

# Appunti di Analisi Matematica A

Seconda Prova Intermedia

Davide Borra

This work is licensed under CC BY-NC-ND 4.0. To view a copy of this license, visit  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>



## Sviluppi di Taylor

Centrati in  $x_0 = 0$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n}x^n + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
- $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$

### Casi particolari

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

## Serie

### Serie notevoli

- **Serie geometrica:**  $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

- Converge se:  $|q| < 1$  con somma  $\frac{1}{1-q}$
- Diverge positivamente se:  $q \geq 1$
- Indeterminata se:  $q \leq -1$

- **Serie armonica generalizzata:**  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$

- Converge se:  $\alpha > 1, \forall \beta$  oppure  $\alpha = 1, \beta > 1$
- Diverge positivamente se:  $\alpha < 1, \forall \beta$  oppure  $\alpha = 1, \beta \leq 1$

- **Serie telescopiche:**  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$

Risulta quindi che la successione delle somme parziali è  $s_n = b_0 - b_{n+1}$ , per cui il carattere della serie dipende da  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1}$

### Criteri di convergenza

**Teorema** (Condizione necessaria di convergenza). Se  $\sum_n a_n$  è convergente, allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

### Criteri di convergenza per serie a segno costante

**Teorema** (Confronto). Siano  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  due successioni di numeri reali tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

$$i) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$ii) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$$

**Teorema** (Confronto asintotico). Siano  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  due successioni di numeri reali positivi (almeno da un certo  $\bar{n}$  in poi) tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in ]0, +\infty[ \quad (a_n \asymp b_n \text{ per } n \rightarrow +\infty)$$

Allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  hanno lo stesso carattere.

**Teorema** (Criterio della radice  $n$ -esima). Sia  $(a_n)_n$  una successione di numeri reali non negativi. Se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in ]0, +\infty[$$

e

- $l < 1$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$
- $l > 1$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Se  $l = 1$  non abbiamo informazioni circa il carattere della serie.

**Teorema** (Criterio del rapporto). *Sia  $(a_n)_n$  una successione di numeri reali positivi. Se esiste*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in ]0, +\infty[$$

e

- $l < 1$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$
- $l > 1$ , allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Se  $l = 1$  non abbiamo informazioni circa il carattere della serie.

### Serie numeriche a segno qualsiasi

**Teorema** (Criterio dell'assoluta convergenza). *Sia  $(a_n)_n$  una successione di numeri reali positivi. Se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è assolutamente convergente, allora è (semplicemente) convergente, e si ha*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

### Serie numeriche a segni alterni

**Teorema** (Criterio di Leibnitz). *Sia  $(a_n)_n$  una successione di numeri reali tali che :*

- i)  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- ii)  $(a_n)_n$  decrescente  $\forall n \geq \bar{n}$
- iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$  è convergente.

### Teorema di Riemann-Dini

**Teorema** (Riemann-Dini). *Se una serie è convergente, ma non assolutamente, allora scelto un qualsiasi  $S \in \mathbb{R}$  esiste un riordinamento della serie data con somma  $S$ . Esistono anche riordinamenti della serie che sono divergenti e altri che sono indeterminati.*

## Serie di potenze

**Teorema** (determinazione del raggio di convergenza). Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$  la serie di potenze data. Se esiste

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0; +\infty]$$

oppure

$$ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in [0; +\infty]$$

Allora la serie ha raggio di convergenza

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = +\infty \\ \frac{1}{l} & \text{se } 0 < l < +\infty \end{cases}$$

Di conseguenza la serie converge in

$$E = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } l = 0 \\ \{x_0\} & \text{se } l = +\infty \\ [x_0 - l; x_0 + l] & \text{se } 0 < l < +\infty \end{cases}$$

## Integrali generalizzati

### Funzioni illimitate

**Osservazione.** Nel caso in cui l'integrale da calcolare sia improprio in entrambi gli estremi bisogna spezzare:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \int_{a+\delta_1}^c f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \int_c^{b+\delta_2} f(x) dx$$

Analogamente nel caso in cui si presenta un punto di discontinuità all'interno dell'intervallo di integrazione.

**Per confrontare:**

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{converge se } \alpha < 1$$

### Intervalli illimitati

**Osservazione.** Nel caso in cui l'integrale da calcolare sia improprio in entrambi gli estremi bisogna spezzare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\delta_1 \rightarrow -\infty} \int_{\delta_1}^a f(x) dx + \lim_{\delta_2 \rightarrow -\infty} \int_a^{\delta_2} f(x) dx$$

**Per confrontare:**

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{converge se } \alpha > 1$$

## Criteri di convergenza

Confronto, confronto asintotico (attenzione al segno costante!) e assoluta convergenza funzionano esattamente come con le serie.

## Integrali e serie

**Teorema** (Criterio integrale per le serie a termini positivi). Sia  $f : [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[$  decrescente.

Poniamo  $a_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$  Allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} < +\infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

Inoltre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

(vale anche da un certo  $\bar{n}$  in poi)

## Equazioni differenziali

Notazione:  $A(x) = \int a(x) dx$

### Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

$$y' = h(x)g(y) \quad (\text{VS})$$

Troviamo prima di tutto una soluzione particolare costante: poniamo  $y' = 0$  e ricaviamo  $y : g(y) = 0$ . A questo punto siamo autorizzati a dividere per  $g(y)$  per unicità della soluzione del problema di Cauchy.

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x) \Leftrightarrow \int \frac{y'}{g(y)} dx = \int h(x) dx$$

Sostituiamo nel primo integrale  $y := y(x)$ , allora  $dy = y' dx$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy \Big|_{y=y(x)} = \int h(x) dx$$

E determiniamo la primitiva. Invertendo si trova l'integrale generale.

**Caso particolare**  $y' = a(x)y \Leftrightarrow y = ke^{A(x)}, k \in \mathbb{R}$

### Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti funzioni continue

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (\text{L1})$$

Se  $b(x) \equiv 0$  l'equazione è a variabili separabili e si dice omogenea. Se  $b(x) \neq 0$  l'equazione si dice completa. Per risolvere:

1. Determinare l'integrale generale di  $y' = a(x)y$ , ovvero  $y = ce^{A(x)}$
2. Cerchiamo una soluzione particolare della completa nella forma  $y = c(x)e^{A(x)}$  con  $c(x)$  incognito. Troviamo

$$c(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx$$

Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = ce^{A(x)} + c(x)e^{A(x)} = (c + c(x))e^{A(x)} = \boxed{e^{A(x)} \left( c + \int b(x)e^{-A(x)} dx \right)}$$

### Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (\text{L2})$$

Per risolvere

1. Troviamo una soluzione dell'equazione omogenea associata  $y'' + ay' + by = 0$ 
  - (a) Risolviamo in  $\mathbb{C}$  l'equazione caratteristica  $z^2 + az + b = 0$
  - (b) Determiniamo le soluzioni fondamentali:

$z_1, z_2 \in \mathbb{R}$	distinte	$y_1(x) = e^{z_1 x}$	$y_2(x) = e^{z_2 x}$
$z \in \mathbb{R}$	con molteplicità 2	$y_1(x) = e^{zx}$	$y_2(x) = xe^{zx}$
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$	tali che $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$

(c) L'integrale generale dell'omogenea è una combinazione lineare delle due

$$y_{om}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

2a. Cerchiamo una soluzione particolare di (L2) con il metodo di variazione delle costanti del tipo

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

omettendo la dimostrazione si ricava

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

2b. Se  $f(x) = P(x)e^{\gamma x} \cos(\delta x)$  o  $f(x) = P(x)e^{\gamma x} \sin(\delta x)$  dove  $P(x)$  è un polinomio di grado  $n$ . Poniamo  $\xi = \gamma + i\delta$ .

- Se  $\xi$  non è soluzione dell'equazione caratteristica

$$\bar{y}(x) = e^{\gamma x} (Q_1(x) \cos \delta x + Q_2(x) \sin \delta x)$$

con  $Q_1, Q_2$  polinomi di grado  $n$  da determinare imponendo che  $\bar{y}$  soddisfi (L2).

- Se  $\xi$  è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 1

$$\bar{y}(x) = xe^{\gamma x} (Q_1(x) \cos \delta x + Q_2(x) \sin \delta x)$$

con  $Q_1, Q_2$  polinomi di grado  $n$  da determinare imponendo che  $\bar{y}$  soddisfi (L2).

- Se  $\xi$  è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 2

$$\bar{y}(x) = x^2 e^{\gamma x} Q(x)$$

con  $Q$  polinomio di grado  $n$  da determinare imponendo che  $\bar{y}$  soddisfi (L2).

In conclusione

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$