

# Funzioni reali di variabili reali

Davide Borra - 5LA

A.S. 2021-2022

## Indice

|          |                                                          |          |
|----------|----------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Definizione e caratteristiche</b>                     | <b>1</b> |
| 1.1      | Classificazione . . . . .                                | 1        |
| 1.2      | Dominio . . . . .                                        | 1        |
| 1.3      | Zeri di funzione . . . . .                               | 2        |
| 1.4      | Studio del segno . . . . .                               | 2        |
| <b>2</b> | <b>Proprietà</b>                                         | <b>3</b> |
| 2.1      | Funzioni iniettive, suriettive e biiettive . . . . .     | 3        |
| 2.2      | Monotonia . . . . .                                      | 3        |
| 2.3      | Funzioni periodiche . . . . .                            | 4        |
| 2.4      | Funzioni pari e dispari . . . . .                        | 4        |
| <b>3</b> | <b>Funzioni elementari</b>                               | <b>5</b> |
| 3.1      | La funzione lineare . . . . .                            | 5        |
| 3.2      | La parabola . . . . .                                    | 5        |
| 3.3      | L'iperbole equilatera e la funzione omografica . . . . . | 5        |
| 3.4      | La funzione irrazionale . . . . .                        | 5        |
| 3.5      | Le funzioni goniometriche . . . . .                      | 6        |
| 3.5.1    | La funzione seno . . . . .                               | 6        |
| 3.5.2    | La funzione coseno . . . . .                             | 6        |
| 3.5.3    | La funzione tangente . . . . .                           | 6        |
| 3.5.4    | La funzione cotangente . . . . .                         | 6        |
| 3.5.5    | La funzione arcoseno . . . . .                           | 6        |
| 3.5.6    | La funzione arcocoseno . . . . .                         | 7        |
| 3.5.7    | La funzione arcotangente . . . . .                       | 7        |
| 3.6      | La funzione esponenziale . . . . .                       | 7        |
| 3.7      | La funzione logaritmo . . . . .                          | 7        |
| <b>4</b> | <b>Grafica dedotta</b>                                   | <b>7</b> |
| 4.1      | Trasformazioni geometriche . . . . .                     | 7        |
| 4.1.1    | Simmetria rispetto agli assi . . . . .                   | 7        |
| 4.1.2    | Traslazione . . . . .                                    | 7        |
| 4.1.3    | Dilatazione . . . . .                                    | 8        |
| 4.2      | Funzione inversa . . . . .                               | 8        |
| 4.3      | Funzioni con valori assoluti . . . . .                   | 8        |
| 4.3.1    | Valore assoluto di una funzione . . . . .                | 8        |
| 4.3.2    | Funzione di un valore assoluto . . . . .                 | 8        |
| 4.3.3    | Funzioni con più valori assoluti nidificati . . . . .    | 8        |
| 4.3.4    | Funzioni con più valori assoluti in sequenza . . . . .   | 9        |
| 4.4      | Reciproco di una funzione . . . . .                      | 9        |
| 4.5      | Quadrato di una funzione . . . . .                       | 11       |
| 4.6      | Radice di una funzione . . . . .                         | 11       |
| 4.7      | Esponenziale di una funzione . . . . .                   | 12       |
| 4.8      | Logaritmo di una funzione . . . . .                      | 13       |

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Studio di funzione completo</b>             | <b>14</b> |
| 5.1      | Classificazione . . . . .                      | 14        |
| 5.2      | Dominio . . . . .                              | 14        |
| 5.3      | Simmetrie . . . . .                            | 14        |
| 5.4      | Intersezioni con gli assi cartesiani . . . . . | 14        |
| 5.5      | Studio del segno . . . . .                     | 14        |
| 5.6      | Limiti, asintoti e discontinuità . . . . .     | 14        |
| 5.7      | Derivata prima . . . . .                       | 15        |
| 5.8      | Derivata seconda . . . . .                     | 15        |

This work is licensed under CC BY-NC-ND 4.0. To view a copy of this license, visit  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



# 1 Definizione e caratteristiche

**DEF.** Presi due insiemi  $D$  (dominio) e  $C$  (codominio) tali che  $D \subset \mathbb{R}$  e  $C \subset \mathbb{R}$ , si dice **funzione**  $f$  da  $D$  a  $C$  una relazione che ad ogni elemento di  $D$  associa uno e un solo elemento di  $C$ . In simboli

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Se ad ogni elemento  $x \in D$  la funzione  $f$  associa un elemento  $y \in C$ ,  $y$  (**variabile dipendente**) è detta **immagine** di  $x$  tramite  $f$ , mentre  $x$  (**variabile indipendente**) è detta **controimmagine** di  $y$  tramite  $f$ . La scrittura  $y = f(x)$  è detta **espressione analitica della funzione in forma esplicita**. Le funzioni possono anche essere scritte in forma implicita come  $g(x, y) = 0$ . Si definisce inoltre un insieme  $\text{Im } f \subseteq C$  detto **immagine** di  $f$ .

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in D\}$$

## 1.1 Classificazione

Le funzioni si dividono in due grandi categorie: le funzioni algebriche e le funzioni trascendenti. Una funzione si dice **algebrica** se la sua espressione analitica contiene solo operazioni di somma algebrica, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice, altrimenti si dice **trascendente**. Le funzioni algebriche sono a loro volta divise in

- **funzioni polinomiali:** possono essere scritte sotto forma di polinomi. Esse sono dette *lineari* se il polinomio che le identifica è di primo grado rispetto alla variabile indipendente, *quadratiche* se è di secondo grado e *cubiche* se di terzo.
- **funzioni fratte:** possono essere scritte come quoziente di due polinomi, o comunque la loro scrittura analitica presenta una variabile  $x$  al denominatore.
- **funzioni irrazionali:** nella scrittura analitica compare un radicale al cui radicando è presente la variabile  $x$ .

## 1.2 Dominio

**DEF.** Si dice **dominio naturale** o **campo di esistenza** di una funzione  $y = f(x)$  l'insieme più ampio dei valori reali che è possibile assegnare alla variabile  $x$  per far sì che esista anche il corrispondente valore  $y$

| Funzione                                                                         | Dominio                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Funzioni polinomiali<br>$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  | $\mathbb{R}$                                                                                                                                            |
| Funzioni fratte<br>$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P \text{ e } Q \text{ polinomi}$ | $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$                                                                                               |
| Funzioni irrazionali<br>$y = \sqrt[n]{f(x)}$                                     | $\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} & \text{se } n \text{ pari} \\ \text{dominio di } f(x) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$ |
| Funzioni logaritmiche                                                            |                                                                                                                                                         |

| Funzione                                                                                                                                                                                                                                                                           | Dominio                                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = \log_a f(x)$ con $a > 0 \wedge a \neq 1$                                                                                                                                                                                                                                      | $\{x \in \mathbb{R}   f(x) > 0\}$                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>Funzioni esponenziali</p> <p><math>y = a^{f(x)}</math> con <math>a &gt; 0 \wedge a \neq 1</math></p> <p><math>y = [f(x)]^{g(x)}</math></p> <p><math>f(x)^\alpha</math> <math>\alpha</math> irrazionale<br/>se <math>\alpha &gt; 0</math><br/>se <math>\alpha &lt; 0</math></p>  | <p>dominio di <math>f(x)</math></p> <p><math>\{x \in \mathbb{R}   f(x) &gt; 0\} \cap \text{dominio di } g(x)</math></p> <p><math>f(x) \geq 0</math><br/><math>f(x) &gt; 0</math></p>                                                                                |
| <p>Funzioni goniometriche</p> <p><math>y = \sin x, y = \cos x</math></p> <p><math>y = \operatorname{tg} x</math></p> <p><math>y = \operatorname{cotg} x</math></p> <p><math>y = \arcsin x, y = \arccos x</math></p> <p><math>y = \arctg x, y = \operatorname{arccotg} x</math></p> | <p><math>\mathbb{R}</math></p> <p><math>\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}</math></p> <p><math>\mathbb{R} \setminus k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}</math></p> <p><math>[-1, 1]</math></p> <p><math>\mathbb{R}</math></p> |

### 1.3 Zeri di funzione

**DEF.** Preso un numero reale  $\lambda$ , si dice zero (radice) della funzione  $y = f(x)$  se  $f(\lambda) = 0$

**Teorema** (Teorema fondamentale dell'algebra). Sia  $P(x)$  un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali. Nell'insieme dei numeri reali, esso ha al più  $n$  radici.

### 1.4 Studio del segno

Data una funzione  $y = f(x)$ , essa può assumere sia valori positivi che valori negativi. Studiare il segno di una funzione significa determinare per quali intervalli di valori della variabile  $x$ , la variabile  $y$  assume valori positivi, e per quali valori negativi. Generalmente per determinare il segno di una funzione è sufficiente risolvere la disequazione

$$f(x) > 0$$

#### Esempio 1.1.

testo

Si determinino dominio, radici e segno della funzione  $y = x^2 + x - 2$

- Dominio: Si tratta di una funzione polinomiale, di conseguenza il suo dominio è l'insieme  $\mathbb{R}$
- Zeri: Per determinare gli zeri bisogna risolvere l'equazione  $f(x) = 0$ , ovvero

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

- Segno: Risolviamo la disequazione

$$x^2 + x - 2 > 0$$

$$(x - 1)(x + 2) > 0$$

prodotto di fattori  $> 0$ : soluzioni esterne  $x < -2 \vee x > 1$

## 2 Proprietà

### 2.1 Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

**DEF.** Data una funzione  $f : D \rightarrow C$ , essa si dice:

- **iniettiva** se ogni elemento di  $C$  è immagine di al più un elemento di  $D$
- **suriettiva** se ogni elemento di  $C$  è immagine di almeno un elemento di  $D$
- **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

Per dimostrare che una funzione è iniettiva, è possibile dimostrare che  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .

Ogni funzione è suriettiva nel proprio codominio, per questo generalmente la suriettività viene analizzata in  $\mathbb{R}$ .

Un metodo semplice per capire dal grafico se una funzione è iniettiva e/o suriettiva (attenzione, non equivale ad una dimostrazione) è il criterio della retta orizzontale. Una funzione è iniettiva se ogni retta parallela all'asse  $x$  che è possibile tracciare interseca la funzione in *al più* un punto, suriettiva se la interseca in *almeno* un punto e biiettiva se in *esattamente* un punto.

### 2.2 Monotonia

**DEF** (Funzione crescente in senso stretto). Data una funzione  $y = f(x)$  di dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$ , essa si dice **crescente in senso stretto** in un intervallo  $I \subseteq D$  se  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

**DEF** (Funzione crescente in senso lato). Data una funzione  $y = f(x)$  di dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$ , essa si dice **crescente in senso lato** (o **non decrescente**) in un intervallo  $I \subseteq D$  se  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .

**DEF** (Funzione decrescente in senso stretto). Data una funzione  $y = f(x)$  di dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$ , essa si dice **decrescente in senso stretto** in un intervallo  $I \subseteq D$  se  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

**DEF** (Funzione decrescente in senso lato). Data una funzione  $y = f(x)$  di dominio  $D \subseteq \mathbb{R}$ , essa si dice **decrescente in senso lato** (o **non crescente**) in un intervallo  $I \subseteq D$  se  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .

#### Esempio 2.1.

testo

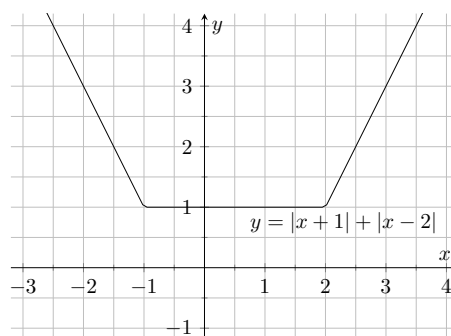
Studiare la monotonia di  $y = |x + 1| + |x - 2|$

Nella funzione in figura sono chiaramente visibili tre intervalli:

- nell'intervallo  $]-\infty; -1[$  la funzione è decrescente in senso stretto;
- nell'intervallo  $]-1; 2[$  la funzione è costante, è quindi sia crescente che decrescente in senso lato;
- nell'intervallo  $]2; +\infty[$  la funzione è crescente in senso stretto.

Inoltre:

- nell'intervallo  $]-\infty; 2[$  la funzione è decrescente in senso stretto;



- nell'intervallo  $] -1; +\infty[$  la funzione è crescente in senso stretto.

Una funzione è crescente in un intervallo  $I$  se e solo se la sua derivata è positiva, decrescente se la derivata è negativa, costante se la derivata è nulla.

**DEF** (Funzione monotona). Una funzione  $f : D \rightarrow C$ , con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , si dice **monotona in senso stretto** in un intervallo  $I \subseteq D$  se in quell'intervallo è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto. Analoga definizione può essere data per una funzione monotona in senso lato.

Nell'esempio precedente la funzione è monotona in senso stretto negli intervalli  $] -\infty; -1[$  e  $]2; +\infty[$

## 2.3 Funzioni periodiche

**DEF.** Una funzione  $y = f(x)$  si dice **periodica** di periodo  $T$  (con  $T > 0$ ) se, per qualsiasi numero  $k \in \mathbb{Z}$ ,

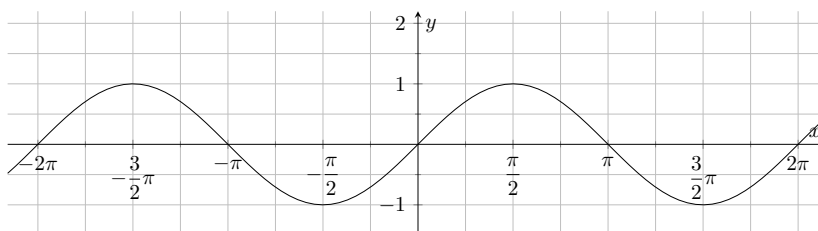
$$f(x) = f(x + kt)$$

Se una funzione è periodica, allora non è iniettiva.

### Esempio 2.2.

testo

La funzione  $y = \sin x$  è una funzione periodica di periodo  $T = 2\pi$



## 2.4 Funzioni pari e dispari

Si indica con  $D$  un sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  tale che se  $x \in D$ , allora  $-x \in D$ .

**DEF** (Funzione pari). Data una funzione  $y = f(x)$ , essa si dice *pari* in  $D$  se  $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$ , ovvero la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

**DEF** (Funzione dispari). Data una funzione  $y = f(x)$ , essa si dice *dispari* in  $D$  se  $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$ , ovvero la funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

**NB.:** Perché una funzione presenti simmetrie deve essere rispettata la condizione necessaria per cui il dominio deve essere simmetrico rispetto a 0:

$$\forall x \in D, -x \in D$$

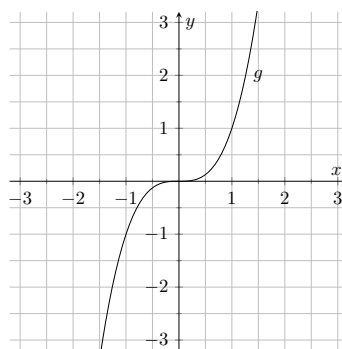
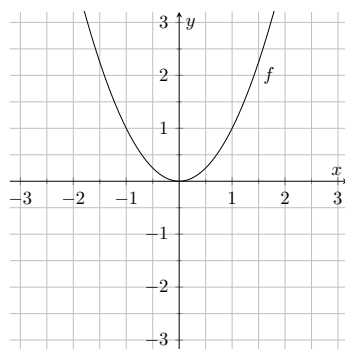
### Esempio 2.3.

testo

La funzione  $f(x) = x^2$  è pari, mentre la funzione  $g(x) = x^3$  è dispari. Infatti

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$



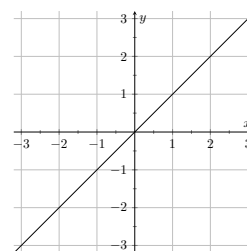
### 3 Funzioni elementari

#### 3.1 La funzione lineare

La funzione lineare è un'equazione polinomiale di primo grado. Il grafico ad essa associato corrisponde ad una retta. Nel caso della funzione  $y = x$  si tratta della bisettrice I-III quadrante ed è l'identità associata a  $\mathbb{R}$ . Nell'equazione generica

$$y = mx + q$$

il parametro  $m$ , detto coefficiente angolare, identifica la pendenza della retta, mentre il parametro  $q$ , detto ordinata d'origine, rappresenta il punto di intersezione con l'asse  $y$ , di coordinate  $(0, q)$ .

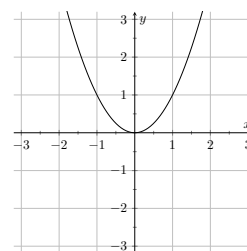


#### 3.2 La parabola

La funzione quadratica  $y = x^2$  è un'equazione polinomiale di secondo grado. Il grafico ad essa associato corrisponde ad una parabola. Nel caso della funzione elementare  $y = x^2$  si tratta di una parabola con il vertice nell'origine degli assi e concavità verso l'alto. Nel caso di una parabola generica

$$y = ax^2 + bx + c$$

- l'asse di simmetria ha equazione  $x = -\frac{b}{2a}$
- il vertice ha coordinate  $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- il fuoco ha coordinate  $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
- la direttrice ha equazione  $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$
- la parabola ha concavità verso l'alto se  $a > 0$  o verso il basso se  $a < 0$

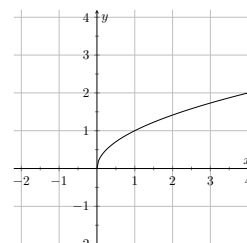
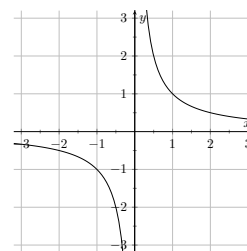


#### 3.3 L'iperbole equilatera e la funzione omografica

La funzione omografica è caratterizzata dalla relazione di proporzionalità inversa tra le due variabili. L'equazione  $y = \frac{k}{x}$  rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti con semiasse trasverso  $a = \sqrt{2|k|}$ , semidistanza focale  $c = 2\sqrt{|k|}$  e fuochi in  $F(\pm\sqrt{2k}; \pm\sqrt{2-k})$ . Applicando una traslazione di vettore  $\vec{v}(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ , si ottiene una funzione omografica generica di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{se } c \neq 0 \text{ e } ad \neq bc$$

Essa ha un asintoto verticale di equazione  $x = -\frac{d}{c}$ , un asintoto orizzontale di equazione  $y = \frac{a}{c}$  e di conseguenza ha centro  $C(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ . Per ricavare gli altri elementi carat-



teristici è sufficiente determinare  $k = \frac{bc - ad}{c^2}$  e poi applicare un'eventuale traslazione di vettore  $\vec{v}$

### 3.4 La funzione irrazionale

La funzione irrazionale  $y = \sqrt{x}$  è l'inversa della funzione quadratica e si ottiene restringendone il dominio e applicando una simmetria rispetto alla bisettrice I-III quadrante. La funzione che si ricava ha dominio  $D : [0; +\infty[$  e codominio  $C : [0; +\infty[$ .

### 3.5 Le funzioni goniometriche

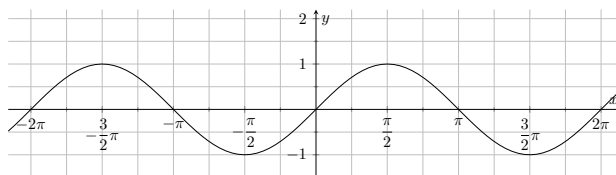
#### 3.5.1 La funzione seno

La funzione seno è una funzione goniometrica trascendente, periodica in  $T = 2\pi$ . Essa ha dominio  $D : \mathbb{R}$  e codominio  $C : [-1; 1]$ . Presenta zeri di funzione per  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), assume valori positivi in  $]2k\pi; \pi + 2k\pi[$  e negativi altrove. Essa può essere scritta nella forma generica

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$$

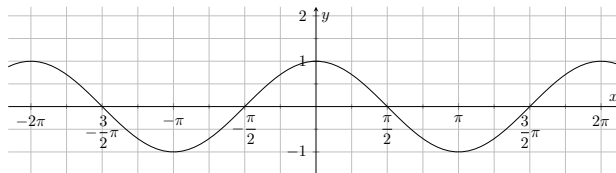
dove i parametri rappresentano:

- $A$ : ampiezza, rappresenta la dilatazione verticale della funzione, la semidifferenza tra i valori  $y$  dei massimi e dei minimi.
- $\omega$ : pulsazione, è collegata al periodo dalla relazione  $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- $\varphi$ : fase, legato alla traslazione orizzontale
- $B$ : la traslazione verticale



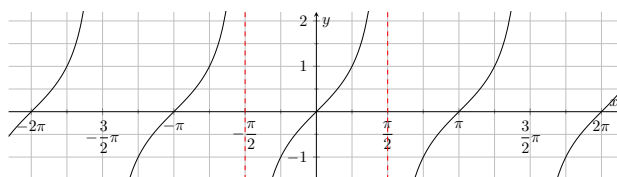
#### 3.5.2 La funzione coseno

La funzione coseno è una funzione goniometrica trascendente, periodica in  $T = 2\pi$ . Essa ha dominio  $D : \mathbb{R}$  e codominio  $C : [-1; 1]$ . Presenta zeri di funzione per  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), assume valori positivi in  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$  e negativi altrove.



#### 3.5.3 La funzione tangente

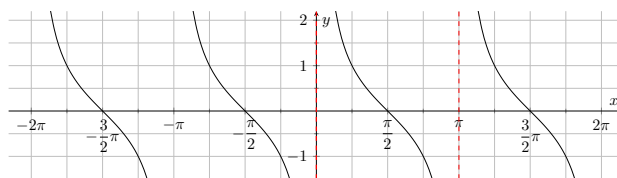
La funzione tangente è una funzione goniometrica trascendente, periodica in  $T = \pi$ . Essa ha dominio  $D : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) e codominio  $C : \mathbb{R}$ . Presenta zeri di funzione per  $x = k\pi$ , assume valori positivi in  $]k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$  e negativi altrove.



#### 3.5.4 La funzione cotangente

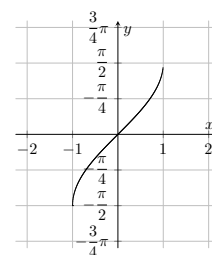


La funzione cotangente è una funzione goniometrica trascendente, periodica in  $T = \pi$ . Essa ha dominio  $D : x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$  e codominio  $C : \mathbb{R}$ . Presenta zeri di funzione per  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , assume valori positivi in  $]k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$  e negativi altrove.



### 3.5.5 La funzione arcseno

La funzione arcseno (in figura) è l'inversa della funzione seno. Per poter invertire questa funzione è necessario restringerne il dominio a  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  e il codominio a  $[-1; 1]$ . di conseguenza la funzione arcseno ha dominio  $D : [-1; 1]$  e codominio  $C : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Essa presenta inoltre un solo zero di funzione per  $x = 0$ .

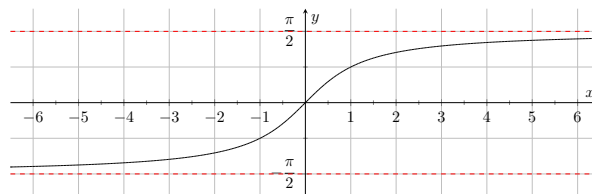


### 3.5.6 La funzione arcocoseno

Analogamente alla funzione arcseno, la funzione arcocoseno è l'inversa del coseno. Anche in questo caso il dominio e il codominio devono essere ristretti a  $D' : [0; \pi]$  e  $C' : [-1; 1]$ . di conseguenza la funzione arcocoseno ha dominio  $D : [-1; 1]$  e codominio  $C : [0; \pi]$ . Essa presenta inoltre un solo zero di funzione per  $x = -1$ . Il grafico consiste in una traslazione verso l'alto di  $\pi$  unità del grafico della funzione arcseno.

### 3.5.7 La funzione arcotangente

La funzione arcotangente è la funzione inversa della tangente. In questo caso è necessario ridurre solamente il dominio della funzione di partenza, per cui l'arcotangente ha dominio  $D : \mathbb{R}$  e codominio  $C : ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . Essa presenta due asintoti orizzontali agli estremi del codominio e uno zero di funzione per  $x = 0$ . Esiste anche la funzione arcocotangente, inversa della cotangente, che consiste in una traslazione verso l'alto di  $\pi$  unità della funzione  $y = -\operatorname{arctg} x$ .

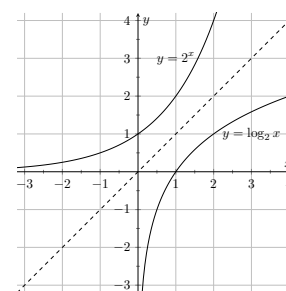


## 3.6 La funzione esponenziale

La funzione esponenziale  $y = a^x$  è una funzione trascendente. Essa ha dominio  $\mathbb{R}$  e codominio  $]0; +\infty[$ , e presenta un asintoto orizzontale a 0. Di conseguenza non ha zeri di funzione. Se  $a > 1$  La funzione è strettamente crescente, mentre se  $0 < a < 1$  la funzione è strettamente decrescente.

## 3.7 La funzione logaritmo

La funzione logaritmo  $y = \log_a x$  è la funzione inversa della funzione esponenziale, di conseguenza ha dominio  $]0; +\infty[$  e codominio  $\mathbb{R}$ . Presenta uno zero di funzione per  $x = 1$  e un asintoto verticale a 0. Per  $a > 1$  è strettamente crescente, mentre per  $0 < a < 1$  è strettamente decrescente.



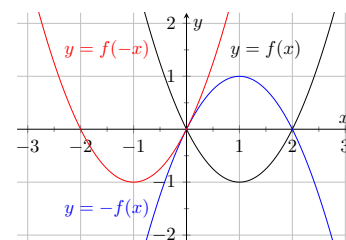
# 4 Grafica dedotta

## 4.1 Trasformazioni geometriche

### 4.1.1 Simmetria rispetto agli assi

Si consideri una funzione  $y = f(x)$ , è possibile tracciare i grafici delle simmetrie rispetto ai due assi cartesiani: in particolare  $y = -f(x)$  è la simmetrica rispetto all'asse  $x$ , mentre  $y = f(-x)$  è la simmetrica rispetto all'asse  $y$ .

### 4.1.2 Traslazione



$$f(x) = x^2 - 2x$$

Data una funzione  $y = f(x)$  e una traslazione di vettore  $\vec{v}(a, b)$  ed equazione

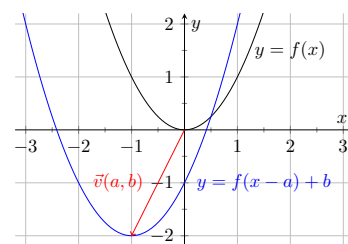
$$t : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

per ottenere l'equazione della funzione traslata è necessario ricavare la traslazione inversa e sostituire i valori di  $x$  e  $y$ .

$$t : \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

$$y' - b = f(x' - a)$$

$$y = f(x - a) + b$$



### 4.1.3 Dilatazione

Data una funzione  $y = f(x)$  e una dilatazione di  $a$  unità lungo l'asse  $x$  e  $b$  unità lungo l'asse  $y$

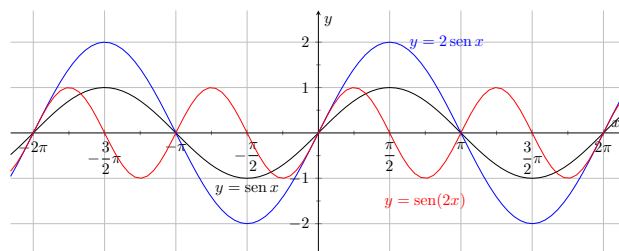
$$d : \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

per ottenere l'equazione della funzione dilatata è necessario ricavare la dilatazione inversa e sostituire i valori di  $x$  e  $y$ .

$$d : \begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{b} \end{cases}$$

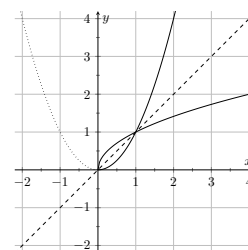
$$\frac{y}{b} = f\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y = b \cdot f\left(\frac{x}{a}\right)$$



## 4.2 Funzione inversa

Per poter tracciare il grafico di una funzione è necessario che una funzione sia biettiva. Siccome ogni funzione è suriettiva nel proprio codominio, è necessario ridurre il dominio affinché sia anche iniettiva. Ad esempio per poter rappresentare il grafico della funzione inversa di una funzione  $y = x^2$  è necessario ridurre il dominio a  $x \geq 0$ . A questo punto è possibile riscrivere la funzione nella forma  $x = f^{-1}(y)$  ed effettuare un cambio di variabili arrivando quindi alla scrittura  $y = f^{-1}(x)$ . Per rappresentare il grafico della funzione inversa è sufficiente rappresentare la simmetrica della funzione di partenza rispetto alla bisettrice I-III quadrante, prestando attenzione al nuovo dominio ridotto.



## 4.3 Funzioni con valori assoluti

### 4.3.1 Valore assoluto di una funzione

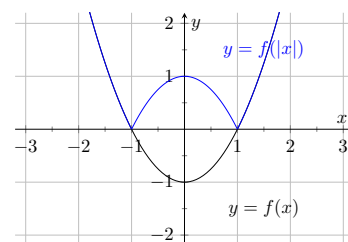
Per studiare il caso  $y = |f(x)|$  recuperiamo la definizione di valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza, sostituendo  $f(x)$  ad  $x$  nella definizione, si ottiene la definizione di  $|f(x)|$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Questo significa che  $|f(x)|$  coincide con  $f(x)$  quando essa è maggiore di 0, e con la sua simmetrica rispetto all'asse  $x$  quando  $f(x) < 0$ .



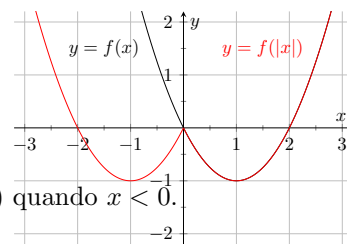
$$f(x) = x^2 - 2x$$

### 4.3.2 Funzione di un valore assoluto

Procedendo in modo analogo al punto precedente, per  $y = f(|x|)$  si ricava che

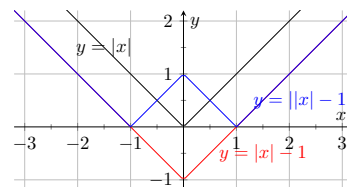
$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$  in quanto coincide con  $f(x)$  se  $x \geq 0$  e con  $f(-x)$  (simmetrica di  $f(x)$  rispetto all'asse  $y$ ) quando  $x < 0$ .



#### 4.3.3 Funzioni con più valori assoluti nidificati

In questo caso è sufficiente procedere per gradi: consideriamo ad esempio la funzione  $y = ||x| - 1|$ . Il metodo migliore è quindi rappresentare prima la funzione  $y = |x|$ , successivamente traslarla verso il basso di 1 unità ( $y = |x| - 1$ ) e poi rappresentare anche il modulo più esterno effettuando la simmetria rispetto all'asse  $x$  della regione negativa.



#### 4.3.4 Funzioni con più valori assoluti in sequenza

Qui la situazione si complica, perché è necessario studiare tutti gli intervalli di positività che i diversi argomenti dei valori assoluti possono assumere.

Consideriamo ad esempio la funzione  $y = |x - 1| + |2x + 4|$ . Prima di tutto bisogna trovare per quali valori di  $x$  l'argomento di ogni valore assoluto assume valori non negativi.

$$x - 1 \geq 0 \quad x \geq 1$$

$$2x + 4 \geq 0 \quad x \geq -2$$

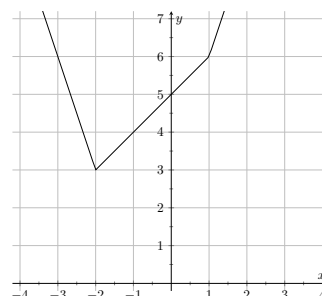
A questo punto rappresentiamo gli intervalli trovati.

| -2        |  |          | 1        |  |  |
|-----------|--|----------|----------|--|--|
| $-x + 1$  |  | $-x + 1$ | $x - 1$  |  |  |
| $-2x - 4$ |  | $2x + 4$ | $2x + 4$ |  |  |

A questo punto possiamo usare lo schema appena trovato per ricostruire la funzione come definita a tratti:

$$y = \begin{cases} (-x + 1) + (-2x - 4) & \text{se } x < -2 \\ (-x + 1) + (2x + 4) & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ (x - 1) + (2x + 4) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -3x - 3 & \text{se } x < -2 \\ x + 5 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 3x + 3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



## 4.4 Reciproco di una funzione

### Esempio.

testo

Tracciare il grafico di  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

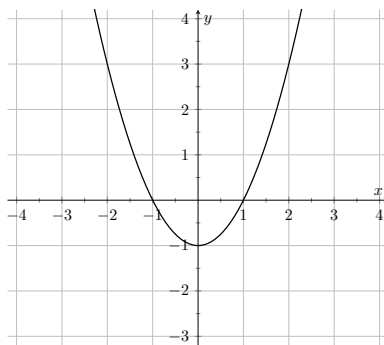
Cominciamo con il tracciare il grafico di  $y = x^2 - 1$ . Si tratta di una parabola di vertice  $V(0, -1)$ .

A questo punto procediamo con l'analisi del dominio: sappiamo che il dominio di una frazione si ricava ponendo il denominatore diverso da 0, quindi il dominio di  $\frac{1}{f(x)}$  si ottiene trovando dove  $f(x) \neq 0$

$$D : x^2 - 1 \neq 0$$

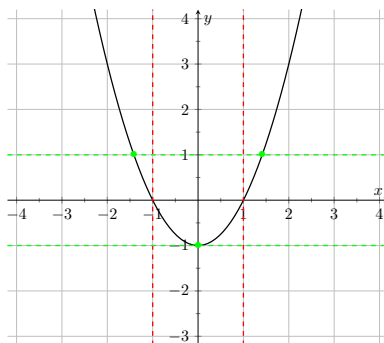
$$(x - 1)(x + 1) \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$



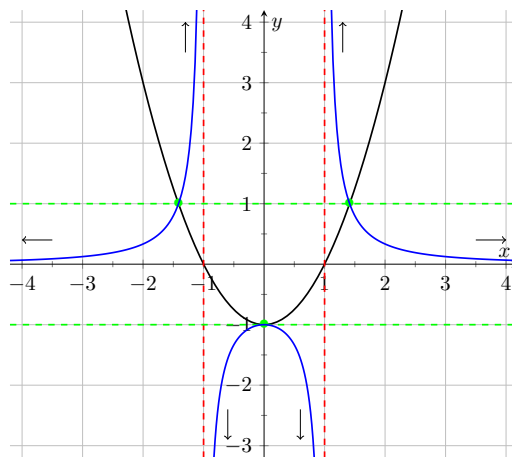
$$D : ] -\infty; -1[ \cup ] -1; 1[ \cup ] 1; +\infty[$$

In particolare dove  $f(x) = 0$ ,  $\frac{1}{f(x)}$  presenta degli asintoti verticali. Il prossimo passo è studiare i punti di intersezione delle due funzioni. Siccome  $f(x) = \frac{1}{f(x)}$  se  $f(x) = \pm 1$ , le due funzioni si intersecano solo dove intersecano la retta  $y = 1$  o la retta  $y = -1$ . Rappresentiamo quanto ottenuto. A questo punto rimane solo un



passaggio prima di poter rappresentare la funzione: studiare i limiti negli intorni degli estremi del dominio.

|                         |                            |                                      |
|-------------------------|----------------------------|--------------------------------------|
| $x \rightarrow -\infty$ | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0^+$     |
| $x \rightarrow -1^-$    | $f(x) \rightarrow 0^+$     | $\frac{1}{f(x)} \rightarrow +\infty$ |
| $x \rightarrow -1^+$    | $f(x) \rightarrow 0^-$     | $\frac{1}{f(x)} \rightarrow -\infty$ |
| $x \rightarrow 1^-$     | $f(x) \rightarrow 0^-$     | $\frac{1}{f(x)} \rightarrow -\infty$ |
| $x \rightarrow 1^+$     | $f(x) \rightarrow 0^+$     | $\frac{1}{f(x)} \rightarrow +\infty$ |
| $x \rightarrow +\infty$ | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0^+$     |



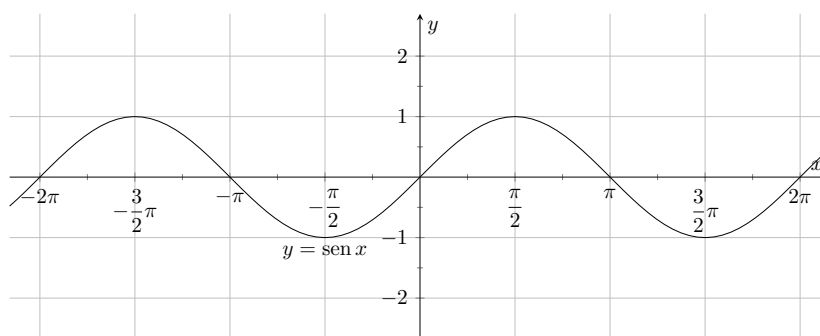
## 4.5 Quadrato di una funzione

### Esempio.

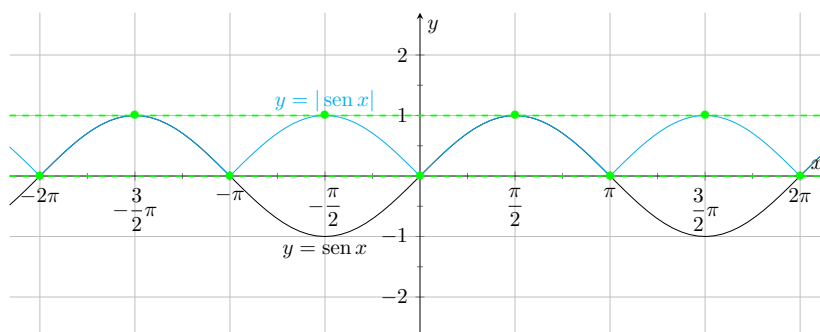
testo

Tracciare il grafico di  $y = \sin^2 x$

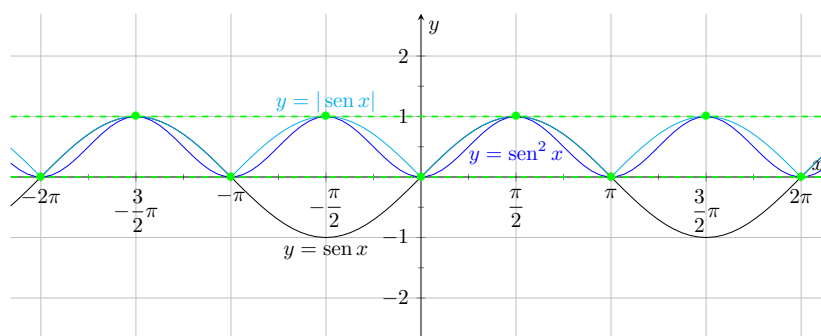
Cominciamo con il tracciare il grafico della funzione elementare  $y = \sin x$



Per quanto riguarda il dominio, esso rimane invariato. Siccome il dominio della funzione di partenza  $f(x)$  è  $\mathbb{R}$ , il dominio di  $f^2(x)$  rimane  $\mathbb{R}$ . Siccome il quadrato di un numero reale è sempre non negativo, procediamo con il rappresentare  $|f(x)|$ . Essa inoltre interseca  $f^2(x)$  lungo le rette  $y = 0$  e  $y = 1$ .



L'ultima cosa da tenere in considerazione è che se  $0 < |f(x)| < 1$ ,  $f^2(x) < |f(x)|$ ; mentre se  $|f(x)| > 1$ ,  $f^2(x) > |f(x)|$ . A questo punto abbiamo tutte le informazioni necessarie per tracciare il grafico di  $f^2(x)$ .



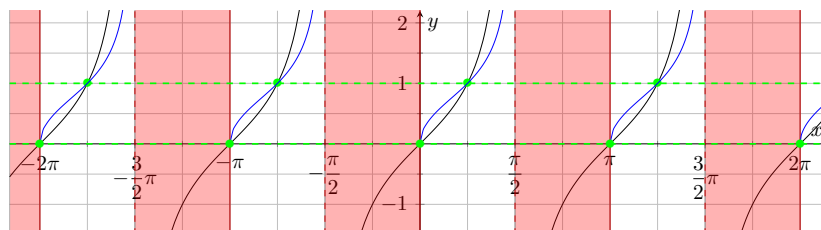
## 4.6 Radice di una funzione

### Esempio.

testo

Tracciare il grafico di  $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

Cominciamo con il tracciare il grafico della funzione elementare  $y = \operatorname{tg} x$ . Siccome il dominio della funzione irrazionale si ottiene ponendo il radicando  $\geq 0$ , il dominio della funzione  $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$  è  $D : [k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . A questo punto, analogamente a quanto fatto precedentemente, sappiamo che le funzioni  $y = f(x)$  e  $y = \sqrt{f(x)}$  si intersecano per  $f(x) = 0$  e  $f(x) = 1$ . Sappiamo inoltre che se  $0 < f(x) < 1$ ,  $\sqrt{f(x)} > f(x)$ ; mentre se  $f(x) > 1$ ,  $\sqrt{f(x)} < f(x)$ . A questo punto abbiamo tutte le informazioni necessarie per tracciare il grafico di  $\sqrt{f(x)}$ .



## 4.7 Esponenziale di una funzione

### Esempio.

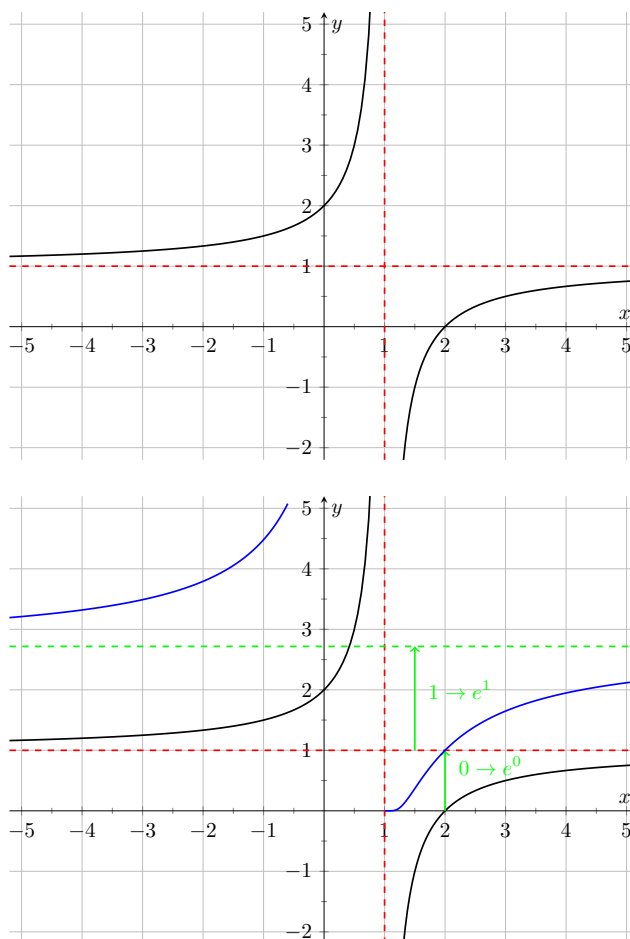
testo

Tracciare il grafico di  $y = e^{\frac{x-2}{x-1}}$

Per prima cosa tracciamo il grafico di  $y = \frac{x-2}{x-1}$ . Questa funzione ha un asintoto orizzontale per  $y = 1$  e un asintoto verticale per  $x = 1$ .

Siccome il dominio di  $e^{f(x)}$  coincide con il dominio di  $f(x)$ , l'asintoto verticale si conserva. L'asintoto orizzontale invece si sposta passando da  $y = 1$  a  $y = e^1$ . Inoltre, dove la funzione va a 0, sappiamo che  $e^0 = 1$ , quindi la nuova funzione passerà per 1. L'ultimo passo prima di poter rappresentare la funzione consiste nello studiarne i limiti agli estremi del dominio.

|                         |                            |                                |
|-------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| $x \rightarrow -\infty$ | $f(x) \rightarrow 1^+$     | $e^{f(x)} \rightarrow e^+$     |
| $x \rightarrow 1^-$     | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $e^{f(x)} \rightarrow +\infty$ |
| $x \rightarrow 1^+$     | $f(x) \rightarrow -\infty$ | $e^{f(x)} \rightarrow 0^+$     |
| $x \rightarrow +\infty$ | $f(x) \rightarrow 1^-$     | $e^{f(x)} \rightarrow e^-$     |



## 4.8 Logaritmo di una funzione

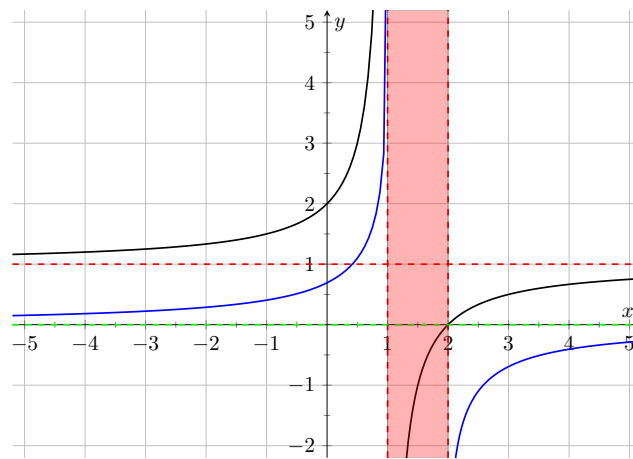
### Esempio.

testo

Tracciare il grafico di  $y = \ln \frac{x-2}{x-1}$

Per prima cosa tracciamo il grafico di  $y = \frac{x-2}{x-1}$ . Questa funzione ha un asintoto orizzontale per  $y = 1$  e un asintoto verticale per  $x = 1$ . Siccome la funzione  $y = \ln f(x)$  ha dominio  $f(x) > 0$ . Di conseguenza, risolvendo la disequazione  $\frac{x-2}{x-1} > 0$  otteniamo l'intervallo  $D : ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ . L'asintoto orizzontale si sposta passando da  $y = 1$  a  $y = \ln 1 = 0$ . L'ultimo passo prima di poter rappresentare la funzione consiste nello studiarne i limiti agli estremi del dominio.

|                         |                            |                                |
|-------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| $x \rightarrow -\infty$ | $f(x) \rightarrow 1^+$     | $\ln f(x) \rightarrow 0^+$     |
| $x \rightarrow 1^-$     | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $\ln f(x) \rightarrow +\infty$ |
| $x \rightarrow 2^+$     | $f(x) \rightarrow 0^+$     | $\ln f(x) \rightarrow -\infty$ |
| $x \rightarrow +\infty$ | $f(x) \rightarrow 1^-$     | $\ln f(x) \rightarrow 0^-$     |



## 5 Studio di funzione completo

### 5.1 Classificazione

|          |              |             |        |
|----------|--------------|-------------|--------|
| Funzione | algebrica    | razionale   | intera |
|          | trascendente | irrazionale | fratta |

### 5.2 Dominio

- Polinomiale :  $\mathbb{R}$
- Fratte: denominatore  $\neq 0$
- Irrazionali pari: radicando  $\geq 0$
- Irrazionali dispari:  $\mathbb{R}$
- Logaritmi: argomento  $> 0$
- Esponenziali:  $\mathbb{R}$
- Seno, coseno, arcotangente, arcocotangente:  $\mathbb{R}$
- Tangente:  $\mathbb{R} - \frac{\pi}{2} + k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$
- Cotangente:  $\mathbb{R} - k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$
- Arcoseno, arcocoseno:  $[-1; 1]$

### 5.3 Simmetrie

CN:  $\forall x \in D, -x \in D$

- pari se  $f(-x) = f(x)$
- dispari se  $f(-x) = -f(x)$

### 5.4 Intersezioni con gli assi cartesiani

$$f(x) \cap \text{asse } x : \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad f(x) \cap \text{asse } y : \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

### 5.5 Studio del segno

Risolvere la disequazione  $f(x) > 0$



## 5.6 Limiti, asintoti e discontinuità

|                      |                                                                                                                                                      |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Asintoto verticale   | $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$                                                                                                             |
| Asintoto orizzontale | $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$                                                                                                               |
| Asintoto obliquo     | $\text{CN: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$ |

**NB.:** Una funzione può avere anche infiniti asintoti verticali, ma al massimo due tra asintoti orizzontali e asintoti obliqui (uno destro e uno sinistro).

|                |                                                                                                                                     |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Prima specie   | $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_2$ $l_1 \neq l_2 \quad \text{salto} =  l_1 - l_2 $ |
| Seconda specie | $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \nexists$                          |
| Terza specie   | $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ $f(x_0) \neq l \quad \vee \quad f(x_0) = \nexists$          |

## 5.7 Derivata prima

Le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = 0$$

identificano la presenza di

- massimi relativi
- minimi relativi
- flessi a tangente orizzontale

Per distinguerli è necessario studiare il segno della derivata: Lo studio della derivata prima fornisce anche informazioni circa la monotonia della funzione.

## 5.8 Derivata seconda

Le soluzioni dell'equazione

$$f''(x) = 0$$

permettono di identificare i punti di flesso. A differenza della derivata prima permette di ottenere informazioni circa la presenza di flessi a tangente obliqua, per cui è necessario escludere tutte le soluzioni già analizzate in precedenza. La derivata seconda fornisce inoltre informazioni circa la concavità della funzione: verso l'alto quando la derivata seconda è positiva e verso il basso quando la derivata seconda è negativa. La funzione inverte la propria concavità in corrispondenza dei punti di flesso.

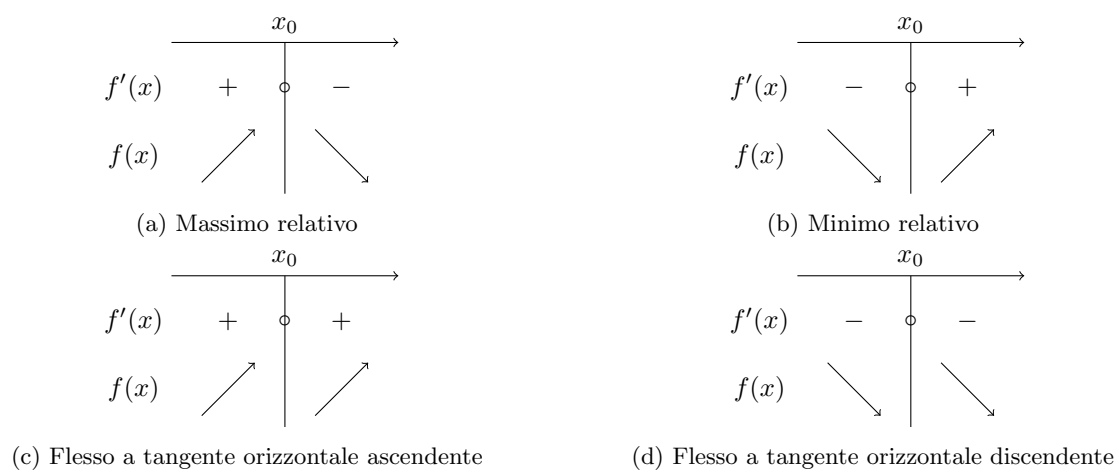


Figura 2