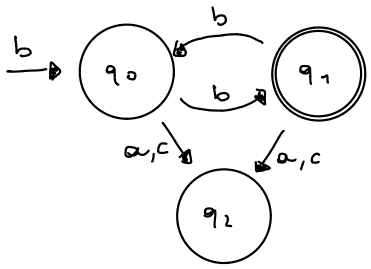
Esercizio

$L_m = \{ a^{3m} b^{2n} c^{4m \cdot n} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

- $L_0 = \{ b^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$. Il linguaggio contenente un numero pari di un carattere è regolare.



- $L_1 = \{ a^3 b^{2n} c^{4n} \}$. Ipotizzo che L_1 sia CF perché posso riconoscerlo con un automa a pila ma non con un automa a stati finiti in quanto ho bisogno di contare n elementi, ho quindi bisogno di una memoria dipendente dalla dimensione dell'input.

◦ Scrivo la grammatica per L_1.

$$P = \left[\begin{array}{l} S \to aaaA \\ A \to bbAcccc \mid \varepsilon \end{array} \right. \qquad G = \langle \{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$$

◦ Verifico che $L(G) = L_1$:

◦ Verifico che se $x \in L_1 \Rightarrow \exists\, S \to^* x$:

CASI BASE: - Per $|x| = 3 \Rightarrow x = a^3$. Per la definizione della grammatica $S \to a^3 A \to a^3$.

- Per $|x| = 9 \Rightarrow x = a^3 b^{2n} c^{4n}$. Per la definizione della grammatica $S \to a^3 A \to a^3 b^{2n} A c^{4n} \to a^3 b^{2n} c^{4n}$.

IPOTESI INDUTTIVA: $\forall x \mid |x| \leq K \Rightarrow \exists\, S \to^* x$.

PASSO INDUTTIVO: Prendo $x = a^3 b^{2n} c^{4n} \mid |x| = K$. Allora $\exists\, S \to^* a^3 b^{2n} c^{4n} = a^3 b^{2n-2} bbAcccc c^{4n-4}$.
Per la definizione della grammatica allora:
$S \to^* a^3 b^{2n-2} bbAcccc c^{4n-4} \to a^3 b^{2n-2} bbbbAcccccccc c^{4n-4} \to a^3 b^{2n-2} bbbbcccccccc c^{4n-4} = a^3 b^{2(n+1)} c^{4(n+1)} = y \in L_1 \mid y > K$.

- Verifico che se $S \xrightarrow{k} x \Rightarrow x \in L_1$.

CASI BASE: - Per $k=2 \Rightarrow S \xrightarrow{1} aaaA \xrightarrow{2} aaa \in L_1$.

- Per $k=3 \Rightarrow S \xrightarrow{1} aaaA \xrightarrow{2} aaabbAcccc \xrightarrow{3} aaabbcccc = a^3b^2c^4 \in L_1$.

IPOTESI INDUTTIVA: $\forall k \leq \gamma \Rightarrow$ se $S \xrightarrow{k} x \Rightarrow x \in L_1$.

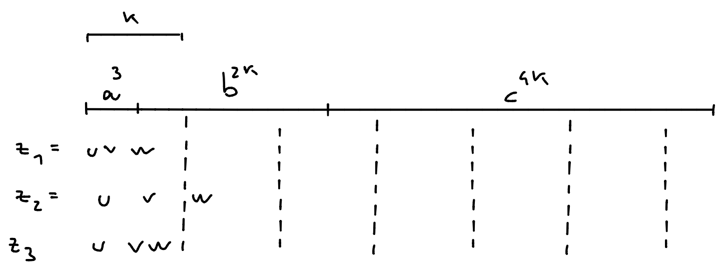
PASSO INDUTTIVO: So che $S \xrightarrow{k} a^3 b^{2n} c^{4n} = a^3 b^{2n-2} bbcccc\,c^{4n-4}$. Allora per la definizione della grammatica ho che:
$S \xrightarrow{k-1} a^3 b^{2n-2} bbAcccc\,c^{4n-4} \xrightarrow{k} a^3 b^{2n-2} bbbbAcccccccc\,c^{4n-4} \xrightarrow{k+1} a^3 b^{2n-2} bbbbcccccccc\,c^{4n-4} = a^3 b^{2(n+1)} c^{4(n+1)} \in L$.

- Ho verificato la correttezza della grammatica, quindi L_1 è CF.

- Devo verificare che L_1 non sia regolare.
Dimostro il PL Regolari negato.

Considero la stringa $z \in L_1 \mid n=k \Rightarrow z = a^3 b^{2k} c^{4k}$.
Ho che $|z| = 6k+3 > k$.

Considero ora le scomposizioni di z t.c. ① $z=uvw$ ② $|uv| \leq k$ ③ $|v| \geq 1$.
Devo verificare che per ognuna di queste scomposizioni $\exists i \in \mathbb{N} \mid uv^iw \notin L_1$.



→ Possibile per $k > 3$.

z_1: Per $i=2 \Rightarrow z = a^{3+|v|} b^{2k} c^{4k}$. Per la definizione del linguaggio $|a| = 3 \Rightarrow 3+|v| = 3 \Rightarrow |v| = 0$. Contraddizione con ③.

z_2: Per $i=2 \Rightarrow z = a^3 b^{2k+|v|} c^{4k}$. Per la definizione del linguaggio $|c| = 2|b| \Rightarrow 4k = 2(2k+|v|) = 4k + 2|v| \Rightarrow |v| = 0$. Contraddizione con ③.

z_3: Se v sta a cavallo tra le a e le b $\forall i \in \mathbb{N} \mid i > 1$ avrò che il pompaggio modifica la struttura della stringa facendomi quindi uscire dal linguaggio.
Per esempio $z = a^3 v b^{2k} c^{4k}$ per $v = abb$ e $i=2 \Rightarrow z = a^3 abbabb\, b^{2k} c^{4k} \notin L_1$.

- Ho verificato che L_1 non è regolare.

• $L_2 = \{ a^6 b^{2n} c^{8n} \mid n \in \mathbb{N} \}$. Rispetto a L_1 ho solo un diverso rapporto tra $|b|$ e $|c|$, per il resto strutturalmente i linguaggi sono analoghi.

◦ Scrivo la grammatica di L_2:

$$P = \begin{bmatrix} S \to a^6 A \\ A \to b^2 A c^8 \mid \varepsilon \end{bmatrix} \qquad G = \langle \{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S \rangle$$

◦ Le dimostrazioni che $L(G) = L_2$ e che L_2 non è regolare sono analoghe a quelle viste per L_1.

Allora L_m è regolare per $m = 0$, CF per $m > 0$.

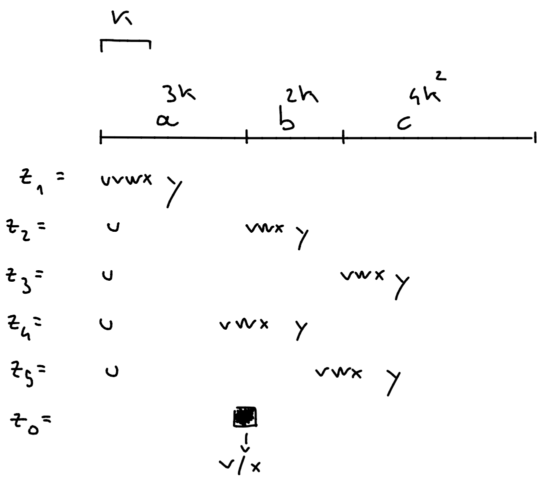
$M = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L_m = \{ a^{3m} b^{2n} c^{4mn} \mid m, n \in \mathbb{N} \}$. Ipotizzo che M sia non CF in quanto presenta l'indice mn non lineare.

• Verifico che M non sia CF dimostrando il PL CF negato:

Considero $z \in M \mid m = n = k \Rightarrow z = a^{3k} b^{2k} c^{4k^2} \Rightarrow |z| = 4k^2 + 5k \geq k$.

Considero le scomposizioni di z t.c. ① $z = uvwxy$ ② $|vwx| \leq k$ ③ $|vx| \geq 1$.
Devo dimostrare che per ognuna di queste scomposizioni $\exists i \in \mathbb{N} \mid z = uv^iwx^iy \notin M$.

Posso raggruppare le scomposizioni nei seguenti casi:



◦ Raggruppo tutti i casi in cui v o x si trovano a cavallo di due porzioni della stringa in quanto ci sono due possibili casi:
- v/x che è a cavallo $= 0 \Rightarrow$ l'altra sottostringa deve essere ≥ 1 per il vincolo $|vx| \geq 1$ quindi ci si riconduce ad un altro dei casi esaminati.
- v/x che è a cavallo $\neq 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \mid i > 1$ la stringa viene modificata strutturalmente.
Esempio già visto per il PL Regolari nel primo punto dell'esercizio.

z_1: Per $i=2 \Rightarrow z = a^{3k+|vx|} b^{2k} c^{4k^2}$. Per la definizione di M $|c| = 4 \cdot \frac{|a|}{3} \cdot \frac{|b|}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2 = 4 \cdot \left(k + \frac{|vx|}{3}\right) k = 4k^2 + \frac{4}{3}|vx| \Rightarrow |vx| = 0$. Contraddizione con ③.

z_2: Per $i=2 \Rightarrow z = a^{3k} b^{2k+|vx|} c^{4k^2}$. Analogo a z_1.

z_3: Per $i=2 \Rightarrow z = a^{3k} b^{2k} c^{4k^2+|vx|}$. Analogo a z_1.

z_4: Per $i=2 \Rightarrow z = a^{3k+|v|} b^{2k+|x|} c^{4k^2}$. Per la definizione di M $|c| = 4 \cdot \frac{|a|}{3} \cdot \frac{|b|}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2 = 4 \cdot \left(k + \frac{|v|}{3}\right) \cdot \left(k + \frac{|x|}{2}\right) = 4k^2 + 2k|x| + \frac{4}{3}k|v| + \frac{2}{3}|v| \cdot |x| \Rightarrow |v| = 0 \wedge |x| = 0 \Rightarrow |vx| = 0$.

Contraddizione con ③.

z_5: Per $i=2 \Rightarrow z = a^{3k} b^{2k+|v|} c^{4k^2+|x|}$. Per la definizione della grammatica $|c| = 4 \cdot \frac{|a|}{3} \cdot \frac{|b|}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4k^2 + |x| = 4 \cdot k \cdot \left(k + \frac{|v|}{2}\right) = 4k^2 + 2k|v| \Rightarrow |x| = 2k|v| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ - $|v| = 0 \wedge |x| = 0 \Rightarrow |vx| = 0$. Contraddizione con ③.

- $|v| \geq 1 \Rightarrow |x| \geq k$. Nel caso $|v|$ minimo: $v = 1 \wedge x = k \Rightarrow |vx| > k$. Contraddizione con ②.

- Ho quindi verificato che M è non CF.

$N = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} L_m = \emptyset$. Regolare.