

Teoremi di Analisi

Davide Borra - 5LA

A.S. 2021-2022

Indice

1	Primi teoremi sui limiti	1
1.1	Teorema di unicità del limite	1
1.2	Teorema di permanenza del segno	1
1.3	Teorema del confronto (o dei due carabinieri)	2
2	Continuità e funzioni inverse	3
2.1	Continuità della funzione inversa	3
2.2	Condizione di invertibilità per funzioni continue	3
3	Teoremi sulle funzioni continue	3
3.1	Teorema di Weistrass	3
3.2	Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)	3
3.3	Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)	3
4	Legame tra continuità e derivabilità	4
4.1	Continuità delle funzioni derivabili	4
4.2	Criterio di derivabilità	4
5	Teoremi del calcolo differenziale	5
5.1	Teorema di Fermat	5
5.2	Teorema di Rolle	5
5.3	Teorema di Lagrange	7
5.3.1	Funzioni con derivata nulla	7
5.3.2	Funzioni con derivate uguali	7
5.3.3	Monotonia di funzioni derivabili	8
5.4	Teorema di Cauchy	8
5.5	Teorema di De l'Hôpital	9
6	Teoremi sugli integrali	9
6.1	Teorema fondamentale del calcolo integrale	9

1 Primi teoremi sui limiti

N.B.: I seguenti teoremi valgono per ogni tipologia di limite, sia finito che infinito, e in ogni intorno, sia di un numero reale (anche destro e sinistro) sia di infinito.

1.1 Teorema di unicità del limite

Teorema (Unicità del limite). *Se una funzione $f(x)$ ha limite finito per x che tende a x_0 , allora tale limite è unico.*

Ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Tesi

l è unico

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$$

con $l \neq l'$ e $l < l'$. Siccome ε è una quantità arbitraria è possibile porre

$$0 < \varepsilon < \frac{l - l'}{2}$$

Si applicano ora le definizioni di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l'| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome l'intersezione di due intorni di x_0 è ancora un intorno di x_0 , devono valere entrambe le definizioni:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Ricordando che $l - \varepsilon < l' - \varepsilon < l + \varepsilon < l' + \varepsilon$ si ottiene:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon$$

$$-2\varepsilon < l - l'$$

$$2\varepsilon > l' - l$$

$$\varepsilon > \frac{l' - l}{2}$$

Assurdo: contrasta con quanto posto all'inizio. L'ipotesi per assurdo è falsa, quindi la tesi è dimostrata.

QED

1.2 Teorema di permanenza del segno

Teorema (Permanenza del segno). *Se il limite di una funzione per x che tende a x_0 è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 in cui $f(x)$ e l sono entrambi positivi o entrambi negativi.*

Ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \wedge \quad l \neq 0$$

Tesi

$$\exists I(x_0) : f(x) \text{ e } l \text{ sono concordi} \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Siccome ε è un numero positivo arbitrario pongo

$$\varepsilon = |l|$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

- se $l > 0 \rightarrow \varepsilon = l$

$$l - l < f(x) < l + l$$

$$0 < f(x) < 2l$$

da cui la tesi

$$f(x) > 0$$

- se $l < 0 \rightarrow \varepsilon = -l$

$$l + l < f(x) < l - l$$

$$2l < f(x) < 0$$

da cui la tesi

$$f(x) < 0$$

QED

Teorema (Inverso della permanenza del segno). *Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno $I(x_0)$ escluso al più x_0 è*

- *positiva o nulla, allora $l \geq 0$;*
- *negativa o nulla, allora $l \leq 0$.*

1.3 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Teorema (Confronto). *Siano $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intorno $I(x_0)$, escluso al più x_0 . Se per ogni $x \in I(x_0)$ è verificato che*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

allora è verificato che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Ipotesi

Tesi

1. $g(x)$, $f(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite nello stesso intorno $I(x_0)$

2. $\forall x \in I(x_0) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Dimostrazione. Espando l'ipotesi 3:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : |h(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

Di conseguenza

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

da cui, per ipotesi 1,

$$l - \varepsilon < g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

La precedente scrittura è equivalente a

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

da cui la tesi.

QED

2 Continuità e funzioni inverse

2.1 Continuità della funzione inversa

Teorema (Continuità della funzione inversa). *Se $y = f(x)$ è una funzione biiettiva e continua in un intervallo D , allora la funzione inversa f^{-1} è continua nel codominio di f .*

Ipotesi

$f : D \rightarrow C$ biiettiva e continua in D

Tesi

$f^{-1} : C \rightarrow D$ continua in C

2.2 Condizione di invertibilità per funzioni continue

Teorema (Invertibilità di funzioni continue). *Sia I un intervallo (limitato o illimitato) e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in I . Allora essa è invertibile se e solo se è strettamente monotona.*

Ipotesi

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in I

Tesi

f è invertibile

3 Teoremi sulle funzioni continue

3.1 Teorema di Weistrass

Teorema (Weistrass). *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume in tale intervallo il massimo assoluto e il minimo assoluto.*

Ipotesi

$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$

Tesi

$\exists c, d \in [a; b] : f(c) = \min\{f\} \wedge f(d) = \max\{f\}$

3.2 Teorema dell'esistenza degli zeri (o di Bolzano)

Teorema (Bolzano). *Se f è continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui $f(c) = 0$.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$

2. $f(a) \cdot f(b) < 0$

Tesi

$\exists c \in [a; b] : f(c) = 0$

3.3 Teorema dei valori intermedi (o di Darboux)

Teorema (Darboux). *Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a; b]$
2. $m = \min\{[a; b]\} \quad M = \max\{[a; b]\}$

Tesi

$$\exists x \in [a, b] : f(x) = k \forall k \in [m; M]$$

4 Legame tra continuità e derivabilità

4.1 Continuità delle funzioni derivabili

Teorema (Continuità delle funzioni derivabili). *Se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 allora in quel punto la funzione è anche continua.*

Ipotesi

$$\exists f'(x_0)$$

Tesi

$$f(x) \text{ è continua in } x_0$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0 + h) \\ f(x_0 + h) &= f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) \\ f(x_0 + h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0), \quad \text{con } h \neq 0 \end{aligned}$$

Calcolo i limiti dei membri per $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0) \right]$$

Siccome a secondo membro il limite è la somma di limiti finiti, posso separarli

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0)$$

Siccome non si presentano forme di indecisione posso separare:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f'(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

pongo $x_0 + h = x$, per cui $h = x - x_0$. Se $h \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

QED

4.2 Criterio di derivabilità

Teorema (Criterio di derivabilità). *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$ tranne al più x_0 (con $x_0 \in]a; b[$). Allora*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad \wedge \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

In particolare se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono finite, allora la funzione è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a; b]$
2. $f(x)$ derivabile in $]a; b[-\{x_0\}$ (con $x_0 \in]a; b[$)

Ipotesi 2

$$f'_+(x) = f'_-(x) \text{ e finite}$$

Tesi

1. $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$
2. $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$

Tesi 2

1. $f(x)$ derivabile in x_0
2. $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

5 Teoremi del calcolo differenziale

5.1 Teorema di Fermat

Teorema (Fermat). Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo nel punto x_0 interno ad $[a; b]$, allora la derivata della funzione in quel punto si annulla.

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
3. x_0 punto di massimo o minimo relativo ($x_0 \in [a; b]$)

Tesi

$$f'(x_0) = 0$$

N.B.: La dimostrazione è svolta considerando x_0 punto di massimo, ma lo svolgimento è analogo nel caso di un punto di minimo.

Dimostrazione. Per definizione di punto di massimo relativo

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0)$$

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Calcolo i rapporti incrementali da sinistra e da destra:

$$h > 0 \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$h < 0 \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Siccome $f(x)$ è derivabile per ipotesi 2, per il criterio di derivabilità

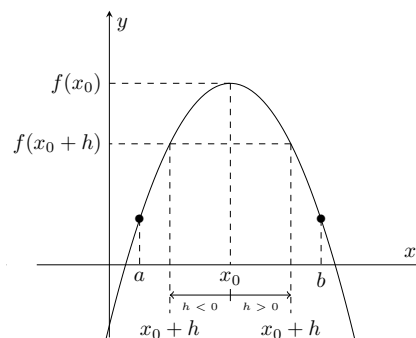
$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Di conseguenza è necessario che

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$$

.

QED



5.2 Teorema di Rolle

Teorema (Rolle). Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ tale che

1. $f(x)$ è continua in $[a; b]$
2. $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$
3. $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale risulta $f'(c) = 0$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $f(a) = f(b)$

Tesi

$$f'(c) = 0$$

Dimostrazione. Dato che per ipotesi $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ allora per il teorema di Weistrass $f(x)$ ammette massimo e minimo **assoluti** in tale intervallo, cioè

$$\exists c, d \in [a; b] : m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M$$

Possiamo distinguere due casi:

1. $m = M \rightarrow m = f(c) = f(x) = f(d) = M$

Se m e M coincidono vuol dire che $f(x)$ assume sempre lo stesso valore. Dato che $f(x)$ deve essere compresa tra m e M

$$m \leq f(x) \leq M$$

ma siccome $m = M$ allora $f(x) = m = M \quad \forall x \in [a; b]$, per cui $f(x)$ è costante. Siccome la derivata di una funzione costante è nulla

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

.

2. $m < M$, quindi $f(x)$ non è costante ($f(c) \neq f(d)$) e dato che sappiamo che $f(a) = f(b)$ allora **almeno** uno dei punti c e d deve essere interno all'intervallo $[a; b]$.

Supponiamo che $c \in]a; b[$, quindi che c non sia un estremo. In questo caso è possibile determinare un numero h tale che $c - h$ e $c + h$ appartengano entrambi all'intervallo $[a; b]$. Siccome c è un punto di minimo vale la relazione

$$f(x) \geq f(c) \quad \forall x \in I(c)$$

$$f(c + x) \geq f(c)$$

$$f(c + h) - f(c) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Calcolo i rapporti incrementali da sinistra e da destra:

$$h > 0 \quad \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

$$h < 0 \quad \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

$$f'_+(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geq 0$$

$$f'_-(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Siccome $f(x)$ è derivabile per ipotesi 3, per il criterio di derivabilità

$$f'_+(c) = f'_-(c)$$

Di conseguenza è necessario che

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c) = 0$$

La dimostrazione è analoga nel caso in cui d e non c appartenga all'intervallo $]a; b[$, e quindi si tratti di un punto di massimo e non di minimo.

QED

5.3 Teorema di Lagrange

Teorema (Lagrange). *Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ tale che*

1. $f(x)$ è continua in $[a; b]$
2. $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$

Tesi

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Conseguenze del teorema di Lagrange

5.3.1 Funzioni con derivata nulla

Teorema (Derivata nulla). *Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e la sua derivata è nulla per ogni punto interno all'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a; b]$*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$

Tesi

$$f(x) = k \quad \forall x \in [a; b]$$

5.3.2 Funzioni con derivate uguali

Teorema (Differenza costante). *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$ e tali che $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in]a; b[$, allora esse differiscono per una costante.*

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $g(x)$ continua in $[a; b]$
5. $g(x)$ derivabile in $]a; b[$
6. $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Tesi

$$f(x) - g(x) = k \quad \forall x \in [a; b]$$

5.3.3 Monotonia di funzioni derivabili

Teorema (Monotonia di funzioni derivabili). *Data una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo $]a; b[$:*

1. se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a; b[$, allora $f(x)$ è crescente in $]a; b[$
2. se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a; b[$, allora $f(x)$ è decrescente in $]a; b[$

Teorema (Inverso della monotonia di funzioni derivabili). *Data una funzione $y = f(x)$, continua e derivabile in un intervallo $[a; b]$ e derivabile nell'intervallo $]a; b[$:*

1. se $f(x)$ è crescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a; b[$
2. se $f(x)$ è decrescente in $]a; b[$, allora $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a; b[$

5.4 Teorema di Cauchy

Teorema (Cauchy). *Siano $y = f(x)$ e $y = g(x)$ due funzioni tali che*

1. $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a; b]$
2. $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $]a; b[$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per il quale vale la relazione

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ipotesi

1. $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
2. $f(x)$ continua in $[a; b]$
3. $f(x)$ derivabile in $]a; b[$
4. $g(x)$ continua in $[a; b]$
5. $g(x)$ derivabile in $]a; b[$
6. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$

Tesi

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

5.5 Teorema di De l'Hôpital

N.B.: Applicabile per la risoluzione delle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Teorema (De l'Hôpital). *Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite nell'intorno I di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, se*

1. $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (o ∞)
2. $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I(x_0) - \{x_0\}$
3. $g'(x) \neq 0$ in $I(x_0) - \{x_0\}$
4. esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ipotesi

Tesi

1. $f : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$
2. $g : I(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$
3. $f(x)$ e $g(x)$ continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (o ∞)
4. $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $I(x_0) - \{x_0\}$
5. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$
6. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6 Teoremi sugli integrali

6.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema (Torricelli-Barrow). *Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x)$$

ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Ipotesi

Tesi

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f(x)$ continua in $[a; b]$ 2. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 1. $\exists F'(x)$ 2. $F'(x) = f(x)$ |
|---|---|