,8	53,6	56,0	59,7	63,0	67,0	72,0	75,8	79,1
84	47,8	49,6	54,4	56,8	60,5	63,9	67,9	72,9	76,8	80,1
85	48,5	50,3	55,2	57,6	61,4	64,7	68,8	73,9	77,7	81,1
86	49,3	51,1	56,0	58,5	62,2	65,6	69,7	74,8	78,7	82,1
87	50,0	51,9	56,8	49,3	63,1	66,5	70,6	75,7	79,6	83,0
88	50,8	52,6	57,6	60,1	63,9	67,4	71,5	76,7	80,6	84,0
89	51,5	53,4	58,4	60,9	64,8	68,2	72,4	77,6	81,6	85,0
90	52,3	54,2	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	78,6	82,5	86,0
91	53,0	54,9	60,0	62,6	66,5	70,0	74,2	79,5	83,5	87,0
92	53,8	55,7	60,8	63,4	67,4	70,9	75,1	80,4	84,4	88,0
93	54,5	56,5	61,6	64,2	68,2	71,8	76,0	81,4	85,4	88,9
94	55,3	57,2	62,4	65,1	69,1	72,6	76,9	82,3	86,1	89,9
95	56,1	58,0	63,2	65,9	69,9	73,5	77,8	83,2	87,3	90,9
96	56,8	58,8	64,1	66,7	70,8	74,4	78,7	84,2	88,3	91,9
97	57,6	59,6	64,9	67,6	71,6	75,3	79,6	85,1	89,2	92,9
98	59,4	60,4	65,7	68,4	72,5	76,2	80,5	86,1	90,2	93,8
99	59,1	61,1	66,5	69,2	73,4	77,0	81,4	87,0	91,2	94,8
100	59,9	61,9	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	87,9	92,1	95,8

50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5	99,9	99,5	
0,455	0,708	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	01,8	12,1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,39	1,83	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8	15,2	2
2,37	2,95	3,67	4,64	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3	17,7	3
3,36	4,04	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5	20,2	4
4,35	5,13	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5	22,1	5
5,35	6,21	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5	24,1	6
6,35	7,28	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3	26,0	7
7,34	8,35	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1	27,9	8
8,34	9,41	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9	29,7	9
9,34	10,5	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6	31,4	10
10,3	11,5	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3	33,3	11
11,3	12,6	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9	34,0	12
12,3	13,6	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5	36,5	13
13,3	14,7	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1	38,1	14
14,3	15,7	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7	39,7	15
15,3	16,8	18,4	30,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3	41,3	16
16,3	17,8	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8	42,9	17
17,3	18,9	20,6	22,8	26,0	38,9	31,5	34,8	37,8	42,4	44,4	18
18,3	19,9	21,7	23,9	27,2	30,4	32,9	36,2	8,6	43,8	46,0	19
19,3	21,0	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3	47,5	20
20,3	22,0	23,9	26,2	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8	49,0	21
21,3	23,0	24,9	27,3	30,8	33,9	36,9	40,3	42,8	48,3	50,5	22
22,3	24,1	26,0	28,4	32,0	35,0	38,1	41,6	44,2	49,7	52,0	23
23,3	25,1	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2	53,5	24
24,3	26,1	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6	54,9	25
25,3	27,2	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,4	56,4	26
26,3	28,2	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5	57,9	27
27,3	29,2	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9	59,3	28
28,3	30,3	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3	60,7	29
29,3	31,3	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7	62,2	30
30,3	32,3	34,6	37,4	41,4	45,0	48,2	52,2	55,0	61,1	63,6	31
31,3	33,4	35,7	38,5	42,6	46,2	49,5	53,5	56,3	62,5	65,0	32
32,3	34,4	36,7	39,6	43,7	47,4	50,7	54,8	57,6	63,9	66,4	33
33,3	35,4	37,8	40,7	44,9	48,6	52,0	56,1	59,0	65,2	67,8	34
34,6	36,5	38,9	41,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6	69,2	35
35,3	37,5	39,9	42,9	47,2	51,0	54,4	58,6	61,6	68,0	70,6	36
36,3	38,5	41,0	44,0	48,4	52,2	55,7	59,9	62,9	69,3	72,0	37
37,3	39,6	42,0	45,1	49,5	53,4	56,9	61,2	64,2	70,7	73,4	38
38,3	40,6	43,1	46,2	50,7	54,6	58,1	62,4	65,5	72,1	74,7	39
39,3	41,6	44,2	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4	76,1	40
40,3	42,7	45,7	48,4	52,9	56,9	60,6	65,0	68,1	74,7	77,5	41
41,3	43,7	46,3	49,5	54,1	58,1	61,8	66,2	69,3	76,1	78,8	42
42,3	44,7	47,3	50,5	55,2	59,3	63,0	67,5	70,6	77,4	80,2	43
43,3	45,7	48,4	51,6	56,4	60,5	64,2	68,7	71,9	78,7	81,5	44
44,3	46,8	49,5	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2	80,1	82,9	45
45,3	47,8	50,5	53,8	58,6	62,8	66,6	71,2	74,7	81,4	84,2	46
46,3	48,8	51,6	54,9	59,8	64,0	67,8	72,4	75,7	82,7	85,6	47
47,3	49,8	52,6	56,0	60,9	65,2	69,0	73,7	77,0	84,0	86,9	58
48,3	50,9	53,7	57,1	62,0	66,3	70,2	74,9	78,2	85,4	88,2	49
49,3	51,9	54,7	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7	89,6	50
50,3	52,9	55,8	59,2	64,3	68,7	72,6	77,4	80,7	88,0	90,9	51
51,3	53,9	56,8	60,3	65,4	69,8	73,8	78,6	82,0	89,3	92,2	52
52,3	55,0	57,9	61,4	66,5	71,0	75,0	79,8	83,3	90,6	93,5	53
53,3	56,0	58,9	62,5	67,7	72,2	76,2	81,1	84,5	91,9	94,8	54
54,3	57,0	60,0	63,6	68,8	73,3	77,4	82,3	85,7	93,2	96,2	55
55,3	58,0	61,0	64,7	69,9	74,5	78,6	73,5	87,0	94,5	97,5	56
56,3	59,1	62,1	65,7	71,0	75,3	79,8	84,7	88,2	95,8	98,8	57
57,3	60,1	63,1	66,8	72,2	76,8	80,9	86,0	89,5	97,0	101,1	58
58,3	61,1	64,2	67,9	73,3	77,9	82,1	87,2	90,7	98,3	101,4	59

50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5	99,9	99,5	
0,455	0,708	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	01,8	12,1	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
59,3	62,1	65,2	69,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0	99,6	102,7	60
60,3	63,2	66,3	70,0	75,5	80,2	84,5	89,6	93,2	100,9	104,0	61
61,3	64,2	67,3	71,1	76,6	81,4	85,7	90,8	94,4	102,2	105,3	62
62,3	65,2	68,4	72,2	77,7	82,5	86,8	92,0	95,6	103,4	106,6	63
63,3	66,2	69,4	73,3	78,9	83,7	88,0	93,2	96,9	104,7	107,9	64
64,3	67,2	70,5	74,4	80,0	84,8	89,2	94,4	98,1	106,0	109,2	65
65,3	68,3	71,5	75,4	81,1	86,0	90,3	95,6	99,3	107,3	110,5	66
66,3	69,3	72,6	76,5	82,2	87,1	91,5	96,8	100,6	108,5	111,7	67
67,3	70,3	73,6	77,6	83,3	88,3	92,7	98,0	101,8	109,8	113,0	68
68,3	71,3	74,6	78,6	84,4	89,4	93,9	99,2	103,0	111,1	114,3	69
69,3	72,4	75,7	79,7	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2	112,3	115,6	70
70,3	73,4	76,7	80,8	96,6	91,7	96,2	101,6	105,4	113,6	116,9	71
71,3	74,4	77,8	81,9	87,7	92,8	97,4	102,8	106,6	114,8	118,4	72
72,3	75,4	78,8	82,9	88,8	93,9	98,5	104,0	107,9	116,1	119,4	73
73,3	76,4	79,9	84,0	90,5	95,1	99,7	105,2	109,1	117,3	120,7	74
74,3	77,5	80,9	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3	118,6	121,9	75
75,3	78,5	82,0	86,1	92,2	97,4	102,0	107,6	111,5	119,9	123,2	76
76,3	79,5	83,0	87,2	93,3	98,5	103,2	108,8	112,7	121,1	124,5	77
77,3	80,5	84,0	88,3	94,4	99,6	104,3	110,0	113,9	122,3	125,7	78
78,3	81,5	85,1	89,3	95,5	100,7	105,5	111,1	115,1	123,6	127,0	79
79,3	82,6	86,1	90,4	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3	124,8	128,3	80
80,3	83,6	87,2	91,5	97,7	103,0	107,8	113,5	117,5	126,1	129,5	81
81,3	84,6	88,2	92,5	98,8	104,1	108,9	114,7	118,7	127,3	130,8	82
82,3	85,6	89,2	93,6	99,9	105,3	110,1	115,9	119,9	128,6	132,0	83
83,0	86,6	90,3	94,7	101,0	106,4	111,2	117,1	121,1	129,6	133,3	84
84,3	87,7	91,3	95,7	102,1	107,5	112,4	118,2	122,3	131,5	134,5	85
85,3	88,7	92,4	96,8	103,2	108,6	113,5	119,4	123,5	132,3	135,8	86
86,3	89,7	93,4	97,9	104,3	109,8	114,7	120,6	124,7	133,5	137,0	87
87,3	90,7	94,4	98,9	105,4	110,9	115,8	121,8	125,9	134,7	138,3	88
88,3	91,7	95,5	100,0	106,5	112,0	117,0	122,0	127,1	136,0	139,5	89
89,3	92,8	96,5	101,1	107,6	113,1	118,1	124,0	128,3	137,2	140,8	90
90,3	93,8	97,6	102,1	108,7	114,3	119,3	125,3	129,5	138,4	142,0	91
91,3	94,8	98,6	103,2	109,8	115,4	120,4	126,3	130,7	139,7	143,3	92
92,3	95,8	99,6	104,2	110,9	116,5	121,6	127,6	131,9	140,9	144,5	93
93,3	96,8	100,7	105,3	111,9	117,6	122,7	128,8	133,1	142,1	145,8	94
94,3	97,9	101,7	106,4	113,0	118,8	123,9	130,0	134,2	143,3	147,0	95
95,3	98,9	102,8	107,4	114,1	119,8	125,0	131,1	135,4	144,6	148,2	96
96,3	99,9	103,8	108,5	115,2	121,0	126,1	132,3	136,6	145,8	149,5	97
97,3	100,9	104,8	109,5	116,3	122,1	127,3	133,5	137,8	147,0	150,7	98
98,3	101,9	105,9	110,6	117,4	123,2	128,4	134,6	139,0	148,2	151,9	99
99,3	102,9	106,9	111,7	118,5	124,3	129,4	135,8	140,2	149,4	153,2	100

Anexa 3

Repartiția Snedecor. Valorile lui F_α în funcție de probabilitatea $P(F \leq F_\alpha) =$ 0,995 și de numărul gradelor de libertate n_1 și n_2.

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	162	200	216	225	231	234	237	239	241	242	243	244
2	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
3	55,6	49,8	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,1	43,9	43,7	43,5	43,4
4	31,3	36,2	24,3	23,2	22,5	22,0	21,6	21,4	21,1	21,0	20,8	20,7
5	22,8	18,3	16,5	15,6	14,9	14,5	14,2	14,0	13,8	13,6	13,5	13,4
6	18,6	14,5	12,9	12,0	11,5	11,1	10,8	10,6	10,4	10,2	10,1	10,0
7	16,2	12,4	10,9	10,0	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51	8,38	8,28	8,18
8	14,7	11,0	10,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34	7,21	7,10	7,01
9	13,6	10,1	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54	6,42	6,31	6,23
10	12,8	9,43	8,80	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97	5,85	5,75	5,66
11	12,2	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54	5,40	5,32	5,24
12	11,8	8,51	7,23	5,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20	5,09	4,99	4,91
13	11,4	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94	4,82	4,72	4,64
14	11,1	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72	4,60	4,51	4,43
15	10,8	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54	4,42	4,33	4,50
16	10,6	7,50	6,03	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38	4,27	4,18	4,12
17	10,4	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25	4,14	4,05	3,97
18	10,2	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86
19	10,1	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04	3,93	3,84	3,76
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96	3,85	3,76	3,68
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88	3,67	3,68	3,60
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81	3,70	3,61	3,54
23	9,63	6,73	5,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75	3,64	3,55	3,47
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69	3,59	3,50	3,42
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,84	3,78	3,64	3,51	3,45	3,37
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60	3,49	3,40	3,23
27	9,34	6,49	5,36	4,74	4,34	4,06	3,85	3,69	3,56	3,45	3,36	3,28
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52	3,41	3,32	3,25
29	9,23	6,40	5,28	4,66	4,26	3,98	3,77	3,61	3,48	3,38	3,29	3,21
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45	3,34	3,25	3,18
32	9,09	6,28	5,17	4,56	4,17	3,89	3,68	3,52	3,39	3,29	3,20	3,12
34	9,01	6,22	5,11	4,50	4,11	3,84	3,63	3,47	3,34	3,24	3,15	3,07
36	8,94	6,16	5,06	4,46	4,06	3,79	3,58	3,42	3,30	3,19	3,10	3,03
38	8,88	6,11	5,02	4,41	4,02	3,75	3,54	3,39	3,25	3,15	3,06	2,99
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22	3,12	3,03	2,95
42	8,78	6,03	4,94	4,34	3,95	3,68	3,48	3,32	3,19	3,09	3,00	2,92
44	8,74	5,99	4,91	4,31	3,92	3,65	3,45	3,29	3,16	3,06	2,97	2,89
46	8,70	5,96	4,88	4,28	3,90	3,62	3,42	3,26	3,14	3,03	2,94	2,87
48	8,66	5,93	4,85	4,25	3,87	3,60	3,40	3,24	3,11	3,01	2,92	2,85
50	8,63	5,90	4,83	4,23	3,85	3,58	3,38	3,22	3,09	2,99	2,90	2,82
55	8,55	5,84	4,77	4,18	3,88	3,53	3,33	3,17	3,05	2,94	2,85	2,78
60	8,49	5,80	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,13	3,01	2,90	2,82	2,74
65	8,44	5,75	4,68	4,11	3,73	3,46	3,26	3,10	2,98	2,87	2,79	2,71
70	8,40	5,72	4,65	4,08	3,70	3,43	3,23	3,08	2,95	2,85	2,76	2,68
80	8,33	5,67	4,61	4,03	3,65	3,39	3,19	3,03	2,91	2,80	2,72	2,64
90	8,28	5,62	4,57	3,99	3,62	3,35	3,15	3,00	2,87	2,77	2,68	2,61
100	8,24	5,59	4,54	3,96	3,59	3,33	3,13	2,97	2,85	2,74	2,66	2,58
125	8,17	5,53	4,49	3,91	3,54	3,28	3,08	2,93	2,80	2,70	2,61	2,54
150	8,12	5,49	4,45	3,88	3,51	3,25	3,05	2,89	2,77	2,67	2,58	2,51
200	8,06	5,44	4,41	3,84	3,47	3,21	3,01	2,85	2,73	2,63	2,54	2,47
300	8,00	5,39	4,37	3,80	3,43	3,17	2,97	2,81	2,69	2,59	2,51	2,43
500	7,95	5,26	4,33	3,76	3,40	3,14	2,92	2,97	2,66	2,56	2,48	2,40
1000	7,92	5,33	4,31	3,74	3,337	3,11	2,92	2,77	2,64	2,54	2,45	2,38
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62	2,52	2,43	2,36

n_2 \ n_1	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28
1	245	246	246	247	247	248	248	248	249	249	250	250
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
3	43,3	43,2	43,1	43,02	42,9	42,9	42,8	42,80	42,7	42,6	42,6	42,5
4	20,6	20,5	20,4	20,4	20,3	20,3	20,2	20,2	20,1	20,0	20,0	19,9
5	13,3	13,2	13,1	13,1	13,0	13,0	12,9	12,9	12,8	12,8	12,7	12,7
6	9,95	9,88	9,81	9,76	9,71	9,66	9,62	9,59	9,53	9,47	9,43	9,37
7	8,10	8,03	5,97	7,93	7,87	7,83	7,79	7,75	7,69	7,64	7,60	7,59
8	6,94	6,87	6,81	6,76	6,72	6,68	6,64	6,61	6,55	6,50	4,46	6,43
9	6,15	6,09	6,03	5,98	5,94	5,90	5,86	5,83	5,78	5,73	5,69	5,65
10	5,59	5,53	5,47	5,42	5,38	5,34	5,30	5,27	5,22	5,17	5,13	5,10
11	5,16	5,10	5,05	5,00	4,96	4,92	4,89	4,86	4,80	4,76	4,72	4,68
12	4,84	4,77	4,72	4,67	4,63	4,59	4,56	5,53	4,48	4,43	4,39	4,36
13	4,57	4,51	4,46	4,41	4,37	4,33	4,30	4,27	4,22	4,17	4,13	4,10
14	4,36	4,30	4,25	4,20	4,16	4,12	4,09	4,06	4,01	3,96	3,92	3,89
15	4,18	4,12	4,07	4,02	3,98	3,95	3,91	3,88	3,83	3,79	3,75	3,72
16	4,03	3,97	3,92	3,87	3,83	3,80	3,76	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
17	3,90	3,84	3,79	3,75	3,71	3,67	3,64	3,61	3,56	3,51	3,47	3,44
18	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,56	3,53	3,50	3,45	3,40	3,36	3,33
19	3,70	3,64	3,59	3,54	3,50	3,46	3,43	3,40	3,35	3,31	3,27	3,24
20	3,61	3,55	3,50	3,46	3,42	3,38	3,35	3,32	3,27	3,22	3,18	3,15
21	3,54	3,48	3,43	3,38	3,34	3,31	3,27	3,24	3,19	3,15	3,11	3,08
22	3,47	3,41	3,36	3,31	3,27	3,24	3,20	3,18	3,12	3,08	3,04	3,01
23	3,41	3,35	3,30	3,25	3,21	3,18	3,15	3,12	3,06	3,02	2,98	2,95
24	3,35	3,30	3,25	3,20	3,16	3,12	3,09	3,06	3,01	2,97	2,93	2,90
25	3,30	3,25	3,20	3,15	3,11	3,08	3,04	3,01	2,96	2,92	2,88	2,85
26	3,26	3,20	3,15	3,11	3,07	3,03	3,00	2,97	2,92	2,87	2,83	2,80
27	3,22	3,16	3,11	3,07	3,03	2,99	2,96	2,93	2,88	2,83	2,79	2,76
28	3,18	3,12	3,07	3,03	2,99	2,95	2,92	2,98	2,84	2,79	2,76	2,72
29	3,15	3,09	3,04	2,99	2,95	2,92	2,88	2,86	2,80	2,76	2,72	2,69
30	3,11	3,06	3,01	2,96	2,92	2,89	2,85	2,82	2,77	2,73	2,69	2,66
32	3,06	3,00	2,95	2,90	2,86	2,83	2,80	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
34	3,01	2,95	2,90	2,85	2,81	2,78	2,75	2,72	2,66	2,62	2,58	2,55
36	2,96	2,90	2,85	2,81	2,77	2,73	2,70	2,60	2,62	2,58	2,54	2,50
38	2,92	2,87	2,82	2,77	2,73	2,70	2,60	2,63	2,58	2,54	2,50	2,47
40	2,89	2,83	2,78	2,74	2,70	2,66	2,63	2,60	2,55	2,50	2,46	2,43
42	2,87	2,80	2,75	2,71	2,67	2,63	2,60	2,50	2,52	2,47	2,43	2,40
44	2,83	2,77	2,72	2,68	2,64	2,60	2,57	2,54	2,49	2,44	2,40	2,37
46	2,80	2,75	2,70	2,65	2,61	2,58	2,54	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34
48	2,78	2,72	2,67	2,63	2,59	2,55	2,52	2,49	2,44	2,39	2,36	2,32
50	2,76	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,47	2,42	2,37	2,33	2,30
55	2,71	2,66	2,61	2,56	2,52	2,49	2,45	2,42	2,37	2,33	2,29	2,26
60	2,68	2,62	2,57	2,	2,49	2,45	2,42	2,39	2,33	2,29	2,25	2,22
65	2,65	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,39	2,36	2,30	2,26	2,22	2,19
70	2,62	2,56	2,51	2,47	2,43	2,39	2,36	2,33	2,28	2,23	2,19	2,16
80	2,58	2,52	2,47	2,43	2,39	2,35	2,32	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11
90	2,54	2,49	2,44	2,39	2,35	2,32	2,28	2,25	2,20	2,15	2,12	2,08
100	2,52	2,46	2,41	2,37	2,33	2,29	2,26	2,23	2,17	2,13	2,09	2,05
125	2,47	2,42	2,37	2,32	2,28	2,24	2,21	2,18	2,13	2,08	2,04	2,01
150	2,44	2,38	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,10	2,05	2,01	1,98
200	2,402	2,35	2,30	2,25	2,21	2,18	2,14	2,11	2,06	2,01	1,97	1,94
300	2,37	2,31	2,26	2,21	2,17	2,14	2,10	2,07	2,02	1,97	1,93	1,90
500	2,34	2,28	2,23	2,19	2,14	2,11	2,07	2,04	1,99	1,94	1,90	1,87
1000	2,32	2,26	2,21	2,16	2,12	2,09	2,05	2,02	1,97	1,92	1,88	1,84
∞	2,29	2,24	2,19	2,14	2,10	2,06	2,03	2,00	1,95	1,90	1,86	1,82

n_2 \ n_1	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
1	250	251	251	252	252	253	253	253	254	254	255
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200	200
3	42,5	42,4	42,3	42,3	42,2	42,1	42,1	42,0	41,9	41,9	41,8
4	19,9	19,8	19,8	19,7	19,7	19,6	19,15	19,5	19,4	19,4	19,3
5	12,7	12,6	12,5	12,5	12,5	12,5	12,3	12,3	21,2	12,2	12,1
6	9,36	9,29	9,24	9,20	9,17	9,12	9,06	9,03	8,95	8,91	1,88
7	7,53	7,47	7,42	7,38	7,35	9,31	7,25	7,22	7,15	7,10	7,08
8	6,40	6,33	6,29	6,25	6,22	6,18	6,12	6,09	6,02	5,98	5,95
9	5,62	5,56	5,52	5,48	5,45	5,41	5,36	5,32	5,26	5,21	5,19
10	5,07	5,01	4,97	4,93	4,90	4,86	4,80	4,77	4,71	4,67	4,64
11	4,65	4,60	4,55	4,52	4,49	4,44	4,39	4,36	4,29	4,25	4,23
12	4,33	4,27	4,23	4,19	4,17	4,12	4,07	4,04	3,97	3,93	3,90
13	4,07	4,01	3,97	3,94	3,91	3,87	3,81	3,78	3,71	3,67	3,65
14	3,86	3,80	3,76	3,73	3,70	3,66	3,60	3,57	3,50	3,46	3,44
15	3,69	3,63	3,58	3,55	3,52	3,48	3,43	3,39	3,33	3,29	3,26
16	3,54	3,48	3,44	3,40	3,373	3,33	3,28	3,25	3,18	3,14	3,11
17	3,41	3,35	3,31	3,28	,25	3,21	3,15	3,12	3,05	3,01	2,98
18	3,30	3,25	3,20	3,17	3,14	3,10	3,04	3,01	2,94	2,90	2,87
19	3,21	3,15	3,11	3,07	3,04	3,00	2,95	2,91	2,85	2,80	2,78
20	3,12	3,07	3,02	2,99	2,96	2,92	2,86	2,83	2,76	2,72	2,69
21	3,05	2,99	2,95	2,91	2,88	2,84	2,78	2,75	2,68	2,64	2,61
22	2,98	2,92	2,88	2,84	2,82	2,77	2,72	2,96	2,62	2,57	2,55
23	2,92	2,86	2,82	2,78	2,76	2,71	2,66	2,62	2,56	2,51	2,43
24	2,87	2,81	2,77	2,73	2,70	2,66	2,60	2,57	2,50	2,46	2,48
25	2,82	2,76	2,72	2,68	2,65	2,61	2,55	2,52	2,45	2,41	2,33
26	2,77	2,72	2,67	2,64	2,61	2,56	2,51	2,47	2,40	2,36	2,38
27	2,73	2,67	2,63	2,59	2,57	2,52	2,47	2,43	2,36	2,32	2,29
28	2,69	2,64	2,59	2,56	2,53	2,48	2,43	2,39	2,32	2,28	2,25
29	2,66	2,60	2,56	2,52	2,49	2,45	2,39	2,36	2,28	2,24	2,21
30	2,63	2,57	2,52	2,49	2,46	2,42	2,36	2,32	2,25	2,21	2,18
32	2,57	2,51	2,47	2,43	2,40	2,36	2,30	2,26	2,19	2,15	2,11
34	2,52	2,46	2,42	2,38	2,35	2,30	2,25	2,21	2,14	2,09	2,06
36	2,48	2,42	2,37	2,33	2,30	2,26	2,20	2,17	2,09	2,04	2,01
38	2,44	2,38	2,33	2,29	2,27	2,22	2,16	2,12	2,05	2,00	1,97
40	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,18	2,12	2,09	2,01	1,96	1,93
42	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,15	2,09	2,06	1,98	1,93	1,90
44	2,34	2,28	2,24	2,20	2,17	2,12	2,06	2,03	1,95	1,90	1,87
46	2,32	2,26	2,21	2,17	2,14	2,10	2,04	2,00	1,92	1,87	1,84
48	2,29	2,23	2,19	2,15	2,12	2,07	2,01	1,97	1,89	1,84	1,81
50	2,27	2,21	2,16	2,13	2,10	2,05	1,99	1,95	1,87	1,82	1,79
55	2,23	2,16	2,12	2,08	2,05	2,00	1,94	1,90	1,82	1,77	173
60	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01	1,96	1,90	1,86	1,78	1,73	1,69
65	2,16	2,09	2,05	2,01	1,98	1,93	1,87	1,83	1,74	1,69	1,65
70	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95	1,90	1,84	1,80	1,71	1,66	1,62
80	2,08	2,02	1,97	1,93	1,90	1,85	1,79	1,75	1,66	1,60	1,56
90	2,05	1,99	1,94	1,90	1,87	1,82	1,75	1,71	1,62	1,56	1,52
100	2,02	1,96	1,91	1,87	1,84	1,79	1,72	1,68	1,59	1,53	1,49
125	1,98	1,91	1,86	1,82	1,79	1,74	1,67	1,63	1,53	1,47	1,42
150	1,94	1,88	1,83	1,79	1,76	1,70	1,63	1,59	1,49	1,42	1,37
200	1,91	1,84	1,79	1,75	1,71	1,66	1,59	1,54	1,44	1,37	1,31
300	1,87	1,80	1,75	1,71	1,67	1,61	1,54	1,50	1,39	1,31	1,25
500	1,84	1,77	1,72	1,67	1,64	1,58	1,51	1,46	1,35	1,26	1,18
1000	1,81	1,75	1,69	1,65	1,61	1,56	1,48	1,43	1,31	1,22	1,13
∞	1,79	1,72	1,67	1,63	1,59	1,53	1,45	1,40	1,28	1,17	1,00

Anexa 4

Repartiția Student. Valorile lui t_α în funcție de probabilitatea $P(t \le t_\alpha) = 1 - \alpha$ și numărul gradelor de libertate *n*.

$1-\alpha$ / n	60	70	80	90	95	97,5	99	99,5	99,9	99,95
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	381,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,23	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,91
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,853	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,535	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,833
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,089	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,71	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,362	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	30174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Anexa 5

Testul Kolmogorov - Smirnov. Valorile lui $\frac{\lambda}{\sqrt{n}}$.

	Prag de seminificaţie α				
n	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,442	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,532	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,413
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	1,18	0,19	0,21	0,23	0,27
> 35	$\frac{1.07}{n}$	$\frac{1.14}{n}$	$\frac{1.22}{n}$	$\frac{1.36}{n}$	$\frac{1.63}{n}$

Index

LUCRĂRI RECOMANDATE DE EDITURA TEHNICĂ

CODUL LUCRĂRII	TITLUL LUCRĂRII	AUTORUL	PREȚUL
12101	Analiza numerică	T. Vladislav, I. Rașa	35 000
11487	Chimie anorganică	F. Shriver	160 000
11854	Genetica medicală. Progrese recente	D.Ștefănescu	36 000
12036	Sarcomul Kaposi	A. Mihail	46 500
12125	Birotică	D. Somnea	42 000
12008	Inițiere în Jawa Script și tehnologii Netscape	D. Somnea	60 000
12097	Proiectarea asistată de calculator a modulelor CADSTAR	P. Svasta	78 000
11871	Proiectarea interfețelor utilizator	A. Cooper	50 000
11969	Construcții civile	D. Mariusciac	56 000
12111	Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității	I. Mincă ș.a.	44 000
12054	ISO 9000 - pentru servicii	W. Brakhahn	36 000
11757	Manualul calității	B. Froman	25 000
11762	O nouă orientare în managementul calității	H. Mitonneau	25 000
12141	Succesul întreprinderilor mici și mijlocii	L. Rașcă	21 000
11610	Miturile vechilor civilizații mexicane	A. Morretta	56 000
11322	Mituri indiene	A. Morretta	50 000
11980	Identități europene (ediție. bilingvă)	S. Păun	150 000
11956	Istoria logicii, vol.4	A. Dumitriu	55 000
1903	Comunicații mobile terestre	N. Coțanis I. Marghescu	70 000

CODUL LUCRĂRII	TITLUL LUCRĂRII	AUTORUL	PREŢUL
12069	Dicţionarul specialiştilor-Who's who în ştiinţă şi tehnică		45 000
1959	Tehnologia materialelor	G. Amza	80 000
12020	Dicţionar tehnic ilustrat francez-român	E. Ştefănuţă	150 000
12061	Introducere în electrochimia organică	E. Ungureanu	40 000

***Sediul Central*:**

R - 71341, Bucureşti, Piaţa Presei Libere nr.1
Tel: *224.36.66*
222.66.30
222.83.48
222.18.84
Fax: *224.21.64*

Depozit. Librărie. Anticariat

R - 70702, Bucureşti, str. Oteteleşanu nr.1
Tel: *313.98 43*; *Tel/Fax*: *315.88.66*; *310.39.53*

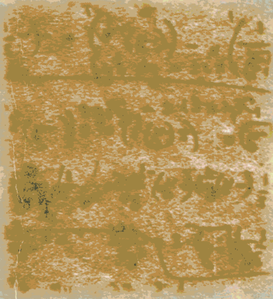
Cont (*în lei*): *30361801 BCR Sect. 1, Bucureşti, România*

Lucrarea își propune să prezinte într-o manieră cât mai naturală și accesibilă, însă fără a renunța la rigoarea matematică, noțiuni și rezultate fundamentale din teoria probabilităților și statistica matematică, ramuri ale matematicii solicitate în cele mai variate domenii.

Teoria probabilităților se bazează pe un aparat matematic foarte dezvoltat, bogat în concepte și rezultate care permit descrierea și investigarea fenomenelor aleatoare.

Statistica matematică reprezintă mulțimea procedeelor prin care se studiază proprietăți, caracteristici ale populațiilor numeroase, folosind instrumentul matematic în analiză și interpretare.

Teoria probabilităților constituie aparatul matematic de bază al statisticii matematice, permițând construirea logică a științei respective, și, în același timp, pune în evidență intervalul de aplicare a ei.



Universitaria

ISBN 973-31-1325-5 15000