Teoremi di Analisi

Davide Borra - 5LA

A.S. 2021-2022

Indice

v. 3.1

1 Primi teoremi sui limiti

N.B.: I seguenti teoremi valgono per ogni tipologia di limite, sia finito che infinito, e in ogni intorno, sia di un numero reale (anche destro e sinistro) sia di infinito.

1.1 Teorema di unicità del limite

Teorema (Unicità del limite)**.** *Se una funzione $f(x)$ ha limite finito per x che tende a x_0, allora tale limite è unico.*

Ipotesi	*Tesi*
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$	l è unico

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Si supponga che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l'$$

con $l \neq l'$ e $l < l'$. Siccome ε è una quantità arbitraria è possibile porre

$$0 < \varepsilon < \frac{l - l'}{2}$$

Si applicano ora le definizioni di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l'| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome l'intersezione di due intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0, devono valere entrambe le definizioni:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Ricordando che $l - \varepsilon < l' - \varepsilon < l + \varepsilon < l' + \varepsilon$ si ottiene:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon$$

$$-2\varepsilon < l - l'$$

$$2\varepsilon > l' - l$$

$$\varepsilon > \frac{l' - l}{2}$$

Assurdo: contrasta con quanto posto all'inizio. L'ipotesi per assurdo è falsa, quindi la tesi è dimostrata.

QED

1.2 Teorema di permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno)**.** *Se il limite di un funzione per x che tende a x_0 è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 in cui $f(x)$ e l sono entrambi positivi o entrambi negativi.*

Ipotesi	*Tesi*
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad l \neq 0$	$\exists I(x_0) : f(x)$ e l sono concordi $\;\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome ε è un numero positivo arbitrario pongo

$$\varepsilon = |l|$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

- se $l > 0 \rightarrow \varepsilon = l$
$$l - l < f(x) < l + l$$
$$0 < f(x) < 2l$$
da cui la tesi
$$f(x) > 0$$
- se $l < 0 \rightarrow \varepsilon = -l$
$$l + l < f(x) < l - l$$
$$2l < f(x) < 0$$
da cui la tesi
$$f(x) < 0$$

QED

Teorema (Inverso della permanenza del segno)**.** *Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 è*

- *positiva o nulla, allora $l \geq 0 \vee l = +\infty$;*
- *negativa o nulla, allora $l \leq 0 \vee l = -\infty$.*

1.3 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Teorema (Confronto)**.** *Siano $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0. Se per ogni $x \in I(x_0)$ è verificato che*
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$
e
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$
allora è verificato che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
.

Ipotesi

1. $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite nello stesso intorno $I(x_0)$
2. $\forall x \in I(x_0) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Tesi
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi 3:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$
Di conseguenza
$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$
da cui, per ipotesi 1,
$$l - \varepsilon < g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

La precedente scrittura è equivalente a

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

da cui la tesi.

QED

2 Continuità e funzioni inverse

2.1 Continuità della funzione inversa

Teorema (Continuità della funzione inversa). *Se $y = f(x)$ è una funzione biiettiva e continua in un intervallo D, allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel codominio di f.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : D \to C$ biiettiva e continua in D	$f^{-1} : C \to D$ continua in C

2.2 Condizione di invertibilità per funzioni continue

Teorema (Invertibilità di funzioni continue). *Sia I un intervallo (limitato o illimitato) e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in I	f è invertibile

3 Teoremi sulle funzioni continue

3.1 Teorema di Weistrass

Teorema (Weistrass). *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$	$\exists c, d \in [a, b] : f(c) = min\{f\} \wedge f(d) = max\{f\}$

3.2 Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)

Teorema (Bolzano). *Se f è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui $f(c) = 0$.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesi

$\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$

3.3 Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

Teorema (Darbaux). *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

Ipotesi

1. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$
2. $m = min\{[a;b]\}$ $\quad M = max\{[a;b]\}$

Tesi

$\exists x \in [a,b] : f(x) = k \forall k \in [m;M]$

4 Legame tra continuità e derivabilità

4.1 Continuità delle funzioni derivabili

Teorema (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 allora in quel punto la funzione è anche continua.*

Ipotesi
$\exists f'(x_0)$

Tesi
$f(x)$ è continua in x_0

Dimostrazione.

$$f(x_0 + h) = f(x_0 + h)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0), \qquad \text{con } h \neq 0$$

Calcolo i limiti dei membri per $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \right]$$

Siccome a secondo membro il limite è la somma di limiti finiti, posso separarli

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + \lim_{h \to 0} f(x_0)$$

Siccome non si presentano forme di indecisione posso separare:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f'(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} f(x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

pongo $x_0 + h = x$, per cui $h = x - x_0$. Se $h \to 0$, $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

QED

4.2 Criterio di derivabilità

Teorema (Criterio di derivabilità)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$ tranne al più x_0 (con $x_0 \in]a;b[$). Allora*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \quad \wedge \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

In particolare se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono finite, allora la funzione è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a;b]$
2. $f(x)$ derivabile in $]a;b[-\{x_0\}$ (con $x_0 \in]a;b[$)

Tesi

1. $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$
2. $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$

Ipotesi 2

$f'_+(x) = f'_-(x)$ e finite

Tesi 2

1. $f(x)$ derivabile in x_0
2. $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

5 Teoremi del calcolo differenziale

5.1 Teorema di Fermat

Teorema (Fermat)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$, se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo nel nel punto x_0 interno ad $[a;b]$, allora la derivata della funzione in quel punto si annulla.*

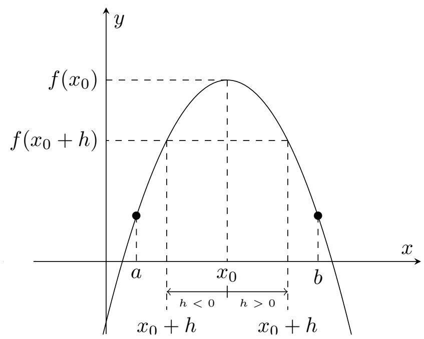
Ipotesi

1. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ derivabile in $]a;b[$
3. x_0 punto di massimo o minimo relativo ($x_0 \in [a;b]$)

Tesi

$f'(x_0) = 0$

N.B.: La dimostrazione è svolta considerando x_0 punto di massimo, ma lo svolgimento è analogo nel caso di un punto di minimo.



Dimostrazione. Per definizione di punto di massimo relativo

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I(x_0)$$

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

Calcolo i rapporti incrementali da sinistra e da destra:

$$\mathbf{h > 0} \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\mathbf{h < 0} \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Siccome $f(x)$ è derivabile per ipotesi 2, per il criterio di derivabilità

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Di conseguenza è necessario che

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$$

. QED

5.2 Teorema di Rolle

Teorema (Rolle)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ tale che*

1. *$f(x)$ è continua in $[a; b]$*
2. *$f(x)$ è derivabile in $]a; b[$*
3. *$f(a) = f(b)$*

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale risulta $f'(c) = 0$

Ipotesi	*Tesi*
1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ 2. $f(x)$ continua in $[a; b]$ 3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$ 4. $f(a) = f(b)$	$f'(c) = 0$

Dimostrazione. Dato che per ipotesi $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ allora per il teorema di Weistrass $f(x)$ ammette massimo e minimo **assoluti** in tale intervallo, cioè

$$\exists c, d \in [a; b] : m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$$

Possiamo distinguere due casi:

1. $\mathbf{m = M} \to m = f(c) = f(x) = f(d) = M$
   Se m e M coincidono vuol dire che $f(x)$ assume sempre lo stesso valore. Dato che $f(x)$ deve essere compresa tra m e M
   $$m \leq f(x) \leq M$$
   ma siccome $m = M$ allora $f(x) = m = M \quad \forall x \in [a; b]$, per cui $f(x)$ è costante. Siccome la derivata di una funzione costante è nulla
   $$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$$
   .

2. $\mathbf{m < M}$, quindi $f(x)$ non è costante ($f(c) \neq f(d)$) e dato che sappiamo che $f(a) = f(b)$ allora **almeno** uno dei punti c e d deve essere interno all'intervallo $[a; b]$.
   Supponiamo che $c \in]a; b[$, quindi che c non sia un estremo. In questo caso è possibile determinare un numero h tale che $c - h$ e $c + h$ appartengano entrambi all'intervallo $[a; b]$. Siccome c è un punto di minimo vale la relazione
   $$f(x) \geq f(c) \qquad \forall x \in I(c)$$
   $$f(c + x) \geq f(c)$$
   $$f(c + h) - f(c) \geq 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$
   Calcolo i rapporti incrementali da sinistra e da destra:
   $$\mathbf{h > 0} \qquad \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$
   $$\mathbf{h < 0} \qquad \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$
   Per l'inverso del teorema della permanenza del segno:
   $$f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$
   $$f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Siccome $f(x)$ è derivabile per ipotesi 3, per il criterio di derivabilità

$$f'_+(c) = f'_-(c)$$

Di conseguenza è necessario che

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c) = 0$$

La dimostrazione è analoga nel caso in cui d e non c appartenga all'intervallo $]a; b[$, e quindi si tratti di un punto di massimo e non di minimo.

QED

5.3 Teorema di Lagrange

Teorema (Lagrange)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ tale che*

1. *$f(x)$ è continua in $[a; b]$*
2. *$f(x)$ è derivabile in $]a; b[$*

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$

Tesi

$$\exists c \in \ ]a; b[\ : \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Conseguenze del teorema di Lagrange

5.3.1 Funzioni con derivata nulla

Teorema (Derivata nulla)**.** *Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e la sua derivata è nulla per ogni punto interno all'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a; b]$*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in [a; b]$

Tesi

$$f(x) = k \ \ \forall x \in [a; b]$$

5.3.2 Funzioni con derivate uguali

Teorema (Differenza costante)**.** *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$ e tali che $f'(x) = g'(x) \ \ \forall x \in]a; b[$, allora esse differiscono per una costante.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $g(x)$ continua in $[a; b]$
5. $g(x)$ derivabile in $]a; b[$
6. $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Tesi

$f(x) - g(x) = k \quad \forall x \in [a; b]$

5.3.3 Monotonia di funzioni derivabili

Teorema (Monotonia di funzioni derivabili)**.** *Data una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo $]a; b[$:*

1. *se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a; b[$, allora $f(x)$ è crescente in $]a; b[$*
2. *se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a; b[$, allora $f(x)$ è decrescente in $]a; b[$*

Teorema (Inverso della monotonia di funzioni derivabili)**.** *Data una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo $]a; b[$:*

1. *se $f(x)$ è crescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a; b[$*
2. *se $f(x)$ è decrescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a; b[$*

5.4 Teorema di Cauchy

Teorema (Cauchy)**.** *Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni tali che*

1. *$f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a; b]$*
2. *$f(x)$ e $g(x)$ sono è derivabili in $]a; b[$*
3. *$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$*

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $g(x)$ continua in $[a; b]$
5. $g(x)$ derivabile in $]a; b[$
6. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$

Tesi

$\exists c \in \;]a; b[\;:\; \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

5.5 Teorema di De l'Hôpital

N.B.: Applicabile per la risoluzione delle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Teorema (De l'Hôpital)**.** *Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite nell'intorno I di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, se*

1. *$f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (o ∞)*
2. *$f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I(x_0) - \{x_0\}$*
3. *$g'(x) \neq 0$ in $I(x_0) - \{x_0\}$*
4. *esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*

Allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ipotesi

1. $f : I(x_0) \to \mathbb{R}$
2. $g : I(x_0) \to \mathbb{R}$
3. $f(x)$ e $g(x)$ continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (o ∞)
4. $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $I(x_0) - \{x_0\}$
5. $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I(x_0) - \{x_0\}$
6. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Tesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6 Teoremi sugli integrali

6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema (Torricelli-Barrow)**.** *Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x)$$

ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a; b]$
2. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Tesi

1. $\exists\ F'(x)$
2. $F'(x) = f(x)$