Analisi 1

Davide Borra

v. 2.0

Indice

Capitolo 1

Limiti

1.1 Intervalli in $\mathbb{R}$

DEF. Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice **intervallo** se corrisponde ad una semiretta (**illimitato**) o ad un segmento (**limitato**) della retta reale

Inoltre:

- si dice **chiuso** se gli estremi sono inclusi nell'intervallo;
- si dice **aperto** se gli estremi sono esclusi nell'intervallo.

Gli intervallo limitati corrispondono a segmenti di retta reale di estremi a e b ($b > a$), lunghezza $b - a$ (detta **ampiezza** dell'intervallo), **centro** $\frac{b+a}{2}$ e **raggio** $\frac{b-a}{2}$.

1.1.1 Intorni

DEF. Dato numero reale x_0, un intorno completo di x_0 è un qualunque intervallo aperto contenente x_0

$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[\qquad (con \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}_0^+$$

1. **intorno destro**: $I^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[$
2. **intorno sinistro**: $I^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[$

Intorni circolari

DEF. Dati un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, un intorno completo di x_0 di raggio δ è l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

Intorni di ∞

DEF. Dati due numeri reali a e b con $a < b$ si definisce

- **intorno di** $-\infty$ un qualsiasi intervallo illimitato inferiormente $]-\infty; a[$
- **intorno di** $+\infty$ un qualsiasi intervallo illimitato superiormente $]b; +\infty[$
- **intorno di** ∞ l'unione di un intorno di $-\infty$ e di un intorno di $+\infty$: $]-\infty; a[$

Insiemi limitati e illimitati, maggiorante, minorante, estremi superiore e inferiore, massimo, minimo.

Punti di accumulazione e punti isolati

1.2 Continuità

DEF. Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $]a;b[$ e x_0 un punto appartenente all'intervallo. $f(x)$ è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione è inoltre continua in $]a;b[$ se è continua in ogni punto x_0 dell'intervallo.

Si parla anche di funzioni

- **continue da destra** x_0 quando $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- **continue da sinistra** x_0 quando $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

1.3 Primi teoremi sui limiti

N.B.: I seguenti teoremi valgono per ogni tipologia di limite, sia finito che infinito, e in ogni intorno, sia di un numero reale (anche destro e sinistro) sia di infinito.

1.3.1 Teorema di unicità del limite

Teorema (Unicità del limite)**.** *Se una funzione $f(x)$ ha limite finito per x che tende a x_0, allora tale limite è unico.*

Ipotesi	*Tesi*
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$	l è unico

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Si supponga che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l'$$

con $l \neq l'$ e $l < l'$. Siccome ε è una quantità arbitraria è possibile porre

$$0 < \varepsilon < \frac{l - l'}{2}$$

Si applicano ora le definizioni di limite:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l'| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome l'intersezione di due intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0, devono valere entrambe le definizioni:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Ricordando che $l - \varepsilon < l' - \varepsilon < l + \varepsilon < l' + \varepsilon$ si ottiene:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon$$

$$-2\varepsilon < l - l'$$

$$2\varepsilon > l' - l$$

$$\varepsilon > \frac{l' - l}{2}$$

Assurdo: contrasta con quanto posto all'inizio. L'ipotesi per assurdo è falsa, quindi la tesi è dimostrata.

QED

1.3.2 Teorema di permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno)**.** *Se il limite di un funzione per x che tende a x_0 è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 in cui $f(x)$ e l sono entrambi positivi o entrambi negativi.*

Ipotesi
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad l \neq 0$

Tesi
$\exists I(x_0) : f(x)$ e l sono concordi $\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \;\; \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome ε è un numero positivo arbitrario pongo

$$\varepsilon = |l|$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

- se $l > 0 \to \varepsilon = l$
$$l - l < f(x) < l + l$$
$$0 < f(x) < 2l$$
da cui la tesi
$$f(x) > 0$$
- se $l < 0 \to \varepsilon = -l$
$$l + l < f(x) < l - l$$
$$2l < f(x) < 0$$
da cui la tesi
$$f(x) < 0$$

QED

Teorema (Inverso della permanenza del segno)**.** *Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 è*

- *positiva o nulla, allora $l \geq 0$;*
- *negativa o nulla, allora $l \leq 0$.*

1.3.3 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Teorema (Confronto)**.** *Siano $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0. Se per ogni $x \in I(x_0)$ è verificato che*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

e

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

allora è verificato che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

.

Ipotesi

1. $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite nello stesso intorno $I(x_0)$
2. $\forall x \in I(x_0) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Tesi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi 3:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Di conseguenza

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

da cui, per ipotesi 1,

$$l - \varepsilon < g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

La precedente scrittura è equivalente a

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

da cui la tesi.

QED

1.4 Calcolo dei limiti

1.4.1 Mediante il teorema del confronto

Esempio 1.4.1.
Si calcoli il valore di $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Prima di tutto ricordiamo che per definizione di seno $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Siccome stiamo lavorando in un intorno di $+\infty$, possiamo considerare $x > 0$, quindi posso dividere tutti i membri per x, ottenendo

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

. Siamo quindi riusciti a ricostruire nel membro centrale della disequazione la funzione cercata. Calcoliamo ora i limiti degli estremi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \left[-\frac{1}{+\infty}\right] = 0^-$$

Di conseguenza, per il teorema del confronto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

1.4.2 Forme di indecisione (o forme indeterminate)

Forma di indecisione $+\infty - \infty$

Se si presenta in una funzione polinomiale

Per semplicità non riporto il procedimento formale ma semplicemente la regola pratica ottenuta tramite l'applicazione della gerarchia degli infiniti. In questo caso si considera semplicemente il termine di grado massimo perché il contributo degli altri è trascurabile rispetto ad esso:

Esempio 1.4.2.
Calcolare $\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x^4+5)$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x^4+5)=[-\infty+\infty]\overset{\text{FI}}{=}\lim_{x\to+\infty}(-3x^4)=-\infty$$

Se si presenta in una funzione irrazionale

In questo caso si procede applicando la gerarchia al radicando e portando fuori dal segno di radice il termine di grado massimo (si ricorda che $\sqrt{x^{2n}}=|x^n|$). A questo punto dovremmo esserci ricondotti al caso precedente.

Esempio 1.4.3.
Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)=[-\infty+\infty]\overset{\text{FI}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}(|x|-2x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2x)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

Se il termine sotto radice è il quadrato del termine fuori In questo caso, se procedo come nel precedente si origina un'altra forma di indecisione, per cui la soluzione è razionalizzare.

Esempio 1.4.4.
Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)=[-\infty+\infty]\overset{\text{FI}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{4x^2+3}+2x}=\left[\frac{3}{+\infty+\infty}\right]=0^+$$

Forma di indecisione $0\cdot\infty$

Per risolvere questa forma di indecisione è necessario modificare l'espressione analitica della funzione di partenza in modo da rimuovere l'origine della forma di indecisione.

Esempio 1.4.5.
Calcolare $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\operatorname{tg}^2x$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\operatorname{tg}^2x=\left[\operatorname{sen}0\cdot\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi\right]=[0\cdot\infty]\overset{\text{FI}}{=}$$

Ricordando che (per gli angoli associati) $\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\right]^2=[-\cos x]^2=\cos^2x$, è possibile riscrivere la funzione come

$$=\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\cos^2x\quad\operatorname{tg}^2x=$$

Forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$

Si procede applicando la gerarchia si a numeratore che a denominatore e poi semplificando.

Se si presenta in una funzione razionale fratta

Esempio 1.4.6.

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-5x^3+2x-1}{5-2x^4-3x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-5x^3+2x-1}{5-2x^4-3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-2x^4} = -\frac{3}{2}$$

N.B.: Anche se sia a numeratore che a denominatore si presentano forme di indecisione $-\infty+\infty$ prevale la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$

Se si presenta in una funzione irrazionale fratta

Esempio 1.4.7.

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+|x|}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Forma di indecisione $\frac{0}{0}$

Funzioni razionali fratte

In generale si risolve scomponendo e semplificando

Esempio 1.4.8.

Calcolare $\lim_{x\to2} \frac{3x^2-6x}{x^2-4}$

$$\lim_{x\to2} \frac{3x^2-6x}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x\to2} \frac{3x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \left[\frac{6}{4}\right] = \frac{3}{2}$$

Funzioni irrazionali fratte

In generale si risolve razionalizzando, scomponendo e semplificando

Esempio 1.4.9.

Calcolare $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$

$$\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{x\to4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-3x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4} \frac{x-4}{(x-4)(x+1)(\sqrt{x}+2)} =$$
$$= \lim_{x\to4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}$$

Esempio 1.4.10.

Calcolare $\lim_{x\to27^+} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$

$$\lim_{x\to27^+} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{\text{FI}}{=} \lim_{t\to3^+} \frac{t^3-27}{t-3} = \lim_{t\to3^+} \frac{(t-3)(t^2+3t+9)}{t-3} = \lim_{t\to3^+} (t^2+3t+9) = 27$$

Pongo $\begin{array}{ll} t=\sqrt[3]{x} & x\to27^+ \\ x=t^3 & t\to3^+ \end{array}$

1.4.3 Forme di indecisione 0^0, ∞^0, 1^∞

Generalmente si risolvono applicando l'uguaglianza

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

e successivamente applicando all'esponente i metodi risolutivi visti in precedenza.

Esempio 1.4.11.
Calcolare $\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}}$

$$\lim_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln(2x)}} = \left[0^{\frac{2}{-\infty}}\right] = \left[0^0\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2}{\ln(2x)}\ln(2x)} = e^2$$

Esempio 1.4.12.
Calcolare $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}} = \left[\infty^0\right] \overset{\text{FI}}{==} \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln x} = e$$

Esempio 1.4.13.
Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}} = \left[0^{\frac{1}{-\infty}}\right] = \left[0^0\right] \overset{\text{FI}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{x^2}{4}\right)\frac{1}{3\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x^2 - \ln 4}{3\ln x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2\ln x}{3\ln x} - \frac{\ln 4}{3\ln x}} = \left[e^{\frac{2}{3}+0}\right] = e^{\frac{2}{3}}$$

1.4.4 Limiti Notevoli

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Dimostrazione.

$$\frac{\operatorname{sen} -x}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Siccome la funzione è pari la dimostrazione si svolge solo per $x \to 0^+$. Sulla circonferenza goniometrica considero un angolo x. Siccome $x \to 0^+$ posso imporre la condizione $0 < x < \frac{pi}{2}$

Per definizione si ha che

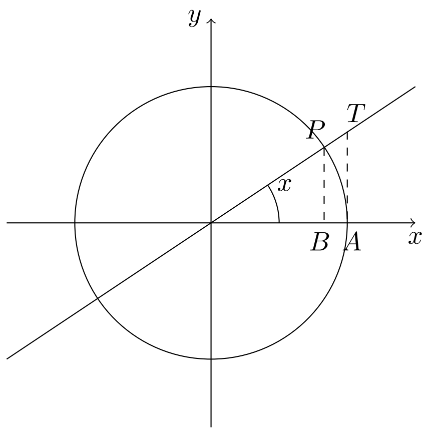

Figura 1.1: La situazione utilizzata per la dimostrazione

$$\widehat{PA} = x$$

$$\overline{PB} = \operatorname{sen} x$$
$$\overline{TA} = \operatorname{tg} x$$

Come è chiaramente visibile dalla Figura 1.1 si ha che

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

da cui

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$
$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$
$$1 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \cos x$$

Si calcolano ora i limiti delle funzioni che limitano quella studiata

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

da cui per il teorema del confronto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Siccome la funzione è pari vale anche per $x \to 0^-$ QED

Osservazioni:

- vale il reciproco: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$
- vale la generalizzazione: $\lim\limits_{f(x) \to 0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1$
- asintotico associato: $\operatorname{sen} x \sim x \quad$ in $I(0)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Dimostrazione. Per definizione $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} \underset{LN}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

QED

Osservazioni:

- vale il reciproco: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$
- vale la generalizzazione: $\lim\limits_{f(x) \to 0} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$
- asintotico associato: $\operatorname{tg} x \sim x \quad$ in $I(0)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \underset{LN}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \left[\frac{0}{2}\right] = 0$$

QED

Osservazioni:

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione: $\lim\limits_{f(x) \to 0} \frac{1 - \cos f(x)}{f(x)} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

Per la prima relazione fondamentale della goniometria

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \underset{LN}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

QED

Osservazioni:

- vale il reciproco: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x} = 1$
- vale la generalizzazione: $\lim\limits_{f(x) \to 0} \dfrac{1-\cos f(x)}{[f(x)]^2} = 1$
- asintotico associato: $\cos x \sim 1 - x^2 \quad$ in $I(0)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Osservazioni:

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$

Osservazioni:

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione

$\lim\limits_{x \to 0^+} (1+kx)^{\frac{1}{x}}\ e^k$

Osservazioni:

- NON vale il reciproco
- vale la generalizzazione

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \dfrac{1}{\ln a} \qquad$ con $a > 0$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{FI}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

QED

Particolarizzazione: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Osservazioni:

- vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- asintotico associato: $\ln x \sim x - 1 \quad$ in $I(0)$

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \text{con } a > 0$

Dimostrazione. Pongo $t = a^x - 1$, quindi $e^x = t + 1$ e di conseguenza $x = \log_a(t+1)$. Inoltre, se $x \to 0$, $t \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \ln a$$

QED

Particolarizzazione: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Osservazioni:

- vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- asintotico associato: $e^x \sim x + 1 \quad \text{in } I(0)$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$

Osservazioni:

- vale il reciproco
- vale la generalizzazione
- asintotico associato: $(1+x)^k \sim 1 + kx \quad \text{in } I(0)$

1.5 Continuità e discontinuità

Asintoto verticale	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
Asintoto orizzontale	$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$
Asintoto obliquo	CN: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$

NB.: Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

Prima specie	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \qquad \mathit{salto} = \lvert l_1 - l_2 \rvert$
Seconda specie	$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \nexists$
Terza specie	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \quad \vee \quad f(x_0) = \nexists$

1.5.1 Continuità e funzioni inverse

Continuità della funzione inversa

Teorema (Continuità della funzione inversa)**.** *Se $y = f(x)$ è una funzione biiettiva e continua in un intervallo D, allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel codominio di f.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : D \to C$ biiettiva e continua in D	$f^{-1} : C \to D$ continua in C

Condizione di invertibilità per funzioni continue

Teorema (Invertibilità di funzioni continue)**.** *Sia I un intervallo (limitato o illimitato) e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : I \to \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in I	f è invertibile

1.6 Teoremi sulle funzioni continue

1.6.1 Teorema di Weistrass

Teorema (Weistrass)**.** *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

Ipotesi	*Tesi*
$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$	$\exists c, d \in [a, b] : f(c) = min\{f\} \wedge f(d) = max\{f\}$

1.6.2 Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)

Teorema (Bolzano)**.** *Se f è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui $f(c) = 0$.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesi

$\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$

1.6.3 Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

Teorema (Darbaux)**.** *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$
2. $m = min\{[a; b]\} \qquad M = max\{[a; b]\}$

Tesi

$\exists x \in [a, b] : f(x) = k \forall k \in [m; M]$