-Formule Segnali

ENERGIA DI UN SEGNALE

$$E_f = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ |f(t)|^2\, dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = f^*(t)\, f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

s

POTENZA MEDIA DI UN SEGNALE

$$P_f = \begin{cases} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2(t)dt & \text{se } f \in \mathbb{R} \\ \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad \text{con } |f(t)|^2 = f^*(t)\, f(t), & f \in \mathbb{C} \end{cases}$$

- CROSS-CORRELAZIONE

  Dati $f_1(t), f_2(t)$ segnali continui, $t \in \mathbb{R}$

  il segnale di cross-correlazione è

$$f_1 \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(\tau)\, f_2(\tau + t)d\tau$$

- $f_1^*(\tau)$ complesso coniugato
- $f_1^*(\tau) \rightarrow f_1(\tau)$ se f_1 è reale (maggior parte dei casi che vedremo)
- con t=0 si ha *l'integrale di cross-correlazione*

- CROSS-CORRELAZIONE NORMALIZZATA
- Serve per trattare segnali con range di valori diversi

$$f_1 \overline{\otimes} f_2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(\tau)\, f_2(\tau + t)d\tau}{\sqrt{E_{f_1} E_{f_2}}}$$

  dove E_f indica l'*energia* del segnale f

- Quando $f_1 = f_2$ si parla di *autocorrelazione* (normalizzata e non)

- Nel caso di segnali discreti, dati $x_1(n), x_2(n)$

$$x_1 \otimes x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1^*(k) x_2(k+n) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Nel caso 2D (immagini) x_1 ed x_2 sono solitamente segnali digitali ad intervallo limitato, e la correlazione diventa

$$x_1 \otimes x_2(n,m) = \sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} x_1(u,v) x_2(n+u, m+v)$$

- Per questo motivo, si introduce la *cross correlazione normalizzata per 2D*

$$x_1 \otimes x_2(n,m) = \frac{\sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} [x_1(u,v) - \bar{x}_1][x_2(n+u, m+v) - \bar{x}_2]}{\sqrt{\sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} [x_1(u,v) - \bar{x}_1]^2 \sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} [x_2(u,v) - \bar{x}_2]^2}}$$

- In pratica, fissato il punto di applicazione n,m, sottraggo la media ad ogni punto nell'intorno di applicazione definito dalla matrice kernel
- divido per il prodotto della varianza dei due segnali, estraendo a radice alla fine

----

--+++

- CONVOLUZIONE
  - "Parente stretto" della cross-correlazione
  - Dati $f_1(t)$, $f_2(t)$ segnali continui di variabile reale, l'integrale di convoluzione è

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

- Nel caso 2D (immagini) x_1 ed x_2 sono solitamente segnali digitali ad intervallo limitato, e la convoluzione diventa

$$x_1 * x_2(n,m) = \sum_{u=-k}^{+k} \sum_{v=-k}^{+k} x_1(u,v) x_2(n-u, m-v)$$

- Nel caso di segnali discreti, dati $x_1(n)$, $x_2(n)$

$$x_1 * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(k-n) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

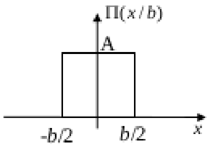
Funzione box e impulso di Dirac

- Funzione box (su x continuo e reale):

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & -0.5 \le x \le 0.5 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

- Funzione box generica:

$$A\Pi(x/b) \qquad x \in [-b/2,\, b/2]$$

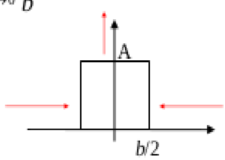


- Si consideri il sottoinsieme

$$\left\{ A\Pi(x/b) : \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi(x/b)dx = 1 \right\} \quad \text{con } A = 1/b$$

- Si definisce $\delta(x)$ funzione generalizzata o impropria come:

$$\delta(x) = \lim_{b\to 0} \frac{1}{b}\Pi(x/b) \quad \text{col vincolo} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$



- Impulso unitario

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \ne 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

- Il vincolo integrale rende l'impulso associabile ad una distribuzione probabilistica
- Impulso traslato (sposto l'impulso su x_0)

$$\delta(x - x_0) = \lim_{b\to 0} \frac{1}{b}\Pi\left(\frac{x - x_0}{b}\right)$$

- Proprietà dell'impulso

1) $\delta(x-x_0)=0 \quad \forall x \neq x_0$

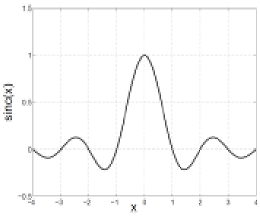
2) Data f funzione generica (proprietà di *setacciamento*) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dt = f(x_0)$

3) $\delta(x-x_0)=\delta(x_0-x) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

4) $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, fissato $a \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$

Funzione sinc

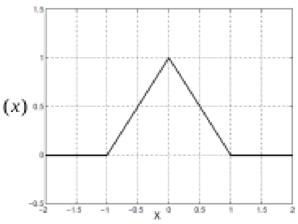
$$\operatorname{sinc}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



- Caratteristiche
  - intersezioni asse x in 1,2,3…
  - $\lim_{t\to\pm\infty} \operatorname{sinc}(t)=0$
- Funzione cruciale per l'analisi tempo/frequenza
- Strettissimo legame con la funzione box

Funzione triangolo

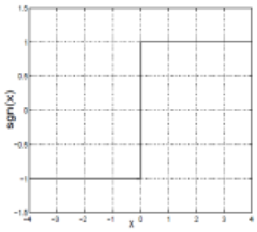
$$\Lambda(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$



- Importante nell'analisi spettrale e per le operazioni di convoluzione

Funzione segno

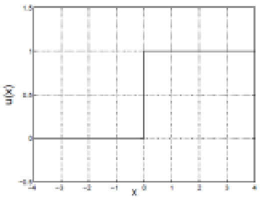
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ +1, & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



- Ribalta segnali sopra/sotto l'asse x

Funzione gradino

$$u(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$



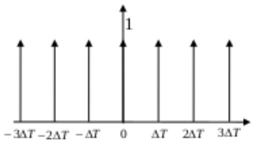
- rappresenta un segnale che si attiva a partire da un tempo specificato e rimane attivo indefinitamente
- Da non confondersi con la funzione segno

esercizi alla lavagna Q 4-5-6

Treno di impulsi

- Il treno di impulsi $s_{\Delta T}(x)$ è la somma di un numero infinito di impulsi periodici discreti distanziati di una quantità ΔT

$$s_{\Delta T}(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n\Delta T) \qquad n\in\mathbb{Z}$$



SERIE DI FOURIER

- Una funzione f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di variabile continua t, periodica di periodo T, può essere espressa come:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z} \qquad (1, \mathit{sintesi})$$

i.e., una sommatoria di esponenziali complesse di frequenza *multiple* rispetto a quella fondamentale $(2\pi/T)$ moltiplicate per i coefficienti $c_n \in \mathbb{C}$, dove:

$$c_n \in \mathbb{C} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \quad \text{per } n \in \mathbb{Z} \qquad (2, \mathit{analisi})$$

TRASFORMATA DI FOURIER

- Sia *f(t)* segnale reale continuo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *anche non periodico*, si chiama trasformata di Fourier (TdF) $\mathfrak{F}(f(t))$ = F(μ) il segnale $\mathfrak{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathfrak{F}\big(f(t)\big) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- L'unità frequenziale μ è l'analogo di *n/T* della serie di Fourier
- La TdF esiste se f(t) è segnale di energia (condizione sufficiente, altri segnali ammettono TdF)

TRASFORMATA DI FOURIER INVERSA

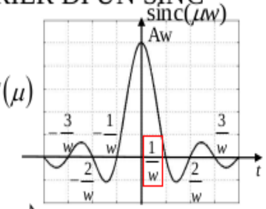
- Sia $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definisce trasformata di Fourier inversa il segnale $\mathfrak{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t)$

$$\mathfrak{F}^{-1}(F(\mu)) = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

- In pratica, la TdF restituisce, per una data frequenza μ, un coefficiente di "presenza" $F(\mu)$
- La $\mathfrak{F}^{-1}$ permette di ricostruire f a partire da F

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SINC

$$\mathfrak{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(tw) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$



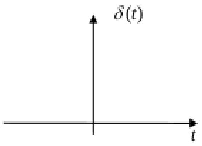
$$f(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\mu) \qquad \Pi(t/w) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \operatorname{sinc}(\mu w)$$

$$F(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} f(-\mu) \qquad \operatorname{sinc}(tw) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \Pi(-\mu/w) = \Pi(\mu/w)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN IMPULSO

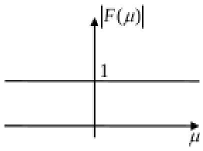
$$\mathfrak{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(0) e^{-j2\pi\mu 0} dt = 1$$



Ricordando che:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

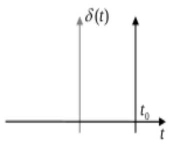


E' una costante $\in \mathbb{R}$
→ho solo lo *spettro di ampiezza*!

- In maniera analoga con impulso centrato in t_0

$$\mathfrak{F}(f(t)) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

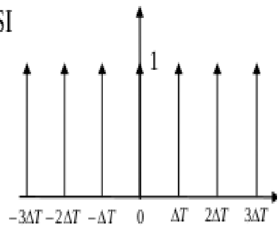
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi\mu t} dt$$
$$= e^{-j2\pi\mu t_0}$$



TRASFORMATA DI FOURIER DI UN TRENO DI IMPULSI

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathfrak{F}(s_{\Delta t}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\Delta t}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = F(\mu)$$



- Osservando che $s_{\Delta T}(t)$ è periodica, uso la serie di Fourier per rappresentarla

$$\left(f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \right)$$

- determino c_n

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

$$= \frac{1}{\Delta T}$$

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

- Ho una forma alternativa per il treno di impulsi
- Un'esponenziale complessa con cui ho già lavorato (slide17)

$$e^{j2\pi t t_0} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(\mu - t_0)$$

- Uso la linearità (mi dimentico della sommatoria per ora e dello scalare)
- Uso il risultato di dualità di slide 17 e ottengo

$$e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

- da cui

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

$$\Big\downarrow \mathfrak{F}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta T} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DELLA CONVOLUZIONE (fondamentale!)

$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}(f * h(t)) &= F(\mu) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [f * h(t)] e^{-j2\pi\mu t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j2\pi\mu t} dt \right] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) H(\mu) e^{-j2\pi\mu\tau} d\tau \\
&= H(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j2\pi\mu\tau} d\tau \\
&= H(\mu) \cdot F(\mu)
\end{aligned}
$$

- Matematicamente, campionare un segnale significa *moltiplicarlo per un treno di impulsi*

$$\tilde{f}(t) = f(t) \cdot s_{\Delta T}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$

$f(t)s_{\Delta T}(t)$

TRASFORMATA DI FOURIER A TEMPO-DISCRETO

- Sia $F(\mu)$ la trasformata di Fourier di un segnale $f(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ora considero $\tilde{f}(t)$ e voglio calcolarne la trasformata di Fourier $\tilde{F}(\mu)$
- Attraverso il teorema della convoluzione so che:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(\mu) &= \mathfrak{F}\{\tilde{f}(t)\} \\
&= \mathfrak{F}\{f(t) \cdot s_{\Delta t}(t)\} \\
&= F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu)
\end{aligned}
$$

- dove so che $S_{\Delta t}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$

- la convoluzione in frequenza si risolve come segue:

$$
\begin{aligned}
F(\mu) * S_{\Delta t}(\mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot S_{\Delta t}(\mu - \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T} - \tau\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \cdot \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T} - \tau\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)
\end{aligned}
$$

A questo punto, devo antitrasformare la copia ritagliata per arrivare al segnale *f(t)*

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{F(\mu)\} \\
&= \mathfrak{F}^{-1}\{H(\mu)\cdot \tilde{F}(\mu)\} \\
&= h(t) * \tilde{f}(t)
\end{aligned}
$$

si può dimostrare (lo faremo come esercizio)

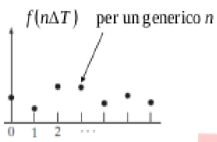
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T)\operatorname{sinc}[(t-n\Delta T)/n\Delta T]$$

Quindi ho due formulazioni, equivalenti, per la DTFT:

$$\tilde{F}(\mu)=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

$$\tilde{F}(\tilde{\mu})=\tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n} \qquad m=0,\ldots,M-1$$

$$\tilde{F}\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right)=F\left(\frac{m}{M}\frac{1}{\Delta T}\right)=F_m=\sum_{n=0}^{M-1}f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}$$



<u>TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA INVERSA</u>

$$\tilde{f}(n\Delta T)=f(n\Delta T)=f_n=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}F_m e^{j2\pi\frac{m}{M}n}$$

Da 1D a 2D: osservazioni

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n}$$
$$= \sum_{n=0}^{M-1} f_n \left[\cos\left(2\pi\frac{m}{M}n\right) - j\sin\left(2\pi\frac{m}{M}n\right)\right]$$

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi\frac{m}{M}n} \rightarrow F_u = F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi\frac{u}{M}x}$$

- Passo al 2D

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}$$

$$F(u,v) \stackrel{\mathfrak{F}}{=} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}$$
$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) B^{(u,v)}(x,y) = I \cdot B^{(u,v)}$$

Risposta di I all'immagine *(complessa)* base (u,v)

Immagine (complessa) base che [funzione di (u,v)

– Se r_k è il k-esimo livello di grigio, k=0,…,L-1 e $H(r_k)$ il corrispondente conteggio dato dall'istogramma dell'immagine di dimensioni MxN, posso definire

$$p_r(r_k) = \frac{H(r_k)}{MN}$$

– L'equalizzazione dell'istogramma è la seguente funzione T, con s_k k-esimo valore di grigio in cui si mappa r_k:

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_k)$$

somma cumulativa o *funzione di ripartizione probabilistica*

$$= \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} H(r_j) = \frac{\sum_{j=0}^{k} H(r_j)}{\frac{MN}{(L-1)}}$$

(chiarimento del significato di questa formula alla lavagna)

Alcune proprietà DFT 2D

TRASLAZIONE

$$g(x,y) = f(x - x_0, y - y_0)$$

$$G(u,v) = F(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0\right)}$$

$$g(x,y) = f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{u}{M}x_0 + \frac{v}{N}y_0\right)}$$

$$G(u,v) = f(u - u_0, v - v_0)$$

ROTAZIONE

$$\mathfrak{F}(f_\theta)(u,v) = \mathfrak{F}(f)_\theta(u,v)$$

- la TdF di una immagine a cui è stata applicata una rotazione θ porterà ad una immagine di trasformata ruotata di un angolo θ