Funzioni reali di variabili reali

Davide Borra - 5LA

A.S. 2021-2022

Indice

1 Definizione e caratteristiche

DEF. *Presi due insiemi D (dominio) e C (codominio) tali che $D \subset \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$, si dice* ***funzione*** *f da D a C una relazione che ad ogni elemento di D associa uno e un solo elemento di D. In simboli*

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & C \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Se ad ogni elemento $x \in D$ la funzione f associa un elemento $y \in C$, y (**variabile dipendente**) è detta **immagine** di x tramite f, mentre x (**variabile indipendente**) è detta **controimmagine** di y tramite f. La scrittura $y = f(x)$ è detta **espressione analitica della funzione in forma esplicita**. Le funzioni possono anche essere scritte in forma implicita come $g(x, y) = 0$. Si definisce inoltre un insieme $\operatorname{Im} f \subseteq C$ detto **immagine** di f.

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in D\}$$

1.1 Classificazione

Le funzioni si dividono in due grandi categorie: le funzioni algebriche e le funzioni trascendenti. Una funzione si dice **algebrica** se la sua espressione analitica contiene solo operazioni di somma algebrica, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice, altrimenti si dice **trascendente**. Le funzioni algebriche sono a loro volta divise in

- **funzioni polinomiali**: possono essere scritte sotto forma di polinomi. Esse sono dette *lineari* se il polinomio che le identifica è di primo grado rispetto alla variabile indipendente, *quadratiche* se è di secondo grado e *cubiche* se di terzo.
- **funzioni fratte**: possono essere scritte come quoziente di due polinomi, o comunque la loro scrittura analitica presenta una variabile x al denominatore.
- **funzioni irrazionali**: nella scrittura analitica conmpare un radicale al cui radicando è presente la variabile x.

1.2 Dominio

DEF. *Si dice* ***dominio naturale*** *o* ***campo di esistenza*** *di una funzione $y = f(x)$ l'insieme più ampio dei valori reali che è ossibile assegnare alla variabile x per far sì che esista anche il corrispondente valore i y*

Funzione	Dominio
Funzioni polinomiali $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$	$\mathbb{R}$
Funzioni fratte $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ P e Q polinomi	$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \vert Q(x) = 0\}$
Funzioni irrazionali $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\left\langle \begin{array}{l} \{x \in \mathbb{R} \vert f(x) \geq 0\} \text{ se } n \text{ pari} \\ \text{dominio di } f(x) \text{ se } n \text{ dispari} \end{array} \right.$
Funzioni logaritmiche	

Funzione	Dominio
$y = \log_a f(x) \quad \text{con } a > 0 \wedge a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali	
$y = a^{f(x)} \quad \text{con } a > 0 \wedge a \neq 1$	dominio di $f(x)$
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$
$f(x)^{\alpha}$ — α irrazionale, se $\alpha > 0$	$f(x) \geq 0$
$f(x)^{\alpha}$ — α irrazionale, se $\alpha < 0$	$f(x) > 0$
Funzioni goniometriche	
$y = \operatorname{sen} x, y = \cos x$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
$y = \operatorname{arcsen} x, y = \arccos x$	$[-1, 1]$
$y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$

1.3 Zeri di funzione

DEF. *Preso un numero reale λ, si dice zero (radice) della funzione $y = f(x)$ se $f(\lambda) = 0$*

Teorema (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Sia $P(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali. Nell'insieme dei numeri reali, esso ha al più n radici.*

1.4 Studio del segno

Data una funzione $y = f(x)$, essa può assumere sia valori positivi che valori negativi. Studiare il segno di una funzione significa determinare per quali intervalli di valori della variabile x, la variabile y assume valori positivi, e per quali valori negativi. Generalmente per determinare il segno di una funzione è sufficiente risolvere la disequazione

$$f(x) > 0$$

Esempio 1.1. *Si determinino dominio, radici e segno della funzione $y = x^2 + x - 2$*

- Dominio: Si tratta di una funzione polinomiale, di conseguenza il suo dominio è l'insieme $\mathbb{R}$
- Zeri: Per determinare gli zeri bisogna risolvere l'equazione $f(x) = 0$, ovvero

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

- Segno: Risolviamo la disequazione

$$x^2 + x - 2 > 0$$

$$(x - 1)(x + 2) > 0$$

$$\text{prodotto di fattori } > 0\text{: soluzioni esterne } x < -2 \vee x > 1$$

2 Proprietà

2.1 Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

DEF. *Data una funzione $f : D \to C$, essa si dice:*

- ***iniettiva*** *se ogni elemento di C è immagine di* al più *un elemento di D*
- ***suriettiva*** *se ogni elemento di C è immagine di* almeno *un elemento di D*
- ***biiettiva*** *se è sia iniettiva che suriettiva.*

Per dimostrare che una funzione è iniettiva, è possibile dimostrare che $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.
Ogni funzione è suriettiva nel proprio codominio, per questo generalmente la suriettività viene analizzata in $\mathbb{R}$.

Un metodo semplice per capire dal grafico se una funzione è iniettiva e/o suriettiva (attenzione, non equivale ad una dimostrazione) è il criterio della retta orizzontale. Una funzione è iniettiva se ogni retta parallela all'asse x che è possibile tracciare interseca la funzione in *al più* un punto, suriettiva se la interseca in *almeno* un punto e biiettiva se in *esattamente* un punto.

2.2 Monotonia

DEF (Funzione crescente in senso stretto)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, essa si dice* ***crescente in senso stretto*** *in un intervallo $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.*

DEF (Funzione crescente in senso lato)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, essa si dice* ***crescente in senso lato*** *(o* ***non decrescente****) in un intervallo $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$.*

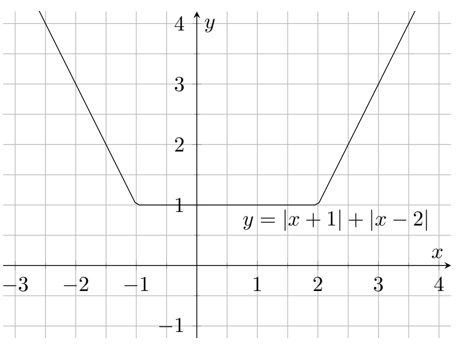
DEF (Funzione decrescente in senso stretto)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, essa si dice* ***decrescente in senso stretto*** *in un intervallo $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$.*

DEF (Funzione decrescente in senso lato)**.** *Data una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, essa si dice* ***decrescente in senso lato*** *(o* ***non crescente****) in un intervallo $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Esempio 2.1. *Studiare la monotonia di $y = |x + 1| + |x - 2|$*

Nella funzione in figura sono chiaramente visibili tre intervalli:

- nell'intervallo $]-\infty; -1[$ la funzione è decrescente in senso stretto;
- nell'intervallo $]-1; 2[$ la funzione è costante, è quindi sia crescente che decrescente in senso lato;
- nell'intervallo $]2; +\infty[$ la funzione è crescente in senso stretto.



Inoltre:

- nell'intervallo $]-\infty; 2[$ la funzione è decrescente in senso stretto;
- nell'intervallo $]-1; +\infty[$ la funzione è crescente in senso stretto.

Una funzione è crescente in un intervallo I se e solo se la sua derivata è positiva, decrescente se la derivata è negativa, costante se la derivata è nulla.

DEF (Funzione monotòna). *Una funzione $f : D \to C$, con $D \subseteq \mathbb{R}$, si dice* ***monotona in senso stretto*** *in un intervallo $I \subseteq D$ se in quel'intervallo è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto. Analoga definizione può essere data per una funzione monotona in senso lato.*

Nell'esempio precedente la funzione è monotona in senso stretto negli intervalli $]-\infty; -1[$ e $]2; +\infty[$

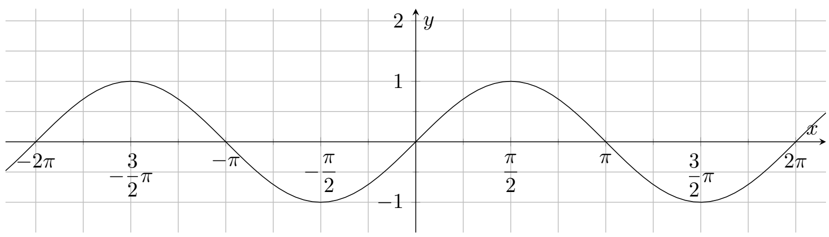
2.3 Funzioni periodiche

DEF. *Una funzione $y = f(x)$ si dice* ***periodica*** *di periodo T (con $T > 0$) se, per qualsiasi numero $k \in \mathbb{Z}$,*

$$f(x) = f(x + kt)$$

Se una funzione è periodica, allora non è iniettiva.

Esempio 2.2. *La funzione $y = \operatorname{sen} x$ è una funzione periodica di periodo $T = 2\pi$*



2.4 Funzioni pari e dispari

Si indica con D un sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ tale che se $x \in D$, allora $-x \in D$.

DEF (Funzione pari). *Data una funzione $y = f(x)$, essa si dice pari in D se $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$, ovvero la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.*

DEF (Funzione dispari). *Data una funzione $y = f(x)$, essa si dice dispari in D se $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$, ovvero la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi.*

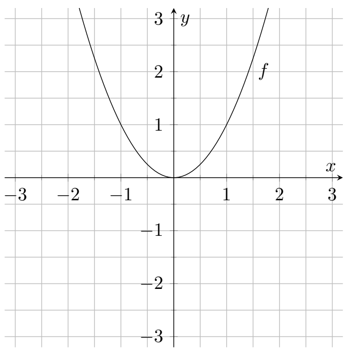
NB.: Perché una funzione presenti simmetrie deve essere rispettata la condizione necessaria per cui il dominio deve essere simmetrico rispetto a 0:

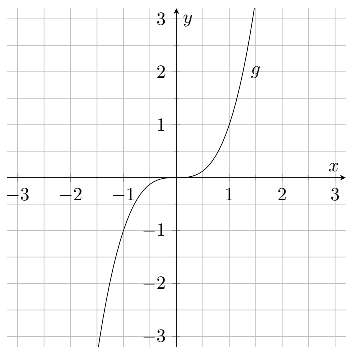
$$\forall x \in D, -x \in D$$

Esempio 2.3. *La funzione $f(x) = x^2$ è pari, mentre la funzione $g(x) = x^3$ è dispari. Infatti*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

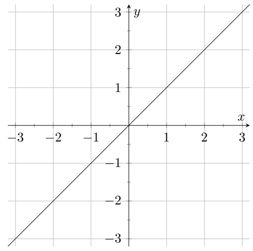




3 Funzioni elementari

3.1 La funzione lineare

La funzione lineare è un'equazione polinomiale di primo grado. Il grafico ad essa associato corrisponde ad una retta. Nel caso dela funzione $y = x$ si tratta della bisettrice I-III quadrante ed è l'identità associata a $\mathbb{R}$. Nell'equaione generica

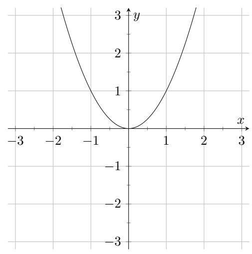


$$y = mx + q$$

il parametro m, detto coefficiente angolare, identifica la pendenza della retta, mentre il parametro q, detto ordinata d'origine, rappresenta il punto di intersezione con l'asse y, di coordinate $(0, q)$.

3.2 La parabola

La funzione quadratica $y = x^2$ è un'equazione polinomiale di secondo grado. Il grafico ad essa associato corrisponde ad una parabola. Nel caso della funzione elementare $y = x^2$ si tratta di una parabola con il vertice nell'origine degli assi e concavità verso l'alto. Nel caso du una parabola generica

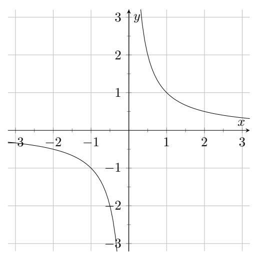


$$y = ax^2 + bx + c$$

- l'asse di simmetria ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$
- il vertice ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- il fuoco ha coordinate $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
- la direttrice ha equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
- la parabola ha concavità verso l'alto se $a > 0$ o verso il basso se $a < 0$

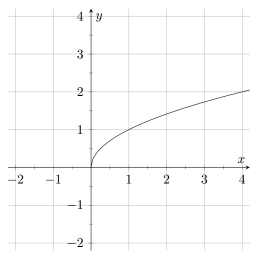
3.3 L'iperbole equilatera e la funzione omografica

La funzione omografica è caratterizzata dalla relazione di proprzionalità inversa tra le due variabili. L'equazione $y = \frac{k}{x}$ rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti con semiasse trasverso $a = \sqrt{2|k|}$, semidistanza focale $c = 2\sqrt{|k|}$ e fuochi in $F(\pm\sqrt{2k}; \pm\sqrt{2-k})$. Applicando una traslazione di vettore $\vec{v}(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$, si ottiene una funzione omografica generica di equazione



$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{se } c \neq 0 \text{ e } ad \neq bc$$

Essa a un asintoto verticale di equazione $x = -\frac{d}{c}$, un asintoto orizzontale di equazione $y = \frac{a}{c}$ e di conseguenza ha centro $C(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$. Per ricavare gli altri elementi caratteristici è sufficiente determinare $k = \frac{bc - ad}{c^2}$ e poi applicare un'eventuale traslazione di vettore $\vec{v}$



3.4 La funzione irrazionale

La funzione irrazionale $y = \sqrt{x}$ è l'inversa della funzione quadratica e si ottiene restringendone il dominio e applicando una simmetria rispetto alla biseetrice I-III quadrante. La funzione che si ricava ha dominio $D : [0; +\infty[$ e codominio $C : [0; +\infty[$.

3.5 Le funzioni goniometriche

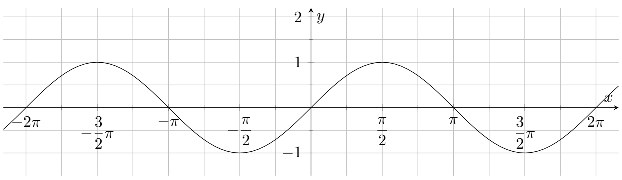
3.5.1 La funzione seno

La funzione seno è una funzione goniometrica trascendente, periodica in $T = 2\pi$. Essa ha dominio $D : \mathbb{R}$ e codominio $C : [-1; 1]$. Presenta zeri di funzione per $x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$, assume valori positivi in $]2k\pi; \pi + 2k\pi[$ e negativi altrove. Essa può essere scritta nella forma generica

$$y = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) + B$$

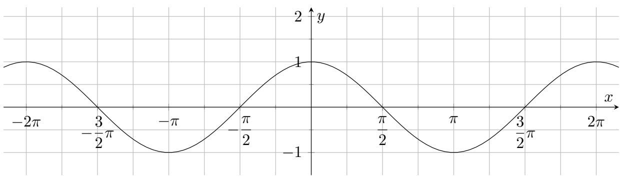
dove i parametri rappresentano:

- A: ampiezza, rappresenta la dilatazione verticale della funzione, la semidifferenza tra i valori y dei massimi e dei minimi.
- ω: pulsazione, è collegata al periodo dalla relazione $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$
- φ: fase, legato alla traslazione orizzontale
- B: la traslazione verticale



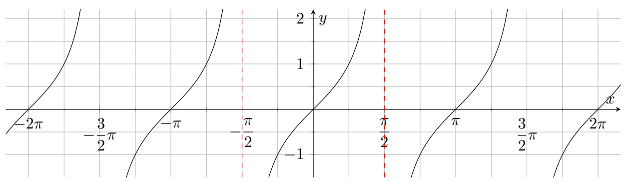
3.5.2 La funzione coseno

La funzione coseno è una funzione goniometrica trascendente, periodica in $T = 2\pi$. Essa ha dominio $D : \mathbb{R}$ e codominio $C : [-1; 1]$. Presenta zeri di funzione per $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$, assume valori positivi in $]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$ e negativi altrove.



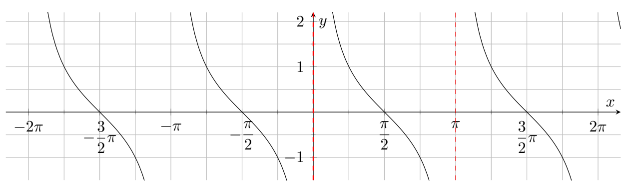
3.5.3 La funzione tangente

La funzione tangente è una funzione goniometrica trascendente, periodica in $T = \pi$. Essa ha dominio $D : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ e codominio $C : \mathbb{R}$. Presenta zeri di funzione per $x = k\pi$, assume valori positivi in $]k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi[$ e negativi altrove.

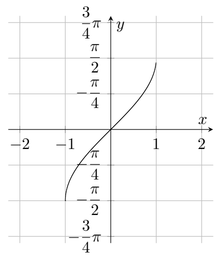


3.5.4 La funzione cotangtente

La funzione cotangente è una funzione goniometrica trascendente, periodica in $T = \pi$. Essa ha dominio $D : x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ e codominio $C : \mathbb{R}$. Presenta zeri di funzione per $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, assume valori positivi in $]k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi[$ e negativi altrove.



3.5.5 La funzione arcoseno



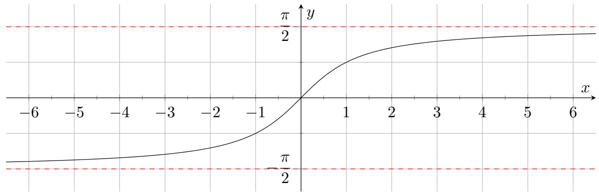
La funzione arcoseno (in figura) è l'inversa della funzione seno. Per poter invertire questa funzione è necessario restringerne il dominio a $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ e il codominio a $[-1; 1]$. di conseguenza la funzione arcoseno ha dominio $D : [-1; 1]$ e codominio $C : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Essa presenta inoltre un solo zero di funzione per $x = 0$.

3.5.6 La funzione arcocoseno

Analogamente alla funzione arcoseno, la funzione arcocoseno è l'inversa del coseno. Anche in questo caso il dominio e il codominio devono essere ristretti a $D' : [0; \pi]$ e $C' : [-1; 1]$. di conseguenza la funzione arcoseno ha dominio $D : [-1; 1]$ e codominio $C : [0; \pi]$. Essa presenta inoltre un solo zero di funzione per $x = -1$. Il grafico consiste in una traslazione verso l'alto di π unità del grafico della funzione arcoseno.

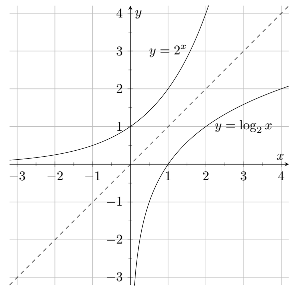
3.5.7 La funzione arcotangente

La funzione arcotangente è la funzione inversa della tangente. In questo caso è necessario ridurre solamente il dominio della funzione di partenza, per cui l'arcotangente ha dominio $D : \mathbb{R}$ e codominio $C :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Essa presenta due asintoti orizzontali agli estremi del codominio e uno zero di funzione per $x = 0$.
Esiste anche la funzione arcocotangente, inversa della cotangente, che consiste in una traslazione verso l'alto d π unità della funzione $y = -\operatorname{arctg} x$.



3.6 La funzione esponenziale

La funzione esponenziale $y = a^x$ è una funzione trascendente. Essa ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $]0; +\infty[$, e presenta un asintoto orizzontale a 0. Di conseguenza non ha zeri di funzione. Se $a > 1$ La funzione è strettamente crescente, mentre se $0 < a < 1$ la funzione è strettamente decrescente.



3.7 La funzione logaritmo

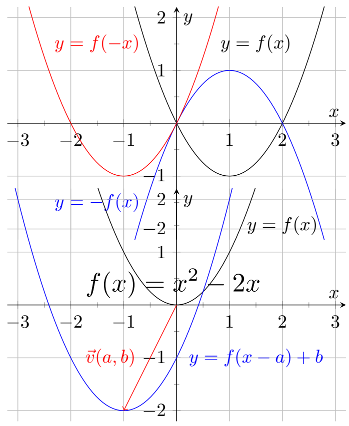
La funzione logaritmo $y = \log_a x$ è la funzione inversa della funzione esponenziale, di conseguenza ha dominio $]0; +\infty[$ e codominio $\mathbb{R}$. Presenta uno zero di funzione per $x = 1$ e un asintoto verticale a 0. Per $a > 1$ è strettamente crescente, mentre per $0 < a < 1$ è strettamente decrescente.

4 Grafica dedotta

4.1 Trasformazioni geometriche

4.1.1 Simmetria rispetto agli assi

Si consideri una funzione $y = f(x)$, è possibile tracciare i grafici delle simmetrie rispetto ai due asi cartesiani: in particolare $y = -f(x)$ è la simmetrica rispetto all'asse x, mentre $y = -f(x)$ è la simmetrica rispetto all'asse y.



4.1.2 Traslazione

Data una funzione $y = f(x)$ e una traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$ ed equazione

$$t : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

per ottenere l'equazione della funzione traslata è necesario ricavare la traslazione inversa e sostituire i valori di x e y.

$$t : \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

$$y' - b = f(x' - a)$$
$$y = f(x - a) + b$$

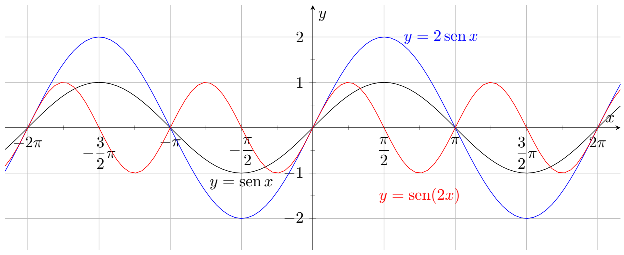
4.1.3 Dilatazione

Data una funzione $y = f(x)$ e una dilatazione di a unità lungo l'asse x e b unità lungo l'asse y

$$d : \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

per ottenere l'equazione della funzione dilatata è necessario ricavare la dilatazione inversa e sostituire i valori di x e y.

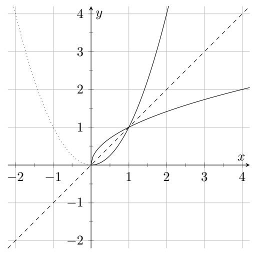
$$d : \begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} \\ y = \dfrac{y'}{b} \end{cases}$$



$$\frac{y}{b} = f\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$y = b \cdot f\left(\frac{x}{a}\right)$$

4.2 Funzione inversa

Per poter tracciare il grafico di una funzione è necessario che una funzione sia biiettiva. Siccome ogni funzione è suriettiva nel proprio codominio, è necessario ridurne il dominio affinché sia anche iniettiva. Ad esemopio per poter rappresentare il grafico della funzione inversa di una funzione $y = x^2$ è necessario ridurne il dominio a $x \geq 0$. A questo punto è possibile riscrivere la funzione nella forma $x = f^{-1}(y)$ ed effettuare un cambio di variabili arrivando quindi alla scrittura $y = f^{-1}(x)$. Per rappresentare il grafico della funzione inversa è sufficiente rappresentare la simmetrica della funzione di partenza rispetto alla bisettrice I-III quadrante, prestando attenzione al nuovo dominio ridotto.



4.3 Funzioni con valori assoluti

4.3.1 Valore assoluto di una funzione

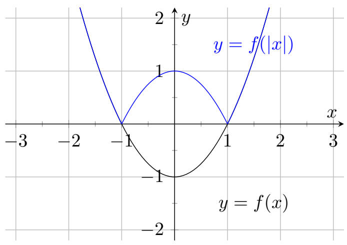
Per studiare il caso $y = |f(x)|$ recuperiamo la definizione di valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza, sostituendo $f(x)$ ad x nella definizione, si ottiene la definizione di $|f(x)|$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Questo significa che $|f(x)|$ coincide con $f(x)$ quando essa è maggiore di 0, e con la sua simmetrica rispetto all'asse x quando $f(x) < 0$.



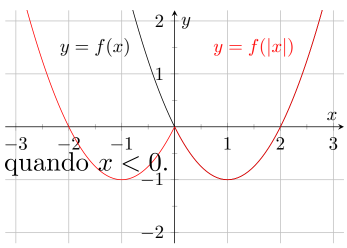
$$f(x) = x^2 - 2x$$

4.3.2 Funzione di un valore assoluto

Procedendo in modo analogo al punto precedente, per $y = f(|x|)$ si ricava che

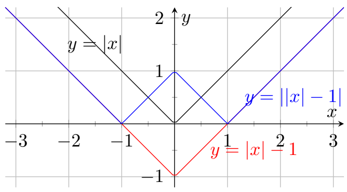
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle y in quanto coincide con $f(x)$ se $x \geq 0$ e con $f(-x)$ (simmetrica di $f(x)$ rispetto all'asse y) quando $x < 0$.



4.3.3 Funzioni con più valori assouti nidificati

In questo caso è sufficiente procedere per gradi: consideriamo ad esempio la funzione $y = ||x| - 1|$. Il metodo migliore è quindi rappresentare prima la funzione $y = |x|$, successivamente traslarla verso il basso di 1 unità ($y = |x| - 1$) e poi rappresentare anche il modulo più esterno effettuando al simmetria rispetto all'asse x della regione negativa.



4.3.4 Funzioni con più valori assoluti in sequenza

Qui la situazione si complica, perché è necessario studiare tutti gli intervalli di positività che i diversi argomenti dei valori assoluti possono assumere. Consideriamo ad esempio la funzione $y = |x - 1| + |2x + 4|$. Prima di tutto bisogna trovare per quali valori di x l'argomento di ogni valore assoluto assume valori non negativi.

$$x - 1 \geq 0 \qquad x \geq 1$$

$$2x + 4 \geq 0 \qquad x \geq -2$$

A questo punto rappresentiamo gli intervalli trovati.

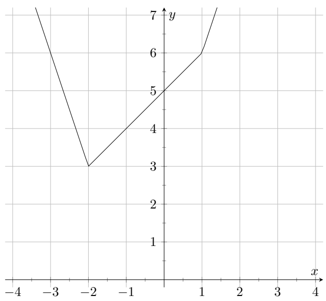
$-2 \qquad\qquad 1$

$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$-2x-4$	$2x+4$	$2x+4$

A questo punto possiamo usare lo schema appena trovato per ricostruire la funzione come definita a tratti:

$$y = \begin{cases} (-x+1) + (-2x-4) & \text{se } x < -2 \\ (-x+1) + (2x+4) & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ (x-1) + (2x+4) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

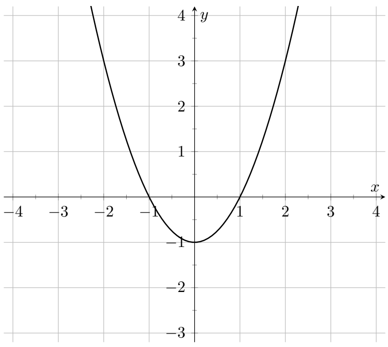
$$y = \begin{cases} -3x - 3 & \text{se } x < -2 \\ x + 5 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 3x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



4.4 Reciproco di una funzione

Esempio. *Tracciare il grafico di* $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Cominciamo con il tracciare il grafico di $y = x^2 - 1$. Si tratta di una parabola di vertice $V(0, -1)$.



A questo punto procediamo con l'analisi del dominio: sappiamo che il dominio di una fratta si ricava ponendo il denominatore diverso da 0, quindi il domino di $\dfrac{1}{f(x)}$ si ottiene trovando dove $f(x) \neq 0$

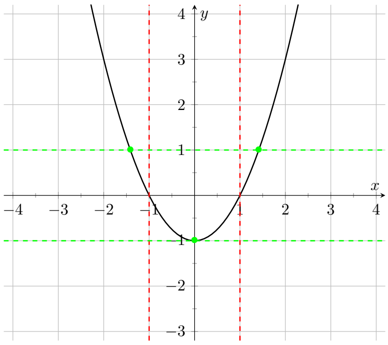
$$D : x^2 - 1 \neq 0$$

$$(x - 1)(x + 1) \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

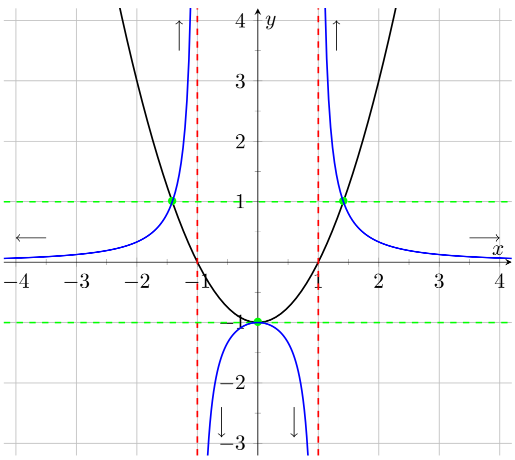
$$D :]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

In particolare dove $f(x) = 0$, $\dfrac{1}{f(x)}$ presenta degli asintoti verticali. Il prossimo passo è studiare i punti di intersezione delle due funzioni. Siccome $f(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ se $f(x) = \pm 1$, le due funzioni si intersecano solo dove intersecano la retta $y = 1$ o la retta $y = -1$. Rappresentiamo quanto ottenuto. A questo punto rimane solo un



passaggio prima di poter rappresentare la funzione: studiare i limiti negli intorni degli estremi del dominio.

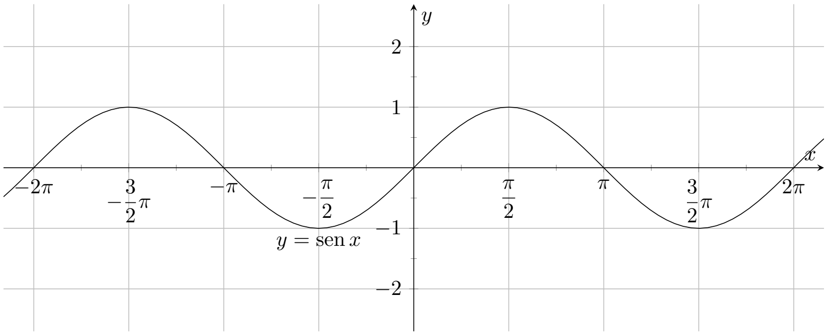
$$
\begin{array}{lll}
x \to -\infty & f(x) \to +\infty & \dfrac{1}{f(x)} \to 0^+ \\
x \to -1^- & f(x) \to 0^+ & \dfrac{1}{f(x)} \to +\infty \\
x \to -1^+ & f(x) \to 0^- & \dfrac{1}{f(x)} \to -\infty \\
x \to 1^- & f(x) \to 0^- & \dfrac{1}{f(x)} \to -\infty \\
x \to 1^+ & f(x) \to 0^+ & \dfrac{1}{f(x)} \to +\infty \\
x \to +\infty & f(x) \to +\infty & \dfrac{1}{f(x)} \to 0^+
\end{array}
$$



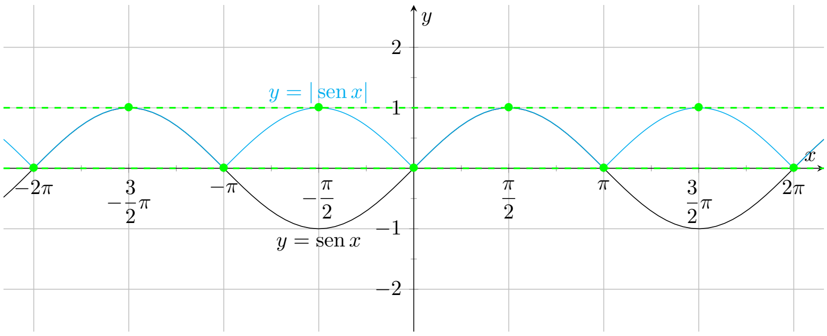
4.5 Quadrato di una funzione

Esempio. *Tracciare il grafico di* $y = \operatorname{sen}^2 x$

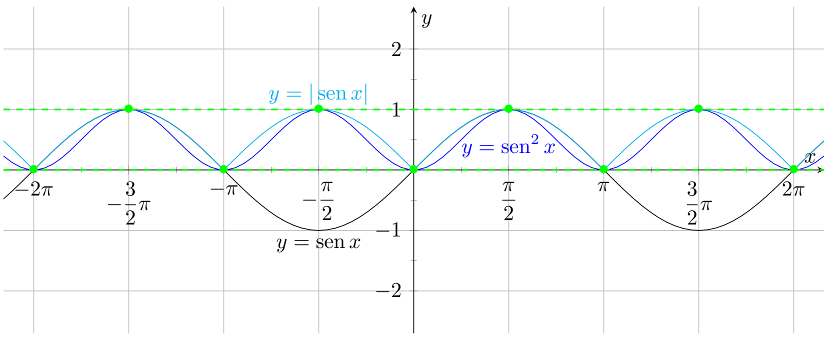
Cominciamo con il tracciare il grafico della funzione elementare $y = \operatorname{sen} x$



Per qanto riguarda il dominio, esso rimane invariato. Siccome il dominio della funzione di partenza $f(x)$ è $\mathbb{R}$, il dominio di $f^2(x)$ rimane $\mathbb{R}$. Siccome il quadrato di un numero reale è sempre non negatico, procediamo con il rappresentare $|f(x)|$. Essa inoltre interseca $f^2(x)$ lungo le rette $y = 0$ e $y = 1$.



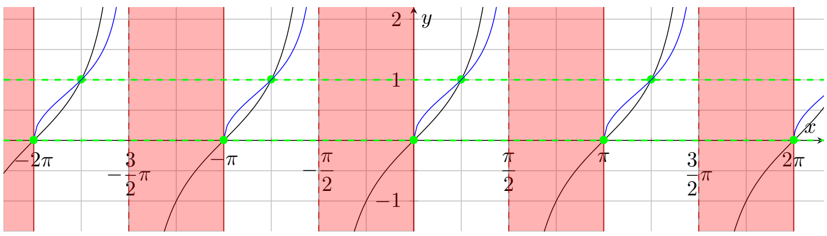
L'ultima cosa da tenere in considerazione è che se $0 < |f(x)| < 1$, $f^2(x) < |f(x)|$; mentre se $|f(x)| > 1$, $f^2(x) > |f(x)|$. A questo punto abbiamo tutte le informazioni necessarie per tracciare il grafico di $f^2(x)$.



4.6 Radice di una funzione

Esempio. *Tracciare il grafico di* $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

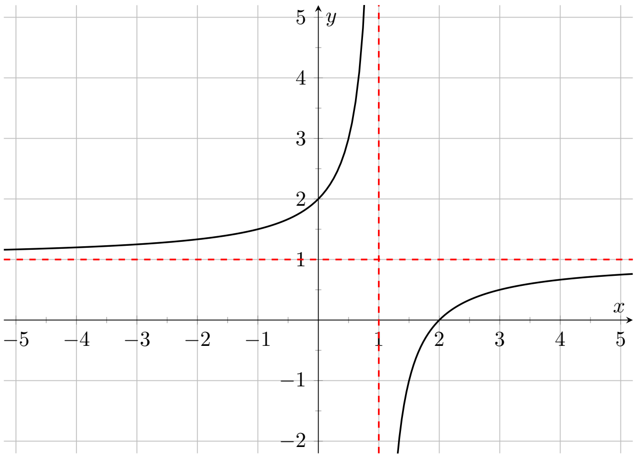
Cominciamo con il tracciare il grafico della funzione elementare $y = \operatorname{tg} x$. Siccome il domino della funzione irrazionale si ottiene ponendo il radicando ≥ 0, il dominio della funzione $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ è $D : [k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]$ con $k \in \mathbb{Z}$. A questo punto, analogamente a quanto fatto precedentemente, sappiamo che le funzioni $y = f(x)$ e $y = \sqrt{f(x)}$ si intersecano per $f(x) = 0$ e $f(x) = 1$. Sappiamo inoltre che se se $0 < f(x) < 1$, $\sqrt{f(x)} > f(x)$; mentre se $f(x) > 1$, $\sqrt{f(x)} < f(x)$. A questo punto abbiamo tutte le informazioni necessarie per tracciare il grafico di $\sqrt{f(x)}$.



4.7 Esponenziale di una funzione

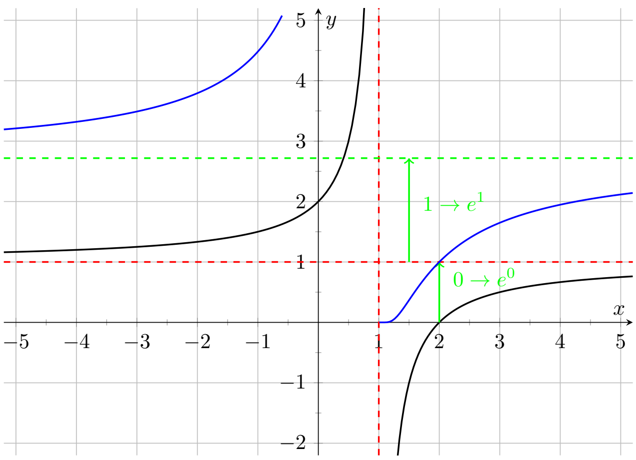
Esempio. *Tracciare il grafico di* $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$

Per prima cosa tracciamo il grafico di $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Questa funzione ha un asintoto orizzontale per $y = 1$ e un asintoto verticale per $x = 1$.



Siccome il dominio di $e^{f(x)}$ coincide con il dominio di $f(x)$, l'asintoto verticale si conserva. L'asintoto orizzontale invece si sposta passando da $y = 1$ a $y = e^1$. Inoltre, dove la funzione va a 0, sappiamo che $e^0 = 1$, quindi la nuova funzione passerà per 1. L'ultimo passo prima di poter rappresentare la funzione consiste nello studiarne i limiti agli estremi del dominio.

$x \to -\infty$	$f(x) \to 1^+$	$e^{f(x)} \to e^+$
$x \to 1^-$	$f(x) \to +\infty$	$e^{f(x)} \to +\infty$
$x \to 1^+$	$f(x) \to -\infty$	$e^{f(x)} \to 0^+$
$x \to +\infty$	$f(x) \to 1^-$	$e^{f(x)} \to e^-$

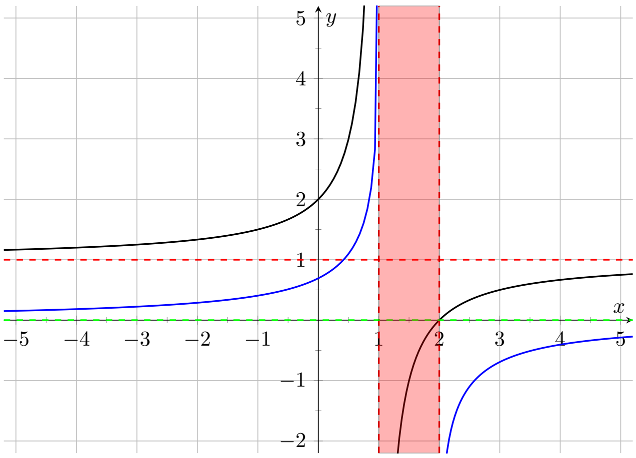


4.8 Logaritmo di una funzione

Esempio. *Tracciare il grafico di* $y = \ln \dfrac{x-2}{x-1}$

Per prima cosa tracciamo il grafico di $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Questa funzione ha un asintoto orizzontale per $y = 1$ e un asintoto verticale per $x = 1$. Sicome la funzione $y = \ln f(x)$ ha dominio $f(x) > 0$. Di conseguenza, risolvendo la disequazione $\dfrac{x-2}{x-1} > 0$ otteniamo l'intervallo $D :]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. L'asintoto orizzontale si sposta passando da $y = 1$ a $y = \ln 1 = 0$. L'ultimo passo prima di poter rappresentare la funzione consiste nello studiarne i limiti agli estremi del dominio.

$$
\begin{array}{lll}
x \to -\infty & f(x) \to 1^+ & \ln f(x) \to 0^+ \\
x \to 1^- & f(x) \to +\infty & \ln f(x) \to +\infty \\
x \to 2^+ & f(x) \to 0^+ & \ln f(x) \to -\infty \\
x \to +\infty & f(x) \to 1^- & \ln f(x) \to 0^-
\end{array}
$$



5 Studio di funzione completo

5.1 Classificazione

Funzione	algebrica	razionale	intera
	trascendente	irrazionale	fratta

5.2 Dominio

- Polinomiale : $\mathbb{R}$
- Fratte: denominatore $\neq 0$
- Irrazionali pari: radicando≥ 0
- Irrazionali dispari: $\mathbb{R}$
- Logaritmi: argomento> 0
- Esponenziali: $\mathbb{R}$
- Seno, coseno, arcotangente, arcocotangente: $\mathbb{R}$
- Tangente: $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- Cotangente: $\mathbb{R} - k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- Arcoseno, arcocoseno: $[-1; 1]$

5.3 Simmetrie

CN: $\forall x \in D, -x \in D$

- pari se $f(-x) = f(x)$
- dispari se $f(-x) = -f(x)$

5.4 Intersezioni con gli assi cartesiani

$$f(x) \cap \text{asse } x : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \qquad f(x) \cap \text{asse } y : \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

5.5 Studio del segno

Risolvere la disequazione $f(x) > 0$

5.6 Limiti, asintoti e discontinuità

Asintoto verticale	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
Asintoto orizzontale	$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$
Asintoto obliquo	CN: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$

NB.: Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

Prima specie	$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \qquad salto = \lvert l_1 - l_2 \rvert$
Seconda specie	$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \infty \qquad \vee \qquad \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \nexists$
Terza specie	$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \qquad \vee \qquad f(x_0) = \nexists$

5.7 Derivata prima

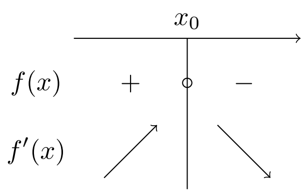
Le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = 0$$

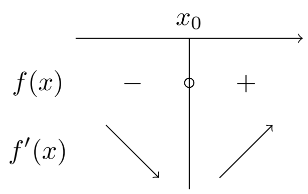
identificano la presenza di

- massimi relativi
- minimi relativi
- flessi a tangente orizzontale

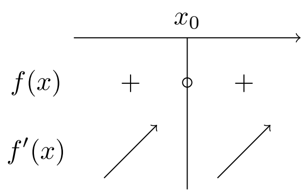
Per distinguerli è necessario studiare il segno della derivata: Lo studio della derivata prima fornisce anche



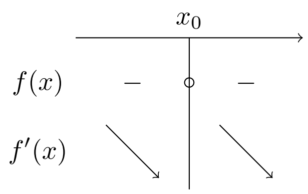
(a) Massimo relativo



(b) Minimo relativo



(c) Flesso a tangente orizzontale ascendente



(d) Flesso a tangente orizzontale discendente

informazioni circa la monotonia della funzione.

5.8 Derivata seconda

Le soluzioni dell'equazione

$$f''(x) = 0$$

permettono di identificare i punti di flesso. A differenza della derivata prima permette di ottenere informazioni circa la presenza di flessi a tangente obliqua, per cui è necessario escludere tutte le soluzioni già analizzate in precedenza. La derivata seconda fornisce inoltre informazioni circa la concavità della funzione: verso l'alto quando la derivata seconda è positiva e verso il basso quando la derivata seconda è negativa. La funzione inverte la propria concavità in corrispondenza dei punti di flesso.