Algebra - un'introduzione

Davide Borra* - UniTN

9 novembre 2022

Indice

v. 0.1

*davide.borra@studenti.unitn.it

1 Un'introduzione formale

1.1 Insiemi e relazioni

DEF (Insieme)**.** *Si dice insieme una collezione X di oggetti, detti elementi dell'insieme. Si scrive $x \in X$.*

DEF (Prodotto cartesiano)**.** *Siano X, Y insiemi. Si definisce prodotto cartesiano di X e Y l'insieme delle coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene a X e il secondo appartiene a Y*

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

DEF (Relazione)**.** *Sia X un insieme. Si definisce relazione un insieme $R \subseteq X \times X$*

Proprietà delle relazioni Una relazione può soddisfare 4 proprietà:

(R) Riflessiva: $(x, x) \in R \forall x \in X$

(S) Simmetrica: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

(A) Antisimmetrica: $(x, y) \in R, (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

(T) Transitiva: $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

1.1.1 Relazioni di equivalenza

DEF (Relazione di equivalenza)**.** *Una relazione si dice relazione di equivalenza se soddisfa le proprietà riflessiva, transitiva e simmetrica.*

- Notazione: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \sim y$

Una piccola postilla sulla notazione: qui ho specificato come notazione standard il simbolo $\sim$, ma a volte si usano anche altri simboli $\equiv$ e $\simeq$. Rimane il fatto che sono simboli, per cui l'utilizzo di un preciso simbolo non comporta automaticamente una specifica relazione, che andrà definita caso per caso.

DEF (Classi di equivalenza)**.** *Siano X un insieme, $\sim$ una relazione di equivalenza e $x \in X$. Si definisce **classe di equivalenza di** x l'insieme*

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

Proprietà:

- $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

  Dimostrazione.

  1. $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$
     Si assume $x \sim y$. Preso $z \in [x]$, allora per definizione $z \sim x$. Per la proprietà transitiva segue che $z \sim y$, da cui $z \in [y]$. Preso $z \in [y]$, allora per definizione $z \sim y$. Per la proprietà simmetrica $y \sim x$. Di conseguenza per la proprietà transitiva $z \sim x$, da cui $z \in [x]$.
     Quindi $[x] = [y]$.
  2. $[x] = [y] \Rightarrow x \sim y$
     Per definizione di classe di equivalenza $x \in [x]$. Siccome $[x] = [y]$, $x \in [y]$. Allora per definizione di classe, $x \sim y$.

QED

- $x \nsim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$ (classi di equivalenza disgiunte)

  Dimostrazione. Passo alla contronominale $[x] \cap [y] \neq \varnothing \Rightarrow x \sim y$. Affermare che due insiemi non sono disgiunti significa affermare che hanno un elemento z in comune $\exists z \in [x] : z \in [y]$, di conseguenza per definizione $z \sim x$ (per [R] $x \sim z$) e $z \sim y$. Di conseguenza per la proprietà transitiva, la tesi. QED