Appunti di Analisi Matematica A

Seconda Prova Intermedia

Davide Borra

Sviluppi di Taylor

Centrati in $x_0 = 0$

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n} x^n + o(x^n)$
- $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)$
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$

Casi particolari

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

Serie

Serie notevoli

- **Serie geometrica:** $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$
  - Converge se: $|q| < 1$ con somma $\frac{1}{1-q}$
  - Diverge positivamenete se: $q \geq 1$
  - Indeterminata se: $q \leq -1$

- **Serie armonica generalizzata:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$
  - Converge se: $\alpha > 1, \forall \beta$ oppure $\alpha = 1, \beta > 1$
  - Diverge positivamenete se: $\alpha < 1, \forall \beta$ oppure $\alpha = 1, \beta \leq 1$
- **Serie telescopiche:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$
  Risulta quindi che la successione delle somme parziali è $s_n = b_0 - b_{n+1}$, per cui il carattere della serie dipende da $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$

Criteri di convergenza

Teorema (Condizione necessaria di convergenza). *Se* $\displaystyle\sum_n a_n$ *è convergente, allora* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Criteri di convergenza per serie a segno costante

Teorema (Confronto). *Siano* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *due successioni di numeri reali tali che*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$

Teorema (Confronto asintotico). *Siano* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *due successioni di numeri reali positivi (almeno da un certo* $\bar{n}$ *in poi) tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in]0, +\infty[\qquad (a_n \asymp b_n \text{ per } n \to +\infty)$$

Allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *hanno lo stesso carattere.*

Teorema (Criterio della radice n-esima). *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali non negativi. Se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in]0, +\infty[$$

e

- $l < 1$, *allora* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$
- $l > 1$, *allora* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Se $l = 1$ non abbiamo informazioni circa il carattere della serie.

Teorema (Criterio del rapporto). *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali positivi. Se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in]0, +\infty[$$

e

- $l < 1$, *allora* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$
- $l > 1$, *allora* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$

Se $l = 1$ non abbiamo informazioni circa il carattere della serie.

Serie numeriche a segno qualsiasi

Teorema (Criterio dell'assoluta convergenza). *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali positivi. Se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è assolutamente convergente, allora è (semplicemente) convergente, e si ha*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

Serie numeriche a segni alterni

Teorema (Criterio di Leibnitz). *Sia* $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali tali che :*

i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $(a_n)_n$ *decrescente* $\forall n \geq \bar{n}$

iii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *è convergente.*

Teorema di Riemann-Dini

Teorema (Riemann-Dini). *Se una serie è convergente, ma non assolutamente, allora scelto un qualsiasi* $S \in \mathbb{R}$ *esiste un riordinamento della serie data con somma* S*. Esistono anche riordinamenti della serie che sono divergenti e altri che sono indeterminati.*

Serie di potenze

Teorema (determinazione del raggio di convergenza). *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ *la serie di potenze data. Se esiste*

i) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0; +\infty]$

oppure

ii) $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in [0; +\infty]$

Allora la serie ha raggio di convergenza

$$r = \begin{cases} +\infty & se\ l = 0 \\ 0 & se\ l = +\infty \\ \dfrac{1}{l} & se\ 0 < l < +\infty \end{cases}$$

Di conseguenza la serie converge in

$$E = \begin{cases} \mathbb{R} & se\ l = 0 \\ \{x_0\} & se\ l = +\infty \\ [x_0 - l; x_0 + l] & se\ 0 < l < +\infty \end{cases}$$

Integrali generalizzati

Funzioni illimitate

Osservazione. *Nel caso in cui l'integrale da calcolare sia improprio in entrambi gli estremi bisogna spezzare:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \int_{a+\delta_1}^c f(x)\ dx + \lim_{\delta_2 \to 0} \int_c^{b+\delta_2} f(x)\ dx$$

Analogamente nel caso in cui si presenta un punto di discontinuità all'interno dell'intervallo di integrazione.

Per confrontare:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{converge se } \alpha < 1$$

Intervalli illimitati

Osservazione. *Nel caso in cui l'integrale da calcolare sia improprio in entrambi gli estremi bisogna spezzare:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx + \int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{\delta_1 \to -\infty} \int_{\delta_1}^a f(x)\ dx + \lim_{\delta_2 \to -\infty} \int_a^{\delta_2} f(x)\ dx$$

Per confrontare:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{converge se } \alpha > 1$$

Criteri di convergenza

Confronto, confronto asintotico (attenzione al segno costante!) e assoluta convergenza funzionano esattamente come con le serie.

Integrali e serie

Teorema (Criterio integrale per le serie a termini positivi)**.** *Sia* $f : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$ *decrescente. Poniamo* $a_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *Allora*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{+\infty} f(x)\ dx < +\infty$$

Inoltre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

(vale anche da un certo $\bar{n}$ *in poi)*

Equazioni differenziali

Notazione: $A(x) = \displaystyle\int a(x)\,\mathrm{d}x$

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

$$y' = h(x)g(y) \tag{VS}$$

Troviamo prima di tutto una soluzione particolare costante: poniamo $y' = 0$ e ricaviamo $y : g(y) = 0$. A questo punto siamo autorizati a dividere per $g(y)$ per unicità della soluzione del problema di Cauchy.ù

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{y'}{g(y)}\,\mathrm{d}x = \int h(x)\,\mathrm{d}x$$

Sostituimo nel primo integrale $y := y(x)$, allora $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=y(x)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

E determiniamo la primitiva. Invertendo si trova l'integrale generale.

Caso particolare $y' = a(x)y \quad \Leftrightarrow \quad y = ke^{A(x)}, k \in \mathbb{R}$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti funzioni continue

$$y = a(x)y + b(x) \tag{L1}$$

Se $b(x) \equiv 0$ l'equazione è a variabili separabili e si dice omogenea. Se $b(x) \neq 0$ l'equazione si dice completa. Per risolvere:

1. Determinare l'integrale generale di $y' = a(x)y$, ovvero $y = ce^{A(x)}$
2. Cerchiamo una soluzione particolare della completa nella forma $y = c(x)e^{A(x)}$ con $c(x)$ incognito. Troviamo

$$c(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x$$

Quindi l'integrale generale è

$$y(x) = ce^{A(x)} + c(x)e^{A(x)} = (c + c(x))\,e^{A(x)} = \boxed{e^{A(x)}\left(c + \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x\right)}$$

Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{L2}$$

Per risolvere

1. Troviamo una soluzione dell'equazione omogenea associata $y'' + ay' + by = 0$
   (a) Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione caratteristica $z^2 + az + b = 0$
   (b) Determiniamo le soluzioni fondamentali:

$z_1, z_2 \in \mathbb{R}$	distinte	$y_1(x) = e^{z_1 x}$	$y_2(x) = e^{z_2 x}$
$z \in \mathbb{R}$	con molteplicità 2	$y_1(x) = e^{zx}$	$y_2(x) = xe^{zx}$
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$	tali che $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$	$y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$

   (c) L'integrale generale dell'omogenea è una combinazione lineare delle due

$$y_{om}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

2a. Cerchiamo una soluzione particolare di (L2) con il metodo di variazione delle costanti del tipo

$$\bar{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

omettendo la dimostrazione si ricava

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

2b. Se $f(x) = P(x)e^{\gamma x}\cos(\delta x)$ o $f(x) = P(x)e^{\gamma x}\operatorname{sen}(\delta x)$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado n. Poniamo $\xi = \gamma + i\delta$.

- Se ξ non è soluzione dell'equazione caratteristica
$$\bar{y}(x) = e^{\gamma x}\left(Q_1(x)\cos\delta x + Q_2(x)\operatorname{sen}\delta x\right)$$
con Q_1, Q_2 polinomi di grado n da determinare imponendo che $\bar{y}$ soddisfi (L2).
- Se ξ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 1
$$\bar{y}(x) = xe^{\gamma x}\left(Q_1(x)\cos\delta x + Q_2(x)\operatorname{sen}\delta x\right)$$
con Q_1, Q_2 polinomi di grado n da determinare imponendo che $\bar{y}$ soddisfi (L2).
- Se ξ è soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità 2
$$\bar{y}(x) = x^2 e^{\gamma x} Q(x)$$
con Q polinomio di grado n da determinare imponendo che $\bar{y}$ soddisfi (L2).

In conclusione
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \bar{y}(x)$$