Geometria analitica nello spazio

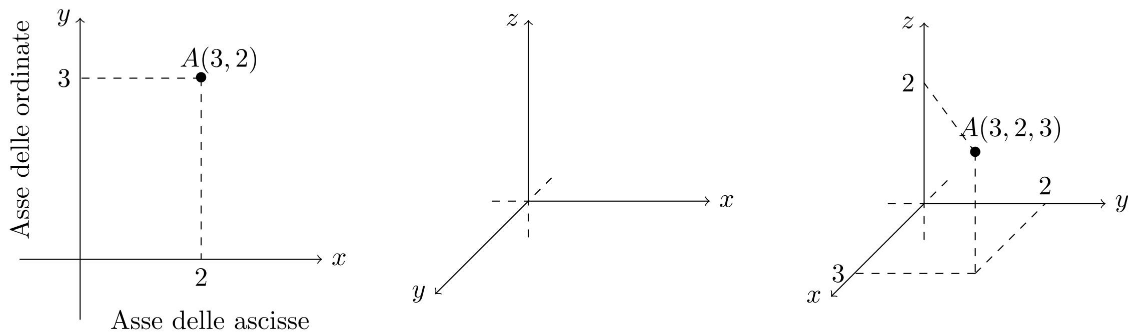
Davide Borra - 5LA

A.S. 2021-2022

Indice

1 Le coordinate cartesiane

Un punto nel piano è identificato univocamente da una coppia di numeri reali, corrispondenti alla distanza delle sue proiezioni sugli assi dall'intersezione degli stessi. Nello spazio i punti vengono individuati nello stesso modo, ma è necessario introdurre un'ulteriore asse (e di conseguenza un'ulteriore coordinata). Un punto nello spazio è individuato quindi tramite una terna ordinata di numeri reali (x, y, z), chiamati rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota*.

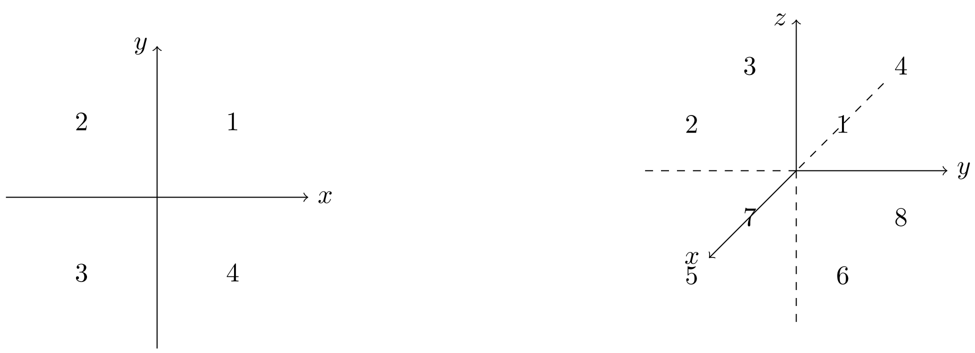


(a) Nel piano (b) Sistema sinistro (c) Sistema destro (il più utilizzato)

Figura 1: Coordinate cartesiane

1.1 Quadranti e ottanti

Come il piano cartesiano è diviso in 4 quandranti (Fig. 2a) dagli assi cartesiani, lo spazio cartesiano è diviso in 8 ottanti (Fig. 2b).



(a) Quadranti (b) Ottanti

Figura 2: Suddivisione del piano e dello spazio cartesiano

1.2 Piani coordinati

Esistono alcuni piani particolari, detti coorinati, in cui una delle variabili assume il valore 0. Essi sono:

- il piano xy quando $z = 0$ (Fig. 3). È costituito da punti di coordinate $(x, y, 0)$.
- il piano xz quando $y = 0$. È costituito da punti di coordinate $(x, 0, z)$.
- il piano zy quando $x = 0$. È costituito da punti di coordinate $(0, y, z)$.

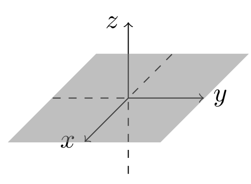


Figura 3: Il piano coordinato xy

1.3 Assi coordinati

Analogamente i tre assi cartesiani sono detti assi coordinati:

$$\text{Asse } x: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Asse } y: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Asse } z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

1.4 Distanza tra due punti

Consideriamo due punti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, la distanza tra essi è

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

La formula si dimostra facilmente tramite l'utilizzo del Teorema di Pitagora.

1.5 Punti notevoli

Ricorda:

Punto nottevole	Segmenti ceviani corrispondenti
Baricentro	Mediane
Circocentro	Assi
Ortocentro	Altezze
Incentro	Bisettrici

1.5.1 Punto medio

Dati due punti $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, le coordinate del punto medio $M(x_M, y_M, z_M)$ sono date dalla media delle coordinate dei due punti.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

1.5.2 Baricentro

Dato un triangolo ABC di vertici $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, le coordinate del baricentro $G(x_G, y_G, z_G)$ sono date dalla media delle coordinate dei tre punti:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \qquad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

2 Vettori

2.1 Vettori nel piano

Si definisce **vettore** un segmento orientato che ha un estremo nell'origine. Esso è individuato da una terna ordinata di coordinate, dette componenti, che identificano l'altro estremo del vettore, verso cui è orientato.
Si dice **versore** un vettore di lunghezza unitaria parallelo ad un asse cartesiano. I versori nel piano sono $\overrightarrow{i}(1, 0)$ e $\overrightarrow{j}(1, 0)$.
I vettori possono essere rappresentati due in diversi modi:

- Tramite una terna di coordinate: $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$
- Tramite i versori: $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{i} + v_y\overrightarrow{j}$

I vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ soo detti vettori componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$. Il modulo di un vettore è la lunghezza del segmento orentato, per cui si calcola attraverso la formula per la distanza tra due punti:

$$|\overrightarrow{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

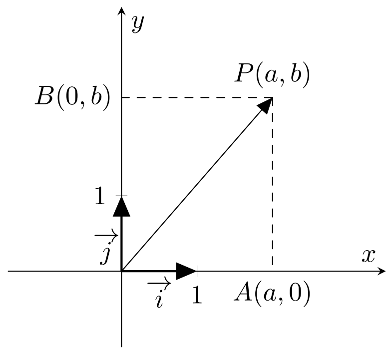


Figura 4: Vettori nel piano

2.2 Vettori nello spazio

Per passare dal piano allo spazio è necessario introdurre una nuova coordinata, z. Di conseguenza è necessario introdurre anche una nuova componente dei vettori e un nuovo versore. I versori nello spazio saranno quindi:

- $\overrightarrow{i}(1, 0, 0)$, associato all'asse x
- $\overrightarrow{j}(0, 1, 0)$, associato all'asse y
- $\overrightarrow{k}(0, 0, 1)$, associato all'asse z

I vettori saranno quindi individuati da una terna ordinata di numeri reali o da una somma di componenti:

$$\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$$

$$\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{i} + v_y\overrightarrow{j} + v_z\overrightarrow{k}$$

Valgono ancora tutte le proprietà dei vettori nel piano:

a) il modulo del vettore $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$ è dato da

$$|\overrightarrow{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

b) le componenti di un vettore $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z) = \overrightarrow{AB}$ con $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ sono

$$\begin{aligned} v_x &= x_B - x_A \\ v_y &= y_B - y_A \\ v_z &= z_B - z_A \end{aligned}$$

c) dati due vettori $\overrightarrow{v}(v_x, v_y, v_z)$ e $\overrightarrow{\mu}(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\mu}(v_x + \mu_x, v_y + \mu_y, v_z + \mu_z)$$

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{\mu}(v_x - \mu_x, v_y - \mu_y, v_z - \mu_z)$$

$$k\overrightarrow{\mu}(k\mu_x, k\mu_y, k\mu_z)$$

$$\text{prodotto scalare:} \quad \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mu} = v_x\mu_x + v_y\mu_y + v_z\mu_z$$

2.3 Vettori paralleli e perpendicolari

DEF. *Due vettori si dicono* ***paralleli*** *quando hanno, una volta traslati nell'origine, la stessa retta d'azione, ovvero giacciono sulla stessa retta (indipendentemente dal verso). Questo significa che un vettore è multiplo dell'altro.*

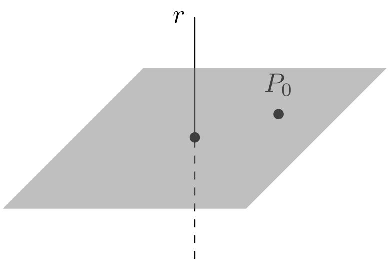
$$\overrightarrow{v} // \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = k\overrightarrow{w}$$

Per determinare quando due vettori sono perpendicolari invece è possibile sfruttare una caratteristica del prodotto scalare: esso infatti assume valore nullo quando i due vettori considerati sono perpendicolari. Di conseguenza:

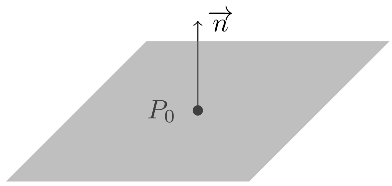
$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$$

3 Piani

Dati una retta r e un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ qualsiasi, esiste uno e un solo piano passante per P e perpendicolare a r. Il piano resta univocamente determinato se alla retta si sostituisce un vettore parallelo alla stessa, detto **vettore normale del piano** $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.



(a) Retta perpendicolare e punto



(b) Vettore normale e punto

Figura 5: Metodi di individuazione di un piano

Un punto $P(x, y, z)$ appastiene al piano π se e solo se $\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n}$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n}$$
$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$
$$P(x, y, z) \qquad P_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \qquad \overrightarrow{n}(a, b, c)$$
$$(a, b, c)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

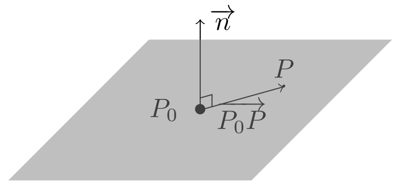


Figura 6: Definizione del piano

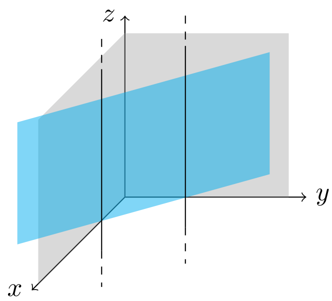
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{equazione del piano passante per un punto dao vettore normale}$$
$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0)$$
$$\mathbf{ax} + \mathbf{by} + \mathbf{cz} + \mathbf{d} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{equazione del piano in forma cartesiana}$$

3.1 Posizioni notevoli dei piani

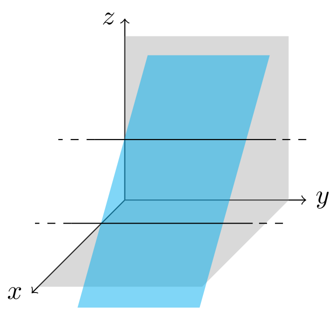
$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

Se $d = 0$ il piano passa per l'origine.

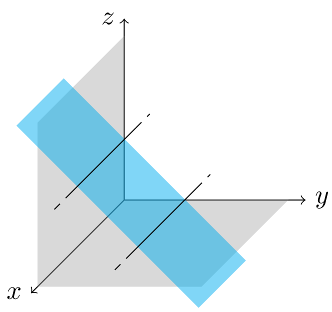
Se nell'equazione del piano almeno uno dei coefficienti a, b o c è nullo, si ottiene un piano che risulta parallelo all'asse corrispondente alla variabile mancante.



(a) $ax + by + d = 0$
Piano parallelo all'asse z
Interseca i piani xz e yz lungo rette parallele all'asse z.



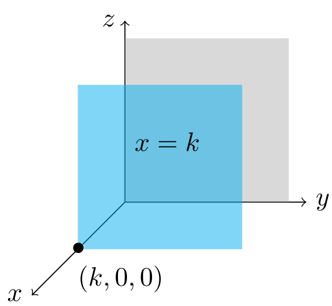
(b) $ax + cz + d = 0$
Piano parallelo all'asse y
Interseca i piani xy e yz lungo rette parallele all'asse y.



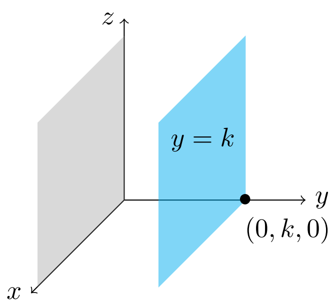
(c) $by + cz + d = 0$
Piano parallelo all'asse x
Interseca i piani xy e xz lungo rette parallele all'asse x.

Figura 7: Piani paralleli agli assi coordinati

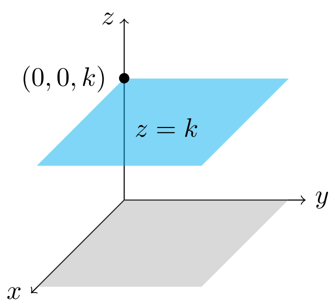
Se nell'equazione del piano due (soli) dei coefficienti a, b o c sono nulli, si ottiene un piano parallelo ad uno dei piani coordinati.



(a) Piano parallelo al piano yz



(b) Piano parallelo al piano xz



(c) Piano parallelo al piano xy

Figura 8: Piani paralleli ai piani coordinati

3.2 Equazione del piano passante per tre punti

Per individuare l'equazione del piano individuato da tre punti è sufficiente sostituire le coordinate dei punti nell'equazione del piano e risolvere il sistema. Siccome si tratta di un sistema di tre equazioni in 4 incongnite, alla fine si riuscirà a scrivere tre incognite in funzione dell'altra. Per quest'ultima andrà quindi scelto un valore arbitrario diverso da 0.

Esempio 3.1. *Scrivere l'equazione del piano passante per i punti* $A(1,0,2)$, $B(0,1,3)$ *e* $C(0,0,3)$

Consideriamo l'equazione del piano in forma cartesiana

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

e sostituiamo al suo interno le coordinate dei punti:

$$\begin{matrix} A(1,0,2) \\ B(0,1,3) \\ C(0,0,3) \end{matrix} \begin{cases} a(1) + b(0) + c(2) + d = 0 \\ a(0) + b(1) + c(3) + d = 0 \\ a(0) + b(0) + c(3) + d = 0 \end{cases}$$

Ora risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} a + 2c + d = 0 \\ b + 3c + d = 0 \\ 3c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2c - d \\ b - d + d = 0 \\ 3c = -d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2c - d \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3}d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}d - d = -\frac{1}{3}d \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3}d \end{cases}$$

Per comodità scelgo di porre $d = -3$, ma potrei scegliere un qualsiasi altro numero.

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}(-3) = 1 \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3}(-3) = 1d = -3 \end{cases}$$

$$\pi : x + z - 3 = 0$$

3.3 Piani paralleli e perpendicolari

Siccome un piano è individuato dal suo vettore normale, esso può essere utilizzato anche per descriverne il parallelismo o la perpendicolarità con altri piani. In particolare:

- i vettori normali di due piani paralleli sono paralleli (CNS)
- i vettori normali di due piani perpendicolari sono perpendicolari (CNS)

(a) Piani paralleli: $\overrightarrow{n}' = k\overrightarrow{n}$
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

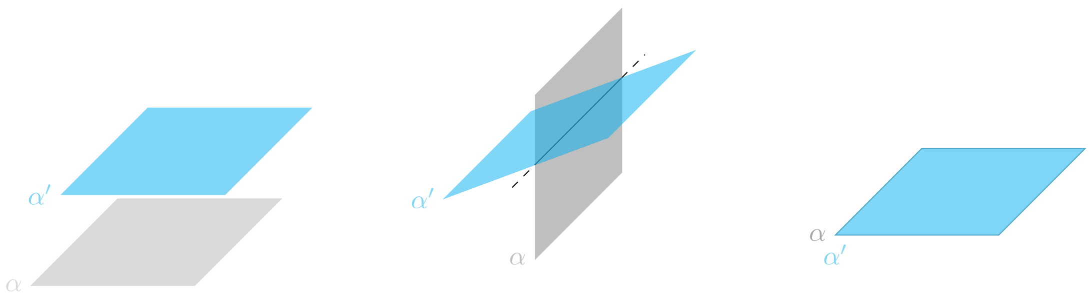
(b) Piani perpendicolari: $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}'$
$aa' + bb' + cc' = 0$

Figura 9: Piani paralleli e perpendicolari

3.4 Posizioni reciproche tra due piani

Dati due pani α e α' di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, essi sono

- Paralleli distinti se il sistema delle loro equazioni non ammette soluzioni, ovvero $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$
- Secanti se il sistema delle loro equazioni ammette infinite soluzioni, tutte appartenenti ad una retta
- Paralleli coincidenti se il sistea delle loro equazioni è verificato per ogni terna (x, y, z) che soddisfa una delle due equazioni, ovvero $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$



(a) Piani paralleli distinti (b) Piani secanti (c) Piani paralleli coincidenti

Figura 10: Posizioni reciproche di due piani

3.5 Area di un triangolo nello spazio

Dato un triangolo di vertici $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, la sua area è data dalla formula

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2}$$

4 Rette

4.1 Equazione parametrica

Una retta nello spazio è definita se si conoscono un suo punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e un vettore $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ che ne identifica la direzione. Allora un punto generico $P(x, y, z)$ appartiene alla retta se e solo se

$$\overrightarrow{P_0P}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) // \overrightarrow{v}(l, m, n)$$

ovvero

$$\overrightarrow{P_0P} = k\overrightarrow{v} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = kl \\ y - y_0 = km \\ z - z_0 = kn \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{x = x_0 + kl} \\ \mathbf{y = y_0 + km} \\ \mathbf{z = z_0 + kn} \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

DEF. *I coefficienti l, m, n si dicono **coefficienti direttivi** perchè determinano la direzione della retta.*

DEF. *Il vettore $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ si chiama **vettore direzione**.*

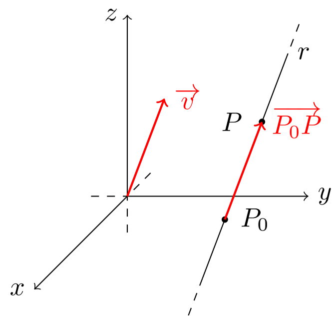


Figura 11: Definizione di una retta nello spazio

4.1.1 Rette su GeoGebra

GeoGebra utilizza un formato particolare per visualizzare le equazioni delle rette:

$$r : X = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(l, m, n)$$

in cui (x_0, y_0, z_0) sono le coordinate di un punto appartenente alla retta e l, m e n sono i coefficienti direttivi.

4.2 Equazione cartesiana

Se tutti i coefficienti direttivi sono **non nulli**, si può scrivere l'equazione della retta in forma cartesiana:

$$\begin{cases} x = x_0 + kl \\ y = y_0 + km \\ z = z_0 + kn \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = k & l \neq 0 \\ \dfrac{y - y_0}{m} = k & m \neq 0 \\ \dfrac{z - z_0}{n} = k & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \quad \text{equazione cartesiana della retta}$$

4.3 Equazione come intersezione di due piani

Una retta può essere determinata anche tramite l'intersezione di due piani distinti e non paralleli

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

4.4 Equazione della retta passante per due punti

La retta passante per due punti qualsiasi $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ ha vettore direzione

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

. La sua equazione può essere quindi individuata come visto ai punti precedenti:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

4.4.1 Condizioni di allineamento

Per verificare se tre punti sono allineati è sufficiente determinare la retta passante per due di loro e sostituire le coordinate del terzo all'interno dell'equazione. I tre punti sono allineati se e solo se tutte le uguaglianze sono verificate. In particolare i punti $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $P(x_P, y_P, z_P)$ sono allineati se e solo se

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z_P - z_A}{z_B - z_A}$$

4.5 Fasci di piani aventi per asse una retta data

DEF. *Un fascio di piani è un insieme contenente tutti e soli i piani aventi per asse una retta data, detta asse del fascio.*

Se la retta è individuata come intersezione di due piani

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Il fascio di piani può essere scritto per combinazione lineare come:

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

Al variare del parametro k, l'equazione descrive tutti i piani appartenenti al fascio, fatta eccezione per il secondo piano generatore, ottenibile solo per $k = \pm\infty$, analogamente a quanto avviene per i fasci di rette

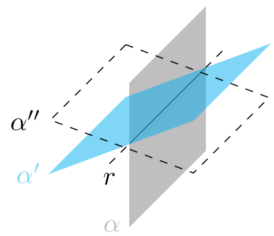


Figura 12: Fascio di piani di asse r

4.6 Posizioni reciproche di due rette

4.6.1 Rette parallele

Date due rette r e s i cui vettori direzione sono rispettivamente $\vec{v}(l, m, n)$ e $\vec{w}(l', m', n')$, le due rette sono parallele se e solo se i loro vettori direzione sono paralleli:

$$r // s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} // \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = k\vec{w}, \text{ con } k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$$

4.6.2 Rette perpendicolari

Date due rette r e s i cui vettori direzione sono rispettivamente $\vec{v}(l, m, n)$ e $\vec{w}(l', m', n')$, le due rette sono perpendicolari se e solo se i loro vettori direzione sono perpendicolari:

$$r \perp s \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ll' + mm' + nn' = 0$$

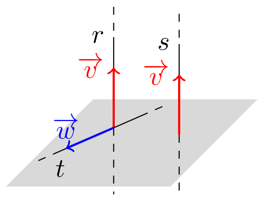


Figura 13: $r // s$ - $r \perp t$ - $s \perp t$
r e t sono complanari
r e s sono complanari
s e t sono sghembe

4.6.3 Rette sghembe o incidenti

DEF. *Due rette nello spazio si dicono* ***complanari*** *se e solo se appartengono allo stesso piano. In tal caso possono essere incidenti, parallele distinte o parallele coincidenti.*

Se due rette hanno un punto in comune o sono parallele, sono complanari. Se due rette sono complanari, allora sono incidenti o parallele.

DEF. *Due rette si dicono* ***sghembe*** *se non appartengono allo stesso piano.*

Due rette sono sghembe se e solo se non hanno intersezioni e non sono parallele.

4.7 Rette e piani

Consideriamo un piano α con vettore normale $\vec{n}(a, b, c)$ non nullo e una retta r con vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ non nullo.

(a) $r // \alpha$

(b) $r \perp \alpha$

Figura 14: Posizioni reciproche tra retta e piano

4.7.1 Retta parallela al piano

La retta e il piano sono paralleli se il vettore direzione della retta e il vettore normale del piano sono perpendicolari.

$$r // \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad al + bm + cn = 0$$

In particolare se la retta e il piano hanno almeno un punto in comune, allora la retta giace sul piano.

4.7.2 Retta perpendicolare al piano

La retta e il piano sono perpendicolari se il vettore direzione della retta e il vettore normale del piano sono paralleli.

$$r \perp \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} // \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \quad \left(\Leftrightarrow \quad \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} \right)$$

5 Distanze

5.1 Distanza di un punto da un piano

Dato il piano

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

e il punto $A(x_A, y_A, z_A)$, la misura della distanza tra il punto e il piano è data da

$$d(A, \alpha) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5.2 Distanza fra due piani paralleli

Si considerino due piani paralleli α e β , la distanza tra esi è congruente alla distanza tra il piano β e un punto $P \in \alpha$ qualsiasi.

5.3 Distanza di un punto da una retta

NON ESISTE UNA FORMULA SPECIFICA

Si considerino una retta r r e un punto P non appartenente alla retta. Un metoto può essere quello di determinare il punto H tale che $PH \perp r$ e calcolare a questo punto la distanza PH. Per fare questo è necassario determinare l'equazione del piano perpendicolare a r e passante per P e poi trovare la sua intersezione H con la retta:

Esempio 5.1. *Calcolare la distanza tra il punto* $P(2, 1, 5)$ *e la retta* $r:\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

1. Determinare l'equazione del piano $\pi \perp r$ passante per P. Siccome la retta è perpendicolare al piano, il suo vettore direzione è parallelo al vettore direzione del piano.

$$\overrightarrow{v}(3, 2, 4) \qquad P(2, 1, 5)$$

$$3(x - 2) + 2(y - 1) + 4(z - 5) = 0$$

$$\pi : 3x - 2y + 4z - 28 = 0$$

2. Determinare il punto di intersezione H tra la retta r e il piano π

$$r \cap \pi \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + 4t \\ 3x - 2y + 4z - 28 = 0 \end{cases} \qquad \begin{gathered} 3(-3 + 3t) - 2(2t) + 4(2 + 4t) - 28 = 0 \\ t = 1 \end{gathered}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3(1) = 0 \\ y = 2(1) = 2 \\ z = 2 + 4(1) = 6 \end{cases} \qquad H(0, 2, 6)$$

3. Determinare la lunghezza del segmento $\overline{PH}$, che ciuncide con la distanza del punto P dalla retta r;

$$d(P, r) = \overline{PH} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-2 - 1)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{6}$$

5.4 Distanza tra due rette parallele

NON ESISTE UNA FORMULA SPECIFICA. Per calcoloare la distanza tra due rette parallele r e s è sufficiente calcolare la distanza tra un punto $P \in r$ qualsiasi e la retta s.

5.5 Distanza tra due rette sghembe

NON ESISTE UNA FORMULA SPECIFICA. Per determinare la distanza tra due rette sghembe r e s è necessario calcolare la misura del segmento $\overline{RS}$, con R e S due punti appartenenti rispettivamente a r e s tali che $\overrightarrow{RS} \perp r$ e $\overrightarrow{RS} \perp s$.

Teorema. *Prese due rette sghembe* r *e* s *nello spazio, esiste ed è unica la retta* t *tale che* $t \perp r$ *e* $t \perp s$

6 Superfici notevoli

6.1 Superficie sferica

DEF. *Si dice* ***superficie sferica*** *il luogo geometrico di tutti e soli i punti del piano che hanno la stessa distanza* r *da un punto fisso detto centro* $C(x_0, y_0, z_0)$.

La sfera, come la circonferenza, è identificata in due modi diversi:

1. come luogo geometrico:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

2. forma canonica, che rappresenta una superficie sferica se e solo se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$ (condizione di realtà):
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$
$$\text{con } C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}) \text{ e } r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$$

6.1.1 posizioni reciproche tra piano e sfera

Dato un piano α e una superficie sferica di cerntro C e raggio r, si ha che:

- Se $d(C, \alpha) < r$, il piano interseca la sfera lungo una circonferenza;
- Se $d(C, \alpha) = r$, il piano è tangente alla sfera in un punto P e perpendicolare al raggio CP.
- Se $d(C, \alpha) > r$, il piano è esterno alla sfera.

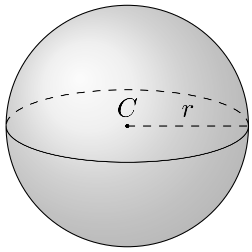


Figura 15: Superficie sferica di centro C e raggio r