

# Analisi 1

DAVIDE BORRA



# Indice

<b>1</b>	<b>Limiti</b>	<b>1</b>
1.1	Intervalli in $\mathbb{R}$	1
1.1.1	Intorni	1
1.1.2	Insiemi limitati e illimitati, maggiorante, minorante, estremi, massimo, minimo.	1
1.1.3	Punti di accumulazione e punti isolati	3
1.2	Definizione di limite	4
1.2.1	Asintoti	6
1.3	Continuità	6
1.4	Primi teoremi sui limiti	6
1.4.1	Teorema di unicità del limite	7
1.4.2	Teorema di permanenza del segno	7
1.4.3	Teorema del confronto (o dei due carabinieri)	8
1.5	Calcolo dei limiti	9
1.5.1	Funzioni continue e funzioni elementari	9
1.5.2	Algebra dei limiti	9
1.5.3	Mediante il teorema del confronto	10
1.5.4	Forme di indecisione (o forme indeterminate)	10
1.5.5	Limiti Notevoli	14
1.6	Limiti e parametri	17
1.7	Continuità e discontinuità	18
1.7.1	Discontinuità di prima specie o di salto	18
1.7.2	Discontinuità di seconda specie	18
1.7.3	Discontinuità di terza specie o eliminabili	18
1.7.4	Continuità e funzioni inverse	19
1.8	Teoremi sulle funzioni continue	20
1.8.1	Teorema di Weistrass	20
1.8.2	Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)	20
1.8.3	Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)	20
<b>2</b>	<b>Derivate</b>	<b>21</b>
2.1	Definizione	21
2.1.1	Problema classico	22
2.1.2	Calcolo della derivata mediante definizione	22
2.2	Derivate fondamentali	23
2.2.1	Funzione costante	23
2.2.2	Funzione identità	23
2.2.3	Funzione potenza	23
2.2.4	Funzione seno	24
2.2.5	Funzione coseno	24
2.2.6	Funzione esponenziale	24
2.2.7	Funzione logaritmo	25
2.3	Operazioni con le derivate	25
2.3.1	Linearità rispetto al prodotto	25
2.3.2	Linearità rispetto alla somma	25
2.3.3	Derivata del prodotto	25
2.3.4	Derivata del rapporto	26
2.3.5	Derivata della funzione composta (chain rule)	26
2.4	Derivate notevoli /2	27
2.4.1	Funzione tangente	27

2.4.2	Funzione cotangente . . . . .	27
2.5	Legame tra continuità e derivabilità . . . . .	27
2.5.1	Continuità delle funzioni derivabili . . . . .	27
2.5.2	Studi di continuità e derivabilità . . . . .	28
2.6	Punti di non derivabilità . . . . .	29
2.6.1	Punto angoloso . . . . .	29
2.6.2	Cuspide . . . . .	29
2.6.3	Flesso a tangente verticale . . . . .	30
2.6.4	Punto a tangente verticale . . . . .	30
2.7	Criterio di derivabilità . . . . .	30
2.8	Operazioni con le derivate /2 . . . . .	31
2.8.1	Derivata della funzione inversa . . . . .	32
2.9	Derivate notevoli /3 . . . . .	33
2.9.1	Funzione arcoseno . . . . .	33
2.9.2	Funzione arcocoseno . . . . .	33
2.9.3	Funzione arcotangente . . . . .	33
2.9.4	Funzione arcocotangente . . . . .	34
2.10	Il differenziale . . . . .	34
2.10.1	Un'applicazione del differenziale . . . . .	35
2.11	Teoremi del calcolo differenziale . . . . .	35
2.11.1	Teorema di Fermat . . . . .	35
2.11.2	Teorema di Rolle . . . . .	36
2.11.3	Teorema di Lagrange . . . . .	37
2.11.4	Conseguenze del teorema di Lagrange . . . . .	38
2.11.5	Teorema di Cauchy . . . . .	38
2.11.6	Teorema di De l'Hôpital . . . . .	39
2.12	Studio della derivata . . . . .	40
2.12.1	Punti di massimo relativo . . . . .	40
2.12.2	Punti di minimo relativo . . . . .	40
2.12.3	Punti di flesso a tangente orizzontale . . . . .	40
2.13	Derivata seconda e flessi a tangente obliqua . . . . .	41
2.14	Problemi di ottimizzazione . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Studio di funzione completo</b>	<b>43</b>
3.1	Traccia per lo studio di funzione completo . . . . .	43
3.1.1	Classificazione . . . . .	43
3.1.2	Dominio . . . . .	43
3.1.3	Simmetrie . . . . .	43
3.1.4	Intersezioni con gli assi cartesiani . . . . .	43
3.1.5	Studio del segno . . . . .	43
3.1.6	Limiti, asintoti e discontinuità . . . . .	44
3.1.7	Derivata prima . . . . .	44
3.1.8	Derivata seconda . . . . .	45
3.1.9	Estremi globali . . . . .	45
3.2	Esempi . . . . .	45
3.3	Esercizi . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Soluzioni degli esercizi</b>	<b>51</b>

This work is licensed under CC BY-NC-ND 4.0. To view a copy of this license, visit  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



# Capitolo 1

## Limiti

### 1.1 Intervalli in $\mathbb{R}$

**DEF.** Un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  si dice **intervallo** se corrisponde ad una semiretta (**illimitato**) o ad un segmento (**limitato**) della retta reale

Inoltre:

- si dice **chiuso** se gli estremi sono inclusi nell'intervallo;
- si dice **aperto** se gli estremi sono esclusi nell'intervallo.

Gli intervalli limitati corrispondono a segmenti di retta reale di estremi  $a$  e  $b$  ( $b > a$ ), lunghezza  $b - a$  (detta **ampiezza** dell'intervallo), **centro**  $\frac{b+a}{2}$  e **raggio**  $\frac{b-a}{2}$ .

#### 1.1.1 Intorni

**DEF.** Dato numero reale  $x_0$ , un intorno completo di  $x_0$  è un qualunque intervallo aperto contenente  $x_0$

$$I(x_0) = ]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[ \quad (\text{con } \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_0^+)$$

- **Intorno destro:**  $I^+(x_0) = ]x_0; x_0 + \delta[$
- **Intorno sinistro:**  $I^-(x_0) = ]x_0 - \delta; x_0[$

#### Intorni circolari

**DEF.** Dati un numero reale  $x_0$  e un numero reale positivo  $\delta$ , un intorno circolare di  $x_0$  di raggio  $\delta$  è l'intervallo aperto  $I_\delta(x_0)$  di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$

$$I_\delta(x_0) = ]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

#### Intorni di $\infty$

**DEF.** Dati due numeri reali  $a$  e  $b$  con  $a < b$  si definisce

- **intorno di  $-\infty$**  un qualsiasi intervallo illimitato inferiormente  $] - \infty; a[$
- **intorno di  $+\infty$**  un qualsiasi intervallo illimitato superiormente  $]b; +\infty[$
- **intorno di  $\infty$**  l'unione di un intorno di  $-\infty$  e di un intorno di  $+\infty$ :  $] - \infty; a[ \cup ]b; +\infty[$

#### 1.1.2 Insiemi limitati e illimitati, maggiorante, minorante, estremi, massimo, minimo.

È possibile definire come limitati/illimitati anche insiemi che non sono intervalli.

**DEF** (Insiemi limitati). Un insieme  $X \subseteq R$  non vuoto è detto

- **superiormente limitato** se è possibile determinare un qualsiasi numero reale  $\alpha$  tale che  $\forall x \in X, x \leq \alpha$ .  $\alpha$  è detto **maggiorante** di  $X$ .
- **inferiormente limitato** se è possibile determinare un qualsiasi numero reale  $\beta$  tale che  $\forall x \in X, x \geq \beta$ .  $\beta$  è detto **minorante** di  $X$ .
- **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

**DEF** (Insiemi illimitati). Un insieme  $X \subseteq R$  non vuoto è detto

- **superiormente illimitato** se  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists x \in X : x > \alpha$
- **inferiormente illimitato** se  $\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists x \in X : x < \beta$
- **illimitato** si è illimitato sia inferiormente che superiormente.

Se un insieme è limitato superiormente/inferiormente è possibile definire minimo e massimo è possibile quindi definire massimo e minimo di un insieme (attenzione, non è detto che tutti gli insiemi limitati ammettano massimo/minimo.)

**DEF** (Massimo). Dati un insieme  $X \subseteq R$  e un numero reale  $M$ , esso si dice **massimo** di  $X$  se

- i)  $\forall x \in X, M \geq x$  (è maggiorante)      ii)  $M \in X$  (appartiene all'insieme).

Si indica  $M = \max X$ .

**DEF** (Minimo). Dati un insieme  $X \subset \mathbb{R}$  e un numero reale  $m$ , esso si dice **minimo** di  $X$  se

- i)  $\forall x \in X, m \leq x$  (è minorante)                      ii)  $m \in X$  (appartiene all'insieme)

Si indica  $M = \min X$ .

Tuttavia non è possibile determinare massimo e minimo per, ad esempio, intervalli aperti. Abbiamo quindi bisogno di qualcos'altro che funzioni sempre, definiamo quindi gli estremi inferiore e superiore di un insieme.

**DEF** (Estremo superiore). Dato un insieme  $X$  superiormente limitato, si dice **estremo superiore** di  $X$  il minimo dei suoi maggioranti

$$\inf X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ è maggiorante di } X\}$$

Se  $X$  è superiormente illimitato, si definisce  $\sup X = +\infty$ .

**Caratterizzazione di  $\sup X$**  Si dimostra che la seguente definizione di  $\sup$  è equivalente alla precedente: dato un insieme  $X$  superiormente limitato, un numero reale  $M$  si dice estremo superiore di  $X$  se e solo se

- i)  $\forall x \in X, M \geq x$  (è maggiorante)
- ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > M - \varepsilon$  (è il minore dei maggioranti)

**DEF** (Estremo inferiore). Dato un insieme  $X$  inferiormente limitato, si dice **estremo inferiore** di  $X$  il massimo dei suoi minoranti

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ è minorante di } X\}$$

Se  $X$  è inferiormente illimitato, si definisce  $\inf X = -\infty$ .

**Caratterizzazione di  $\inf X$**  Si dimostra che la seguente definizione di  $\inf$  è equivalente alla precedente: dato un insieme  $X$  inferiormente limitato, un numero reale  $m$  si dice estremo inferiore di  $X$  se e solo se

- i)  $\forall x \in X, m \leq x$  (è minorante)
- ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x < m + \varepsilon$  (è il maggiore dei minoranti)

### 1.1.3 Punti di accumulazione e punti isolati

**DEF (Punto isolato).** Sia  $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ , allora  $x_0$  si definisce punto isolato di  $X$  se esiste un intorno  $I(x_0)$  che non contiene altri elementi di  $X$ .

**DEF (Punto di accumulazione).** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ , allora  $x_0 \in \mathbb{R}$  si definisce punto di accumulazione di  $X$  se ogni intorno completo  $I(x_0)$  contiene altri infiniti elementi di  $X$ , **equivalentemente** se ogni intorno completo  $I(x_0)$  contiene almeno un altro elemento di  $X$ .

**DEF (Insieme derivato).** Dato un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$ , si definisce **insieme derivato** di  $A$ , l'insieme  $DA$  contenente tutti e soli i suoi punti di accumulazione.

#### Esempio 1.1.1.

Dato l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

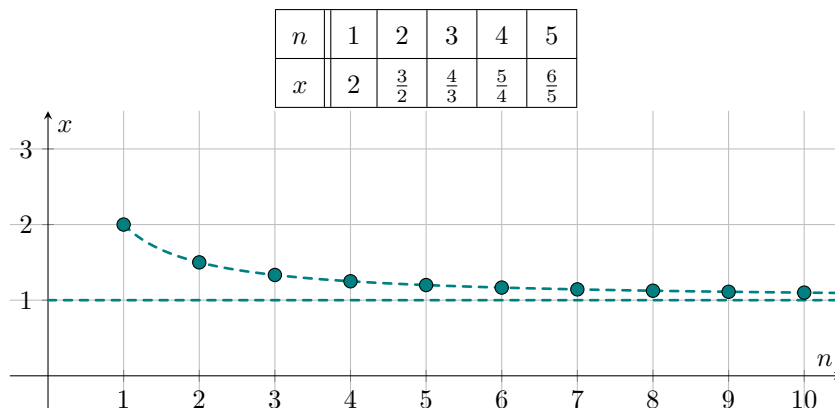
- a) precisare se è limitato,
- b) rappresentarlo graficamente,
- c) determinare  $\sup A$  e  $\inf A$ , specificando se sono massimo e minimo,
- d) indicare punti di accumulazione e punti isolati.

- a) Cominciamo espandendo alcuni elementi dell'insieme

$$A = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots \right\}$$

Osserviamo facilmente che è limitato inferiormente superiormente

- b) Anche qui calcoliamo i primi elementi, in modo da poterli rappresentare:



- c) Dal disegno si vede chiaramente che

$$\sup A = 2 = \max A,$$

inoltre osserviamo che

$$x = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

quindi

$$\inf A = 1 \quad \nexists \min A$$

- d) Osserviamo che qualsiasi punto dell'insieme consideriamo esiste un suo intorno (ad esempio l'intorno circolare di raggio  $\frac{1}{2}$ ), per cui tutti i punti dell'insieme sono punti isolati. Osserviamo inoltre che i punti si "addensano" intorno a 1, per cui ogni intorno di 1 contiene almeno un punto dell'insieme, per cui  $x = 1$  è un punto di accumulazione per l'insieme  $A$ .

## 1.2 Definizione di limite

**DEF** (Definizione unificata di limite). Sia  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  punto di accumulazione per  $X$ , allora  $l \in \mathbb{R}^*$  si dice limite per  $x$  che tende a  $x_0$  di  $f(x)$  e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \left( f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \right)$$

se

$$\forall I(l) \exists I(x_0) : f(x) \in I(l) \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Definiamo inoltre i limiti destro e sinistro, che si ottengono sostituendo nella definizione precedente a  $I(x_0)$ ,

$$\text{Limite sinistro: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \quad I^-(x_0)$$

$$\text{Limite destro: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad I^+(x_0)$$

Analogamente definiamo i limiti per eccesso e per difetto, che si ottengono sostituendo nella definizione precedente a  $I(l)$ ,

$$\text{Limite per eccesso: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+ \quad I^+(l)$$

$$\text{Limite per difetto: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^- \quad I^-(l)$$

Vediamo ora qualche applicazione delle definizioni di limite a casi particolari:

- Limite  $+\infty$  per  $x \rightarrow x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

- Limite finito per  $x \rightarrow +\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in ]c, \infty[$$

- Limite  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0 \exists c > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in ]c, \infty[$$

- Limite finito per  $x \rightarrow x_0$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

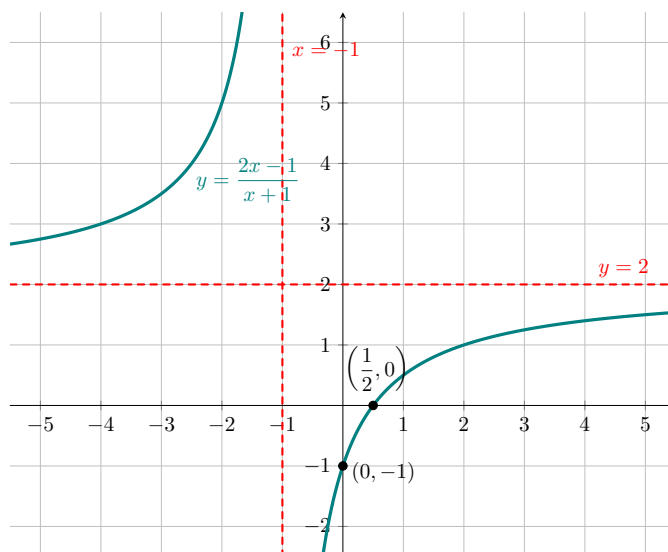
### Esempio 1.2.1.

Verificare il seguente limite mediante definizione:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$



Cominciamo determinando il dominio:  $\text{dom } f = x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ . Ora rappresentiamo il grafico della funzione, osserviamo che si tratta di un'omografica con asintoti  $y = 2$  e  $x = -1$ :



Recuperiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I(-\infty) : \left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I(-\infty)$$

e svolgiamo la disequazione.

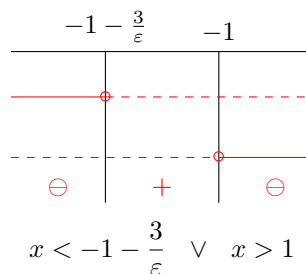
$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| < \varepsilon \\ x \neq -1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\cancel{2x}-1-\cancel{2x}-2}{x+1} \right| < \varepsilon \\ x \neq -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{x+1} < \varepsilon \\ -\frac{3}{x+1} > -\varepsilon \\ x \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3-\varepsilon x - \varepsilon}{x+1} < 0 \\ \frac{-3+\varepsilon x + \varepsilon}{x+1} > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right.$$

Separando le due disequazioni

$$\text{I) } \frac{-3-\varepsilon x - \varepsilon}{x+1} < 0$$

$$\begin{array}{ll} -3-\varepsilon x - \varepsilon > 0 & x < -1 - \frac{3}{\varepsilon} \\ x+1 > 0 & x > -1 \end{array}$$



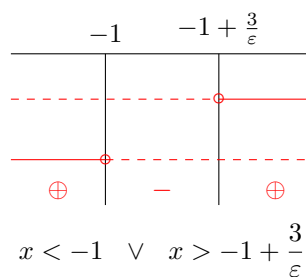
$$\text{II) } \frac{-3+\varepsilon x + \varepsilon}{x+1} > 0$$

$$-3 + \varepsilon x + \varepsilon > 0$$

$$x + 1 > 0$$

$$x > -1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

$$x > -1$$



In conclusione

$$\begin{cases} x < -1 - \frac{3}{\varepsilon} \vee x > 1 \\ x < -1 \vee x > -1 + \frac{3}{\varepsilon} \\ x \neq -1 \end{cases} \quad x < -1 - \frac{3}{\varepsilon} \vee x > -1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

Che contiene un intorno di  $-\infty$ ,  $I(-\infty) = ]-\infty, -1 - \frac{3}{\varepsilon}[$ . Il limite è quindi verificato.

### 1.2.1 Asintoti

Tipologia	Condizioni	Asintoto
Asintoto verticale	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$	$x = x_0$
Asintoto orizzontale	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$	$y = l$
Asintoto obliquo	CN: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$	$y = mx + q$

**NB.:** Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

## 1.3 Continuità

**DEF.** Sia  $f(x)$  una funzione definita in un intervallo  $]a; b[$  e  $x_0$  un punto appartenente all'intervallo.  $f(x)$  è continua in  $x_0$  se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione è inoltre continua in  $]a; b[$  se è continua in ogni punto  $x_0$  dell'intervallo.

Si parla anche di funzioni

- **continue da destra**  $x_0$  quando  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- **continue da sinistra**  $x_0$  quando  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

## 1.4 Primi teoremi sui limiti

**N.B.:** I seguenti teoremi valgono per ogni tipologia di limite, sia finito che infinito, e in ogni intorno, sia di un numero reale (anche destro e sinistro) sia di infinito.

### 1.4.1 Teorema di unicità del limite

**Teorema** (Unicità del limite). *Se una funzione  $f(x)$  ha limite finito per  $x$  che tende a  $x_0$ , allora tale limite è unico.*

*Ipotesi*  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

*Tesi*  
 $l$  è unico

*Dimostrazione.* Si procede per assurdo. Si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$$

con  $l \neq l'$  e  $l < l'$ . Siccome  $\varepsilon$  è una quantità arbitraria è possibile porre

$$0 < \varepsilon < \frac{l - l'}{2}$$

Si applicano ora le definizioni di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l'| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome l'intersezione di due intorni di  $x_0$  è ancora un intorno di  $x_0$ , devono valere entrambe le definizioni:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Ricordando che  $l - \varepsilon < l' - \varepsilon < l + \varepsilon < l' + \varepsilon$  si ottiene:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon$$

$$-2\varepsilon < l - l'$$

$$2\varepsilon > l' - l$$

$$\varepsilon > \frac{l' - l}{2}$$

Assurdo: contrasta con quanto posto all'inizio. L'ipotesi per assurdo è falsa, quindi la tesi è dimostrata.

QED

### 1.4.2 Teorema di permanenza del segno

**Teorema** (Permanenza del segno). *Se il limite di una funzione per  $x$  che tende a  $x_0$  è un numero  $l$  diverso da 0, allora esiste un intorno  $I(x_0)$  escluso al più  $x_0$  in cui  $f(x)$  e  $l$  sono entrambi positivi o entrambi negativi.*

*Ipotesi*  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad l \neq 0$

*Tesi*  
 $\exists I(x_0) : f(x) \text{ e } l \text{ sono concordi } \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$

*Dimostrazione.* Espando l'ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome  $\varepsilon$  è un numero positivo arbitrario pongo

$$\varepsilon = |l|$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

- se  $l > 0 \rightarrow \varepsilon = l$

$$l - l < f(x) < l + l$$

$$0 < f(x) < 2l$$

da cui la tesi

$$f(x) > 0$$

- se  $l < 0 \rightarrow \varepsilon = -l$

$$l + l < f(x) < l - l$$

$$2l < f(x) < 0$$

da cui la tesi

$$f(x) < 0$$

QED

**Teorema** (Inverso della permanenza del segno). *Se una funzione  $f(x)$  ammette limite finito  $l$  per  $x$  che tende a  $x_0$  e in un intorno  $I(x_0)$  escluso al più  $x_0$  è*

- *positiva o nulla, allora  $l \geq 0$ ;*
- *negativa o nulla, allora  $l \leq 0$ .*

### 1.4.3 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

**Teorema** (Confronto). *Siano  $g(x)$ ,  $f(x)$  e  $h(x)$  tre funzioni definite in uno stesso intorno  $I(x_0)$ , escluso al più  $x_0$ . Se per ogni  $x \in I(x_0)$  è verificato che*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

allora è verificato che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

.

*Ipotesi*

*Tesi*

1.  $g(x)$ ,  $f(x)$  e  $h(x)$  tre funzioni definite nello stesso intorno  $I(x_0)$

2.  $\forall x \in I(x_0) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

*Dimostrazione.* Espando l'ipotesi 3:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Di conseguenza

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

da cui, per ipotesi 1,

$$l - \varepsilon < g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

La precedente scrittura è equivalente a

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

da cui la tesi.

QED

## 1.5 Calcolo dei limiti

### 1.5.1 Funzioni continue e funzioni elementari

Il limite per  $x \rightarrow x_0$  di una funzione  $f(x)$  continua in  $x_0$  è il valore della funzione in  $x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Il limite di una funzione elementare può essere ricavato dall'analisi del suo grafico, ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

### 1.5.2 Algebra dei limiti

**Teorema.** Siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  due funzioni definite in un intorno  $I(x_0) \setminus \{x_0\}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

con  $l, m \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l - m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{l}{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{m}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot l \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = l^n \qquad \text{con } n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

**Teorema.** Siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  due funzioni definite in un intorno  $I(x_0) \setminus \{x_0\}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$$

con  $l, m \in \mathbb{R}^*$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ , allora

- **Somma**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$
$l$	$+\infty$	$+\infty$
$l$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>

- **Prodotto**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$l$	$\infty$	$\infty$
$\infty$	$\infty$	$\infty$
$0$	$\infty$	<i>F.I.</i>

tenendo conto della regola dei segni;

- **Rapporto**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]$
$l$	$\infty$	$0$
$l$	$0$	$\infty$
$\infty$	$l$	$\infty$
$0$	$l$	$0$
$0$	$0$	<i>F.I.</i>
$\infty$	$\infty$	<i>F.I.</i>

tenendo conto della regola dei segni;

- **Potenza**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$
	$0$	$1$ ( $0^0$ <i>F.I.</i> )
$0 \leq l < 1$	$+\infty$	$0^+$
	$-\infty$	$+\infty$
$l \geq 1$	$0$	$1$ ( $\infty^0$ <i>F.I.</i> )
	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$0^+$

### 1.5.3 Mediante il teorema del confronto

#### Esempio 1.5.1.

Si calcoli il valore di  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

Prima di tutto ricordiamo che per definizione di seno  $-1 \leq \sin x \leq 1$ . Siccome stiamo lavorando in un intorno di  $+\infty$ , possiamo considerare  $x > 0$ , quindi posso dividere tutti i membri per  $x$ , ottenendo

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Siamo quindi riusciti a ricostruire nel membro centrale della disequazione la funzione cercata. Calcoliamo ora i limiti degli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \left[ -\frac{1}{+\infty} \right] = 0^-.$$

Di conseguenza, per il teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

### 1.5.4 Forme di indecisione (o forme indeterminate)

**Forma di indecisione**  $+\infty - \infty$

**Se si presenta in una funzione polinomiale**

Per superare queste forme di indecisione, in generale occorre raccogliere il termine di grado massimo. In alternativa esiste una regola pratica ottenuta tramite l'applicazione della gerarchia degli infiniti. In questo caso

si considera semplicemente il termine di grado massimo perché il contributo degli altri è trascurabile rispetto ad esso.

### Esempio 1.5.2.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x^4 + 5)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x^4 + 5) &= [-\infty + \infty] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left( \frac{1}{x^2} - 3 + \frac{5}{x^5} \right) = \left[ +\infty \left( \frac{1}{\cancel{+\infty}} - 3 + \frac{5}{\cancel{+\infty}} \right) \right] = \\ &= [-3(+\infty)] = -\infty \end{aligned}$$

infatti sostituendo dopo aver raccolto ottengo che alcuni termini vanno a 0. Oppure, applicando la regola pratica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x^4 + 5) = [-\infty + \infty] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4) = -\infty$$

### Se si presenta in una funzione irrazionale

In questo caso si procede raccogliendo il termine di grado massimo nel radicando, portandolo fuori dal segno di radice e poi raccogliendo nuovamente il termine di grado massimo. Oppure si può procedere applicando la gerarchia al radicando e portando fuori dal segno di radice il termine di grado massimo (si ricorda che  $\sqrt{x^{2n}} = |x^n|$ ). A questo punto dovremmo esserci ricondotti al caso precedente.

### Esempio 1.5.3.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - 2x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - 2x) &= [-\infty + \infty] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( |x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 \right) = \left[ +\infty \left( \sqrt{1 + \frac{3}{\cancel{+\infty}}} - 2 \right) \right] = -\infty \end{aligned}$$

oppure, applicando la regola pratica,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - 2x) &= [-\infty + \infty] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{aligned}$$

**Se il termine sotto radice è il quadrato del termine fuori** In questo caso, se procedo come nel precedente si origina un'altra forma di indecisione, per cui la soluzione è razionalizzare.

### Esempio 1.5.4.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - 2x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - 2x) &= [-\infty + \infty] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = \left[ \frac{3}{+\infty + \infty} \right] = 0^+ \end{aligned}$$

**Forma di indecisione  $0 \cdot \infty$** 

Per risolvere questa forma di indecisione è necessario modificare l'espressione analitica della funzione di partenza in modo da rimuovere l'origine della forma di indecisione.

**Esempio 1.5.5.**

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \operatorname{tg}^2 x$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \operatorname{tg}^2 x = \left[\sin 0 \cdot \operatorname{tg} \frac{3}{2}\pi\right] = [0 \cdot \infty] \stackrel{\text{FI}}{=}$$

Ricordando che (per gli angoli associati)  $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\right]^2 = [-\cos x]^2 = \cos^2 x$ , è possibile riscrivere la funzione come

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \cancel{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} = \left[\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1\right]$$

**Forma di indecisione  $\frac{\infty}{\infty}$** 

Si procede raccogliendo il termine di grado massimo (o applicando la gerarchia) sia a numeratore che a denominatore e poi semplificando.

**Se si presenta in una funzione razionale fratta****Esempio 1.5.6.**

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^4} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)}{\cancel{x^4} \left(\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \left[\frac{3 - \frac{5}{\cancel{x^4}} + \frac{2}{\cancel{x^4}} - \frac{1}{\cancel{x^4}}}{\frac{5}{\cancel{x^4}} - 2 - \frac{3}{\cancel{x^4}}}\right] = -\frac{3}{2}$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-2x^4} = -\frac{3}{2}$$

**N.B.:** Anche se sia a numeratore che a denominatore si presentano forme di indecisione  $-\infty + \infty$  prevale la forma di indecisione  $\frac{\infty}{\infty}$

**Se si presenta in una funzione irrazionale fratta****Esempio 1.5.7.**

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}} = \left[\frac{\frac{1}{\cancel{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\cancel{x}}}}{\cancel{x}}\right] = 1 \end{aligned}$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$



**Forma di indecisione**  $\frac{0}{0}$

### Funzioni razionali fratte

In generale si risolve scomponendo e semplificando

#### Esempio 1.5.8.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \left[ \frac{6}{4} \right] = \frac{3}{2}$$

### Funzioni irrazionali fratte

In generale si risolve razionalizzando, scomponendo e semplificando

#### Esempio 1.5.9.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4} &= \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 3x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+1)(\sqrt{x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

#### Esempio 1.5.10.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 27^+} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$

$$\lim_{x \rightarrow 27^+} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{t^3 - 27}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{\cancel{(t-3)}(t^2 + 3t + 9)}{\cancel{t-3}} = \lim_{t \rightarrow 3^+} (t^2 + 3t + 9) = 27$$

Pongo  $\begin{matrix} t = \sqrt[3]{x} & x \rightarrow 27^+ \\ x = t^3 & t \rightarrow 3^+ \end{matrix}$

**Forme di indecisione**  $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Generalmente si risolvono applicando l'uguaglianza

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

e successivamente applicando all'esponente i metodi risolutivi visti in precedenza.

#### Esempio 1.5.11.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}} = \left[ 0^{\frac{2}{-\infty}} \right] = [0^0] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2}{\ln(2x)} \ln(2x)} = e^2$$

#### Esempio 1.5.12.

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}} = [\infty^0] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x} \ln x} = e$$

**Esempio 1.5.13.**

Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{3 \ln x}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{4} \right)^{\frac{1}{3 \ln x}} &= [0^{-\infty}] = [0^0] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left( \frac{x^2}{4} \right) \frac{1}{3 \ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x^2 - \ln 4}{3 \ln x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2 \ln x}{3 \ln x} - \frac{\ln 4}{3 \ln x}} = [e^{\frac{2}{3} + 0}] = e^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

**1.5.5 Limiti Notevoli**

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

*Dimostrazione.*

$$\frac{\sin -x}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

Siccome la funzione è pari la dimostrazione si svolge solo per  $x \rightarrow 0^+$ . Sulla circonferenza goniometrica considero un angolo  $x$ . Siccome  $x \rightarrow 0^+$  posso imporre la condizione  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Per definizione si ha che

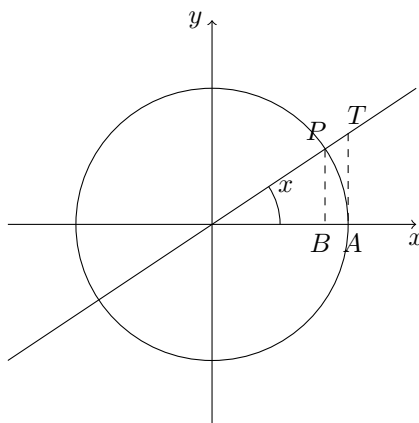


Figura 1.1: La situazione utilizzata per la dimostrazione

$$\widehat{PA} = x$$

$$\overline{PB} = \sin x$$

$$\overline{TA} = \tan x$$

Come è chiaramente visibile dalla Figura 1.1 si ha che

$$\sin x < x < \tan x$$

da cui

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$$

Si calcolano ora i limiti delle funzioni che limitano quella studiata

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$$

da cui per il teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Siccome la funzione è pari vale anche per  $x \rightarrow 0^-$

QED

### Osservazioni:

- vale il reciproco:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- vale la generalizzazione:  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$
- asintotico associato:  $\sin x \sim x$  in  $I(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

*Dimostrazione.* Per definizione  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} \stackrel{LN}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

QED

### Osservazioni:

- vale il reciproco:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$
- vale la generalizzazione:  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$
- asintotico associato:  $\operatorname{tg} x \sim x$  in  $I(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

*Dimostrazione.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \stackrel{LN}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \left[ \frac{0}{2} \right] = 0$$

QED

### Osservazioni:

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione:  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos f(x)}{f(x)} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

*Dimostrazione.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \stackrel{LN}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

QED

**Osservazioni:**

- vale il reciproco:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 1$
- vale la generalizzazione:  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos f(x)}{[f(x)]^2} = 1$
- asintotico associato:  $\cos x \sim 1 - x^2$  in  $I(0)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

**Osservazioni:**

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

**Osservazioni:**

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k$$

**Osservazioni:**

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$  con  $a > 0$

*Dimostrazione.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

QED

Particolarizzazione:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

**Osservazioni:**

- vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- asintotico associato:  $\ln x \sim x - 1$  in  $I(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  con  $a > 0$

*Dimostrazione.* Pongo  $t = a^x - 1$ , quindi  $e^x = t + 1$  e di conseguenza  $x = \log_a(t + 1)$ . Inoltre, se  $x \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t + 1)} = \ln a$$

QED

Particolarizzazione:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**Osservazioni:**

- vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- asintotico associato:  $e^x \sim x + 1$  in  $I(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$

**Osservazioni:**

- vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- asintotico associato:  $(1+x)^k \sim 1 + kx$  in  $I(0)$

## 1.6 Limiti e parametri

### Esempio 1.6.1.

Trovare per quale valore di  $a$  la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & x \leq -1 \\ \frac{ax-1}{x+2} & x > -1 \end{cases}$$

è continua in  $x_0 = -1$ .

Ricordando la definizione di continuità, dobbiamo determinare  $a$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Calcoliamo quindi

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} 2x^2 - ax + 1 = 3 + a \qquad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax-1}{x+2} = -a - 1$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 - a(-1) + 1 = 3 + a$$

Imponiamo l'uguaglianza

$$\begin{cases} 3 + a = 3 + a \\ -a - 1 = 3 + a \end{cases} \quad -a - 1 = 3 + a \quad 2a = -4 \quad \boxed{a = -2}$$

### Esempio 1.6.2.

Determinare il valore di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^n}{x^2 + 3x - 10}$$

al variare di  $n \in \mathbb{N}$ .

- se  $n = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3x - 10} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0^+$
- se  $n = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{(x-2)(x+5)} = \left[ \frac{1}{+\infty} \right] = 0^+$
- se  $n = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+5)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} 1$
- se  $n > 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^{n-1}}{(x-2)(x+5)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} +\infty$

## 1.7 Continuità e discontinuità

### 1.7.1 Discontinuità di prima specie o di salto

**DEF** (Punti di discontinuità di prima specie). Un punto  $x_0$  è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione  $f(x)$  quando, per  $x \rightarrow x_0$  il limite destro e il limite sinistro sono finiti ma diversi.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2 \quad l_1 \neq l_2.$$

La differenza  $|l_1 - l_2|$  è detta salto

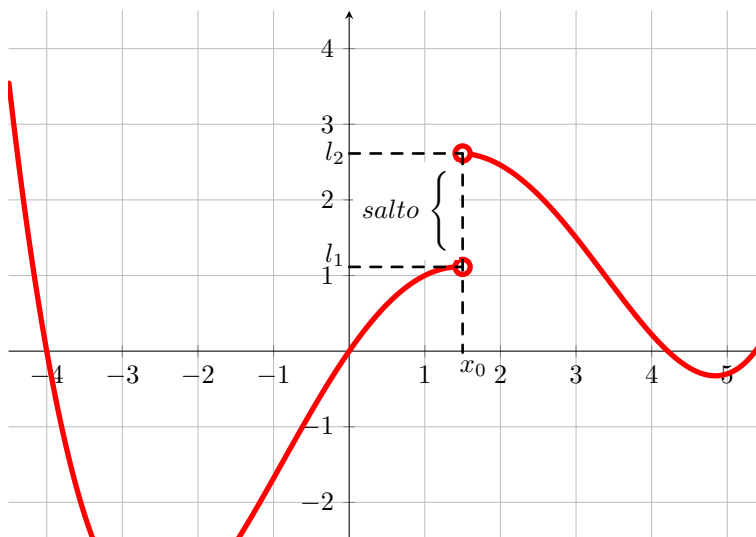


Figura 1.2: Discontinuità di prima specie

### 1.7.2 Discontinuità di seconda specie

**DEF** (Punto di discontinuità di seconda specie). Un punto  $x_0$  si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione  $f(x)$  quando, per  $x \rightarrow x_0$ , almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di  $f(x)$  è finito o infinito.

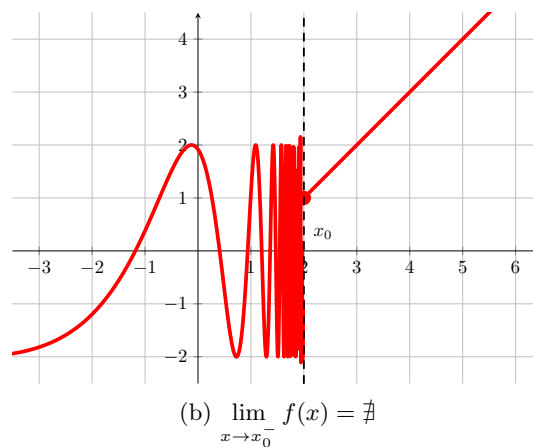
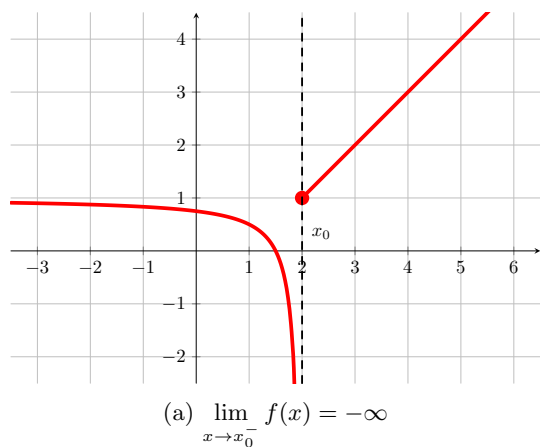
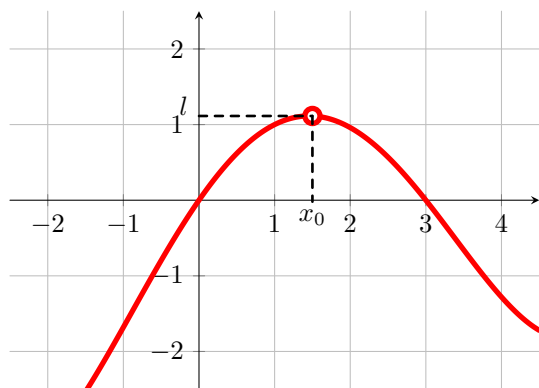


Figura 1.3: Discontinuità di seconda specie

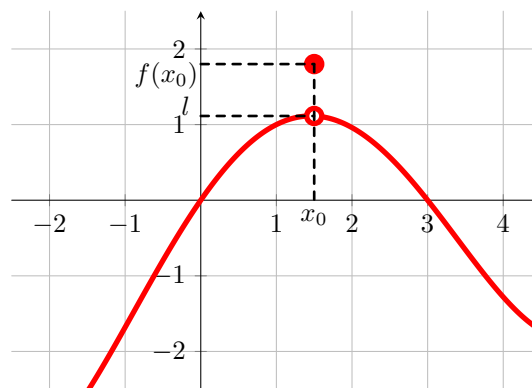
### 1.7.3 Discontinuità di terza specie o eliminabili

**DEF** (Punto di discontinuità di terza specie). Un punto  $x_0$  si dice punto di discontinuità di terza specie per la funzione  $f(x)$  quando esiste ed è finito il limite per  $x \rightarrow x_0$  e  $f(x)$  non è definita o assume un valore diverso da quello del limite:

$$x_0 \notin \text{dom } f \quad \vee \quad f(x_0) \neq l$$



(a)



(b) Discontinuità di terza specie

Figura 1.4

Discontinuità: tipologie e condizioni	
Prima specie	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \quad \text{salto} =  l_1 - l_2 $
Seconda specie	$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \nexists$
Terza specie	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \quad \vee \quad f(x_0) = \nexists$

### 1.7.4 Continuità e funzioni inverse

#### Continuità della funzione inversa

**Teorema** (Continuità della funzione inversa). Se  $y = f(x)$  è una funzione biiettiva e continua in un intervallo  $D$ , allora la funzione inversa  $f^{-1}$  è continua nel codominio di  $f$ .

*Ipotesi*

$f : D \rightarrow C$  biiettiva e continua in  $D$

*Tesi*

$f^{-1} : C \rightarrow D$  continua in  $C$

#### Condizione di invertibilità per funzioni continue

**Teorema** (Invertibilità di funzioni continue). Sia  $I$  un intervallo (limitato o illimitato) e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $I$ . Allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona.

*Ipotesi*

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e strettamente monotona in  $I$

*Tesi*

$f$  è invertibile

## 1.8 Teoremi sulle funzioni continue

### 1.8.1 Teorema di Weistrass

**Teorema** (Weistrass). *Se  $f$  è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso  $[a; b]$ , allora essa assume in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

*Ipotesi*

$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a; b]$

*Tesi*

$\exists c, d \in [a, b] : f(c) = \min\{f\} \wedge f(d) = \max\{f\}$

### 1.8.2 Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)

**Teorema** (Bolzano). *Se  $f$  è continua in un intervallo limitato e chiuso  $[a; b]$  e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto  $c$  interno all'intervallo in cui  $f(c) = 0$ .*

*Ipotesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a; b]$

2.  $f(a) \cdot f(b) < 0$

*Tesi*

$\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$

### 1.8.3 Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

**Teorema** (Darboux). *Se  $f$  è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso  $[a; b]$ , allora essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

*Ipotesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a; b]$

2.  $m = \min\{[a; b]\} \quad M = \max\{[a; b]\}$

*Tesi*

$\exists x \in [a, b] : f(x) = k \forall k \in [m; M]$



## Capitolo 2

# Derivate

### 2.1 Definizione

Consideriamo una funzione ed un punto appartenente ad essa, vorremmo avere uno strumento che, localmente, ci permetta di valutare la velocità di variazione della funzione, ovvero che in ogni punto ci dica quanto cresce la funzione. Per le rette esiste uno strumento del genere, il coefficiente angolare, che è definito come

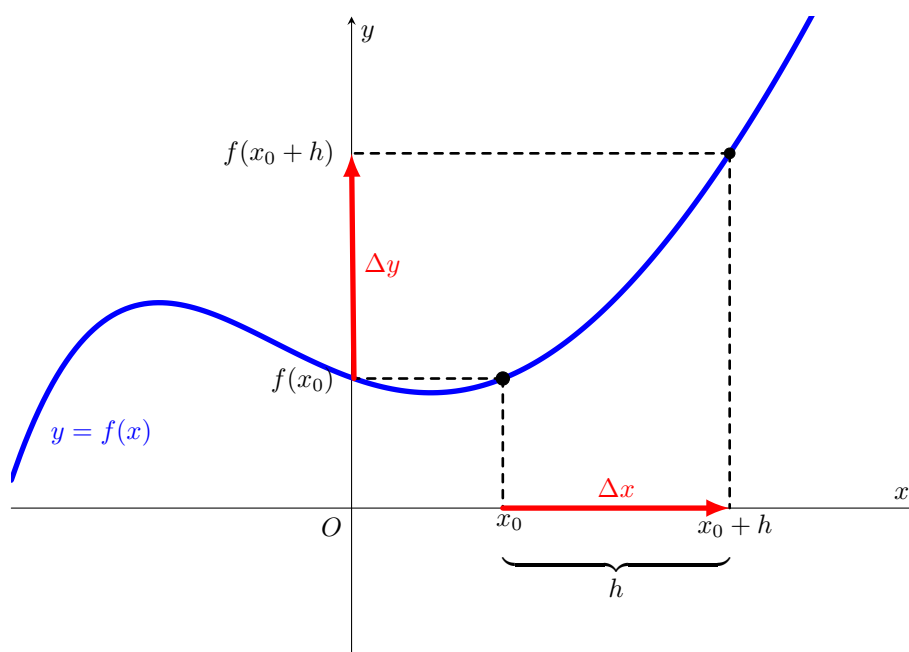


Figura 2.1

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Proviamo quindi a definire qualcosa di simile per una funzione qualsiasi:

**DEF** (Rapporto incrementale). Sia  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ , definiamo **rapporto incrementale** di  $f$  tra il punto  $x_0$  e il punto  $x_1 = x_0 + h$  (con  $h \neq 0$ ) la grandezza :

$$R.I. = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tuttavia questo strumento ci da informazioni sulla crescita media della funzione nell'intervallo  $[x_0, x_1]$ , a noi serve qualcosa di relativo al solo punto  $x_0$ , per cui facciamo avvicinare  $x_1$  a  $x_0$ , quindi otteniamo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definiamo quindi la derivata, ovvero lo strumento che ci permette di conoscere localmente la velocità di variazione di una funzione:

**DEF (Derivata).** Data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  il limite per  $x_1 \rightarrow x_0$  del rapporto incrementale tra  $x_1$  e  $x_0$ , se esiste ed è finito, si definisce **derivata prima della funzione** in  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In quanto limite, la derivata esiste solo se esistono limite destro e sinistro e sono uguali. Definiamo quindi **derivata sinistra e destra**

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### 2.1.1 Problema classico

Il concetto di derivata nasce anche per risolvere un problema classico della matematica: nota una funzione e un suo punto  $P(x_0, f(x_0))$ , determinare l'equazione della retta tangente alla curva in  $P$ .

Per farlo, è possibile introdurre un secondo punto  $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$  e calcolare la retta passante per i due punti (secante). Sappiamo che l'equazione della retta passante per due punti è data da

$$PQ : \quad \frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P}$$

sostituendo otteniamo

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0}.$$

Riconducendo quindi la scrittura all'equazione della retta per un punto noto il coefficiente angolare otteniamo

$$y - f(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Si ricava quindi che il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta secante  $PQ$ . Inoltre, la derivata prima si ricava quando avviciniamo al limite  $P$  e  $Q$ , per cui è il coefficiente angolare della retta tangente nel punto  $P$ .

### 2.1.2 Calcolo della derivata mediante definizione

#### Esempio 2.1.1.

Calcolare la derivata di  $y = 4x - 9$  mediante definizione.

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(x + h) - 9] - [4x - 9]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4x} + 4h - \cancel{9} - \cancel{4x} + \cancel{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h} = 4$$

#### Esempio 2.1.2.

Calcolare la derivata di  $y = -x^2 + 4x$  mediante definizione

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x + h)^2 + 4(x + h) + x^2 - 4x}{h} = \\ &= \frac{\cancel{x^2} - h^2 - 2hx + \cancel{4x} + h + \cancel{x^2} - \cancel{4x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h - 2x + 4)}{h} = -2x + 4 \end{aligned}$$

## 2.2 Derivate fondamentali

### 2.2.1 Funzione costante

Funzione	Derivata
$y = k$	$y' = 0$

*Dimostrazione.*

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

N.B.: Non è una forma di indecisione perchè la funzione è già 0 prima di calcolare il limite.

QED

### 2.2.2 Funzione identità

Funzione	Derivata
$y = x$	$y' = 1$

*Dimostrazione.*

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{FI}{=} 1$$

QED

### 2.2.3 Funzione potenza

Funzione	Derivata
$y = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

*Dimostrazione.*

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x(1 + \frac{h}{x})]^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha [(1 + \frac{h}{x})^\alpha - 1]}{\frac{h}{x}} \stackrel{LN}{=} \alpha x^{\alpha-1}$$

QED

### Derivata della funzione radice quadrata

Per la derivata delle funzioni potenza, si ricava la derivata della funzione radice quadrata:

Funzione	Derivata
$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

## 2.2.4 Funzione seno

Funzione	Derivata
$y = \sin x$	$y' = \cos x$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{LN=0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{LN=1} \right) \stackrel{LN}{=} \cos x
 \end{aligned}$$

QED

## 2.2.5 Funzione coseno

Funzione	Derivata
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{LN=0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{LN=1} \right) \stackrel{LN}{=} -\sin x
 \end{aligned}$$

QED

## 2.2.6 Funzione esponenziale

Funzione	Derivata
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$

*Dimostrazione.*

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \underbrace{\frac{a^h - 1}{h}}_{LN=\ln a} \stackrel{LN}{=} a^x \ln a$$

QED

## 2.2.7 Funzione logaritmo

Funzione	Derivata
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$

*Dimostrazione.*

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left( \frac{x+h}{x} \right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)}{\frac{h}{x}}}_{LN = \log_a e} \cdot \frac{1}{x} \stackrel{LN}{=} \frac{1}{x} \log_a e$$

QED

## 2.3 Operazioni con le derivate

### 2.3.1 Linearità rispetto al prodotto

La derivata è lineare rispetto al prodotto per costanti, quindi possiamo “portare fuori” le costanti dalla derivata. In simboli ( $k \in \mathbb{R}$ ):

$$y = k \cdot f(x) \qquad y' = k \cdot f'(x).$$

#### Esempio 2.3.1.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

a)  $f(x) = \sqrt{2} \sin x$

b)  $g(x) = 3 \ln x$

a)  $f'(x) = \sqrt{2} \cos x$

b)  $g'(x) = \frac{3}{x}$

### 2.3.2 Linearità rispetto alla somma

La derivata è lineare rispetto alla somma, per cui la derivata della somma di due funzioni è la somma delle derivate delle funzioni stesse:

$$y = f(x) + g(x) \qquad y' = f'(x) + g'(x).$$

#### Esempio 2.3.2.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a)  $y = 5x^3 + e^x$

b)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

a)  $y = 15x^2 + e^x$

b)  $y = -x + 1$

### 2.3.3 Derivata del prodotto

La derivata del prodotto di due funzioni NON è il prodotto delle derivate delle funzioni, ma si ottiene sommando la derivata della prima moltiplicata per la seconda e la derivata della seconda moltiplicata per la prima:

$$y = f(x)g(x) \qquad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**Esempio 2.3.3.**

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a)  $y = x^2 \cdot \cos x$

b)  $y = x \cdot e^x \cdot \ln x$

a)  $y' = 2x \cos x + x^2 \sin x$

b)  $y' = 1 \cdot e^x \cdot \ln x + x \cdot e^x \cdot \ln x + x \cdot e^x \cdot \frac{1}{x}$

**2.3.4 Derivata del rapporto**

Analogamente, la derivata del rapporto NON è il rapporto delle derivate ma

$$t = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Da questa formula segue anche la formula della derivata del reciproco:

$$y = \frac{1}{f(x)} \quad y' = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

**Esempio 2.3.4.**

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a)  $y = \frac{5+x}{2x^2}$

b)  $y = \frac{1}{2x^3+3}$

a)  $y' = \frac{1 \cdot (2x^2) - (5+x)(4x)}{2x^2}$

b)  $y' = \frac{6x^2}{(2x^3+3)^2}$

**2.3.5 Derivata della funzione composta (chain rule)**

Per derivare una funzione composta bisogna procedere "a guscio": osservando la funzione da derivare, procedere dall'interno verso l'esterno derivando ogni strato e moltiplicando il tutto:

$$y = f(g(x)) \quad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**Esempio 2.3.5.**

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a)  $y = [f(x)]^\alpha$

b)  $y = \sin f(x)$

c)  $y = a^{f(x)}$

d)  $y = \sin(\ln(2x))$

e)  $y = \frac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$

f)  $y = \cos(x) \cdot \ln(x^2 + 3x)$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a)  $y' = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$

b)  $y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$

c)  $y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

d)  $y' = \cos(\ln(2x)) \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2$

e)  $y' = \frac{[2 \cos(2x)] \cdot \cos(3x) - \sin(2x) \cdot [-3 \sin(3x)]}{[\cos(3x)]^2}$

f)  $y' = -\sin(x) \cdot \ln(x^2 + 3x) + \cos(x) \cdot \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3)$

## 2.4 Derivate notevoli /2

### 2.4.1 Funzione tangente

Funzione	Derivata
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ , quindi

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

QED

### 2.4.2 Funzione cotangente

Funzione	Derivata
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ , quindi

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -1 - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x \end{aligned}$$

QED

## 2.5 Legame tra continuità e derivabilità

### 2.5.1 Continuità delle funzioni derivabili

**Teorema** (Continuità delle funzioni derivabili). *Se una funzione  $f(x)$  è derivabile in un punto  $x_0$ , allora essa è anche continua in  $x_0$ .*

*Ipotesi*

$$f \text{ derivabile in } x_0, \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

*Tesi*

$$f \text{ continua in } x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

*Dimostrazione.*

vero  $\implies$

$$f(x_0 + h) = f(x_0 + h) \implies$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) \implies (\text{se } h \neq 0)$$

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \implies (\text{limite})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \right] \implies (\text{separo perchè i limiti sono finiti})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right] + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \implies (\text{separo perchè i limiti sono finiti})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \implies (\text{calcolo i limiti})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) \implies (\text{sostituisco ponendo } x = x_0 + h)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

QED

*Osservazione (1).* L'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme delle funzioni continue. Esistono funzioni continue ma non derivabili, mentre tutte le funzioni derivabili sono continue.

*Osservazione (2).* La continuità è condizione necessaria ma non sufficiente della derivabilità, per cui una funzione per essere derivabile deve essere continua, ma non è detto che una funzione continua sia derivabile.

## 2.5.2 Studi di continuità e derivabilità

### Esempio 2.5.1.

Studiare continuità e derivabilità della funzione  $y = \sqrt{4 - |x|} + 3x$  in  $x_0 = 0$

Prima di tutto apriamo la scrittura sulla definizione di modulo

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 - x + 3x} & x \geq 0 \\ \sqrt{4 + x + 3x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{4 + 2x} & x \geq 0 \\ \sqrt{4 + 4x} & x < 0. \end{cases}$$

Controlliamo ora i domini dei tratti

$$\text{dom } \sqrt{4 + 2x} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$$

$$\text{dom } \sqrt{4 + 4x} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$$

e integriamo nella definizione della funzione

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 + 2x} & x \geq 0 \\ \sqrt{4 + 4x} & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Ora possiamo procedere con lo studio di continuità in  $x_0 = 0$ . Calcoliamo i limiti da sinistra e destra e il valore della funzione in  $x_0$ :

$$f(0) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{4 + 4x} = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4 + 2x} = 2.$$

Siccome sono uguali, otteniamo che la funzione è continua in  $x_0 = 0$ . Procediamo quindi con lo studio di derivabilità:

*Ricorda.* Una funzione è derivabile in un punto se la derivata destra e la derivata sinistra sono finite e uguali.



Per ora sappiamo calcolare derivata destra e sinistra solo mediante definizione. A breve acquisiremo uno strumento che ci permetterà di calcolarle più agevolmente.

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+4h} - 2}{h} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4} + 4\cancel{h} - \cancel{4}}{\cancel{h}(\sqrt{4+4h} + 2)} = 1$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+2h} - 2}{h} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{4} + 2\cancel{h} - \cancel{4}}{\cancel{h}(\sqrt{4+2h} + 2)} = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, siccome derivata destra e sinistra sono diverse, la funzione non è derivabile in  $x_0 = 0$ .

## 2.6 Punti di non derivabilità

Quando una funzione in un punto  $x_0$  è continua ma non derivabile, possiamo classificare il tipo di punto di non derivabilità in base alla derivata destre e sinistra.

### 2.6.1 Punto angoloso

Quando la derivata sinistra e la derivata destra in un punto  $x_0$  sono finite e diverse oppure una è infinita e l'altra finita, la funzione presenta un punto angoloso:

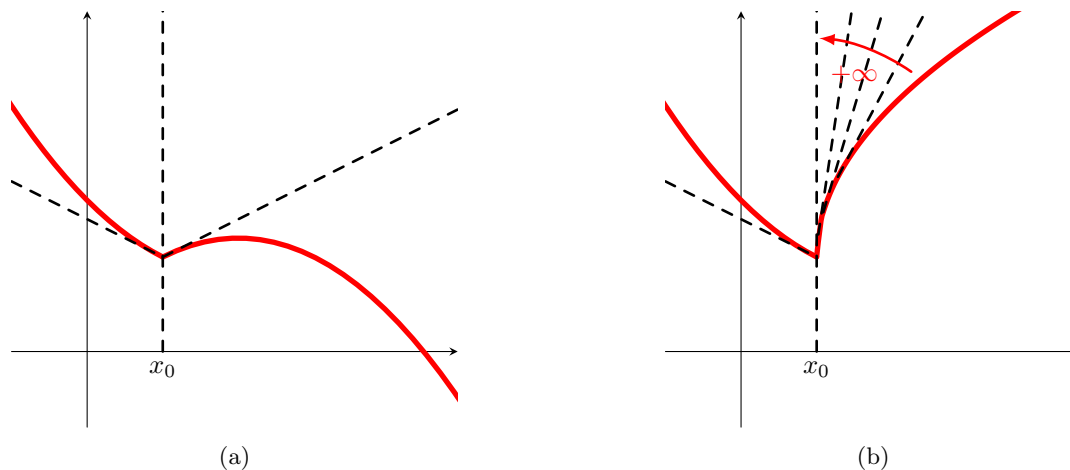


Figura 2.2: Punti angolosi

### 2.6.2 Cuspide

Quando la derivata destra e la derivata sinistra in un punto  $x_0$  sono infinite e diverse (una  $+\infty$  e l'altra  $-\infty$ ), la funzione presenta una cuspide:

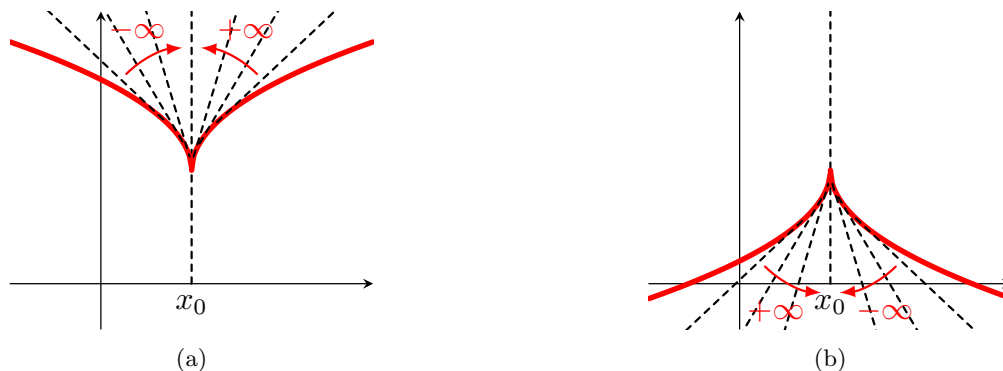


Figura 2.3: Punti angolosi

### 2.6.3 Flesso a tangente verticale

Quando la derivata destra e la derivata sinistra in un punto  $x_0$  sono infinite e uguali (entrambe  $+\infty$  o entrambe  $-\infty$ ), la funzione presenta un flesso a tangente verticale:

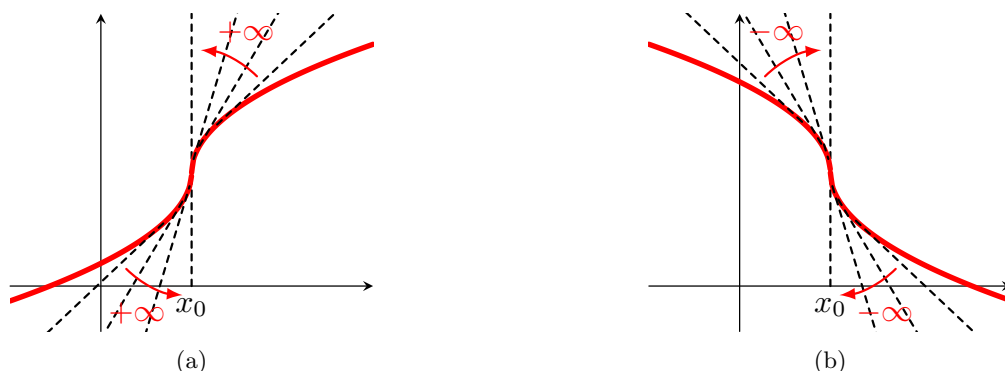


Figura 2.4: Flessi a tangente verticale

### 2.6.4 Punto a tangente verticale

Questo non è propriamente un punto di non derivabilità perchè la funzione non è neanche continua, ma se in un punto  $x_0$  la funzione esiste solo in un intorno destro e non in un intorno sinistro, è continua da destra e la derivata destra è infinita (o viceversa), la funzione presenta un punto a tangente verticale:

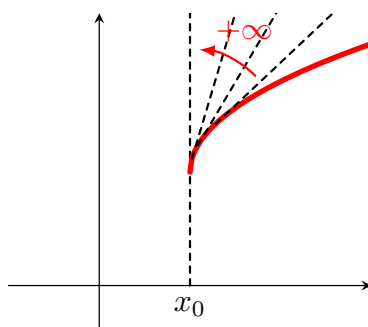


Figura 2.5: Punto a tangente verticale

## 2.7 Criterio di derivabilità

Dal teorema di Lagrange (2.11.3) e dal teorema di De l'Hôpital (2.11.6), presentati successivamente, segue il seguente corollario:

**Corollario** (Criterio di derivabilità). Sia  $f(x)$  una funzione continua in  $[a; b]$  e derivabile in  $]a; b[$  tranne al più  $x_0$  (con  $x_0 \in ]a; b[$ ). Allora

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad \wedge \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

In particolare se  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$  e sono finite, allora la funzione è derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ .

*Ipotesi*

1.  $f(x)$  continua in  $[a; b]$
2.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[-\{x_0\}$  (con  $x_0 \in ]a; b[$ )

*Tesi*

1.  $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$
2.  $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

Que-

*Ipotesi 2* $f'_+(x) = f'_-(x)$  e finite*Tesi 2*

1.  $f(x)$  derivabile in  $x_0$
2.  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

sto teorema ci permette quindi di calcolare più agilmente la derivata sinistra e la derivata destra in un punto di una funzione continua, senza ricorrere alla definizione. Vediamo un esempio:

**Esempio 2.7.1.***Studiare la continuità e la derivabilità della funzione*

$$y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo prima di tutto che entrambe le funzioni sono definite e continue negli intervalli corrispondenti. L'unico punto in cui è possibile che si manifestino discontinuità è il punto di raccordo  $x_0 = 0$ . Studiamo quindi la continuità:

$$f(0) = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \sin x = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Risulta quindi che la funzione è continua in  $x_0$ . Calcoliamo ora la derivata della funzione. Siccome non sappiamo se la funzione è derivabile in  $x_0 = 0$ , per ora escludiamo quel punto.

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che entrambe le funzioni sono derivabili nei loro intervalli di definizione, per cui rimane da studiare solo il punto  $x_0 = 0$ . Siccome abbiamo provato precedentemente che la funzione è continua in quel punto, siamo nelle ipotesi del criterio di derivabilità, per cui possiamo sfruttarlo per calcolare derivata destra e sinistra:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

Siccome esse sono uguali, per il criterio di derivabilità segue che  $f'(0) = 1$ , di conseguenza è lecito scrivere che (la scelta di dove mettere l'uguale è puramente arbitraria, in quanto entrambi i tratti in 0 assumono lo stesso valore):

$$y = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

## 2.8 Operazioni con le derivate /2

**Derivata di  $[f(x)]^g(x)$** 

Questo caso particolare si risolve come visto precedentemente per i limiti, ovvero applicando l'uguaglianza

$$[f(x)]^g(x) = e^{f(x) \ln g(x)}$$

e successivamente applicando la regola per la derivata delle funzioni composte:

**Esempio 2.8.1.***Calcolare la derivata di*

$$y = (x - 1)^x$$

Prima di tutto riscriviamo la funzione in modo equivalente come  $e^{x \ln(x-1)}$ , e successivamente applichiamo la regola per la derivata delle funzioni composte:

$$y' = e^{x \ln(x-1)} \cdot \left[ 1 \cdot \ln(x-1) + x \cdot \frac{1}{x-1} \cdot 1 \right] = (x-1)^x \left[ \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} \right]$$

### 2.8.1 Derivata della funzione inversa

**Teorema** (Derivata della funzione inversa). *Sia  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervallo). Se  $f$  è derivabile nel punto  $x \in I$ , con  $f'(x) \neq 0$ , allora anche la sua funzione inversa  $f^{-1}$  è derivabile nel punto  $y = f(x)$  e vale la relazione*

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{con } x = f^{-1}(y)$$

*Dimostrazione.* Per definizione di funzione inversa si ha

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Derivando ad entrambi i membri, per la regola della derivata della funzione composta, si ricava che

$$[f^{-1}(f(x))]' \cdot f'(x) = 1$$

da cui, ricordando che  $y = f(x)$ ,

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$$

QED

Come applicare questa regola? Consideriamo una funzione qualsiasi  $y = f(x)$  che rispetta le ipotesi del teorema appena visto e prendiamo un punto qualsiasi appartenente alla funzione  $P(x_0, y_0) \in f$ . Allora il punto  $P'(y_0, x_0)$  apparterrà alla funzione inversa, e sarà il simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $y = x$ . Allora la derivata della funzione inversa in  $y_0$  sarà il reciproco della derivata della funzione in  $x_0$ . Vediamo un esempio:

#### Esempio 2.8.2.

*Calcolare la derivata della funzione inversa della funzione  $y = x^2$  quando  $y = 4$ .*

Prima di tutto dobbiamo determinare in quale punto la funzione data assume valore 4. In questo caso esso è facilmente determinabile algebricamente ( $x = \sqrt{y} = 2$ ), ma ciò non è sempre possibile, per cui è necessario procedere a tentativi. Calcoliamo ora la derivata della funzione data in  $x = 2$  e otteniamo che

$$y'(4) = 2x|_{x=2} = 4$$

A questo punto applichiamo il teorema e otteniamo

$$[f^{-1}(4)]' = \frac{1}{y'(4)} = \frac{1}{4}.$$

Verifichiamo ora il risultato ottenuto applicando la formula per la derivata della funzione radice quadrata.

Sappiamo che  $[\sqrt{y}]' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ , per cui calcolandola in  $y = 4$  otteniamo

$$[f^{-1}(4)]' = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Questa relazione può anche essere utilizzata per determinare l'espressione analitica della derivata della funzione inversa di una funzione nota, ma questo non è sempre possibile. Ciò è fattibile solo se è possibile determinare  $y$  nella funzione. Al paragrafo successivo è presentato qualche esempio.

## 2.9 Derivate notevoli /3

### 2.9.1 Funzione arcseno

Funzione	Derivata
$y = \arcsen x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

*Dimostrazione.* Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \sen y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\arcsen x]' = \frac{1}{[\sen y]'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ora rimane da determinare  $x$  in modo da poter esprimere esplicitamente la derivata. Per far ciò sfruttiamo la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\cos^2 y + \sen^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = 1 - \sen^2 y$$

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sen^2 y};$$

siccome la funzione arcseno è definita nell'intervallo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e in questo intervallo il coseno è non negativo, scelgo il +.

$$\cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

per cui si ha

$$[\arcsen x]' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

QED

### 2.9.2 Funzione arcocoseno

Funzione	Derivata
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La dimostrazione è analoga alla precedente ed è lasciata come esercizio.

**Esercizio 2.9.1.** Dimostrare la formula per la derivata della funzione arcocoseno. Soluzione a pag. 51

### 2.9.3 Funzione arcotangente

Funzione	Derivata
$y = \arctg x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$

*Dimostrazione.* Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \tg y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\arctg x]' = \frac{1}{[\tg y]'} = \frac{1}{1 + \tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

QED

### 2.9.4 Funzione arcocotangente

Funzione	Derivata
$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

La dimostrazione è analoga alla precedente ed è lasciata come esercizio.

**Esercizio 2.9.2.** Dimostrare la formula per la derivata della funzione arcocotangente.

Soluzione a pag. 51

## 2.10 Il differenziale

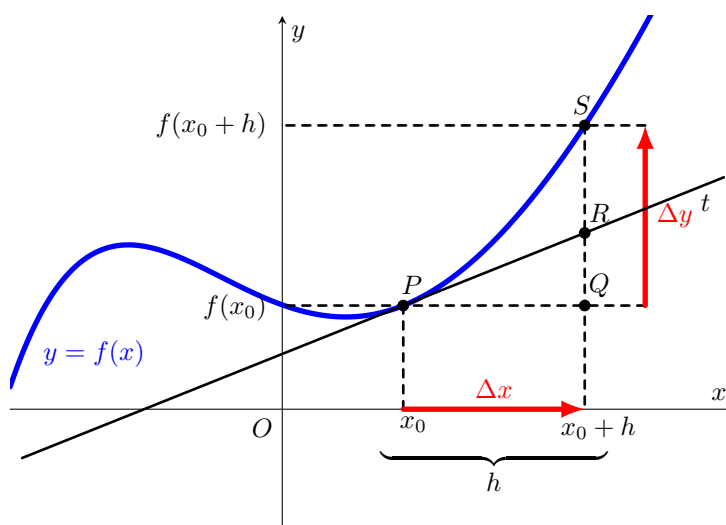


Figura 2.6

Sia  $y = f(x)$  una funzione continua e derivabile in un intervallo. Come abbiamo osservato precedentemente, ad un incremento orizzontale  $\Delta x$ , corrisponde un incremento verticale  $\Delta y$ . Quest'ultimo può essere scritto come somma di due parti:

$$\Delta y = \overline{QS} = \overline{QR} + \overline{RS},$$

dove  $R$  è il punto che si trova sulla tangente alla curva in  $x_0$  in corrispondenza di  $x_0 + h$ .

Sapendo che  $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ , si ricava il valore di  $\overline{QR}$ :

$$\overline{QR} = t(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + h)(x_0 + h - x_0) + f(x_0) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Da cui

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{\overline{QR}} + \underbrace{r(x)}_{\overline{RS}}.$$

Siccome per  $\Delta x \rightarrow 0$  il rapporto incrementale diventa la derivata, osserviamo che  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(x) = 0$ . Per  $\Delta x$  molto piccoli (indicati con  $dx$ ), possiamo quindi approssimare l'incremento  $\Delta y$  al solo  $\overline{QR}$ , ovvero all'incremento della funzione valutato sulla retta tangente. Esso prende il nome di differenziale della funzione e sarà uno strumento fondamentale per il calcolo integrale.

**DEF** (Differenziale). Il differenziale di una funzione  $f(x)$ , relativo al punto  $x$  e all'incremento  $dx$  è il prodotto della derivata della funzione calcolata in  $x$  per l'incremento  $dx$ . Il differenziale viene indicato con  $df(x)$  o con  $dy$ .

$$dy = f'(x) dx$$

**Osservazione** (Notazione). La derivata di una funzione può essere scritta come il rapporto tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente. Questa notazione è da preferirsi quando non è scontato rispetto a quale variabile si sta derivando (ad es. in fisica).

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

## 2.10.1 Un'applicazione del differenziale

Siccome  $dy = f'(x) dx$  e  $dy = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ , allora si ricava

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0) dx$$

### Esempio 2.10.1.

Calcolare mediante il differenziale il valore approssimato di  $\sqrt{4,005}$

$$\sqrt{4,005} = \sqrt{4 + 0,005}$$

Per cui abbiamo  $x_0 = 4$  e  $dx = 0,005$ . Per quanto detto sopra

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) dx$$

Calcoliamo quindi la derivata della funzione radice quadrata  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , in conclusione

$$\sqrt{4,005} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,005 = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,005 = 2,00125.$$

Per confronto osserviamo che la calcolatrice restituisce il valore 2,00124960961895...

## 2.11 Teoremi del calcolo differenziale

### 2.11.1 Teorema di Fermat

**Teorema (Fermat).** Data una funzione  $y = f(x)$  definita in un intervallo  $[a; b]$  e derivabile in  $]a; b[$ , se  $f(x)$  ha un massimo o un minimo relativo nel punto  $x_0$  interno ad  $[a; b]$ , allora la derivata della funzione in quel punto si annulla.

*Ipotesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[$
3.  $x_0$  punto di massimo o minimo relativo ( $x_0 \in [a; b]$ )

*Tesi*

$$f'(x_0) = 0$$

**N.B.:** La dimostrazione è svolta considerando  $x_0$  punto di massimo, ma lo svolgimento è analogo nel caso di un punto di minimo.

*Dimostrazione.* Per definizione di punto di massimo relativo

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0)$$

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

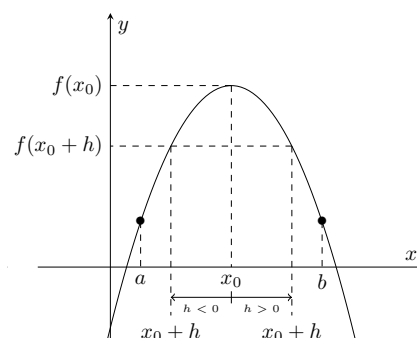
Calcolo i rapporti incrementali da sinistra e da destra:

$$h > 0 \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$h < 0 \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$



$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Siccome  $f(x)$  è derivabile per ipotesi 2, per il criterio di derivabilità

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Di conseguenza è necessario che

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$$

QED

*Osservazione (1).* Il teorema fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo. Non garantisce che se la derivata si annulla allora si presenti un massimo/minimo relativo: potrebbe esserci un flesso a tangente orizzontale.

*Osservazione (2).* I punti di massimo e minimo locali non è detto che siano punti stazionari. Lo sono se e solo se sono interni al dominio e la funzione è derivabile. Si possono presentare tuttavia anche agli estremi del dominio o nei punti di non derivabilità.

### 2.11.2 Teorema di Rolle

**Teorema (Rolle).** Data una funzione  $y = f(x)$  definita in un intervallo limitato e chiuso  $[a; b]$  tale che

1.  $f(x)$  è continua in  $[a; b]$
2.  $f(x)$  è derivabile in  $]a; b[$
3.  $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto  $c$  interno all'intervallo per il quale risulta  $f'(c) = 0$

*Ipotesi*

*Tesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $f(x)$  continua in  $[a; b]$
3.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[$
4.  $f(a) = f(b)$

$$f'(c) = 0$$

*Dimostrazione.* Dato che per ipotesi  $f(x)$  è continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  allora per il teorema di Weistrass  $f(x)$  ammette massimo e minimo **assoluti** in tale intervallo, cioè

$$\exists c, d \in [a; b] : m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$$

Possiamo distinguere due casi:

1.  $m = M \rightarrow m = f(c) = f(x) = f(d) = M$

Se  $m$  e  $M$  coincidono vuol dire che  $f(x)$  assume sempre lo stesso valore. Dato che  $f(x)$  deve essere compresa tra  $m$  e  $M$

$$m \leq f(x) \leq M$$

ma siccome  $m = M$  allora  $f(x) = m = M \quad \forall x \in [a; b]$ , per cui  $f(x)$  è costante. Siccome la derivata di una funzione costante è nulla

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

2.  $m < M$ , quindi  $f(x)$  non è costante ( $f(c) \neq f(d)$ ) e dato che sappiamo che  $f(a) = f(b)$  allora **almeno** uno dei punti  $c$  e  $d$  deve essere interno all'intervallo  $[a; b]$ .

Supponiamo che  $c \in ]a; b[$ , quindi che  $c$  non sia un estremo. Allora la funzione presenta un punto di minimo assoluto (analog. massimo) all'interno dell'intervallo. Inoltre per ipotesi essa è continua e derivabile in  $c$ , per cui per il teorema di Fermat  $f'(c) = 0$ .

QED



## Un'applicazione del teorema di Rolle

**Esempio 2.11.1.**

*Dimostrare che il grafico della funzione  $y = x^5 + x^3 + 1$  interseca l'asse  $x$  in un solo punto.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione  $y = x^5 + x^3 + 1$ . Siccome è una funzione polinomiale, essa è continua e derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ . Di conseguenza, siccome

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 + x^3 + 1 = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 + x^3 + 1 = +\infty.$$

Di conseguenza per il teorema di Bolzano la funzione interseca l'asse  $x$  in almeno un punto.

Supponiamo ora per assurdo che esistano  $x_1$  e  $x_2$  distinti tali che  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Allora la funzione soddisferebbe le ipotesi del teorema di Rolle in  $[x_1, x_2]$ , per cui dovrebbe esistere un  $c \in [x_1, x_2]$  tale che  $f'(c) = 0$ . Calcoliamo quindi  $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$  e osserviamo che la funzione presenta un punto stazionario in  $x = 0$ . Per il teorema di Rolle esso deve essere un punto di massimo o minimo relativo. Studiamo quindi il segno della derivata prima per classificare il punto stazionario e osserviamo che essa è positiva  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . La funzione presenta quindi un flesso a tangente orizzontale e non un punto di massimo/minimo relativo. È quindi falsa la tesi del teorema di Rolle, per cui è falsa l'ipotesi per assurdo, da cui segue la tesi. QED

**2.11.3 Teorema di Lagrange**

**Teorema (Lagrange).** *Data una funzione  $y = f(x)$  definita in un intervallo limitato e chiuso  $[a; b]$  tale che*

1.  $f(x)$  è continua in  $[a; b]$
2.  $f(x)$  è derivabile in  $]a; b[$

*allora esiste almeno un punto  $c$  interno all'intervallo per il quale vale la relazione*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

*Ipotesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $f(x)$  continua in  $[a; b]$
3.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[$

*Tesi*

$$\exists c \in ]a; b[ : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . Osserviamo che

$$h(a) = f(a)$$

e

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

per cui essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, di conseguenza esiste un punto  $c$  tale che  $h'(c) = 0$ . Osserviamo che

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

quindi siccome  $h(c) = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

QED

### 2.11.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

#### Funzioni con derivata nulla

**Teorema** (Derivata nulla). *Se  $f(x)$  è una funzione continua in un intervallo  $[a; b]$ , derivabile in  $]a; b[$  e la sua derivata è nulla per ogni punto interno all'intervallo, allora  $f(x)$  è costante in tutto  $[a; b]$*

*Ipotesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $f(x)$  continua in  $[a; b]$
3.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[$
4.  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$

*Tesi*

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a; b]$$

#### Funzioni con derivate uguali

**Teorema** (Differenza costante). *Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono due funzioni continue nell'intervallo  $[a; b]$ , derivabili in  $]a; b[$  e tali che  $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in ]a; b[$ , allora esse differiscono per una costante.*

*Ipotesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $f(x)$  continua in  $[a; b]$
3.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[$
4.  $g(x)$  continua in  $[a; b]$
5.  $g(x)$  derivabile in  $]a; b[$
6.  $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$

*Tesi*

$$f(x) - g(x) = k \quad \forall x \in [a; b]$$

#### Monotonia di funzioni derivabili

**Teorema** (Monotonia di funzioni derivabili). *Data una funzione  $y = f(x)$ , continua in un intervallo  $[a; b]$  e derivabile nell'intervallo  $]a; b[$ :*

1. *se  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]a; b[$ , allora  $f(x)$  è crescente in  $]a; b[$*
2. *se  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]a; b[$ , allora  $f(x)$  è decrescente in  $]a; b[$*

**Teorema** (Inverso della monotonia di funzioni derivabili). *Data una funzione  $y = f(x)$ , continua in un intervallo  $[a; b]$  e derivabile nell'intervallo  $]a; b[$ :*

1. *se  $f(x)$  è crescente in  $]a; b[$ , allora  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a; b[$*
2. *se  $f(x)$  è decrescente in  $]a; b[$ , allora  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]a; b[$*

### 2.11.5 Teorema di Cauchy

**Teorema** (Cauchy). *Siano  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  due funzioni tali che*

1.  *$f(x)$  e  $g(x)$  sono continue in  $[a; b]$*

2.  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili in  $]a; b[$

3.  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a; b[$

allora esiste almeno un punto  $c$  interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Ipotesi*

*Tesi*

1.  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

2.  $f(x)$  continua in  $[a; b]$

3.  $f(x)$  derivabile in  $]a; b[$

4.  $g(x)$  continua in  $[a; b]$

5.  $g(x)$  derivabile in  $]a; b[$

6.  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a; b[$

$$\exists c \in ]a; b[ : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

### 2.11.6 Teorema di De l'Hôpital

**N.B.:** Applicabile per la risoluzione delle forme di indecisione  $\left[\frac{0}{0}\right]$  o  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

**Teorema** (De l'Hôpital). Date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  definite nell'intorno  $I$  di un punto  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ , se

1.  $f(x)$  e  $g(x)$  sono continue in  $x_0$  e  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  (o  $\infty$ )

2.  $f(x)$  e  $g(x)$  sono derivabili in  $I(x_0) - \{x_0\}$

3.  $g'(x) \neq 0$  in  $I(x_0) - \{x_0\}$

4. esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Ipotesi*

*Tesi*

1.  $f : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$

2.  $g : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$

3.  $f(x)$  e  $g(x)$  continue in  $x_0$  e  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  (o  $\infty$ )

4.  $f(x)$  e  $g(x)$  derivabili in  $I(x_0) - \{x_0\}$

5.  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

6.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

#### Esempio 2.11.2.

Calcolare i seguenti limiti applicando il teorema di de l'Hôpital

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{LN}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{2}{1} \right] = 2$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LN}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LN}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Il teorema di de l'Hôpital può essere applicato più volte a condizione che ogni volta siano verificate le ipotesi.

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{LN}{\underset{H}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Questa è una valida dimostrazione del limite notevole, tuttavia la prova geometrica presentata precedentemente è maggiormente elegante e quindi è da preferirsi.

## 2.12 Studio della derivata

Grazie ai teoremi che abbiamo appena enunciato possiamo sfruttare la derivata per ottenere importanti informazioni sul grafico della funzione di partenza. Infatti per il corollario di Lagrange (Monotonia di funzioni derivabili), sappiamo che il segno della derivata è direttamente correlato alla monotonia della funzione. Inoltre, ricordando la definizione di derivata come coefficiente angolare della retta tangente, abbiamo che i punti in cui essa si annulla sono punti in cui la retta tangente al grafico è parallela all'asse delle ascisse. Di conseguenza definiamo questi come punti stazionari. Essi sono classificati in tre categorie:

### 2.12.1 Punti di massimo relativo

Si parla di punto di massimo relativo quando la derivata di una funzione è positiva in un intorno sinistro del punto stazionario e negativa in un intorno destro del punto stazionario.

### 2.12.2 Punti di minimo relativo

Si parla di punto di minimo relativo quando la derivata di una funzione è negativa in un intorno sinistro del punto stazionario e positiva in un intorno destro del punto stazionario.

### 2.12.3 Punti di flesso a tangente orizzontale

Si parla di punto di flesso a tangente orizzontale quando in un intorno completo del punto stazionario la derivata mantiene segno costante, per cui la funzione è sempre crescente o sempre decrescente.

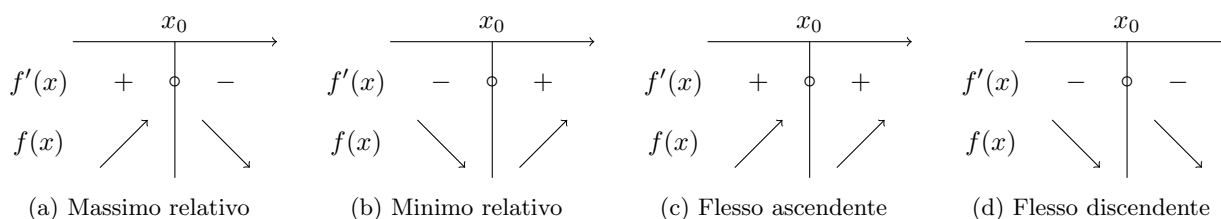


Figura 2.7

## 2.13 Derivata seconda e flessi a tangente obliqua

Lo studio della derivata seconda permette di ottenere informazioni sulla concavità e sulla convessità di una funzione. La derivata seconda si calcola semplicemente derivando la derivata prima. Quando la derivata seconda è positiva, la funzione di partenza è convessa (presenta una concavità verso l'alto); quando la derivata seconda è negativa, la funzione è concava (presenta una concavità verso il basso).

Quando la derivata seconda si annulla la funzione può presentare un punto di flesso, ovvero un punto in cui la funzione inverte la sua concavità (altrimenti può trattarsi di un punto stazionario). Se il flesso non è a tangente orizzontale si dice **a tangente obliqua**. La retta tangente può essere individuata applicando la formula per la retta tangente al grafico di una funzione in un punto.

## 2.14 Problemi di ottimizzazione

Si dice problema di ottimizzazione un problema nel quale si cerca di massimizzare o minimizzare una grandezza, ad esempio il volume di un solido, l'area di una superficie, ...

Vediamo un esempio di problema di ottimizzazione:

### Esempio 2.14.1.

Nella figura è rappresentato il grafico della funzione

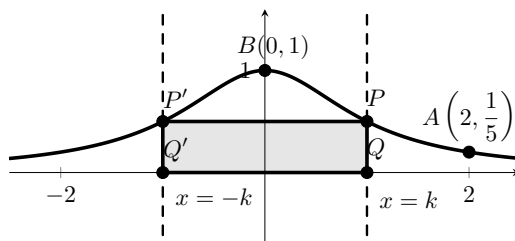
$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

simmetrica rispetto all'asse  $y$ .

- Trovare  $a, b, c$

La retta  $x = k$  e la sua simmetrica  $x = -k$  determinano il rettangolo  $PP'Q'Q$ :

- trovare per quale valore di  $k$  l'area  $PP'Q'Q$  è massima.



- Osserviamo che la funzione è pari, per cui si deve avere  $b = 0$ . Per cui la funzione è del tipo  $y = \frac{1}{ax^2 + c}$ . Imponiamo ora le condizioni di passaggio per i due punti  $A\left(2, \frac{1}{5}\right)$  e  $B(0, 1)$

$$\begin{array}{l} A\left(2, \frac{1}{5}\right) \\ B(0, 1) \end{array} \quad \begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{1}{4a + c} \\ 1 = \frac{1}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{1}{4a + 1} \\ c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 5 = 4a + 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Per cui otteniamo  $a = 1$  e  $c = 1$ . Di conseguenza la funzione cercata sarà

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Siccome  $P \in f$ , abbiamo che  $P\left(k, \frac{1}{k^2 + 1}\right)$ . Per simmetria troviamo  $P'\left(-k, \frac{1}{k^2 + 1}\right)$ .

Analogamente troviamo  $Q(k, 0)$  e  $Q'(-k, 0)$ . Per cui l'area del rettangolo in funzione di  $k$  è

$$b = \overline{OQ} = 2k \quad h = \overline{PQ} = \frac{1}{k^2 + 1}$$

$$A(k) = 2k \cdot \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{2k}{k^2 + 1}$$

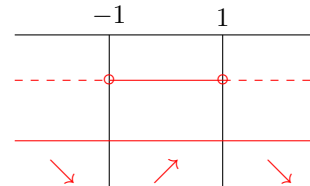
Ora dobbiamo trovare per quale valore di  $k$  la funzione area è massima, per cui quando la sua derivata si annulla:

$$A'(k) = \frac{2(k^2 + 1) - 2k(2k)}{(k^2 + 1)^2} = \frac{2k^2 + 2 - 4k^2}{(k^2 + 1)^2} = \frac{-2k^2 + 2}{(k^2 + 1)^2}$$

Osserviamo che la derivata si annulla per  $k = 1$  e  $k = -1$ . Dobbiamo trovare per quale dei due valori di  $k$  l'area è massima. Studiamo quindi il segno della derivata:

$$N : -2k^2 + 2 > 0 \quad k^2 < 1 \quad -1 < k < 1$$

$$D : (k^2 + 1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



La funzione presenta quindi un punto di massimo per  $k = 1$ .

## Capitolo 3

# Studio di funzione completo

Proponiamo qui una traccia per studiare una funzione al fine di produrre un grafico probabile. Non è necessario né svolgere tutti i punti né svolgerli in ordine. Si consiglia di iniziare da subito a tracciare il grafico e di aggiornarlo man mano in modo di verificare progressivamente tutte le parti dello studio di funzione. Di seguito si riportano alcuni esempi.

### 3.1 Traccia per lo studio di funzione completo

#### 3.1.1 Classificazione

Funzione	algebraica	razionale	intera
	trascendente	irrazionale	fratta

#### 3.1.2 Dominio

- Polinomiale :  $\mathbb{R}$
- Fratte: denominatore  $\neq 0$
- Irrazionali pari: radicano  $\geq 0$
- Irrazionali dispari:  $\mathbb{R}$
- Logaritmi: argomento  $> 0$
- Esponenziali:  $\mathbb{R}$
- Seno, coseno, arcotangente, arcocotangente:  $\mathbb{R}$
- Tangente:  $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$
- Cotangente:  $\mathbb{R} - k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$
- Arcoseno, arcocoseno:  $[-1; 1]$

#### 3.1.3 Simmetrie

CN:  $\forall x \in D, -x \in D$

- pari se  $f(-x) = f(x)$
- dispari se  $f(-x) = -f(x)$

#### 3.1.4 Intersezioni con gli assi cartesiani

$$f(x) \cap \text{asse } x : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad f(x) \cap \text{asse } y : \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

#### 3.1.5 Studio del segno

Risolvere la disequazione  $f(x) > 0$

### 3.1.6 Limiti, asintoti e discontinuità

Asintoto verticale	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
Asintoto orizzontale	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$
Asintoto obliquo	$\text{CN: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

**NB.:** Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

Prima specie	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \quad \text{salto} =  l_1 - l_2 $
Seconda specie	$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \nexists$
Terza specie	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \quad \vee \quad f(x_0) = \nexists$

### 3.1.7 Derivata prima

Le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = 0$$

identificano la presenza di

- massimi relativi
- minimi relativi
- flessi a tangente orizzontale

Per distinguerli è necessario studiare il segno della derivata: Lo studio della derivata prima fornisce anche

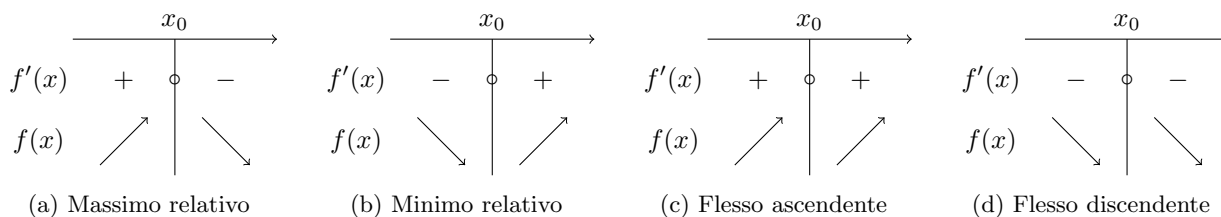


Figura 3.1

informazioni circa la monotonia della funzione.



### 3.1.8 Derivata seconda

Le soluzioni dell'equazione

$$f''(x) = 0$$

permettono di identificare i punti di flesso. A differenza della derivata prima permette di ottenere informazioni circa la presenza di flessi a tangente obliqua, per cui è necessario escludere tutte le soluzioni già analizzate in precedenza. La derivata seconda fornisce inoltre informazioni circa la concavità della funzione: verso l'alto quando la derivata seconda è positiva e verso il basso quando la derivata seconda è negativa. La funzione inverte la propria concavità in corrispondenza dei punti di flesso.

### 3.1.9 Estremi globali

In conclusione è opportuno elencare i punti di estremo globale, da ricercarsi tra gli estremi del dominio, i punti stazionari e i punti di non derivabilità.

## 3.2 Esempi

#### Esempio 3.2.1.

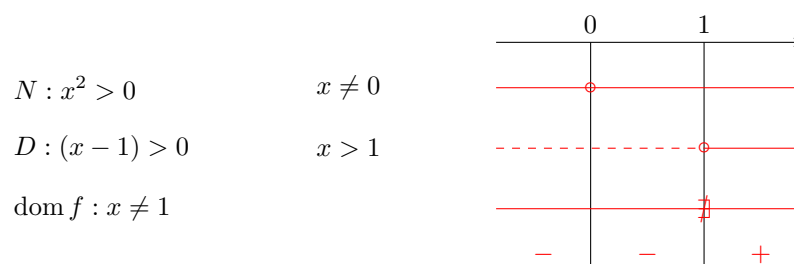
Studiare la funzione  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

1. **Classificazione:** funzione algebrica razionale fratta;
2. **Dominio:**  $\text{dom } f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$
3. **Simmetrie:** il dominio non è simmetrico, per cui la condizione necessaria non è rispettata, di conseguenza la funzione non è né pari né dispari.
4. **Intersezioni con gli assi:** è consigliabile partire dalle intersezioni con l'asse  $x$ , perchè potremmo trovare anche l'unica intersezione con l'asse  $y$  nel caso la funzione passi per l'origine.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La funzione passa appunto per l'origine  $O(0,0)$ , quindi non ci serve calcolare anche l'intersezione con l'asse  $y$ .

5. **Segno:**  $f(x) > 0$



6. **Limiti, asintoti e discontinuità:** Dobbiamo calcolare i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\boxed{x^2}}{\boxed{x} - 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{x^2}}{\boxed{x} - 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} +\infty$$

È verificata la condizione necessaria per la ricerca dell'asintoto obliquo, per cui procediamo con la ricerca dello stesso:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} 1.$$

Per cui la funzione ha un asintoto obliquo (destro e sinistro) alla retta  $y = x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[ \frac{1}{0^-} \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[ \frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

La funzione presenta quindi una discontinuità di seconda specie in  $x = 1$ .

7. **Derivata prima:** Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

e il suo dominio, che va confrontato con il dominio della funzione per verificare l'eventuale presenza di punti di non derivabilità:

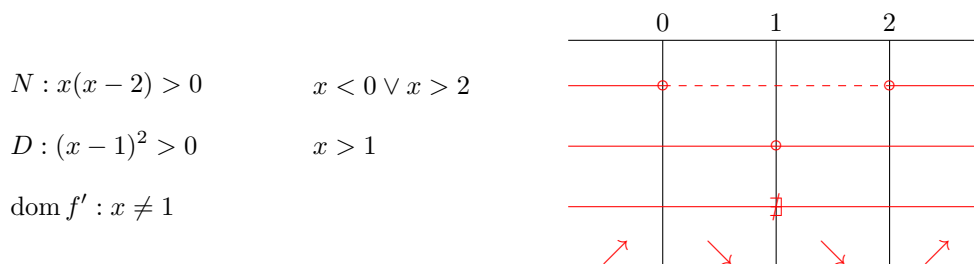
$$\text{dom } f' = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[ = \text{dom } f$$

la funzione è quindi derivabile su tutto il suo dominio.

Individuiamo ora i punti stazionari

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

e studiamo il segno della derivata per classificarli attraverso lo studio della monotonia della funzione:  
 $f'(x) > 0$

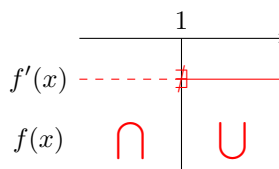


La funzione presenta quindi un massimo relativo in  $O(0,0)$  e un minimo relativo in  $M(2,4)$ .

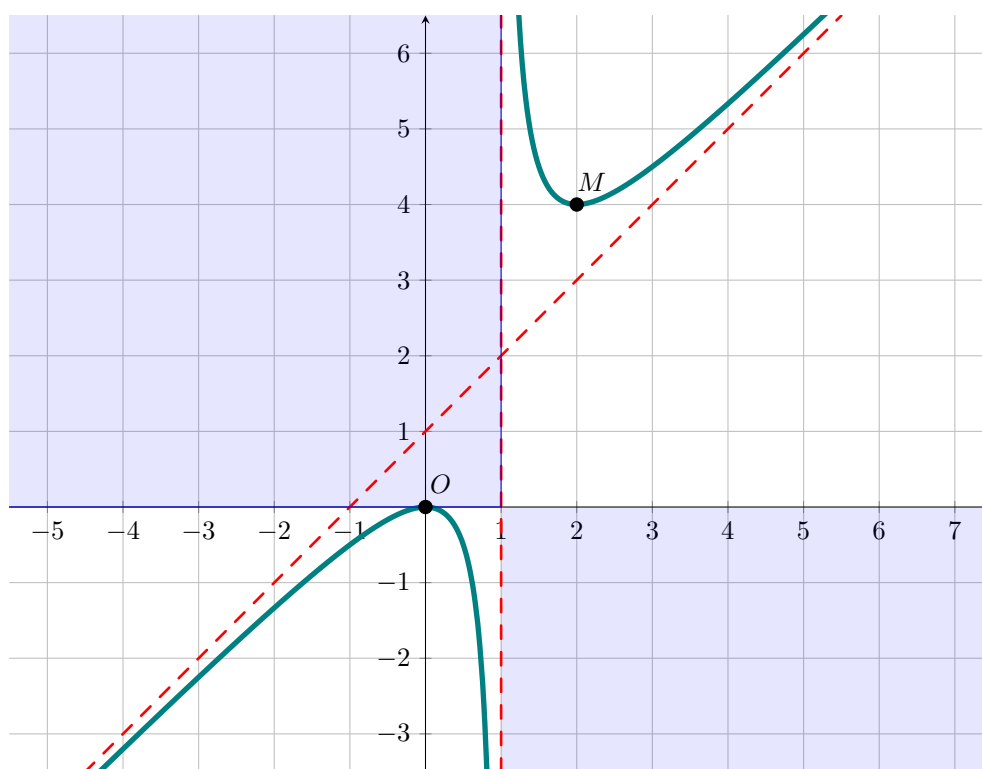
8. **Derivata seconda:** Calcoliamo la derivata seconda della funzione, derivando la derivata prima.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)(1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Ora ne studiamo il segno per determinare la concavità della funzione:



9. **Estremi globali:** per quanto detto precedentemente possiamo affermare che la funzione è illimitata sia inferiormente che superiormente. Non emette perciò estremi globali.
10. **Grafico:** ora abbiamo tutte le informazioni sufficienti per completare il grafico della funzione. Se abbiamo svolto il lavoro correttamente, ogni informazione acquisita deve essere stata confermata dalle precedenti. Si consiglia di aggiornare il disegno per ogni nuova informazione acquisita in modo da confrontarla con le precedenti. Anche per questo è stato scelto di proporre questo ordine.

**Esempio 3.2.2.**

Studiare la funzione  $y = x - \sqrt{x^2 + 4x}$ , tralasciando la derivata seconda.

1. **Classificazione:** funzione algebrica razionale fratta.
2. **Dominio:**  $x^3 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+4) \geq 0 \Rightarrow ]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$
3. **Simmetrie:** la condizione necessaria non è rispettata, per cui la funzione non è né pari né dispari.
4. **Intersezioni con gli assi:**

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 4x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 + 4x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

Per cui la funzione interseca gli assi cartesiani nell'origine  $O(0,0)$ .

5. **Segno:**  $f(x) > 0$

$$x - \sqrt{x^2 + 4x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 + 4x < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \vee x \geq 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Per cui la funzione è negativa in tutto il suo dominio.

6. **Limiti, asintoti e discontinuità:** Dobbiamo calcolare i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) = [-\infty + \infty] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \right) = -\infty$$

È verificata la condizione necessaria per la presenza dell'asintoto obliquo. Procediamo con la verifica:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{ger. \ x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\begin{aligned}
 q &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{x^2 - 4x} - x) = [-\infty + \infty] \stackrel{FI}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} \stackrel{ger.}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4x}{\sqrt{x^2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4x}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4x}{-x - x} = 2
 \end{aligned}$$

La funzione presenta quindi un asintoto obliquo sinistro alla retta  $y = 2x + 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) = -4^- \quad f(-4) = -4$$

la funzione è quindi continua da sinistra in  $x = -4$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) = 0^- \quad f(0) = 0$$

la funzione è quindi continua da destra in  $x = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x}) &= [-\infty + \infty] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x}{x + \sqrt{x^2 + 4x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x + \sqrt{x^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2
 \end{aligned}$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale destro alla retta  $y = 2$ .

## 7. Derivata prima:

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x}} (2x + 4) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}$$

Determiniamo il dominio della derivata prima  $\text{dom } f' = ]-\infty; -4[ \cup ]0; +\infty[$  e osserviamo che differisce dal dominio della funzione per i punti  $x = 0$  e  $x = -4$ . Essi saranno dei punti di non derivabilità da classificare. Posso applicare il criterio di derivabilità:

$$f'_-(-4) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \left[ \frac{2}{0^+} \right] = +\infty \quad f'_+(-4) \nexists \text{ per dominio}$$

la funzione presenta un punto a tangente verticale in  $x = -4$ ;

$$f'_+(0) \nexists \text{ per dominio} \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \left[ \frac{-2}{0^+} \right] = -\infty$$

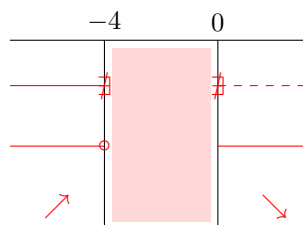
la funzione presenta un punto a tangente verticale in  $x = 0$ . Cerchiamo ora eventuali punti stazionari:

$$\frac{\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = 0 \quad \sqrt{x^2 + 4x} = x + 2 \quad \begin{cases} x(x+4) \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+4) \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

La funzione non ha quindi punti stazionari. Studiamo ora il segno della derivata:

$$N : \sqrt{x^2 + 4x} > x + 2 \quad (*) \quad x \leq -4$$

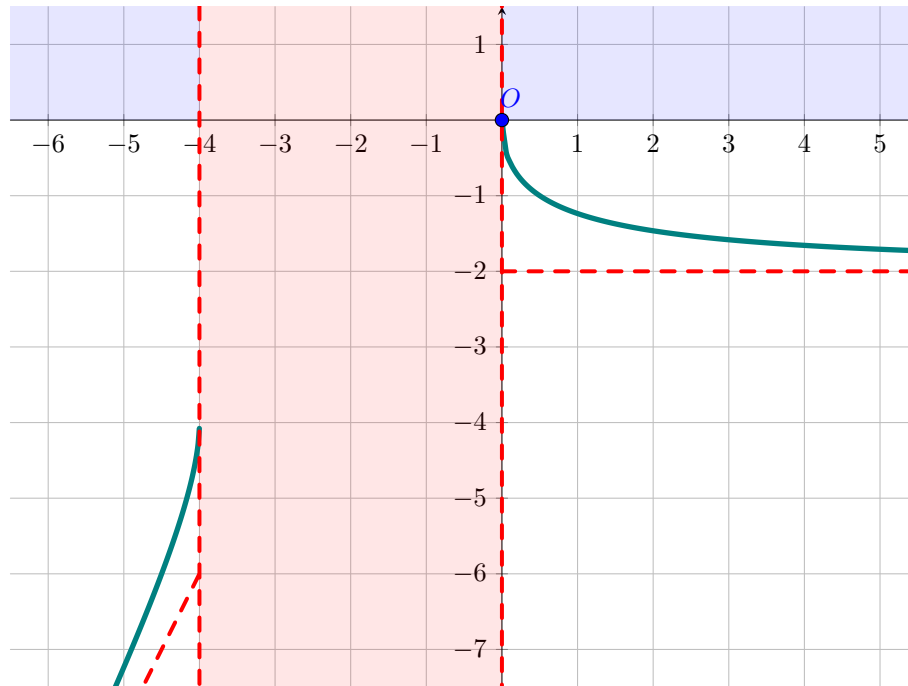
$$D : \sqrt{x^2 + 4x} > 0 \quad \forall x \in \text{dom } f'$$



$$\begin{aligned}
 (*) \quad & \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 4x > (x + 2)^2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 + 4x \geq 0 \\ x + 2 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad \emptyset \quad \cup \quad x \leq -4
 \end{aligned}$$

**9. Estremi globali:** La funzione ha punti di massimo globali in  $x = -4$  e  $x = 0$ ; è illimitata inferiormente.

10. Disegno:



### 3.3 Esercizi

**Esercizio 3.3.1.** Studiare la funzione  $g(x) = e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$ . Soluzione a pag. 51

**Esercizio 3.3.2.** Sia  $g(x) = |x - 1|e^{-\alpha x}$  ( $\alpha > 0$ ). Fornire un grafico qualitativo di  $g$ . Soluzione a pag. 53



## Capitolo 4

# Soluzioni degli esercizi

### Esercizio 2.9.1

*Dimostrazione.* Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \cos y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\arccos x]' = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\sin y}.$$

Ora rimane da determinare  $x$  in modo da poter esprimere esplicitamente la derivata. Per far ciò sfruttiamo la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$\sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y};$$

siccome la funzione arcocoseno è definita nell'intervallo  $[0, \pi]$  e in questo intervallo il seno è non negativo, scelgo il +.

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

per cui si ha

$$[\arccos x]' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1 - x^2}}$$

QED

### Esercizio 2.9.2

*Dimostrazione.* Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \cotg y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{1}{[\cotg y]'} = \frac{1}{-1 - \cotg^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

QED

### Esercizio 3.3.1

1. Dominio naturale:  $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. Simmetrie (pari/dispari):

Il dominio è asimmetrico rispetto allo 0 quindi non presenta simmetrie (né pari né dispari).

3. Segno di  $g(x)$ :

$g(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} g$ , inoltre l'argomento dell'esponenziale è sempre non negativo, quindi  $g(x) \geq e$  e

$g(x) < 1$  quando  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0 \Leftrightarrow x = -1$  (minimo globale).

4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti Riscriviamo la funzione sciogliendo il modulo per capire meglio l'andamento:

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x-1}} & x \leq 1 \vee x > 1 \\ e^{\frac{x+1}{1-x}} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = e^-$$

Infatti per  $x \rightarrow -\infty$  si ha  $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = e^+ \quad (\text{analogamente})$$

Quindi  $y = e$  è un asintoto orizzontale.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = +\infty \quad \text{Quindi } x = 1 \text{ è un asintoto verticale.}$$

5. Continuità:  $g$  è continua su  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

6. Derivabilità:  $g$  è derivabile su  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Siano  $f(x) := \frac{x+1}{x-1}$ ,  $A := ]-\infty; -1] \cup ]1, +\infty[$  e  $B := ]-1, 1[$ , allora

$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & x \in A \\ e^{-f(x)} & x \in B \end{cases}$$

- su  $A$

$$g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{f(x)}$$

- su  $B$

$$g'(x) = -e^{-f(x)} f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{-f(x)}$$

Per il corollario di Lagrange

$$g'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = -\frac{1}{2} \quad g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = \frac{1}{2}$$

Quindi la funzione presenta un punto angoloso, per cui non è derivabile.

7. Punti critici e segno di  $g'(x)$

$$g' < 0 \text{ su } A \quad \text{e} \quad g' > 0 \text{ su } B$$

Quindi  $f$  è crescente in  $A$  e decrescente in  $B$ . Inoltre  $g'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , quindi  $f$  non presenta punti critici.

8. Convessità e derivata seconda

- Su  $A$

$$g''(x) = (e^{f(x)})' \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} \cdot (f'(x))^2 + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)}((f'(x))^2 + f''(x))$$

- Su  $B$

$$g''(x) = (e^{-f(x)})' \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = e^{-f(x)} \cdot (f'(x))^2 - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = -e^{-f(x)}((f'(x))^2 - f''(x))$$

$$f''(x) = 3(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$

$$(f'(x))^2 + f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4 + 4x - 4}{(x-1)^4} = \frac{4x}{(x-1)^4}$$

$$(f'(x))^2 - f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4 - 4x + 4}{(x-1)^4} = 4 \frac{2-x}{(x-1)^4}$$

Su  $A$  la funzione è concava per  $x < -1$  e convessa per  $x > 1$ , mentre su  $B$  la funzione è sempre convessa.

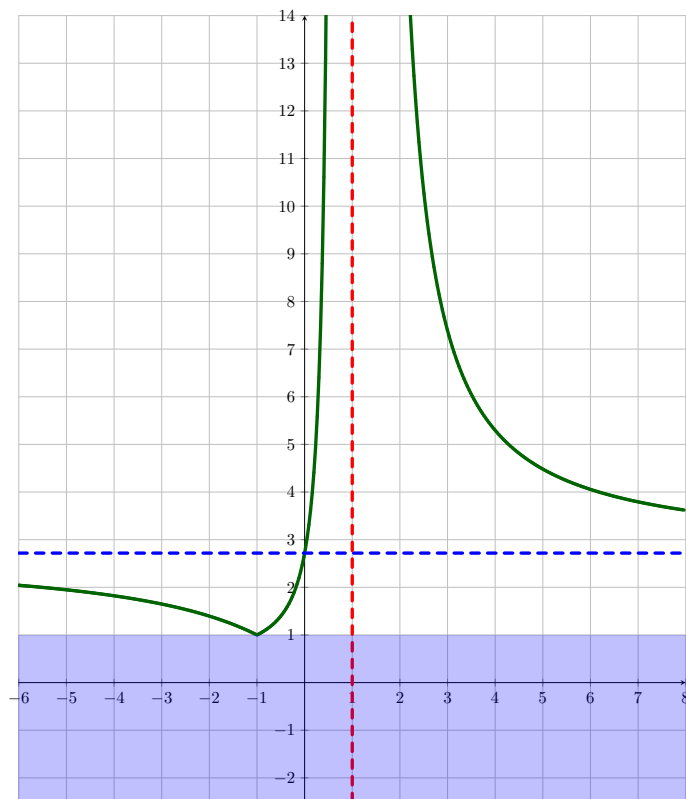


9. Esistenza di massimo e minimo globali:

La funzione presenta un minimo globale in  $x = -1$ , mentre non presenta massimi globali.

$$\inf_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = \min_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = 1$$

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = +\infty \quad \nexists \max_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$



### Esercizio 3.3.2

1. Dominio naturale:  $\text{dom } g = \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$

2. Simmetrie (pari/dispari)

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x-1|e^{\alpha x} \neq f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

Né pari né dispari.

3. Segno di  $g(x)$  Siccome è un prodotto di fattori sempre non negativi,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Inoltre si ha  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ , quindi  $x = 1$  è un punto di minimo assoluto per il grafico di  $g(x)$ .

4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = [0 \cdot \infty] = 0^+ \quad (y = 0 \text{ asintoto orizzontale destro})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = +\infty$$

5. Continuità: la funzione è continua su  $\mathbb{R}$ .

6. Derivabilità Sciogliamo il modulo

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Calcolo ora la derivata

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x > 1 \\ -(e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x}) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) & \text{se } x > 1 \\ e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$g'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) = e^{-\alpha}$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 1) = -e^{-\alpha}$$

$g$  non è quindi derivabile in  $x = 1$ , ma presenta un punto angoloso.

7. Punti critici e segno di  $g'(x)$

- Se  $x > 1$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha x + \alpha > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

- Se  $x < 1$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x - \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

La funzione è crescente in  $]1, 1 + \frac{1}{\alpha}[$  e decrescente in  $]1 + \frac{1}{\alpha}, +\infty[ \cup ]-\infty, 1[$ . Ha inoltre un massimo relativo in  $1 + \frac{1}{\alpha}$ .

8. Convessità e derivata seconda

- Se  $x > 1$

$$g''(x) = -\alpha e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) - \alpha e^{-\alpha x} = \alpha e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 2)$$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x > \alpha + 2 \Leftrightarrow x > \frac{2 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$$

- Se  $x < 1$

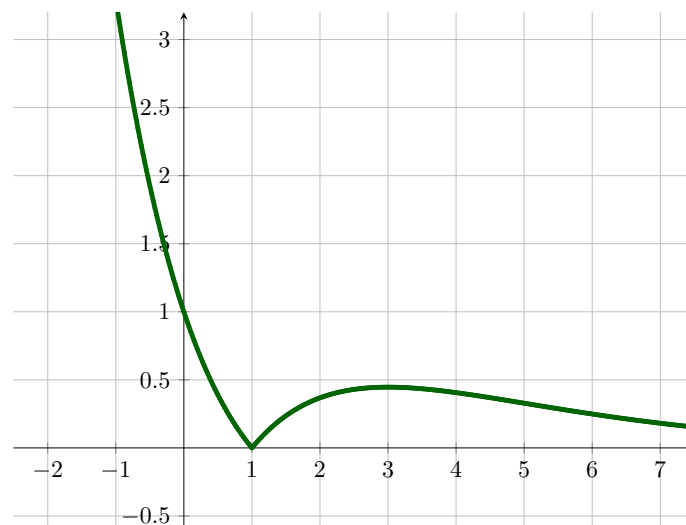
$$g''(x) = +\alpha e^{-\alpha x}(1 - \alpha x + \alpha) + \alpha e^{-\alpha x} = -\alpha e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 2)$$

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow -\alpha x > \alpha + 2 \Leftrightarrow x < \frac{2 + \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$$

La funzione è convessa in  $]1, 1 + \frac{2}{\alpha}[$  e concava altrove. Presenta un flesso in  $1 + \frac{2}{\alpha}$ .

9. Esistenza di massimo e minimo globali:

La funzione presenta un minimo globale in  $P(1, 0)$  e non presenta massimi globali.



La funzione studiata con  $\alpha = \frac{1}{2}$