Analisi 1

Davide Borra

v. 5.2

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Indice

Capitolo 1

Limiti

1.1 Intervalli in $\mathbb{R}$

DEF. Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice **intervallo** se corrisponde ad una semiretta (**illimitato**) o ad un segmento (**limitato**) della retta reale

Inoltre:

- si dice **chiuso** se gli estremi sono inclusi nell'intervallo;
- si dice **aperto** se gli estremi sono esclusi nell'intervallo.

Gli intervallo limitati corrispondono a segmenti di retta reale di estremi a e b ($b > a$), lunghezza $b - a$ (detta **ampiezza** dell'intervallo), **centro** $\dfrac{b+a}{2}$ e **raggio** $\dfrac{b-a}{2}$.

1.1.1 Intorni

DEF. Dato numero reale x_0, un intorno completo di x_0 è un qualunque intervallo aperto contenente x_0

$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[\qquad (\text{con } \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_0^+)$$

- **Intorno destro**: $I^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[$
- **Intorno sinistro**: $I^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[$

Intorni circolari

DEF. Dati un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, un intorno circolare di x_0 di raggio δ è l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

Intorni di ∞

DEF. Dati due numeri reali a e b con $a < b$ si definisce

- **intorno di** $-\infty$ un qualsiasi intervallo illimitato inferiormente $]-\infty; a[$
- **intorno di** $+\infty$ un qualsiasi intervallo illimitato superiormente $]b; +\infty[$
- **intorno di** ∞ l'unione di un intorno di $-\infty$ e di un intorno di $+\infty$: $]-\infty; a[\cup]b; +\infty[$

1.1.2 Insiemi limitati e illimitati, maggiorante, minorante, estremi, massimo, minimo.

È possibile definire come limitati/illimitati anche insiemi che non sono intervalli.

DEF (Insiemi limitati)**.** Un insieme $X \subseteq R$ non vuotoè detto

- **superiormente limitato** se è possibile determinare un qualsiasi numero reale α tale che $\forall x \in X, x \leq \alpha$. α è detto **maggiorante** di X.
- **inferiormente limitato** se è possibile determinare un qualsiasi numero reale β tale che $\forall x \in X, x \geq \beta$. β è detto **minorante** di X.
- **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente.

DEF (Insiemi illimitati)**.** Un insieme $X \subseteq R$ non vuoto è detto

- **superiormente illimitato** se $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists x \in X : x > \alpha$
- **inferiormente illimitato** se $\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists x \in X : x < \beta$
- **illimitato** si è illimitato sia inferiormente che superiormente.

Se un insieme è limitato superiormente/inferiormente è possibile definire minimo e massimo è possibile quindi definire massimo e minimo di un insieme (attenzione, non è detto che tutti gli insiemi limitati ammettano massimo/minimo.)

DEF (Massimo)**.** Dati un insieme $X \subseteq R$ e un numero reale M, esso si dice **massimo** di X se

i) $\forall x \in X, M \geq x$ (è maggiorante)

ii) $M \in X$ (appartiene all'insieme).

Si indica $M = \max X$.

DEF (Minimo)**.** Dati un insieme $X \subseteq R$ e un numero reale m, esso si dice **minimo** di X se

i) $\forall x \in X, m \leq x$ (è minorante)

ii) $m \in X$ (appartiene all'insieme)

Si indica $M = \min X$.

Tuttavia non è possibile determinare massimo e minimo per, ad esempio, intervalli aperti. Abbiamo quindi bisogno di qualcos'altro che funzioni sempre, definiamo quindi gli estremi inferiore e superiore di un insieme.

DEF (Estremo superiore)**.** Dato un insieme X superiormente limitato, si dice **estremo superiore** di X il minimo dei suoi maggioranti

$$\inf X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ è maggiorante di } X\}$$

Se X è superiormente illimitato, si definisce $\sup X = +\infty$.

Caratterizzazione di $\sup X$ Si dimostra che la seguente definizione di sup è equivalente alla precedente: dato un insieme X superiormente limitato, un numero reale M si dice estremo superiore di X se e solo se

i) $\forall x \in X, M \geq x$ (è maggiorante)

ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x > M - \varepsilon$ (è il minore dei maggioranti)

DEF (Estremo inferiore)**.** Dato un insieme X inferiormente limitato, si dice **estremo inferiore** di X il massimo dei suoi minoranti

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ è minorante di } X\}$$

Se X è inferiormente illimitato, si definisce $\inf X = -\infty$.

Caratterizzazione di $\inf X$ Si dimostra che la seguente definizione di inf è equivalente alla precedente: dato un insieme X inferiormente limitato, un numero reale m si dice estremo inferiore di X se e solo se

i) $\forall x \in X, m \leq x$ (è minorante)

ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : x < m + \varepsilon$ (è il maggiore dei minoranti)

1.1.3 Punti di accumulazione e punti isolati

DEF (Punto isolato)**.** Sia $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$, allora x_0 si definisce punto isolato di X se esiste un intorno $I(x_0)$ che non contiene altri elementi di X.

DEF (Punto di accumulazione)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, allora $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce punto di accumulazione di X se ogni intorno completo $I(x_0)$ contiene altri infiniti elementi di X,
equivalentemente se ogni intorno completo $I(x_0)$ contiene almeno un altro elemento di X.

DEF (Insieme derivato)**.** Dato un insieme $A \subseteq R$, si definisce **insieme derivato** di A, l'insieme DA contenente tutti e soli i suoi punti di accumulazione.

Esempio 1.1.1.

Dato l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

a) precisare se è limitato,

b) rappresentarlo graficamente,

c) determinare $\sup A$ *e* $\inf A$*, specificando se sono massimo e minimo,*

d) indicare punti di accumulazione e punti isolati.

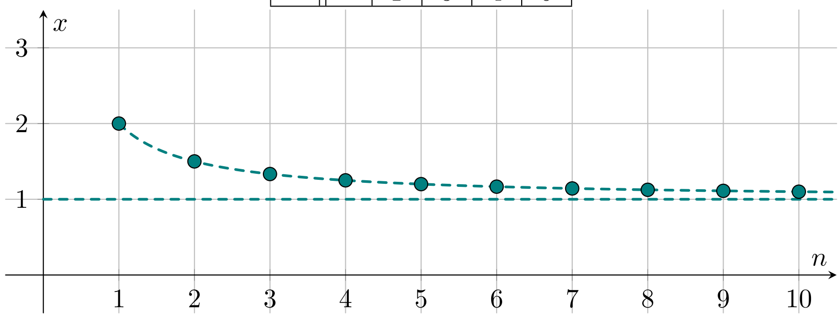
a) Cominciamo espandendo alcuni elementi dell'insieme

$$A = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots \right\}$$

Osserviamo facilmente che è limitato inferiormente superiormente

b) Anche qui calcoliamo i primi elementi, in modo da poterli rappresentare:

n	1	2	3	4	5
x	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$



c) Dal disegno si vede chiaramente che

$$\sup A = 2 = \max A,$$

inoltre osserviamo che

$$x = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

quindi

$$\inf A = 1 \qquad \nexists \min A$$

d) Osserviamo che qualsiasi punto dell'insieme consideriamo esiste un suo intorno (ad esempio l'intorno circolare di raggio $\frac{1}{2}$), per cui tutti i punti dell'insieme sono punti isolati. Osserviamo inoltre che i punti si "addensano" intorno a 1, per cui ogni intorno di 1 contiene almeno un punto dell'insieme, per cui $x = 1$ è un punto di accumulazione per l'insieme A.

1.2 Definizione di limite

DEF (Definizione unificata di limite)**.** Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X, allora $l \in \mathbb{R}^*$ si dice limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \left(f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \right)$$

se

$$\forall I(l)\ \exists I(x_0)\ :\ f(x) \in I(l)\ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$$

Definiamo inoltre i limiti destro e sinistro, che si ottengono sostituendo nella definizione precedente a $I(x_0)$,

$$\text{Limite sinistro:} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad I^-(x_0)$$
$$\text{Limite destro:} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad I^+(x_0)$$

Analogamente definiamo i limiti per eccesso e per difetto, che si ottengono sostituendo nella definizione precedente a $I(l)$,

$$\text{Limite per eccesso:} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l^+ \quad I^+(l)$$
$$\text{Limite per difetto:} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l^- \quad I^-(l)$$

Vediamo ora qualche applicazione delle definizioni di limite a casi particolari:

- Limite $+\infty$ per $x \to x_0$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ :\ f(x) > M\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

- Limite finito per $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c > 0\ :\ |f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in]c, \infty[$$

- Limite $+\infty$ per $x \to +\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0\ \exists c > 0\ :\ f(x) > M\ \forall x \in]c, \infty[$$

- Limite finito per $x \to x_0$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

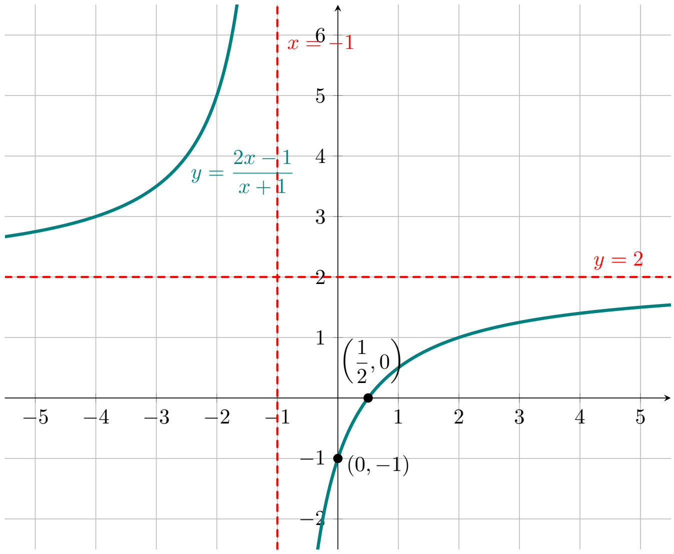
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Esempio 1.2.1.

Verificare il seguente limite mediante definizione:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{x + 1} = 2$$

Cominciamo determinando il dominio: $\operatorname{dom} f = x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$. Ora rappresentiamo il grafico della funzione, osserviamo che si tratta di un'omografica con asintoti $y = 2$ e $x = -1$:



Recuperiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(-\infty) \ : \ \left| \frac{2x-1}{x+1} - 2 \right| < \varepsilon \ \forall x \in I(-\infty)$$

e svolgiamo la disequazione.

$$\begin{cases} \left| \dfrac{2x-1}{x+1} - 2 \right| < \varepsilon \\ x \neq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left| \dfrac{\cancel{2x} - 1 - \cancel{2x} - 2}{x+1} \right| < \varepsilon \\ x \neq -1 \end{cases}$$

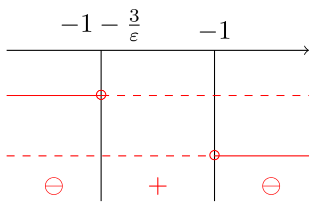
$$\begin{cases} -\dfrac{3}{x+1} < \varepsilon \\ -\dfrac{3}{x+1} > -\varepsilon \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-3-\varepsilon x-\varepsilon}{x+1} < 0 \\ \dfrac{-3+\varepsilon x+\varepsilon}{x+1} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Separando le due disequazioni

I) $\dfrac{-3-\varepsilon x-\varepsilon}{x+1} < 0$

$-3-\varepsilon x-\varepsilon > 0 \qquad x < -1 - \dfrac{3}{\varepsilon}$

$x+1 > 0 \qquad x > -1$

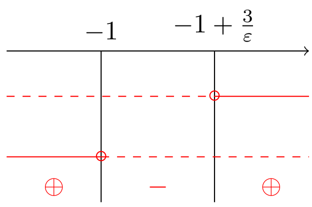


$$x < -1 - \frac{3}{\varepsilon} \quad \vee \quad x > 1$$

II) $\dfrac{-3+\varepsilon x+\varepsilon}{x+1} > 0$

$-3+\varepsilon x+\varepsilon > 0 \qquad x > -1 + \dfrac{3}{\varepsilon}$

$x+1 > 0 \qquad x > -1$



$$x < -1 \quad \vee \quad x > -1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

In conclusione

$$\begin{cases} x < -1 - \dfrac{3}{\varepsilon} \vee x > 1 \\ x < -1 \vee x > -1 + \dfrac{3}{\varepsilon} \\ x \neq -1 \end{cases} \qquad x < -1 - \frac{3}{\varepsilon} \vee x > -1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

Che contiene un intorno di $-\infty$, $I(-\infty) = \left]-\infty, -1 - \dfrac{3}{\varepsilon}\right[$. Il limite è quindi verificato.

1.2.1 Asintoti

Tipologia	**Condizioni**	**Asintoto**
Asintoto verticale	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$	$x = x_0$
Asintoto orizzontale	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$	$y = l$
Asintoto obliquo	CN: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\quad q = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$	$y = mx + q$

NB.: Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

1.3 Continuità

DEF. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $]a;b[$ e x_0 un punto appartenente all'intervallo. $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione è inoltre continua in $]a;b[$ se è continua in ogni punto x_0 dell'intervallo.

Si parla anche di funzioni

- **continue da destra** x_0 quando $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- **continue da sinistra** x_0 quando $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

1.4 Primi teoremi sui limiti

N.B.: I seguenti teoremi valgono per ogni tipologia di limite, sia finito che infinito, e in ogni intorno, sia di un numero reale (anche destro e sinistro) sia di infinito.

1.4.1 Teorema di unicità del limite

Teorema (Unicità del limite)**.** *Se una funzione $f(x)$ ha limite finito per x che tende a x_0, allora tale limite è unico.*

Ipotesi	*Tesi*
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$	l è unico

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Si supponga che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l'$$

con $l \neq l'$ e $l < l'$. Siccome ε è una quantità arbitraria è possibile porre

$$0 < \varepsilon < \frac{l - l'}{2}$$

Si applicano ora le definizioni di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l'| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome l'intersezione di due intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0, devono valere entrambe le definizioni:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Ricordando che $l - \varepsilon < l' - \varepsilon < l + \varepsilon < l' + \varepsilon$ si ottiene:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon$$

$$-2\varepsilon < l - l'$$

$$2\varepsilon > l' - l$$

$$\varepsilon > \frac{l' - l}{2}$$

Assurdo: contrasta con quanto posto all'inizio. L'ipotesi per assurdo è falsa, quindi la tesi è dimostrata.

QED

1.4.2 Teorema di permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno)**.** *Se il limite di un funzione per x che tende a x_0 è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 in cui $f(x)$ e l sono entrambi positivi o entrambi negativi.*

Ipotesi	*Tesi*
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad l \neq 0$	$\exists I(x_0) : f(x)$ e l sono concordi $\;\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome ε è un numero positivo arbitrario pongo

$$\varepsilon = |l|$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

- se $l > 0 \rightarrow \varepsilon = l$

  $$l - l < f(x) < l + l$$

  $$0 < f(x) < 2l$$

  da cui la tesi

  $$f(x) > 0$$

- se $l < 0 \to \varepsilon = -l$
$$l + l < f(x) < l - l$$
$$2l < f(x) < 0$$
da cui la tesi
$$f(x) < 0$$

QED

Teorema (Inverso della permanenza del segno)**.** *Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 è*

- *positiva o nulla, allora $l \geq 0$;*
- *negativa o nulla, allora $l \leq 0$.*

1.4.3 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Teorema (Confronto)**.** *Siano $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0. Se per ogni $x \in I(x_0)$ è verificato che*
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$
e
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$
allora è verificato che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
.

Ipotesi

1. $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite nello stesso intorno $I(x_0)$
2. $\forall x \in I(x_0) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Tesi
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi 3:
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |g(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |h(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$
Di conseguenza
$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$
da cui, per ipotesi 1,
$$l - \varepsilon < g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$
La precedente scrittura è equivalente a
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
da cui la tesi.

QED

1.5 Calcolo dei limiti

1.5.1 Funzioni continue e funzioni elementari

Il limite per $x \to x_0$ di una funzione $f(x)$ continua in x_0 è il valore della funzione in x_0,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Il limite di una funzione elementare può essere ricavato dall'analisi del suo grafico, ad esempio

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

1.5.2 Algebra dei limiti

Teorema. *Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni definite in un intorno $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

con $l, m \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l - m$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{1}{m}$$

$$\lim_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot l \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n \qquad \text{con } n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Teorema. *Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni definite in un intorno $I(x_0) \setminus \{x_0\}$ tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m$$

con $l, m \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, allora

- ***Somma***

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

- ***Prodotto***

$\lim_{x \to x_0} f(x)$	$\lim_{x \to x_0} g(x)$	$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
l	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	$F.I.$

  tenendo conto della regola dei segni;

- ***Rapporto***

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$
l	∞	0
l	0	∞
∞	l	∞
0	l	0
0	0	$F.I.$
∞	∞	$F.I.$

tenendo conto della regola dei segni;

- ***Potenza***

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)}$
$0 \leq l < 1$	0	$1 \ (0^0 \ F.I.)$
	$+\infty$	0^+
	$-\infty$	$+\infty$
$l \geq 1$	0	$1 \ (\infty^0 \ F.I.)$
	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	0^+

1.5.3 Mediante il teorema del confronto

Esempio 1.5.1.

Si calcoli il valore di $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Prima di tutto ricordiamo che per definizione di seno $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Siccome stiamo lavorando in un intorno di $+\infty$, possiamo considerare $x > 0$, quindi posso dividere tutti i membri per x, ottenendo

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Siamo quindi riusciti a ricostruire nel membro centrale della disequazione la funzione cercata. Calcoliamo ora i limiti degli estremi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \left[-\frac{1}{+\infty}\right] = 0^-.$$

Di conseguenza, per il teorema del confronto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

1.5.4 Forme di indecisione (o forme indeterminate)

Forma di indecisione $+\infty - \infty$

Se si presenta in una funzione polinomiale

Per superare queste forme di indecisione, in generale occorre raccogliere il termine di grado massimo. In alternativa esiste una regola pratica ottenuta tramite l'applicazione della gerarchia degli infiniti. In questo caso si considera semplicemente il termine di grado massimo perché il contributo degli altri è trascurabile rispetto ad esso.

Esempio 1.5.2.

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3x^4 + 5)$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x^4+5) = [-\infty+\infty] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty} x^4\left(\frac{1}{x^2}-3+\frac{5}{x^5}\right) = \left[+\infty\left(\frac{\cancelto{0}{1}}{\cancel{+\infty}}-3+\frac{\cancelto{0}{5}}{\cancel{+\infty}}\right)\right] =$$
$$= [-3(+\infty)] = -\infty$$

infatti sostituendo dopo aver raccolto ottengo che alcuni termini vanno a 0. Oppure, applicando la regola pratica

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x^4+5) = [-\infty+\infty] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}(-3x^4) = -\infty$$

Se si presenta in una funzione irrazionale

In questo caso si procede raccogliendo il termine doi grado massimo nel radicando, portandolo fuori dal segno di radice e poi raccogliendo nuovamente il termine di grado massimo. Oppure si può procedere applicando la gerarchia al radicando e portando fuori dal segno di radice il termine di grado massimo (si ricorda che $\sqrt{x^{2n}} = |x^n|$). A questo punto dovremmo esserci ricondotti al caso precedente.

Esempio 1.5.3.

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right) = [-\infty+\infty] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2\right) = \left[+\infty\left(\sqrt{1+\frac{\cancelto{0}{3}}{\cancel{+\infty}}}-2\right)\right] = -\infty$$

oppure, applicando la regola pratica,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right) = [-\infty+\infty] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}(|x|-2x) = \lim_{x\to+\infty}(x-2x) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

Se il termine sotto radice è il quadrato del termine fuori In questo caso, se procedo come nel precedente si origina un'altra forma di indecisione, per cui la soluzione è razionalizzare.

Esempio 1.5.4.

Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) = [-\infty+\infty] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}+2x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x} = \left[\frac{3}{+\infty+\infty}\right] = 0^+$$

Forma di indecisione $0\cdot\infty$

Per risolvere questa forma di indecisione è necessario modificare l'espressione analitica della funzione di partenza in modo da rimuovere l'origine della forma di indecisione.

Esempio 1.5.5.

Calcolare $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\operatorname{tg}^2 x$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\operatorname{tg}^2 x = \left[\operatorname{sen} 0 \cdot \operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi\right] = [0\cdot\infty] \overset{\text{FI}}{=}$$

Ricordando che (per gli angoli associati) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\right]^2 = [-\cos x]^2 = \cos^2 x$, è possibile riscrivere la funzione come

$$= \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x\ \operatorname{tg}^2 x = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi} \cancel{\cos^2 x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} = \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1\right]$$

Forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$

Si procede raccogliendo il termine di grado massimo (o applicando la gerarchia) sia a numeratore che a denominatore e poi semplificando.

Se si presenta in una funzione razionale fratta

Esempio 1.5.6.

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^3+2x-1}{5-2x^4-3x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^3+2x-1}{5-2x^4-3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^4}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{5}{x^4}-2-\frac{3}{x^2}\right)} = \left[\frac{3-\cancel{\frac{5}{+\infty}}+\cancel{\frac{2}{+\infty}}-\cancel{\frac{1}{+\infty}}}{\cancel{\frac{5}{+\infty}}-2-\cancel{\frac{3}{+\infty}}}\right] = -\frac{3}{2}$$

oppure

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^3+2x-1}{5-2x^4-3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{-2x^4} = -\frac{3}{2}$$

N.B.: Anche se sia a numeratore che a denominatore si presentano forme di indecisione $-\infty+\infty$ prevale la forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$

Se si presenta in una funzione irrazionale fratta

Esempio 1.5.7.

Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}} = \left[\cancel{\frac{1}{+\infty}}+\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{+\infty}}}\right] = 1$$

oppure

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+|x|}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

Forma di indecisione $\dfrac{0}{0}$

Funzioni razionali fratte

In generale si risolve scomponendo e semplificando

Esempio 1.5.8.

Calcolare $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-6x}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-6x}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \left[\frac{6}{4}\right] = \frac{3}{2}$$

Funzioni irrazionali fratte

In generale si risolve razionalizzando, scomponendo e semplificando

Esempio 1.5.9.

Calcolare $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-3x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+1)(\sqrt{x}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}$$

Esempio 1.5.10.

Calcolare $\lim\limits_{x\to 27^+} \dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$

$$\lim_{x\to 27^+} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{t\to 3^+} \frac{t^3-27}{t-3} = \lim_{t\to 3^+} \frac{\cancel{(t-3)}(t^2+3t+9)}{\cancel{t-3}} = \lim_{t\to 3^+} (t^2+3t+9) = 27$$

Pongo $\begin{array}{ll} t = \sqrt[3]{x} & x \to 27^+ \\ x = t^3 & t \to 3^+ \end{array}$

Forme di indecisione 0^0, ∞^0, 1^∞

Generalmente si risolvono applicando l'uguaglianza

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

e successivamente applicando all'esponente i metodi risolutivi visti in precedenza.

Esempio 1.5.11.

Calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}}$

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}} = \left[0^{\frac{2}{-\infty}}\right] = \left[0^0\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{\ln(2x)}\ln(2x)} = e^2$$

Esempio 1.5.12.

Calcolare $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}} = \left[\infty^0\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln x} = e$$

Esempio 1.5.13.

Calcolare $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}} = \left[0^{\frac{1}{-\infty}}\right] = \left[0^0\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{x^2}{4}\right)\frac{1}{3\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x^2-\ln 4}{3\ln x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2\ln x}{3\ln x}-\frac{\ln 4}{3\ln x}} = \left[e^{\frac{2}{3}+0}\right] = e^{\frac{2}{3}}$$

1.5.5 Limiti Notevoli

- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Dimostrazione.

$$\frac{\operatorname{sen} -x}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Siccome la funzione è pari la dimostrazione si svolge solo per $x \to 0^+$. Sulla circonferenza goniometrica considero un angolo x. Siccome $x \to 0^+$ posso imporre la condizione $0 < x < \frac{pi}{2}$
Per definizione si ha che

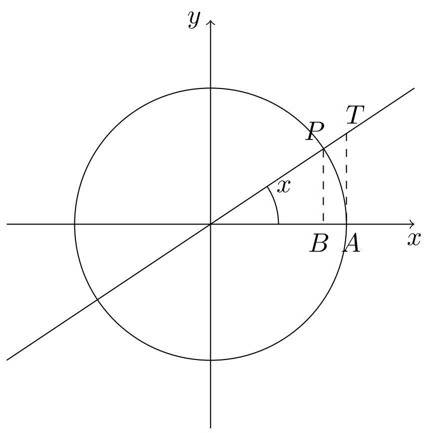


Figura 1.1: La situazione utilizzata per la dimostrazione

$$\widehat{PA} = x$$
$$\overline{PB} = \operatorname{sen} x$$
$$\overline{TA} = \operatorname{tg} x$$

Come è chiaramente visibile dalla Figura 1.1 si ha che

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

da cui

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$
$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$
$$1 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \cos x$$

Si calcolano ora i limiti delle funzioni che limitano quella studiata

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

da cui per il teorema del confronto

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Siccome la funzione è pari vale anche per $x \to 0^-$ QED

Osservazioni:

- vale il reciproco: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$
- vale la generalizzazione: $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$
- asintotico associato: $\operatorname{sen} x \sim x \quad$ in $I(0)$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Dimostrazione. Per definizione $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x\cos x} \underset{LN}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

QED

Osservazioni:

- vale il reciproco: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$
- vale la generalizzazione: $\lim_{f(x)\to 0} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$
- asintotico associato: $\operatorname{tg} x \sim x \quad$ in $I(0)$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} \underset{LN}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \left[\frac{0}{2}\right] = 0$$

QED

Osservazioni:

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione: $\lim_{f(x)\to 0} \frac{1-\cos f(x)}{f(x)} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \underset{LN}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

QED

Osservazioni:

- vale il reciproco: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = 1$

- vale la generalizzazione: $\lim_{f(x)\to 0} \frac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2} = 1$
- asintotico associato: $\cos x \sim 1 - x^2 \quad \text{in } I(0)$

- $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

  Osservazioni:

  - NON vale il reciproco
  - vale la generalizzazione

  $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$

  Osservazioni:

  - NON vale il reciproco
  - vale la generalizzazione

  $\lim_{x\to 0^+} (1+kx)^{\frac{1}{x}}\ e^k$

  Osservazioni:

  - NON vale il reciproco
  - vale la generalizzazione

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{con } a > 0$

  Dimostrazione.
  $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

  QED

  Particolarizzazione: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

  Osservazioni:

  - vale il reciproco
  - vale la generalizzazione
  - asintotico associato: $\ln x \sim x - 1 \quad \text{in } I(0)$

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \text{con } a > 0$

  Dimostrazione. Pongo $t = a^x - 1$, quindi $e^x = t + 1$ e di conseguenza $x = \log_a(t+1)$. Inoltre, se $x \to 0$, $t \to 0$.
  $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \ln a$$

  QED

  Particolarizzazione: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

  Osservazioni:

  - vale il reciproco
  - vale la generalizzazione

- asintotico associato: $e^x \sim x+1 \quad$ in $I(0)$

- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{x} = k$

  Osservazioni:

  - vale il reciproco
  - vale la generalizzazione
  - asintotico associato: $(1+x)^k \sim 1+kx \quad$ in $I(0)$

1.6 Limiti e parametri

Esempio 1.6.1.

Trovare per quale valore di a la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-ax+1 & x \le -1 \\ \dfrac{ax-1}{x+2} & x > 1 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = -1$.

Ricordando la definizione di continuità, dobbiamo determinare a tale che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Calcoliamo quindi

$$\lim_{x\to -1^-} 2x^2-ax+1 = 3+a \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{ax-1}{x+2} = -a-1$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 - a(-1)+1 = 3+a$$

Imponiamo l'uguaglianza

$$\begin{cases} 3+a = 3+a \\ -a-1 = 3+a \end{cases} \qquad -a-1 = 3+a \qquad 2a=-4 \qquad \boxed{a=-2}$$

Esempio 1.6.2.

Determinare il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^n}{x^2+3x-10}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

- se $n=0$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+3x-10} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$
- se $n=1$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$
- se $n=2$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{FI}{=} 1$
- se $n>2$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^{\cancel{n}\, n-1}}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{FI}{=} +\infty$

1.7 Continuità e discontinuità

1.7.1 Discontinuità di prima specie o di salto

DEF (Punti di discontinuità di prima specie)**.** Un punto x_0 è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$ il limite destro e il limite sinistro sono finiti ma diversi.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \qquad l_1 \neq l_2.$$

La differenza $|l_1 - l_2|$ è detta salto

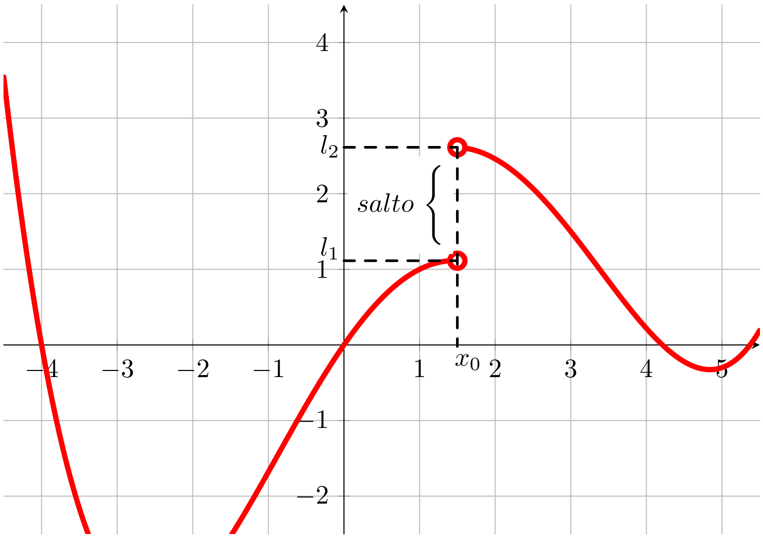
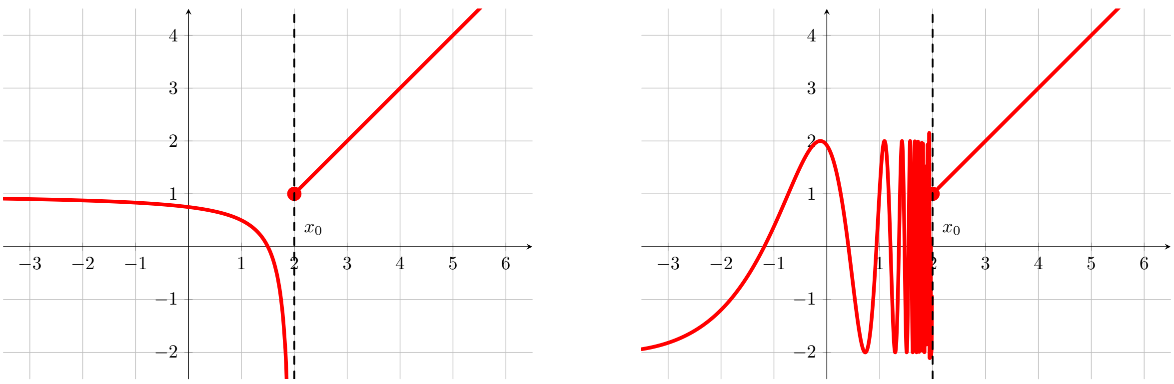


Figura 1.2: Discontinuità di prima specie

1.7.2 Discontinuità di seconda specie

DEF (Punto di discontinuità di seconda specie)**.** Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ non esiste o è infinito.



(a) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

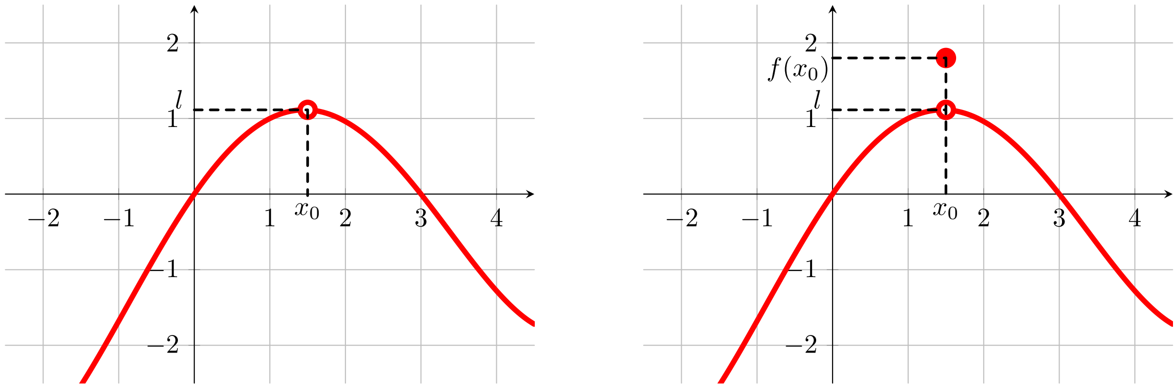
(b) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \nexists$

Figura 1.3: Discontinuità di seconda specie

1.7.3 Discontinuità di terza specie o eliminabili

DEF (Punto di discontinuità di terza specie). Un punto x_0 si dice punto di discontinnuità di terza specie per la funzione $f(x)$ quando esiste ed è finito il limite per $x \to x_0$ e $f(x)$ non è definita o assume un valore diverso da quello del limite:

$$x_0 \notin \text{dom}\, f \qquad \vee \qquad f(x_0) \neq l$$



(a) (b) Discontinuità di terza specie

Figura 1.4

Discontinuità: tipologie e condizioni	
Prima specie	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \qquad \mathit{salto} = \lvert l_1 - l_2 \rvert$
Seconda specie	$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \infty \qquad \vee \qquad \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \nexists$
Terza specie	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \qquad \vee \qquad f(x_0) = \nexists$

1.7.4 Continuità e funzioni inverse

Continuità della funzione inversa

Teorema (Continuità della funzione inversa). *Se $y = f(x)$ è una funzione biiettiva e continua in un intervallo D, allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel codominio di f.*

Ipotesi
$f : D \to C$ biiettiva e continua in D

Tesi
$f^{-1} : C \to D$ continua in C

Condizione di invertibilità per funzioni continue

Teorema (Invertibilità di funzioni continue). *Sia I un intervallo (limitato o illimitato) e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Ipotesi
$f : I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in I

Tesi
f è invertibile

1.8 Teoremi sulle funzioni continue

1.8.1 Teorema di Weistrass

Teorema (Weistrass)**.** *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$, allora essa assume in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$	$\exists c, d \in [a,b] : f(c) = min\{f\} \wedge f(d) = max\{f\}$

1.8.2 Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)

Teorema (Bolzano)**.** *Se f è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui $f(c) = 0$.*

Ipotesi

1. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesi

$\exists c \in [a;b] : f(c) = 0$

1.8.3 Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

Teorema (Darbaux)**.** *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$, allora essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

Ipotesi

1. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a;b]$
2. $m = min\{[a;b]\} \qquad M = max\{[a;b]\}$

Tesi

$\exists x \in [a,b] : f(x) = k \forall k \in [m;M]$

Capitolo 2

Derivate

2.1 Definizione

Consideriamo una funzione ed un punto appartenente ad essa, vorremmo avere uno strumento che, localmente, ci permetta di valutare la velocità di variazione della funzione, ovvero che in ogni punto ci dica quanto cresce la funzione. Per le rette esiste uno strumento del genere, il coefficiente angolare, che è definito come

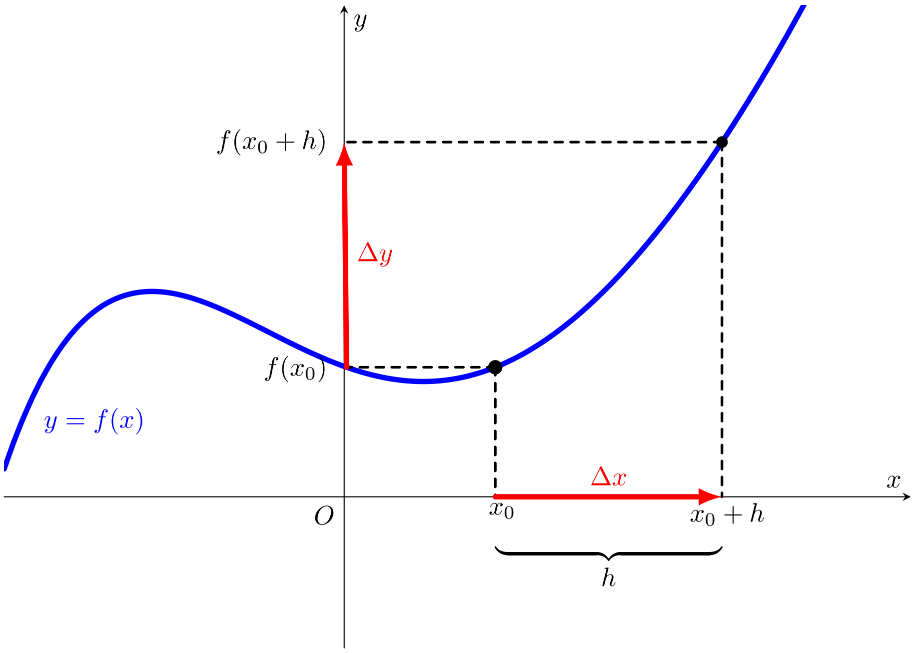


Figura 2.1

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

Proviamo quindi a definire qualcosa di simile per una funzione qualsiasi:

> **DEF** (Rapporto incrementale)**.** Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a, b[$, definiamo **rapporto incrementale** di f tra il punto x_0 e il punto $x_1 = x_0 + h$ (con $h \neq 0$) la grandezza :
>
> $$R.I. = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tuttavia questo strumento ci da informazioni sulla crescita media della funzione nell'intervallo $[x_0, x_1]$, a noi serve qualcosa di relativo al solo punto x_0, per cui facciamo avvicinare x_1 a x_0, quindi otteniamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definiamo quindi la derivata, ovvero lo strumento che ci permette di conoscere localmente la velocità di variazione di una funzione:

DEF (Derivata)**.** Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f il limite per $x_1 \to x_0$ del rapporto incrementale tra x_1 e x_0, se esiste ed è finitl, si definisce **derivata prima della funzione** in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In quanto limite, la derivata esiste solo se esistono limite destro e sinistro e sono uguali. Definiamo quindi **derivata sinistra e destra**

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad f'_+(x_0) = \lim_{h \to x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2.1.1 Problema classico

Il concetto di derivata nasce anche per risolvere un problema classico della matematica: nota una funzione e un suo punto $P(x_0, f(x_0))$, determinare l'equazione della retta tangente alla curva in P.

Per farlo, è possibile introdurre un secondo punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ e calcolare la retta passante per i due punti (secante). Sappiamo che l'equazione della retta passante per due punti è data da

$$PQ: \qquad \frac{x - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y - y_P}{y_Q - y_P}$$

sostituendo otteniamo

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + h - x_0}.$$

Riconducento quindi la scrittura all'equazione della retta per un punto noto il coefficiente angolare orreniamo

$$y - f(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

Si ricava quindi che il rapporto incrementale è il il coefficiente angolare della retta secante PQ. Inoltre, la derivata prima si ricava quando avviciniamo al limite P e Q, per cui è il coefficiente angolare della retta tangente nel punto P.

2.1.2 Calcolo della derivata mediante definizione

Esempio 2.1.1.

Calcolare la derivata di $y = 4x - 9$ mediante definizione.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to x_0} \frac{[4(x + h) - 9] - [4x - 9]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4x} + 4h - \cancel{9} - \cancel{4x} + \cancel{9}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}} = 4$$

Esempio 2.1.2.

Calcolare la derivata di $y = -x^2 + 4x$ mediante definizione

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h)^2 + 4(x + h) + x^2 - 4x}{h} =$$
$$= \frac{\cancel{-x^2} - h^2 - 2hx + \cancel{4x} + h + \cancel{x^2} - \cancel{4x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(\cancel{-h} - 2x + 4)}{\cancel{h}} = -2x + 4$$

2.2 Derivate fondamentali

2.2.1 Funzione costante

Funzione	**Derivata**
$y = k$	$y' = 0$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

N.B.: Non è una forma di indecisione perchè la funzione è già 0 prima di calcolare il limite. QED

2.2.2 Funzione identità

Funzione	**Derivata**
$y = x$	$y' = 1$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} 1$$

QED

2.2.3 Funzione potenza

Funzione	**Derivata**
$y = x^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]^{\alpha} - x^{\alpha}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\frac{h}{x}} \underset{LN}{=} \alpha x^{\alpha-1}$$

QED

Derivata della funzione radice quadrata

Per la derivata delle funzioni potenza, si ricava la derivata della funzione radice quadrata:

Funzione	**Derivata**
$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2.2.4 Funzione seno

Funzione	**Derivata**
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen} x \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}}}_{LN=0} + \cos x \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}}_{LN=1} \right) \underset{LN}{=} \cos x$$

QED

2.2.5 Funzione coseno

Funzione	**Derivata**
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}}}_{LN=0} - \operatorname{sen} x \underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}}_{LN=1} \right) \underset{LN}{=} -\operatorname{sen} x$$

QED

2.2.6 Funzione esponenziale

Funzione	**Derivata**
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \underbrace{\boxed{\frac{a^h - 1}{h}}}_{LN=\ln a} \underset{LN}{=} a^x \ln a$$

QED

2.2.7 Funzione logaritmo

Funzione	**Derivata**
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$

Dimostrazione.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\log_a\left(1 + \frac{x}{h}\right)}{\frac{h}{x}}}}_{LN=\log_a e} \cdot \frac{1}{x} \underset{LN}{=} \frac{1}{x} \log_a e$$

QED

2.3 Operazioni con le derivate

2.3.1 Linearità rispetto al prodotto

La derivata è lineare rispetto al prodotto per costanti, quindi possiamo "portare fuori" le costanti dalla derivata. In simboli ($k \in \mathbb{R}$):

$$y = k \cdot f(x) \qquad y' = k \cdot f'(x).$$

Esempio 2.3.1.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen} x$ *b)* $g(x) = 3\ln x$

a) $f'(x) = \sqrt{2}\cos x$ b) $g'(x) = \dfrac{3}{x}$

2.3.2 Linearità rispetto alla somma

La derivata è lineare rispetto alla somma, per cui la derivata della somma di due funzioni è la somma delle derivare delle funzioni stesse:

$$y = f(x) + g(x) \qquad y' = f'(x) + g'(x).$$

Esempio 2.3.2.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a) $y = 5x^3 + e^x$ *b)* $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

a) $y = 15x^2 + e^x$ b) $y = -x + 1$

2.3.3 Derivata del prodotto

La derivata del prodotto di due funzioni NON è il prodotto delle derivate delle funzioni, ma si ottiene sommando la derivata della prima moltiplicata per la seconda e la derivata della seconda moltiplicata per la prima:

$$y = f(x)g(x) \qquad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempio 2.3.3.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a) $y = x^2 \cdot \cos x$ *b)* $y = x \cdot e^x \cdot \ln x$

a) $y' = 2x\cos x + x^2 \operatorname{sen} x$ b) $y' = 1 \cdot e^x \cdot \ln x + x \cdot e^x \cdot \ln x + x \cdot e^x \cdot \dfrac{1}{x}$

2.3.4 Derivata del rapporto

Analogamente, la derivata del rapporto NON è il rapporto delle derivate ma

$$t = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Da questa formula segue anche la formula della derivata del reciproco:

$$y = \frac{1}{f(x)} \qquad y = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Esempio 2.3.4.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a) $y = \dfrac{5+x}{2x^2}$ b) $y = \dfrac{1}{2x^3+3}$

a) $y = \dfrac{1 \cdot (2x^2) - (5+x)(4x)}{2x^2}$ b) $y = \dfrac{6x^2}{(2x^3+3)^2}$

2.3.5 Derivata della funzione composta (chain rule)

Per derivare una funzione composta bisogna procedere "a guscio": osservando la funzione da derivare, procedere dall'interno verso l'esterno derivando ogni strato e moltiplicando il tutto:

$$y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempio 2.3.5.

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a) $y = [f(x)]^\alpha$ b) $y = \operatorname{sen} f(x)$

c) $y = a^{f(x)}$ d) $y = \operatorname{sen}(\ln(2x))$

e) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(3x)}$ f) $y = \cos(x) \cdot \ln(x^2+3x)$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

a) $y' = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$ b) $y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$

c) $y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$ d) $y' = \cos(\ln(2x)) \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot 2$

e) $y' = \dfrac{[2\cos(2x)] \cdot \cos(3x) - \operatorname{sen}(2x) \cdot [-3\operatorname{sen}(3x)]}{[\cos(3x)]^2}$

f) $y' = -\operatorname{sen}(x) \cdot \ln(x^2+3x) + \cos(x) \cdot \dfrac{1}{x^2+3x} \cdot (2x+3)$

2.4 Derivate notevoli /2

2.4.1 Funzione tangente

Funzione	**Derivata**
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

Dimostrazione. Ricordiamo che $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, quindi

$$\begin{aligned} y' = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{aligned}$$

QED

2.4.2 Funzione cotangente

Funzione	**Derivata**
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$

Dimostrazione. Ricordiamo che $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, quindi

$$\begin{aligned} y' = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -1 - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x \end{aligned}$$

QED

2.5 Legame tra continuità e derivabilità

2.5.1 Continuità delle funzioni derivabili

Teorema (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0, allora essa è anche continua in x_0.*

Ipotesi	*Tesi*
f derivabile in x_0, $\exists \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$	f continua in x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \text{vero} &\implies \\ f(x_0+h) = f(x_0+h) &\implies \\ f(x_0+h) = f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) &\implies (\text{se } h \neq 0) \\ f(x_0+h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) &\implies (\text{limite}) \\ \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \right] &\implies (\text{separo perchè i limiti sono finiti}) \\ \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right] + \lim_{h \to 0} f(x_0) &\implies (\text{separo perchè i limiti sono finiti}) \\ \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} f(x_0) &\implies (\text{calcolo i limiti}) \\ \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) &\implies (\text{sostituisco ponendo } x = x_0 + h) \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) & \end{aligned}$$

QED

Osservazione (1). L'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme delle funzioni continue. Esistono funzioni continue ma non derivabili, mentre tutte le funzioni derivabili sono continue.

Osservazione (2). La continuità è condizione necessaria ma non sufficiente della derivabilità, per cui una funzione per essere derivabile deve essere continua, ma non è detto che una funzione continua sia derivabile.

2.5.2 Studi di continuità e derivabilità

Esempio 2.5.1.

Studiare continuità e derivabilità della funzione $y = \sqrt{4 - |x| + 3x}$ *in* $x_0 = 0$

Prima di tutto apriamo la scrittura sulla definizione di modulo

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 - x + 3x} & x \geq 0 \\ \sqrt{4 + x + 3x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{4 + 2x} & x \geq 0 \\ \sqrt{4 + 4x} & x < 0. \end{cases}$$

Controlliamo ora i domini dei tratti

$$\operatorname{dom} \sqrt{4 + 2x} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -2\}$$

$$\operatorname{dom} \sqrt{4 + 4x} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -1\}$$

e integriamo nella definizione della funzione

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 + 2x} & x \geq 0 \\ \sqrt{4 + 4x} & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

Ora possiamo procedere con lo studio di continuità in $x_0 = 0$. Calcoliamo i limiti da sinistra e destra e il valore della funzione in x_0:

$$f(0) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^-} \sqrt{4 + 4x} = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{4 + 2x} = 2.$$

Siccome sono uguali, otteniamo che la funzione è continua in $x_0 = 0$. Procediamo quindi con lo studio di derivabilità:

Ricorda. Una funzione è derivabile in un punto se la derivata destra e la derivata sinistra sono finite e uguali.

Per ora sappiamo calcolare derivata destra e sinistra solo mediante definizione. A breve acquisiremo uno strumento che ci permetterà di calcolarle più agevolmente.

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4 + 4h} - 2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + 4\cancel{h} - \cancel{4}}{\cancel{h}\left(\sqrt{4 + 4h} + 2\right)} = 1$$

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4 + 2h} - 2}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + 2\cancel{h} - \cancel{4}}{\cancel{h}\left(\sqrt{4 + 2h} + 2\right)} = \frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, siccome derivata destra e sinistra sono diverse, la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$.

2.6 Punti di non derivabilità

Quando una funzione in un punto x_0 è continua ma non derivabile, possiamo classificare il tipo di punto di non derivabilità in base alla derivata destre e sinistra.

2.6.1 Punto angoloso

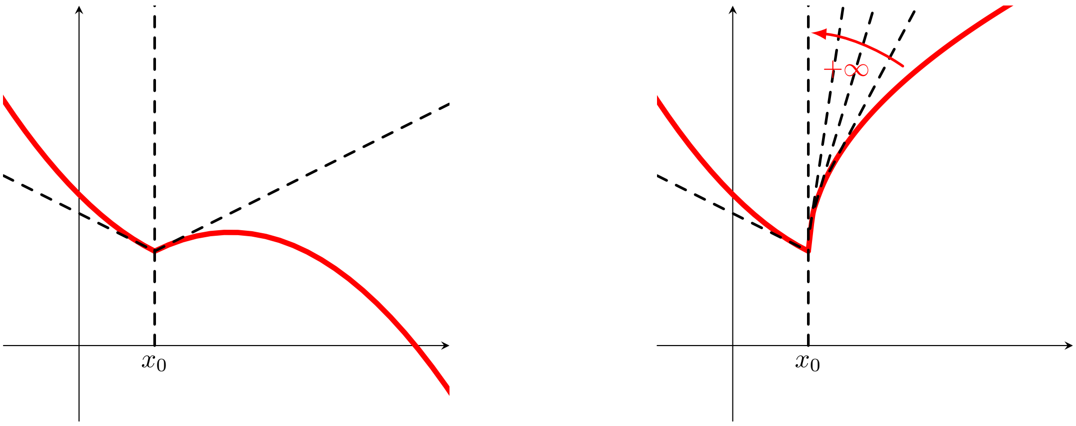
Quando la derivata sinistra e la derivata destra in un punto x_0 sono finite e diverse oppure una è infinita e l'altra finita, la funzione presenta un punto angoloso:

2.6.2 Cuspide

Quando la derivata destra e la derivata sinistra in un punto x_0 sono infinite e diverse (una $+\infty$ e l'altra $-\infty$), la funzione presenta una cuspide:

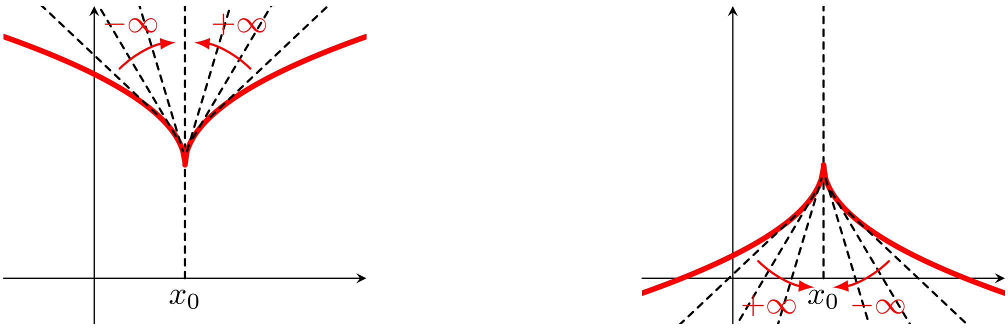
2.6.3 Flesso a tangente verticale

Quando la derivata destra e la derivata sinistra in un punto x_0 sono infinite e uguali (entrambe $+\infty$ o entrambe $-\infty$), la funzione presenta un flesso a tangente verticale:



(a) (b)

Figura 2.2: Punti angolosi



(a) (b)

Figura 2.3: Punti angolosi

2.6.4 Punto a tangente verticale

Questo non è propriamente un punto di non derivabilità perchè la funzione non è neanche continua, ma se in un punto x_0 la funzione esiste solo in un intorno destro e non in un intorno sinistro, è continua da destra e la derivata destra è infinita (o viceversa), la funzione presenta un punto a tangente verticale:

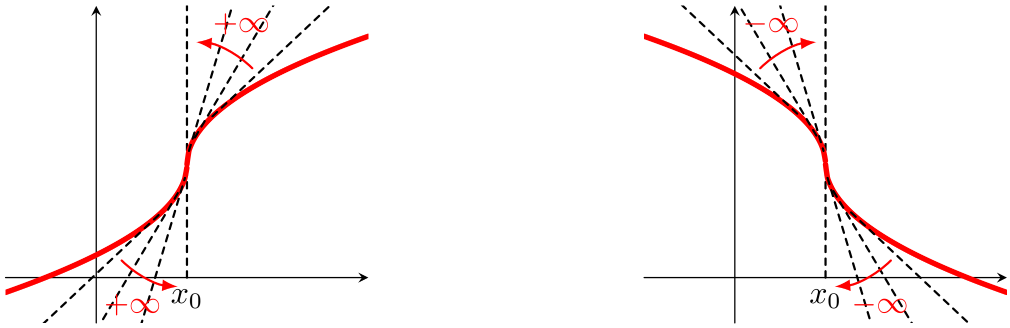
2.7 Criterio di derivabilità

Dal teorema di Lagrange (2.11.3) e dal teorema di De l'Hôpital (2.11.6), presentati successivamente, segue il seguente corollario:

Corollario (Criterio di derivabilità)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a;b]$ e derivabile in $]a;b[$ tranne al più x_0 (con $x_0 \in]a;b[$). Allora*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \quad \wedge \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

In particolare se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono finite, allora la funzione è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.



(a) (b)

Figura 2.4: Flessi a tangente verticale

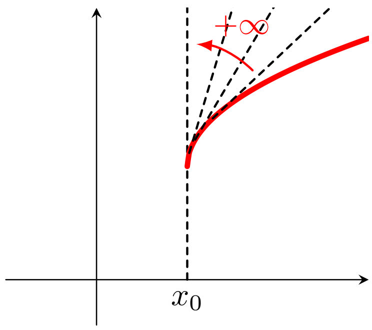


Figura 2.5: Punto a tangente verticale

Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a;b]$
2. $f(x)$ derivabile in $]a;b[-\{x_0\}$ (con $x_0 \in]a;b[$)

Tesi

1. $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$
2. $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$

Ipotesi 2

$f'_+(x) = f'_-(x)$ e finite

Tesi 2

1. $f(x)$ derivabile in x_0
2. $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Questo teorema ci permette quindi di calcolare più agilmente la derivata sinistra e la derivata destra in un punto di una funzione continua, senza ricorrere alla definizione. Vediamo un esempio:

Esempio 2.7.1.

Studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \operatorname{sen} x & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo prima di tutto che entrambe le funzioni sono definite e continue negli intervalli corrispondenti. L'unico punto in cui è possibile che si manifestino discontinuità è il punto di raccordo $x_0 = 0$. Studiamo quindi la continuità:

$$f(0) = 0 \qquad \lim_{h\to 0^-} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \lim_{h\to 0^+} x = 0.$$

Risulta quindi che la funzione è continua in x_0. Calcoliamo ora la derivata della funzione. Siccome non sappiamo se la funzione è derivabile in $x_0 = 0$, per ora escludiamo quel punto.

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che entrambe le funzioni sono derivabili nei loro intervalli di definizione, per cui rimane da studiare solo il punto $x_0 = 0$. Siccome abbiamo provato precedentemente che la funzione è continua in quel punto, siamo nelle ipotesi del criterio di derivabilità, per cui possiamo sfruttarlo per calcolare derivata destra e sinistra:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1 \qquad\qquad f'_-(0) = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Siccome esse sono uguali, per il criterio di derivabilità segue che $f'(0) = 1$, di conseguenza è lecito scrivere che (la scelta di dove mettere l'uguale è puramente arbitraria, in quanto entrambi i tratti in 0 assumono lo stesso valore):

$$y = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

2.8 Operazioni con le derivate /2

Derivata di $[f(x)]^g(x)$

Queto caso particolare si risolve come visto precedentemente per i limiti, ovvero applicando l'uguaglianza

$$[f(x)]^g\,(x) = e^{f(x)\ln g(x)}$$

e successivamente applicando la regola per la derivata delle funzioni composte:

Esempio 2.8.1.

Calcolare la derivata di

$$y = (x-1)^x$$

Prima di tutto riscriviamo la funzione in modo equivalente come $e^{x\ln(x-1)}$, e successivamente applichiamo la regola per la derivata delle funzioni composte:

$$y' = e^{x\ln(x-1)} \cdot \left[1 \cdot \ln(x-1) + x \cdot \frac{1}{x-1} \cdot 1\right] = (x-1)^x \left[\ln(x-1) + \frac{x}{x-1}\right]$$

2.8.1 Derivata della funzione inversa

Teorema (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I intervallo). Se f è defivabile nel punto $x \in I$, con $f'(x) \neq 0$, allora anche la sua funzione inversa f^{-1} è derivabile neòl punto $y = f(x)$ e vale la relazione*

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \qquad\qquad \text{con } x = f^{-1}(y)$$

Dimostrazione. Per definizione di funzione inversa si ha

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Derivando ad entrambi i membri, per la regola della derivata della funzione composta, si ricava che

$$\left[f^{-1}\left(f(x)\right)\right]' \cdot f'(x) = 1$$

da cui, ricordando che $y = f(x)$,

$$\left[f^{-1}\left(y\right)\right] = \frac{1}{f'(x)}$$

QED

Come applicare questa regola? Consideriamo una funzione qualsiasi $y = f(x)$ che rispetta le ipotesi del teorema appena visto e prendiamo un punto qualsiasi appartenente alla funzione $P(x_0, y_0) \in f$. Allora il punto $P'(y_0, x_0)$ apparterrà alla funzione inversa, e sarà il simmetrico di P rispetto alla retta $y = x$. Allora la derivata della funzione inversa in y_0 sarà il reciproco della derivata della funzione in x_0. Vediamo un esempio:

Esempio 2.8.2.

Calcolare la derivata della funzione inversa della funzione $y = x^2$ quando $y = 4$.

Prima di tutto dobbiamo determinare in quale punto la funzione data assume valore 4. In questo caso esso è facilmente determinabile algebricamente ($x = \sqrt{y} = 2$), ma ciò non è sempre possibile, per cui è necessario procedere a tentativi. Calcoliamo ora la derivata della funzione data in $x = 2$ e otteniamo che

$$y'(4) = 2x\big|_{x=2} = 4$$

A questo punto applichiamo il teorema e otteniamo

$$[f^{-1}(4)]' = \frac{1}{y'(4)} = \frac{1}{4}.$$

Verifichiamo ora il risultato ottenuto applicando la formula per la derivata della funzione radice quadrata. Sappiamo che $[\sqrt{y}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, per cui calcolandola in $y = 4$ otteniamo

$$[f^{-1}(4)]' = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Questa relazione può anche essere utilizzata per determinare l'espressione analitica della derivata della funzione inversa di una funzione nota, ma questo non è sempre possibile. Ciò è fattibile solo se è possibile determinare y nella funzione. Al paragrafo successivo è presentato qualche esempio.

2.9 Derivate notevoli /3

2.9.1 Funzione arcoseno

Funzione	**Derivata**
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dimostrazione. Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \operatorname{sen} y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{[\operatorname{sen} y]'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ora rimane da determinare x in modo da poter esprimere esplicitamente la derivata. Per far ciò sfruttiamo la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$$

$$\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y};$$

siccome la funzione arcoseno è definita nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e in questo intervallo il coseno è non negativo, scelgo il $+$.

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

per cui si ha

$$[\operatorname{arcsen} x]' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

QED

2.9.2 Funzione arcocoseno

Funzione	Derivata
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La dimostrazione è analoga alla precedente ed è lasciata come esercizio.

Esercizio 2.9.1. *Dimostrare la formula per la derivata della funzione arcocoseno.* *Soluzione a pag. 51*

2.9.3 Funzione arcotangente

Funzione	Derivata
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Dimostrazione. Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \operatorname{tg} y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{[\operatorname{tg} y]'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

QED

2.9.4 Funzione arcocotangente

Funzione	Derivata
$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

La dimostrazione è analoga alla precedente ed è lasciata come esercizio.

Esercizio 2.9.2. *Dimostrare la formula per la derivata della funzione arcocotangente.* *Soluzione a pag. 51*

2.10 Il differenziale

Sia $y = f(x)$ una funzione continua e derivabile in un intervallo. Come abbiamo osservato precedentemente, ad un incremento orizzontale Δx, corrisponde un incremento verticale Δy. Quest'ultimo può essere scritto come somma di due parti:

$$\Delta y = \overline{QS} = \overline{QR} + \overline{RS},$$

dove R è il punto che si trova sulla tangente alla curva in x_0 in corrispondenza di $x_0 + h$.

Sapendo che $t : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, si ricava il valore di $\overline{QR}$:

$$\overline{QR} = t(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + h)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + \cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_0)} = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Da cui

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{\overline{QR}} + \underbrace{r(x)}_{\overline{RS}}.$$

Siccome per $\Delta x \to 0$ il rapporto incrementale diventa la derivata, osserviamo che $\lim\limits_{\Delta x \to 0} r(x) = 0$. Per Δx molto piccoli (indicati con dx), possiamo quindi approssimare l'incremento Δy al solo $\overline{QR}$, ovvero all'incremento della funzione valutato sulla retta tangente. Esso prende il nome di differenziale della funzione e sarà uno strumento fondamentale per il calcolo integrale.

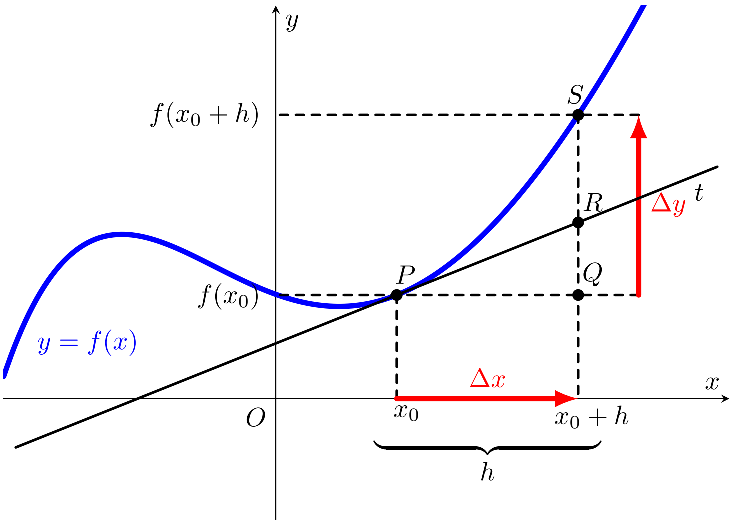


Figura 2.6

DEF (Differenziale)**.** Il differenziale di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento $\mathrm{d}x$ è il prodotto della derivata della funzione calcolata in x per l'incremento $\mathrm{d}x$. Il differenziale viene indicato con $\mathrm{d}f(x)$ o con $\mathrm{d}y$.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Osservazione (Notazione). La derivata di una funzionepuò essere scritta come il rapporto tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente. Questa notazione è da preferirsi quando non è scontato rispetto a quale variabile si sta derivando (ad es. in fisica).

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

2.10.1 Un'applicazione del differenziale

Siccome $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$, allora si ricava

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

Esempio 2.10.1.

Calcolare mediante il differenziale il valore approssimato di $\sqrt{4,005}$

$$\sqrt{4,005} = \sqrt{4 + 0,005}$$

Per cui abbiamo $x_0 = 4$ e $\mathrm{d}x = 0,005$. Per quanto detto sopra

$$f(x_0 + \mathrm{d}x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

Calcoliamo quindi la derivata della funzione radice quadrata $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, in conclusione

$$\sqrt{4,005} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0,005 = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,005 = 2,00125.$$

Per confronto osserviamo che la calcolatrice restituisce il valore $2,00124960961895\ldots$

2.11 Teoremi del calcolo differenziale

2.11.1 Teorema di Fermat

Teorema (Fermat). *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo nel nel punto x_0 interno ad $[a; b]$, allora la derivata della funzione in quel punto si annulla.*

Ipotesi

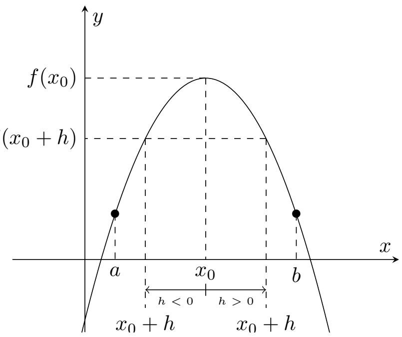
1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
3. x_0 punto di massimo o minimo relativo ($x_0 \in [a; b]$)

Tesi

$f'(x_0) = 0$

N.B.: La dimostrazione è svolta considerando x_0 punto di massimo, ma lo svolgimento è analogo nel caso di un punto di minimo.

Dimostrazione. Per definizione di punto di massimo relativo



$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I(x_0)$$
$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}$$

Calcolo i rapporti incrementali da sinistra e da destra:

$$\mathbf{h > 0} \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\mathbf{h < 0} \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Siccome $f(x)$ è derivabile per ipotesi 2, per il criterio di derivabilità

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Di conseguenza è necessario che

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$$

. QED

Osservazione (1). Il teorema fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo. Non garantisce che se la derivata si annulla allora si presenti un massimo/minimo relativo: potrebbe esserci un flesso a tangente orizzontale.

Osservazione (2). I punti di massomo e minimo locali non è detto che siano punti stazionari. Lo sono se e solo se sono interni al dominio e la funzione è derivabile. Si possono presentare tuttavia anche agli estremi del dominio o nei punti di non derivabilità.

2.11.2 Teorema di Rolle

Teorema (Rolle). *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ tale che*

1. *$f(x)$ è continua in $[a; b]$*
2. *$f(x)$ è derivabile in $]a; b[$*
3. *$f(a) = f(b)$*

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale risulta $f'(c) = 0$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $f(a) = f(b)$

Tesi

$f'(c) = 0$

Dimostrazione. Dato che per ipotesi $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ allora per il teorema di Weistrass $f(x)$ ammette massimo e minimo **assoluti** in tale intervallo, cioè

$$\exists c, d \in [a; b] : m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$$

Possiamo distinguere due casi:

1. $\mathbf{m} = \mathbf{M} \to m = f(c) = f(x) = f(d) = M$
   Se m e M coincidono vuol dire che $f(x)$ assume sempre lo stesso valore. Dato che $f(x)$ deve essere compresa tra m e M
   $$m \leq f(x) \leq M$$
   ma siccome $m = M$ allora $f(x) = m = M \quad \forall x \in [a; b]$, per cui $f(x)$ è costante. Siccome la derivata di una funzione costante è nulla
   $$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$$
   .
2. $\mathbf{m} < \mathbf{M}$, quindi $f(x)$ non è costante ($f(c) \neq f(d)$) e dato che sappiamo che $f(a) = f(b)$ allora **almeno** uno dei punti c e d deve essere interno all'intervallo $[a; b]$.
   Supponiamo che $c \in]a; b[$, quindi che c non sia un estremo. Allora la funzione presenta un punto di minimo assoluto (analog. massimo) all'interno dell'intervallo. Inoltre per ipotesi essa è continua e derivabile in c, per cui per il teorema di Fermat $f'(c) = 0$.

QED

Un'applicazione del teorema di Rolle

Esempio 2.11.1.

Dimostrare che il grafico della funzione $y = x^5 + x^3 + 1$ interseca l'asse x in un solo punto.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $y = x^5 + x^3 + 1$. Siccome è una funzione polinomiale, essa è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Di conseguenza, siccome

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 + x^3 + 1 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^5 + x^3 + 1 = +\infty.$$

Di conseguenza per il teorema di Bolzano la funzione interseca l'asse x in almeno un punto.
Supponiamo ora per assurdo che esistano x_1 e x_2 distinti tali che $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Allora la funzione soddisferebbe le ipotesi del teorema di Rolle in $[x_1, x_2]$, per cui dovrebbe esistere un $c \in [x_1, x_2]$ tale che $f'(c) = 0$. Calcoliamo quindi $f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ e osserviamo che la funzione presenta un punto stazionario in $x = 0$. Per il teorema di Rolle esso deve essere un punto di massimo o minimo relativo. Studiamo quindi il segno della derivata prima per classificare il punto stazionario e osserviamo che essa è positiva $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione presenta quindi un flesso a tangente orizzontale e non un punto di massimo/minimo relativo. È quindi falsa la tesi del teorema di Rolle, per cui è falsa l'ipotesi per assurdo, da cui segue la tesi. QED

2.11.3 Teorema di Lagrange

Teorema (Lagrange). *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$ tale che*

1. *$f(x)$ è continua in $[a;b]$*
2. *$f(x)$ è derivabile in $]a;b[$*

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Ipotesi

1. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a;b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a;b[$

Tesi

$$\exists c \in \;]a;b[\; : \; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Dimostrazione. Definiamo $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Osserviamo che

$$h(a) = f(a)$$

e

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a),$$

per cui essa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, di conseguenza esiste un punto c tale che $h'(c) = 0$. Osserviamo che

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

quindi siccome $h(c) = 0$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

QED

2.11.4 Conseguenze del teorema di Lagrange

Funzioni con derivata nulla

Teorema (Derivata nulla). *Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a;b]$, derivabile in $]a;b[$ e la sua derivata è nulla per ogni punto interno all'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a;b]$*

Ipotesi

1. $f : [a;b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a;b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a;b[$
4. $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in [a;b]$

Tesi

$$f(x) = k \;\; \forall x \in [a;b]$$

Funzioni con derivate uguali

Teorema (Differenza costante). *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a;b]$, derivabili in $]a;b[$ e tali che $f'(x) = g'(x) \;\; \forall x \in]a;b[$, allora esse differiscono per una costante.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $g(x)$ continua in $[a; b]$
5. $g(x)$ derivabile in $]a; b[$
6. $f'(x) = g'(x) \ \ \forall x \in [a; b]$

Tesi

$f(x) - g(x) = k \ \ \forall x \in [a; b]$

Monotonia di funzioni derivabili

Teorema (Monotonia di funzioni derivabili)**.** *Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo $]a; b[$:*

1. *se $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in]a; b[$, allora $f(x)$ è crescente in $]a; b[$*
2. *se $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in]a; b[$, allora $f(x)$ è decrescente in $]a; b[$*

Teorema (Inverso della monotonia di funzioni derivabili)**.** *Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo $]a; b[$:*

1. *se $f(x)$ è crescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in]a; b[$*
2. *se $f(x)$ è decrescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in]a; b[$*

2.11.5 Teorema di Cauchy

Teorema (Cauchy)**.** *Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni tali che*

1. *$f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a; b]$*
2. *$f(x)$ e $g(x)$ sono è derivabili in $]a; b[$*
3. *$g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]a; b[$*

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, $g : [a; b] \to \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $g(x)$ continua in $[a; b]$
5. $g(x)$ derivabile in $]a; b[$
6. $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]a; b[$

Tesi

$$\exists c \in \ ]a; b[\ : \ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2.11.6 Teorema di De l'Hôpital

N.B.: Applicabile per la risoluzione delle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Teorema (De l'Hôpital)**.** *Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite nell'intorno I di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, se*

1. *$f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (o ∞)*
2. *$f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I(x_0) - \{x_0\}$*
3. *$g'(x) \neq 0$ in $I(x_0) - \{x_0\}$*
4. *esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$*

Allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ipotesi

1. $f : I(x_0) \to \mathbb{R}$
2. $g : I(x_0) \to \mathbb{R}$
3. $f(x)$ e $g(x)$ continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (o ∞)
4. $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $I(x_0) - \{x_0\}$
5. $g'(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in I(x_0) - \{x_0\}$
6. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Tesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio 2.11.2.

Calcolare i seguenti limiti applicando il teorema di de l'Hôpital

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ *b)* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$ *c)* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{H}{\overset{LN}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{2}{1}\right] = 2$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{H}{\overset{LN}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{H}{\overset{LN}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1$$

Il teorema di de l'Hôpital può essere applicato più volte a condizione che ogni volte siano verificate le ipotesi.

c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{H}{\overset{LN}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Questa è una valida dimostrazione del limite notevole, tuttavia la prova geometrica presentata precedentemente è maggiormente elegante e quindi è da preferirsi.

2.12 Studio della derivata

Grazie ai teoremi che abbiamo appena enunciato possiamo sfruttare la derivata per ottenere importanti informazioni sul grafico della funzione di partenza. Infatti per il corollario di Lagrange (Monotonia di funzioni derivabili), sappiamo che il segno della derivata è direttamente correlato alla monotonia della funzione. Inoltre, ricordando la definizione di derivata come coefficiente angolare della retta tangente, abbiamo che i punti in cui essa si annulla sono punti in cui la retta tangente al grafico è parallela all'asse delle ascisse. Di conseguenza definiamo questi come punti stazionari. Essi sono classificati in tre categorie:

2.12.1 Punti di massimo relativo

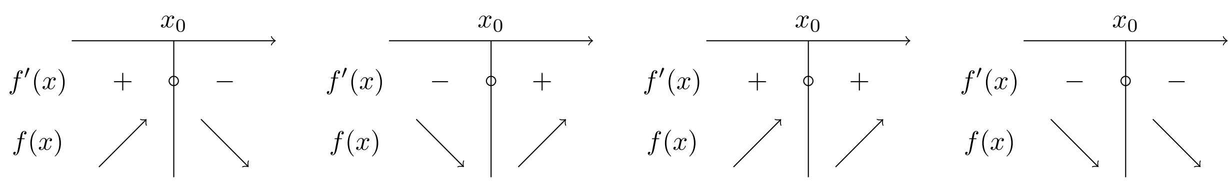
Si parla di punto di massimo relativo quando la derivata di una funzione è positiva in un intorno sinistro del punto stazionario e negativa in un intorno destro del punto stazionario.

2.12.2 Punti di minimo relativo

Si parla di punto di minimo relativo quando la derivata di una funzione è negativa in un intorno sinistro del punto stazionario e positiva in un intorno destro del punto stazionario.

2.12.3 Punti di flesso a tangente orizzontale

Si parla di punto di flesso a tangente orizzontale quando in un intorno completo del punto stazionario la derivata mantiene segno costante, per cui la funzione è sempre crescente o sempre decrescente.



(a) Massimo relativo (b) Minimo relativo (c) Flesso ascendente (d) Flesso discendente

Figura 2.7

2.13 Derivata seconda e flessi a tangente obliqua

Lo studio della derivata seconda permette di ottenere informazioni sulla concavità e sulla convessità di una convessità di una funzione. La derivata seconda si calcola semplicemente derivando la derivata prima. Quando la derivata seconda è positiva, la funzione di partenza è convessa (presenta una concavità verso l'alto); quando la derivata seconda è negativa, la funzione è concava (presenta una concavità verso il basso).

Quando la derivata seconda si annulla la funzione può presentare un punto di flesso, ovvero un punto in cui la dunzione inverte la sua concavità (altrimenti può trattarsi di un punto stazionario). Se il flesso non è a tangente orizzontale si dice **a tangente obliqua**. La retta tangente può essere individuata applicando la formula per la retta tangente al grafico di una funzione in un punto.

2.14 Problemi di ottimizzazione

Si dice problema di ottimizzazione un problema nel quale si cerca di massimizzare o minimizzare una grandezza, ad esempio il volume di un solido, l'area di una superficie, ...

Vediamo un esempio di problema di ottimizzazione:

Esempio 2.14.1.

Nella figura è rappresentato il grafico della funzione

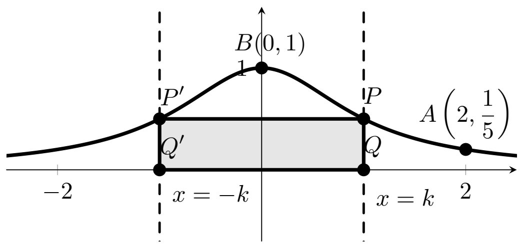
$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

simmetrica rispetto all'asse y.

- *Trovare a, b, c*

La retta $x = k$ e la sua simmetrica $x = -k$ determinano il rettangolo $PP'Q'Q$:

- *trovare per quale valore di k l'area $PP'Q'Q$ è massima.*



- Osserviamo che la funzione è pari, per cui si deve avere $b = 0$. Per cui la funzione è del tipo $y = \dfrac{1}{ax^2 + c}$. Imponiamo ora le condizioni di passaggio per i due punti $A\left(2, \dfrac{1}{5}\right)$ e $B(0, 1)$

$$A\left(2, \frac{1}{5}\right) \quad B(0,1) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{4a + c} \\ 1 = \dfrac{1}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{4a + 1} \\ c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 = 4a + 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Per cui otteniamo $a = 1$ e $c = 1$. Di conseguenza la funzione cercata sarà

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Siccome $P \in f$, abbiamo che $P\left(k, \dfrac{1}{k^2 + 1}\right)$. Per simmetria troviamo $P'\left(-k, \dfrac{1}{k^2 + 1}\right)$. Analogamente troviamo $Q(k, 0)$ e $Q'(-k, 0)$. Per cui l'area del rettangolo in funzione di k è

$$b = 2\overline{OQ} = 2k \qquad h = \overline{PQ} = \frac{1}{k^2 + 1}$$

$$A(k) = 2k \cdot \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{2k}{k^2 + 1}$$

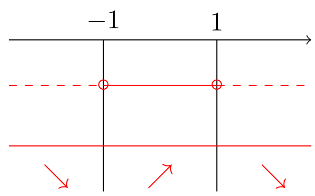
Ora dobbiamo trovare per quale valore di k la funzione area è massima, per cui quando la sua derivata si annulla:

$$A'(k) = \frac{2(k^2 + 1) - 2k(2k)}{(k^2 + 1)^2} = \frac{2k^2 + 2 - 4k^2}{(k^2 + 1)^2} = \frac{-2k^2 + 2}{(k^2 + 1)^2}$$

Osserviamo che la derivata si annulla per $k = 1$ e $k = -1$. Dobbiamo trovare per quale dei due valori di k l'area è massima. Studiamo quindi il segno della derivata:

$$N : -2k^2 + 2 > 0 \qquad k^2 < 1 \qquad -1 < k < 1$$

$$D : (k^2 + 1)^2 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



La funzione presenta quindi un punto di massimo per $k = 1$.

Capitolo 3

Studio di funzione completo

Proponiamo qui una traccia per studiare una funzione al fine di produrre un grafico probabile. Non è necessario né svolgere tutti i punti né svolgerli in ordine. Si consiglia di iniziare da subito a tracciare il grafico e di aggiornarlo man mano in mado di verificare progressivamente tutte le parti dello studio di funzione. Di seguito si riportano alcuni esempi.

3.1 Traccia per lo studio di funzione completo

3.1.1 Classificazione

<table>
<tr><td rowspan="2">Funzione</td><td>algebrica</td><td>razionale</td><td>intera</td></tr>
<tr><td>trascendente</td><td>irrazionale</td><td>fratta</td></tr>
</table>

3.1.2 Dominio

- Polinomiale : $\mathbb{R}$
- Fratte: denominatore $\neq 0$
- Irrazionali pari: radicando≥ 0
- Irrazionali dispari: $\mathbb{R}$
- Logaritmi: argomento> 0
- Esponenziali: $\mathbb{R}$
- Seno, coseno, arcotangente, arcocotangente: $\mathbb{R}$
- Tangente: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$
- Cotangente: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$
- Arcoseno, arcocoseno: $[-1; 1]$

3.1.3 Simmetrie

CN: $\forall x \in D, -x \in D$

- pari se $f(-x) = f(x)$
- dispari se $f(-x) = -f(x)$

3.1.4 Intersezioni con gli assi cartesiani

$$f(x) \cap \text{asse } x : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \qquad f(x) \cap \text{asse } y : \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

3.1.5 Studio del segno

Risolvere la disequazione $f(x) > 0$

3.1.6 Limiti, asintoti e discontinuità

Asintoto verticale	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$
Asintoto orizzontale	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$
Asintoto obliquo	CN: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $q = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx$

NB.: Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

Prima specie	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \qquad \mathit{salto} = \lvert l_1 - l_2 \rvert$
Seconda specie	$\lim\limits_{x \to x_0^\pm} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim\limits_{x \to x_0^\pm} f(x) = \nexists$
Terza specie	$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \quad \vee \quad f(x_0) = \nexists$

3.1.7 Derivata prima

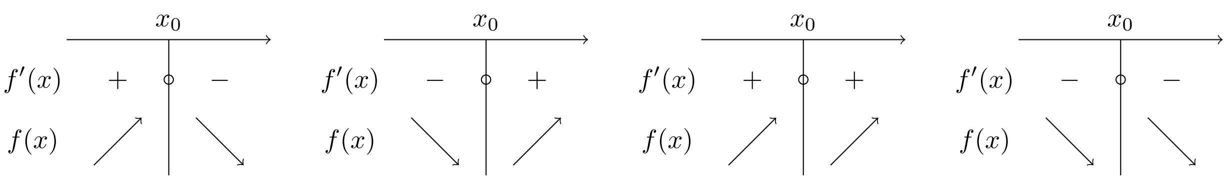
Le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = 0$$

identificano la presenza di

- massimi relativi
- minimi relativi
- flessi a tangente orizzontale

Per distinguerli è necessario studiare il segno della derivata: Lo studio della derivata prima fornisce anche



(a) Massimo relativo (b) Minimo relativo (c) Flesso ascendente (d) Flesso discendente

Figura 3.1

informazioni circa la monotonia della funzione.

3.1.8 Derivata seconda

Le soluzioni dell'equazione

$$f''(x) = 0$$

permettono di identificare i punti di flesso. A differenza della derivata prima permette di ottenere informazioni circa la presenza di flessi a tangente obliqua, per cui è necessario escludere tutte le soluzioni già analizzate in precedenza. La derivata seconda fornisce inoltre informazioni circa la concavità della funzione: verso l'alto quando la derivata seconda è positiva e verso il basso quando la derivata seconda è negativa. La funzione inverte la propria concavità in corrispondenza dei punti di flesso.

3.1.9 Estremi globali

In conclusione è opportuno elencare i punti di estremo globali, da ricercarsi tra gli estremi del dominio, i punti stazionari e i punti di non derivabilità.

3.2 Esempi

Esempio 3.2.1.

Studiare la funzione $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. **Classificazione:** funzione algebrica razionale fratta;
2. **Dominio:** $\operatorname{dom} f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
3. **Simmetrie:** il dominio non è simmetrico, per cui la condizione necessaria non è rispettata, di conseguenza la funzione non è né pari né dispari.
4. **Intersezioni con gli assi:** è consigliabile partire dalle intersezioni con l'asse x, perchè potremmo trovare anche l'unica intersezione con l'asse y nel caso la funzione passi per l'origine.

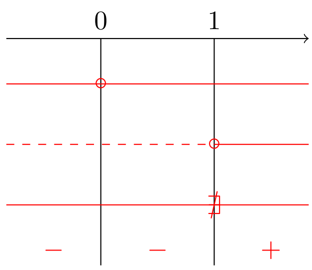
   $$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

   La funzione passa appunto per l'origine $O(0,0)$, quindi non ci serve calcolare anche l'intersezione con l'asse y.
5. **Segno:** $f(x) > 0$

   $N : x^2 > 0 \qquad x \neq 0$

   $D : (x-1) > 0 \qquad x > 1$

   $\operatorname{dom} f : x \neq 1$



6. **Limiti, asintoti e discontinuità:** Dobbiamo calcolare i limiti agli estremi del dominio:

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\boxed{x^{\cancel{2}}}}{\boxed{\cancel{x}}-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{FI}{=} -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\boxed{x^{\cancel{2}}}}{\boxed{\cancel{x}}-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{FI}{=} +\infty$$

   È verificata la condizione necessaria per la ricerca dell'asintoto obliquo, per cui procediamo con la ricerca dello stesso:

   $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{FI}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

   $$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{FI}{=} 1.$$

Per cui la funzione ha un asintoto obliquo (destro e sinistro) alla retta $y = x + 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

La funzione presenta quindi una discontinuità di seconda specie in $x = 1$.

7. **Derivata prima:** Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

e il suo dominio, che va confrontato con il dominio della funzione per verificare l'eventuale presenza di punti di non derivabilità:

$$\operatorname{dom} f' =]-\infty, 1[\, \cup \,]1, +\infty[= \operatorname{dom} f$$

la funzione è quindi derivabile su tutto il suo dominio.

Individuiamo ora i punti stazionari

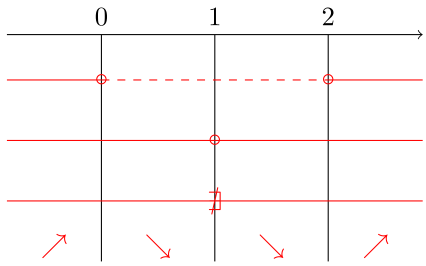
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$$

e studiamo il segno della derivata per classificarli attraverso lo studio della monotonia della funzione: $f'(x) > 0$

$N : x(x-2) > 0 \qquad x < 0 \vee x > 2$

$D : (x-1)^2 > 0 \qquad x > 1$

$\operatorname{dom} f' : x \neq 1$

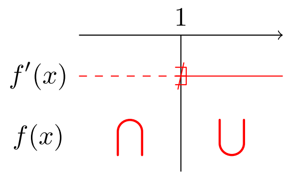


La funzione presenta quindi un massimo relativo in $O(0,0)$ e un minimo relativoin $M(2,4)$.

8. **Derivata seconda:** Calcoliamo la derivat seconda della funzione, derivando la derivata prima.

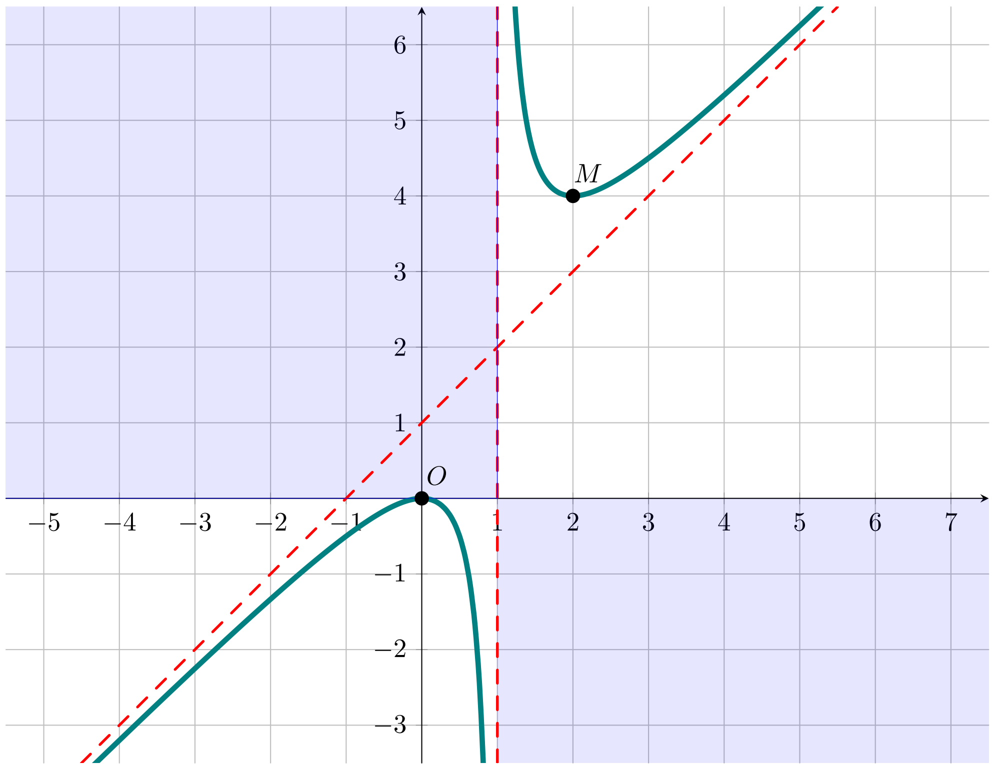
$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)(1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Ora ne studiamo il segno per determinare la concavità della funzione:



9. **Estremi globali:** per quanto detto precedentemente possiamo affermare che la funzione è illimitata sia inferiormente che superiormente. Non emmette perciò estremi globali.

10. **Grafico:** ora abbiamo tutte le informazioni sufficienti per completare il grafico della funzione. Se abbiamo svolto il lavoro correttamente, ogni informazione acquisita deve essere stata confermata dalle precedenti. Si consiglia di aggiornare il disegno per ogni nuova informazione acquisita in modo da confrontarla con le precedenti. Anche per questo è stato scelto di proporre questo ordine.



Esempio 3.2.2.

Studiare la funzione $y = x - \sqrt{x^2+4x}$*, tralasciando la derivata seconda.*

1. **Classificazione:** funzione algebrica razionale fratta.
2. **Dominio:** $x^3 + 4x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+4) \geq 0 \quad]-\infty;-4] \;\cup\; [0;+\infty[$
3. **Simmetrie:** la condizione necessaria non è rispettata, per cui la funzione non è né pari né dispari.
4. **Intersezioni con gli assi:**

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x - \sqrt{x^2+4x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+4x} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x+4) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2+4x = x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

Per cui la funzione interseca gli assi cartesiani nell'origine $O(0,0)$.

5. **Segno:** $f(x) > 0$

$$x - \sqrt{x^2+4x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+4x} < x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4+4x \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2+4x < x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq -4 \vee \geq 0 \\ x > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \varnothing$$

Per cui la funzione è negativa in tutto il suo dominio.

6. **Limiti, asintoti e discontinuità:** Dobbiamo calcolare i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right) = [-\infty+\infty] \overset{FI}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(x-|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right) = -\infty$$

È verificata la condizione necessaria per la presenza dell'asintoto obliquo. Procediamo con la verifica:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{ger.}{\overset{FI}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = 2$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2-4x} - 2x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{x^2-4x} - x\right) = [-\infty+\infty] \overset{FI}{=}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}-x} \underset{ger.}{=} \lim_{x\to-\infty} -\frac{4x}{\sqrt{x^2}-x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4x}{|x|-x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4x}{-x-x} = 2$$

La funzione presenta quindi un asintoto obliquo sinistro alla retta $y = 2x + 2$.

$$\lim_{x\to-4^-}\left(x - \sqrt{x^2+4x}\right) = -4^- \qquad f(-4) = -4$$

la funzione è quindi continua da sinistra in $x = -4$;

$$\lim_{x\to0^+}\left(x - \sqrt{x^2+4x}\right) = 0^- \qquad f(0) = 0$$

la funzione è quindi continua da destra in $x = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+4x}\right) = [-\infty+\infty] \overset{FI}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-4x}{x+\sqrt{x^2+4x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{ger.}{\overset{FI}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x+\sqrt{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x} = -2$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale destro alla retta $y = 2$.

7. **Derivata prima:**

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}}(2x+4) = \frac{\sqrt{x^2+4x}-x-2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

Determiniamo il dominio della derivata prima $\operatorname{dom} f' =]-\infty;-4[\ \cup\ ]0;+\infty[$ e osserviamo che differisce dal dominio della funzione per i punti $x = 0$ e $x = -4$. Essi saranno dei punti di non derivabilità da classificare. Posso applicare il criterio di derivabilità:

$$f'_-(-4) = \lim_{x\to-4^-}\frac{\sqrt{x^2+4x}-x-2}{\sqrt{x^2+4x}} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty \qquad f'_+(-4) \nexists \text{ per dominio}$$

la funzione presenta un punto a tangente verticale in $x = -4$;

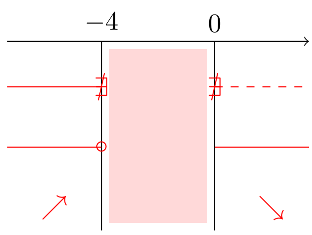
$$f'_-(0) \nexists \text{ per dominio} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4x}-x-2}{\sqrt{x^2+4x}} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

la funzione presenta un punto a tangente verticale in $x = 0$. Cerchiamo ora eventuali punti stazionari:

$$\frac{\sqrt{x^2+4x}-x-2}{\sqrt{x^2+4x}} = 0 \qquad \sqrt{x^2+4x} = x+2 \qquad \begin{cases} x(x+4) \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x^2-4x = x^2-4x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+4) \geq 0 \\ x \geq -2 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

La funzione non ha quindi punti stazionari. Studiamo ora il segno della derivata:

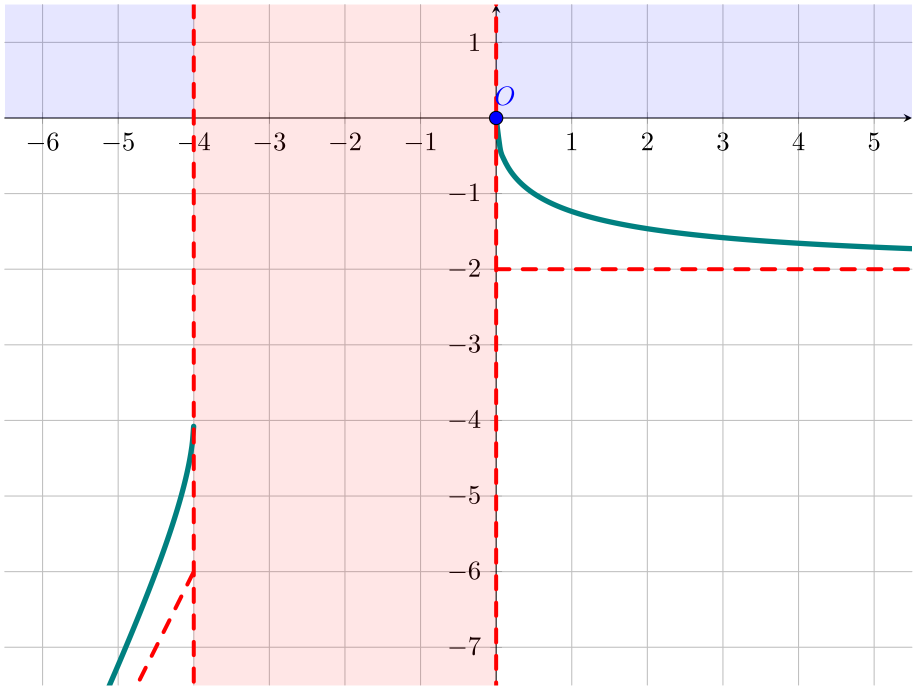
$$N: \sqrt{x^2+4x} > x+2 \qquad (*) \qquad x \leq -4$$
$$D: \sqrt{x^2+4x} > 0 \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f'$$



$$(*) \qquad \begin{cases} x^2+4x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2+4x > (x+2)^2 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x^2+4x \geq 0 \\ x+2 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\varnothing \quad \cup \quad x \leq -4$$

9. **Estremi globali:** La funzione ha punti di massimo globali in $x = -4$ e $x = 0$; è illimitata inferiormente.

10. **Disegno:**



3.3 Esercizi

Esercizio 3.3.1. *Studiare la funzione* $g(x) = e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$. *Soluzione a pag. 51*

Esercizio 3.3.2. *Sia* $g(x) = |x-1|e^{-\alpha x}$ $(\alpha > 0)$. *Fornire un grafico qualitativo di* g. *Soluzione a pag. 53*

Capitolo 4

Soluzioni degli esercizi

Esercizio 2.9.1

Dimostrazione. Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \cos y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\arccos x]' = \frac{1}{[\cos y]'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y.}$$

Ora rimane da determinare x in modo da poter esprimere esplicitamente la derivata. Per far ciò sfruttiamo la prima relazione fondamentale della goniometria:

$$\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$$

$$\operatorname{sen} y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y};$$

siccome la funzione arcocoseno è definita nell'intervallo $[0, \pi]$ e in questo intervallo il seno è non negativo, scelgo il $+$.

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

per cui si ha

$$[\arccos x]' = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{1}{-\sqrt{1 - x^2}}$$

QED

Esercizio 2.9.2

Dimostrazione. Iniziamo invertendo la funzione: otteniamo

$$x = \operatorname{cotg} y.$$

Per la derivata della funzione inversa otteniamo

$$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{1}{[\operatorname{cotg} y]'} = \frac{1}{-1 - \operatorname{cotg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

QED

Esercizio 3.3.1

1. Dominio naturale: $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. Simmetrie (pari/dispari):
   Il dominio è asimmetrico rispetto allo 0 quindi non presenta simmetrie (né pari né dispari).
3. Segno di $g(x)$:
   $g(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} g$, inoltre l'argomento dell'esponenziale è sempre non negativo, quindi $g(x) \geq e$ e $g(x))1$ quando $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$ (minimo globale).

4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti Riscriviamo la funzione sciogliendo il modulo per capire meglio l'andamento:
$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x-1}} & x \leq 1 \vee x > 1 \\ e^{\frac{x+1}{1-x}} & -1 < x < 1 \end{cases}$$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = e^-$
Infatti per $x \to -\infty$ si ha $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} < 1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = e^+$ (analogamente)
Quindi $y = e$ è un asintoto orizzontale.
$\lim\limits_{x\to1^-} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = +\infty$ Quindi $x = 1$ è un asintoto verticale.

5. Continuità: g è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

6. Derivabilità: g è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Siano $f(x) := \dfrac{x+1}{x-1}$, $A :=]-\infty; -1] \cup]1, +\infty[$ e $B :=]-1, 1[$, allora
$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & x \in A \\ e^{-f(x)} & x \in B \end{cases}$$
   - su A
     $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$
$$g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{f(x)}$$
   - su B
$$g'(x) = -e^{-f(x)} f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{-f(x)}$$

Per il corollario di Lagrange
$$g'_-(-1) = \lim_{x\to-1^-} g'(x) = -\frac{1}{2} \qquad g'_+(-1) = \lim_{x\to-1^+} g'(x) = \frac{1}{2}$$
Quindi la funzione presenta un punto angoloso, per cui non è derivabile.

7. Punti critici e segno di $g'(x)$
$$g' < 0 \text{ su } A \quad \text{e} \quad g' > 0 \text{ su } B$$
Quindi f è crescente in A e decrescente in B. Inoltre $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi f non presenta punti critici.

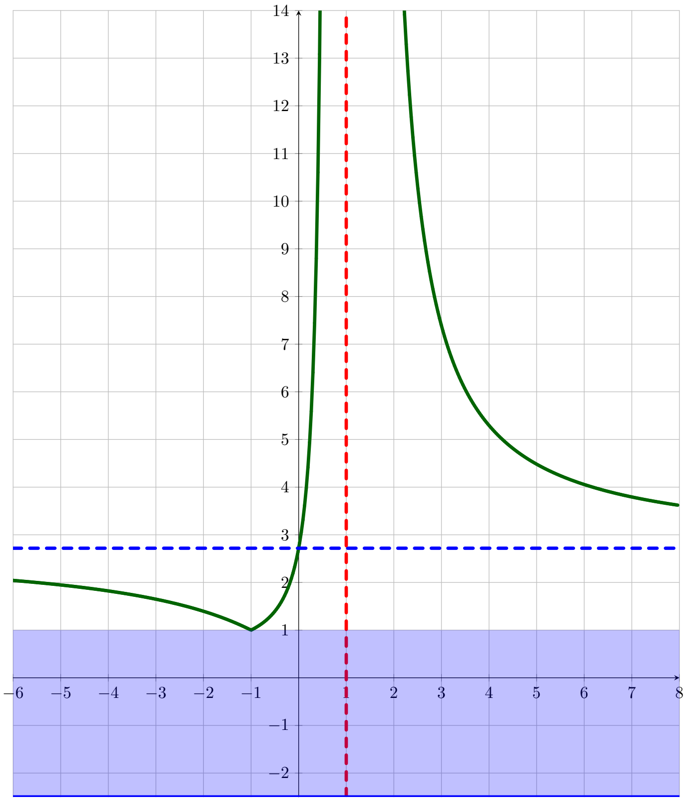
8. Convessità e derivata seconda
   - Su A
$$g''(x) = (e^{f(x)})' \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} \cdot (f(x))^2 + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)}((f'(x))^2 + f''(x))$$
   - Su B
$$g''(x) = (e^{-f(x)})' \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = e^{-f(x)} \cdot (f(x))^2 - e^{f(x)} \cdot f''(x) = -e^{f(x)}((f'(x))^2 - f''(x))$$
$$f''(x) = 3(x-1)^{-3} = \frac{4}{(x+1)^3}$$
$$(f'(x))^2 + f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{\cancel{4} + 4x - \cancel{4}}{(x-1)^4} = \frac{4x}{(x-1)^4}$$
$$(f'(x))^2 - f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4 + -x + 4}{(x-1)^4} = 4\frac{2-x}{(x-1)^4}$$
Su A la funzione è concava per $x < -1$ e convessa per $x > 1$, mentre su B la funzione è sempre convessa.

9. Esistenza di massimo e minimo globali:

   La funzione presenta un minimo globale in $x = -1$, mentre non presenta massimi globali.

$$\inf_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} g = \min_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} g = 1$$

$$\sup_{\mathbb{R}\setminus\{1\}} g = +\infty \qquad \nexists \max_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}$$



Esercizio 3.3.2

1. Dominio naturale: $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0$

2. Simmetrie (pari/dispari)

$$f(-x) = |-x-1|e^{\alpha x} \neq f(x)$$
$$\neq -f(x)$$

   Né pari né dispari.

3. Segno di $g(x)$ Siccome è un prodotto di fattori sempre non negativi,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Inoltre si ha $g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$, quindi $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per il grafico di $g(x)$.

4. Limiti agli estremi del dominio e asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = [0 \cdot \infty] = 0^+ \qquad (y = 0 \text{ asintoto orizzontale destro})$$

$$\lim_{x\to-\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = +\infty$$

5. Continuità: la funzione è continua si $\mathbb{R}$.

6. Derivabilità Sciogliamo il modulo

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Calcolo ora la derivata

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x} & \text{se } x > 1 \\ -(e^{-\alpha x} - \alpha(x-1)e^{-\alpha x}) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) & \text{se } x > 1 \\ e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Per il corollario di Lagrange

$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) = e^{-\alpha}$$

$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} e^{-\alpha x}(\alpha x-\alpha-1) = -e^{-\alpha}$$

g non è quindi derivabile il $x = 1$, ma presenta un punto angoloso.

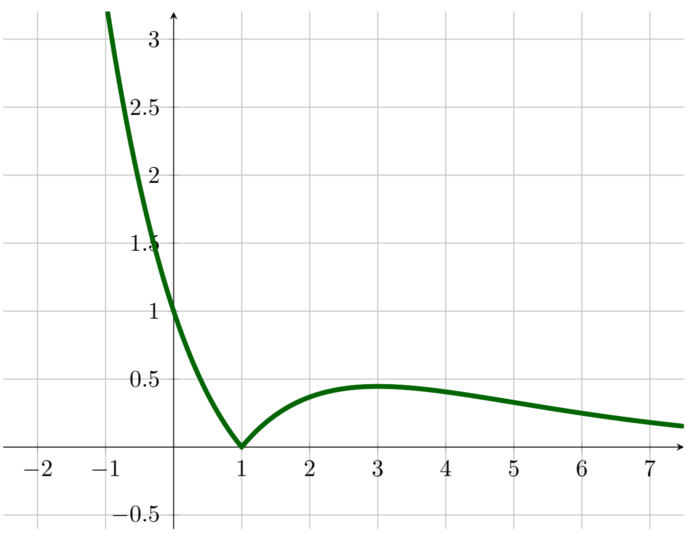
7. Punti critici e segno di $g'(x)$
   - Se $x > 1$
   $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-\alpha x+\alpha > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$
   - Se $x < 1$
   $$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x - \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

   La funzione è crescente in $]1, 1+\frac{1}{\alpha}[$ e decrescente in $]1+\frac{1}{\alpha}, +\infty[\cup]-\infty, 1[$. Ha inoltre un massimo relativo in $1 + \frac{1}{\alpha}$

8. Convessità e derivata seconda
   - Se $x > 1$
   $$g''(x) = -\alpha e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) - \alpha e^{-\alpha x} = \alpha e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 2)$$
   $$g''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha x > \alpha + 2 \Leftrightarrow x > \frac{2+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$$
   - Se $x < 1$
   $$g''(x) = +\alpha e^{-\alpha x}(1-\alpha x+\alpha) + \alpha e^{-\alpha x} = -\alpha e^{-\alpha x}(\alpha x - \alpha - 2)$$
   $$g''(x) > 0 \Leftrightarrow -\alpha x > \alpha + 2 \Leftrightarrow x < \frac{2+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}$$

   La funzione é convessa in $]1, 1+\frac{2}{\alpha}[$ e concava altrove. Presenta un flesso in $1 + \frac{2}{\alpha}$

9. Esistenza di massimo e minimo globali:
   La funzione presenta un minimo globale in $P(1, 0)$ e non presenta massimi globali.



La funzione studiata con $\alpha = \frac{1}{2}$