Geometria A

SECONDO MODULO

Davide Borra

v. 1.0

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Sommario

Queste sono le note prodotte durante il secondo modulo del corso di Geometria A, tenuto dal prof. Marco Andreatta. Il docente del corso segue il libro "Geometria 1" di Edoardo Sernesi (Ed. Bollati Boringhieri).

Indice

1 Forme bilineari

DEF (forma bilineare)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si dice forma bilineare una mappa lineare

$$f : V \times V \to \mathbb{K}$$

lineare rispetto ad entrambi gli argomenti, ovvero $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, $\forall k \in \mathbb{K}$

- $f(v_1 + v_2, w_1) = f(v_1, w_1) + f(v_2, w_1)$
- $f(kv_1, w_1) = kf(v_1, w_1)$
- $f(v_1, w_1 + w_2) = f(v_1, w_1) + f(v_1, w_2)$
- $f(v_1, kw_1) = kf(v_1, w_1)$

Esistono inoltre alcune forme multilineari particolari:

DEF (Forme bilineari simmetriche)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice simmetrica se $\forall v, w \in V$

$$f(v, w) = f(w, v)$$

DEF (Forme bilineari antisimmetriche)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice antisimmetrica se $\forall v, w \in V$

$$f(v, w) = -f(w, v)$$

Data una matrice, ad essa è associata una forma bilineare del tipo $f_A(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$. La dimostrazione del fatto che questa mappa sia bilineare segue dalla proprietà distributiva del prodotto tra matrici.

Esercizio 1.1. *Dimostrare che f_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica, ovvero se e solo se $A = A^t$.* *Soluzione a pag. 14*

Teorema (Matrice associata)**.** *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con dimensione n finita e $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Siano inoltre $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e $A = (f(e_i, e_j))_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora se $v = \sum_i a_i e_i$ e $w = \sum_j b_j e_j$, si ha*

$$f(v, w) = (a_1, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dimostrazione.

$$f(v, w) = f\left(\sum_i a_i e_i, \sum_j a_j e_j\right) = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j f(e_i, e_j)\right)$$

Osserviamo che

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \sum_j b_j f(e_1, e_j) \\ \vdots \\ \sum_j b_j f(e_n, e_j) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j f(e_i, e_j)\right)$$

da cui la tesi. QED

Osservazione. Scelta una base esiste una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari e le matrici e una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari simmetriche e le matrici simmetriche.

1.1 Matrici simili

Lemma (Matrici simili)**.** *Siano $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$ due basi di V, $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Sia $f_V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e siano $A = (f(e_i, e_j))_{ij}$ e $A = (f(u_i, u_j))_{ij}$ le matrici associate alla mappa f in β e β' rispettivamente. Allora $\exists M = M_{\beta\beta'}(id) \in \mathcal{Gl}_n(\mathbb{K}) \ : \ B = M^t AM$*

Notazione se $v = \sum_i x_i e_i = \sum_i x'_i u_i$, allora $\underline{x} = (v)_\beta$ e $\underline{x}' = (v)'_\beta$. Analogamente per w indicando le coordinate con y.

Dimostrazione.

$$\underline{x} = M\underline{x}' \qquad \underline{y} = M\underline{y}'$$

da cui

$$f(v, w) = \underline{x}^t A\underline{y} = (M\underline{x})^t A(M\underline{y}) = (\underline{x}')^t M^t AM\underline{y} = (\underline{x}')^t B\underline{y}$$

quindi $B = M^t AM$ QED

DEF (Matrici congruenti)**.** Due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono congruenti se $\exists M \in \mathcal{Gl}_n(K)$:

$$B = M^t AM$$

DEF (Base ortogonale)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$, e β una base di V. Se $i \neq j \implies b(e_i, e_j) = 0$, la base si dice diagonalizzante o ortogonale per la forma bilineare b.

Osservazione. Se la base è ortogonale, allora la matrice associate $A = (b(e_i, e_j))_{ij}$ è diagonale.

DEF (Forma quadratica associata)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare simmetrica. Si definisce la forma quadratica associata

$$q: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ v & \longmapsto & b(v, v) \end{array}$$

Osservazione. Non è lineare.

Ricorda. Si dice forma una mappa ad un campo, non necessariamente lineare.

Proprietà (seguono dalla linearità di b)

i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

ii) $2b(v, w) = q(w + v) - q(v) - q(w)$

La proprietà (ii)è importante perché permette di definire b usando q e viceversa.

Osservazione. Consideriamo una base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, allora un vettore generico si esprime in coordinate come

$$v = \sum_i x_i e_i$$

da cui

$$b(v, w) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(a_{ij}\right)_{ij} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

per cui in coordinate una forma quadratica è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili x_i (è importante ricordare che per ipotesi $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall ij$).

Esempio 1.1.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la base canonica e la forma quadratica

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 3x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Essa è quindi associata alla forma bilineare

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

DEF (Vettori isotropi)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$ e $b(v, w)$ una forma bilineare simmetrica. Un vettore $v \in V$ si dice isotropo se

$$b(v, v) = q(v) = 0$$

DEF (Spazio ortogonale)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $S \subseteq V$, $\dim V < \infty$ e $b(v, w)$ una forma bilineare simmetrica. Si definisce sottospazio perpendicolare a S l'insieme

$$S^\perp := \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall w \in S\}$$

Esercizio 1.2. *Dimostrare che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.* *Soluzione a pag. 14*

Lemma. *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $S \subseteq V$, $\dim V < \infty$. Sia inoltre $v \in V$ non isotropo. Allora*

$$\langle v \rangle \oplus v^\perp = V$$

Dimostrazione. Prendo un qualsiasi $w \in V$, allora sottraggo a w la sua componente lungo v e dimostro che appartiene a $v^\perp$, infatti

$$b\left(w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}v, v\right) = b(w, v) - b\left(\frac{b(w, v)}{b(v, v)}v, v\right) = b(w, v) - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}b(v, v) = 0$$

quindi

$$w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}v \in v^\perp$$

Allora posso scrivere w come la somma di un vettore in $\langle v \rangle$ e un vettore in $v^\perp$:

$$w = \underbrace{\frac{b(w, v)}{b(v, v)}v}_{\in\langle v\rangle} + \underbrace{\left(w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}v\right)}_{\in v^\perp}$$

di conseguenza $\langle v \rangle + v^\perp = V$. Inoltre osserviamo che per costruzione di $v^\perp$, $\langle v \rangle \cap v^\perp = \{0\}$, quindi la somma è diretta. QED

Teorema (Diagonalizzabilità di forme bilineari)**.** *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$. Se b è una forma bilineare simmetrica, allora esiste una base ortogonale per b, ovvero esiste una matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che M^tAM è diagonale.*

Dimostrazione. Se $b(v, w)$ è identicamente nulla, il teorema vale. Altrimenti possiamo supporre che $\exists v, w \in V$: $b(v, w) \neq 0$. Esiste quindi un vettore non isotropo, infatti

- se $b(v, v) \neq 0$, è v;
- se $b(w, w) \neq 0$, è w;
- altrimenti, se $b(v, v) = b(w, w) = 0$, $b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(w, w) + 2b(v, w) = 2b(v, w) \neq 0$, per cui il vettore non isotropo é $v + w$.

Procediamo ora per induzione su $n = \dim V$:

ℕ0) Se $n = 1$ il teorema è vero (una matrice 1×1 è diagonale)

ℕ1) Supponiamo vero il teorema per $\dim V = n$, dimostriamo che3 vale per $\dim V = n + 1$, ovvero che esiste una base diagonalizzante per ogni matrice simmetrica e per ogni spazio vettoriale di dimensione n. Prendiamo quindi un vettore e_1 non isotropo. Definiamo quindi il suo spazio perpendicolare, che (per il lemma precedente e la formula di Grassman) ha dimensione n. Per ipotesi induttiva esiste quindi una base ortogonale $\gamma = \{e_2, \dots, e_n\}$ di $e_1^\perp$ per $b|_{e_1^\perp}$, per cui la base cercata è

$$\beta = \gamma \cup \{e_1\} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

QED

Esempio 1.2.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di V. In questa base sia $q(x, y, z) = xy + xz + yz$ una forma quadratica: diagonalizzarla.

Non è presente il termine x^2 per cui dobbiamo fare in modo di ricavarlo. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + x \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' - x' \\ z = z' \end{cases}$$

Sostituiamo e completiamo il quadrato

$$q(x', y', z') = x'(y' - x') + x'z' + (y' - x')z' = -x'^2 + x'y' + y'z' = -\left(x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \frac{1}{4}y'^2 + y'z'$$

Cambiamo coordinate

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2}y' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'' + \frac{1}{2}y'' \\ y' = y'' \\ z' = z'' \end{cases}$$

$$q(x'', y'', z'') = -x''^2 + \frac{1}{4}y''^2 + y''z'' = -x''^2 + \left(\frac{1}{2}y'' + z''\right)^2 - z''^2$$

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = \frac{1}{2}y'' + z'' \\ z''' = z'' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = 2y''' - 2z''' \\ z'' = z''' \end{cases}$$

$$q(x''', y''', z''') = -x'''^2 + y'''^2 - z'''^2$$

Ricaviamo ora le matrici di cambio di base:

$$[I] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$[II] \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$[III] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

quindi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

da cui

$$M^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema (Sylvester I)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim V = n \geq 1$. Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base*

$$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

tale che

$$\begin{aligned} i \neq j \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq r \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 1; \\ r < i \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente la forma quadratica rispetto a β è

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente, esiste una abse ortogonale $\gamma = \{e_i\}_i$. Riordinando possiamo supporre che

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq r \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(e_i, e_i) \neq 0; \\ r < i \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(e_i, e_i) = 0. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} u_i := \dfrac{e_i}{\sqrt{b(e_i, e_i)}} & i = 1, \ldots, r \\ u_i := e_i & i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

Otteniamo che $\beta = \{u_i\}_i$ è la base cercata. QED

Teorema (Sylvester II)**.** *Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base*

$$\beta = \{u_2, \ldots, u_n\}$$

tale che

$$\begin{aligned} i \neq j \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq r \leq t \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 1; \\ 1 \leq r < i \leq t \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = -1; \\ t < i \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 0. \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga al teorema precedente ponendo

$$\begin{cases} u_i := \dfrac{e_i}{\sqrt{|b(e_i, e_i)|}} & i = 1, \ldots, r \\ u_i := e_i & i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

e riordinando opportunamente.

Un'osservazione interessante è che il numero di 0, di 1 e di -1 non dipende dalla scelta di una base ortogonale.

Teorema (Rango)**.** *(V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$) Data una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{K}$ e una sua base diagonalizzante $\beta = \{e_i\}_i$, il numero di vettori e_i tali che $b(e_i, e_i) = 0$ non dipende dalla scelta della base diagonalizzante. Esso è uguale al rango di ogni matrice associata.*

Dimostrazione. Ricordiamo il seguente lemma:

Lemma. *Siano* $A \in Mn \times m(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{Gl}_n(\mathbb{K})$ *e* $M \in \mathcal{Gl}_m(\mathbb{K})$, *allora* $\operatorname{rk}(NAM) = \operatorname{rk} A$.

Siano β e β' due basi, $M = M_{\beta\beta'}(Id)$, $A = M_\beta(b)$ e $B = M_{\beta'}(b)$. Allora per dimostrazione precedente si ha $B = M^t AM$. Per il lemma appena enunciato segue che, siccome $M \in \mathcal{Gl}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A$. Supponiamo che esistano due basi $\beta = \{e_i\}_i$ e $\beta' = \{u_i\}_i$ diverse tali che (numeri di 1 e -1 diversi).

- $$\begin{aligned} i \neq j &\implies b(e_i, e_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq t \leq r \leq n &\implies b(e_i, e_i) = 1; \\ 1 \leq t < i \leq r \leq n &\implies b(e_i, e_i) = -1; \\ r < i \leq n &\implies b(e_i, e_i) = 0. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} i \neq j &\implies b(u_i, u_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq s \leq r \leq n &\implies b(u_i, u_i) = 1; \\ 1 \leq s < i \leq r \leq n &\implies b(u_i, u_i) = -1; \\ r < i \leq n &\implies b(u_i, u_i) = 0. \end{aligned}$$

con $s \neq t$. È lecito supporre che $t > s$ (altrimenti scegliamo al posto di U e W i rispettivi complementi diretti a V). Siano $U = \langle e_1, \dots, e_t \rangle$ e $W = \langle u_{s+1}, \dots, u_n \rangle$. Segue quindi che $\dim U = t$ e $\dim W = n - s$, da cui

$$\dim U + \dim W = n - s + t > n,$$

quindi per la formula di Grassman segue che $\dim U \cap V > 0$. Prendiamo quindi un vettore non nullo $v \in U \cap V$.

$$v = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i = \sum_{i=s+1}^{n} b_i u_i$$

per cui

$$\begin{aligned} b(v, v) &= \sum_{i=1}^{t} \underbrace{b(e_i, e_i)}_{1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{t} a_i^2 > 0 \\ &= \sum_{i=s+1}^{n} \underbrace{b(u_i, u_i)}_{-1} b_i^2 = -\sum_{i=s+1}^{n} b_i^2 < 0 \end{aligned}.$$

Si presenta quindi un assurdo, per cui deve essere che $s = t$. QED

DEF (Rango)**.** (V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$) Si definisce rango di una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{K}$ il numero di vettori e_i di una base diagonalizzante tali che $b(e_i, e_i) \neq 0$. Esso si indica $\operatorname{rk} b$. Se $\operatorname{rk} b = \dim V$, allora la forma si dice non degenere.

DEF (Segnatura)**.** Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e $\beta = \{e_i\}_i$ una base diagonalizzante normalizzata. Allora si definiscono

- **indice di positività:** $t = \#\{e \in \beta \mid b(e, e) = 1\}$
- **indice di negatività:** $s = \#\{e \in \beta \mid b(e, e) = -1\}$

La coppia (t, s) è detta segnatura di b.

DEF (Forme definite positive/negative)**.** (V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$) Una forma quadratica q su V si dice:

- **definita positiva** se $q(v) > 0 \ \ \forall\, v \in V \setminus \{0\}$
- **definita negativa** se $q(v) < 0 \ \ \forall\, v \in V \setminus \{0\}$
- **semidefinita positiva** se $q(v) \geq 0 \ \ \forall\, v \in V$
- **semidefinita negativa** se $q(v) \leq 0 \ \ \forall\, v \in V$

In particolare lo è se lo è su una base.

Lemma (Finestra sul mondo duale)**.** *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica non degenere, allora esiste un isomorfismo*

$$\begin{array}{rcccccl} \psi : & V & \xrightarrow{\sim} & V^\vee & & & \\ & v & \longmapsto & \psi(v) : & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & w & \longmapsto & \psi(v)(w) := b(v,w) \end{array}$$

Esercizio 1.3. *La dimostrazione del lemma precedente è lasciata per esercizio.* *Soluzione a pag. 14*

2 Geometria Euclidea

2.1 Prodotto scalare

DEF (Prodotto scalare)**.** Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Una forma $b : V \times V \to \mathbb{R}$

i) bilineare

ii) simmetrica

iii) definita positiva, ovvero
$$b(v,v) \geq 0 \qquad \wedge \qquad b(v,v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$$

si dice prodotto scalare su V, e si indica $\langle v, w\rangle$ o $v \cdot w$

Per il teorema di Sylvester e per il fatto che il prodotto scalare è una forma definita positiva, segue che esiste una base $\beta = \{e_i\}_i$ di V tale che
$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$
ovvero una base ortonormale (ortogonale e normalizzata). Inoltre siccome la mappa è definita positiva, non esistono vettori isotropi.

Lemma (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Sia $\langle \cdot, \cdot\rangle$ un prodotto scalare su V ($\mathbb{R}$-spazio vettoriale). Allora $\forall v, w \in V$, vale*
$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle$$

Dimostrazione. [1] Se $x = 0 \vee y = 0$ è ovvio. Supponiamo quindi $x \neq 0 \vee y \neq 0$. Allora per linearità del prodotto scalare
$$\langle \lambda x - y, \lambda x - y\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle - 2\lambda \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle .$$
Osserviamo che a primo membro per definizione di prodotto scalare abbiamo una quantità positiva, di conseguenza anche a secondo membro. In particolare un polinomio in λ è positivo $\forall\lambda$ se e solo se ha discriminante negativo, di conseguenza
$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

QED

DEF (Spazio euclideo)**.** Uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot\rangle$ si dice spazio euclideo o pre-hilbertiano. Si indica $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$.

Un prodotto scalare induce anche una norma, per cui uno spazio euclideo è automaticamente uno spazio normato definendo

DEF (Norma)**.** Uno spazio euclideo è uno spazio normato definendo la norma di un vettore come
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \in [0; +\infty[$$

[1] Analisi A - 2Lez(2) 02/03/2023

Proprietà

i) $\|v\| \geq 0 \forall v \in V \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) (omogeneità) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

iii) (disuguaglianza triangolare) $\|v\| + \|w\| \geq \|v + w\|$

Osserviamo inoltre che nel punto (iii) i due membri sono uguali solo se i due vettori sono multipli l'uno dell'altro.

Il prodotto scalare permette inoltre di definire il concetto di angolo compreso tra due vettori. La definizione è corretta in quanto la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz garantisce che il secondo membro sia in valore assoluto sempre minore di 1.

DEF (Angolo compreso tra due vettori)**.** Siano $v, w \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Si definisce allora l'angolo convesso non orientato compreso tra v e w l'angolo $\vartheta \in [0; \pi]$ tale che

$$\cos \vartheta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Osservazione. $\langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \widehat{vw} = \vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero la definizione usuale di perpendicolarità coincide con quella derivante dal prodotto scalare.

2.2 Teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Teorema (Ortogonalizzazione - Gram-Schmidt)**.** *Sia $(v_i)_{i \in I}$ una successione (finita o infinita) di vettori nello spazio euclideo V e I un insieme di indici. Allora esiste una successione $(w_i)_{i \in I}$ di vettori di V tali che:*

i) $\forall k \geq 1$, $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$

ii) $w_1, \ldots, w_k$ *sono a due a due ortogonali.*

La successione $(w_i)_{i \in I}$ è unica a meno di multipli scalari.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k

$\mathbb{N}0)$ Se $k = 1$ non c'è niente da dimostrare.

$\mathbb{N}1)$ Supponiamo che il teorema valga per $k-1$, ovvero che $\exists w_1, \ldots, w_{k-1}$ che soddisfano (i) e (ii). Definiamo

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

sommando solo sugli i tali che $w_i \neq 0$. Stiamo rimuovendo v le sue proiezioni su tutti gli altri vettori w_i. Osserviamo ora che $\forall j < k$ (ricordando che per (ii), $\forall i < k, i \neq j \implies \langle w_i, w_j \rangle = 0$)

$$\langle w_k, w_j \rangle = \left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, w_j \right\rangle = \langle v_k, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_j \rangle = \langle v_k, w_j \rangle - \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\cancel{\langle w_j, w_j \rangle}} \cancel{\langle w_j, w_j \rangle} = 0,$$

il che dimostra che vale (ii). Osserviamo ora che per costruzione

$$w_k \in \langle w_i, \ldots, w_{k-1}, v_k \rangle$$

in quanto ne è combinazione lineare. Inoltre per ipotesi induttiva

$$\langle w_i, \ldots, w_{k-1}, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$$

di conseguenza per il teorema di Steinitz posso scambiare v_k con w_k ed ottenere comunque un insieme di generatori, quindi

$$\langle w_i, \ldots, w_{k-1}, \underline{w_k} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$$

QED

DEF (Insiemi ortogonali e ortonormali)**.** Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo. Un insieme $\{v_i\}_i \subset V$ si dice ortogonale se

i) $v_i \neq 0 \ \forall i$

ii) $i \neq j \implies \langle v_i, v_j\rangle = 0$

si dice inoltre ortonormale se

iii) $\langle v_i, v_i\rangle = 1 \ \forall i$

Proposizione 2.1. *Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo. Un insieme ortogonale $\{v_i\}_{1\leq i\leq r} \subset V$ con $r \leq \dim V$ è linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Prendiamo una combinazione lineare nulla $\sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0$. Osserviamo che $\forall j$

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle v_i, v_j\rangle = a_j \underbrace{\langle v_j, v_j\rangle}_{\neq 0} = 0$$

per cui, per la legge di annullamento del prodotto, $a_j = 0$. QED

Esempio 2.1.

Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con la base canonica e il prodotto scalare standard. Siano $v_1 = (0,1,0,1)$, $v_2 = (2,1,0,1)$, $v_3 = (-1,0,0,1)$ e $v_4 = (0,0,1,0)$. Ortogonalizzare questo insieme di vettori

Iniziamo ponendo $w_1 := v_1 = (0,1,0,1)$. Ora ricaviamo di conseguenza gli altri vettori:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} = \begin{pmatrix}-1\\0\\01\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{-2}{4}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} - \frac{\langle v_4, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} - \frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\langle w_3, w_3\rangle} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Proposizione 2.2. *Siano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo e $W \lhd V$. Allora $V = W \oplus W^\perp$.*

Dimostrazione. Prendiamo una base ortonormale di V $\{e_1, \dots, e_n\}$ tale che $W = \langle e_1, \dots, e_r\rangle$. Allora

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} a_i e_i}_{\in W} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i e_i.$$

Osserviamo che $\forall 1 \leq j \leq r$,

$$\left\langle \sum_{i=r+1}^{n} a_i e_i, e_j \right\rangle = 0$$

per ipotesi, di conseguenza $\left\langle \sum_{i=r+1}^{n} a_i e_i \in W^\perp \right\rangle$. Da ciò segue che $V = W + W^\perp$. Siccome non esistono vettori isotropi, $W \cap W^\perp = \{0\}$. La somma è quindi diretta. QED

2.3 Prodotto esterno

DEF (Prodotto esterno)**.** Consideriamo un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V di dimensione 3. Si definisce prodotto esterno la mappa

$$\begin{array}{cccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proprietà

i) $v \wedge w \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \nexists k : v \neq kw$

ii) $\langle v \wedge w, v \rangle = \langle v \wedge w, w \rangle = 0$

iii) $v \wedge w = -w \wedge v$

iv) $\|v \wedge w\|^2 = \|v^2\| \cdot \|w^2\| - \langle v, w \rangle^2$

v) $(\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w) = \lambda(v \wedge v)$

vi) $v \wedge (w \wedge u) = (v \wedge w) \wedge u$

Dimostrazione. Dimostriamo solo (ii). Osserviamo che

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - y_2x_1) = \langle v, v \wedge w \rangle$$

QED

2.4 Spazi affini

DEF (Spazio Affine)**.** $\mathbb{K}$ campo, V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Uno spazio affine con giacitura V è un insieme $\mathbb{A}$ munito di una mappa

$$\begin{array}{cccc} \overline{\cdot\,\cdot} : & \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \longrightarrow & V \\ & (P, Q) & \longmapsto & \overline{PQ} \end{array}$$

tale che

i) $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V, \exists! Q \in \mathbb{A} : \overline{PQ} = v;$

ii) $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}, \overline{PQ} + \overline{QR} = PR.$

Gli elementi di $\mathbb{A}$ si dicono punti.

Uno spazio vettoriale è uno spazio affine su sé stesso definendo

$$\begin{array}{cccc} \overline{\cdot\,\cdot} : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (v, w) & \longmapsto & w - v \end{array}$$

Esercizio 2.1. *Dimostrare che con questa definizione uno spazio vettoriale è uno spazio affine su sé stesso, ovvero che soddisfa (i) e (ii).* *Soluzione a pag. 15*

Osservazione. $\overline{PP} = \underline{0}$, infatti da (ii) segue che $\overline{PP} + \overline{PP} = \overline{PP}$.

DEF (Dimensione di uno spazio affine)**.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con giacitura V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale). Si definisce la dimensione di $\mathbb{A}$ come la dimensione di V.

$$\dim \mathbb{A} := \dim V$$

DEF (Traslazione)**.** Si definisce traslazione una mappa

$$\begin{array}{rccl} t: & \mathbb{A} \times V & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & (P, v) & \longmapsto & Q = t(P, v) =: P + v \end{array}$$

dove $P + v$ si chiama traslato di P per v tale per cui $\overline{PQ} = v$

Proprietà Segue direttamente dagli assiomi dello spazio affine che

i) $t(P, \underline{0}) = P$

ii) $t(t(P, u), v) = t(P, u + v)$

iii) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \quad \exists! v : Q = t(P, v)$

2.5 Sistemi di riferimento affini

DEF (Sistema di riferimento affine)**.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con giacitura V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale) con $\dim \mathbb{A} = n < \infty$. Un sistema di riferimento affine è dato da un punto O detto origine e una base β di V.

Grazie ad un sistema di riferimento è possibile esprimere i punti attraverso coordinate, come avevamo precedentemente fatto per i vettori. La differenza sta nel fatto che di per sé uno spazio affine non presenti un punti privilegiato, come può essere lo 0 nello spazio vettoriale, per cui per poter esprimere i punti come coordinate bisogna sceglierne uno.

2.6 Sottospazi affini

DEF. Siano $\mathbb{A}$ spazio affine con giacitura V, $P \in \mathbb{A}$ un punto e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora si dice sottospazio affine di $\mathbb{A}$ l'insieme

$$S = P + W = \{Q \in \mathbb{A} \mid \overline{PQ} \in W\}$$

Lemma. *Con la notazione precedente, $P + W$ è uno spazio affine con giacitura W*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che presi qualsiasi $A, B \in S$, allora $\overline{AB} \in W$. Per (ii) si ha che $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} \in W$ per definizione di S. QED

Vediamo ora una serie di esempi di sottospazi affini:

Esempio 2.2.

Sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$ con il sistema di riferimento canonico. Trovare la equazioni parametriche e cartesiane della retta S passante per $P = (-1, 2)$ con direzione (giacitura) $w = (1, 3)$.

Il fatto che un punto appartenga a S significa che è della forma $P + kw$. Di conseguenza

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x + y = 1$$

Per ottenere la forma cartesiana (a destra) si può anche procedere applicando la definizione: i vettori PQ e w devono essere linearmente dipendenti, ovvero la matrice seguente deve avere rango 2, quindi

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Esempio 2.3.

Generalizziano l'esempio seguente considerando lo spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n con il sistema di riferimento canonico e scriviamo le equazioni del sottospazio affine S passante per $P = (p_1, \dots, p_n)$ con giacitura $W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$, dove $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{in})$ e i w_i sono linearmente indipendenti.

Equazioni cartesiane Per determinare l'equazione cartesiana abbiamo bisogno che un vettore generico $\overline{PQ}$ sia linearmente dipendente dagli altri, per cui che il rango della matrice seguente sia pari a r

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \dots & x_n - p_n \\ w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & w_{r2} & \dots & w_{rn} \end{pmatrix} = r$$

Siccome i vettori sono linearmente indipendenti, deve esistere un minore di ordine r non nullo. Per avere che la matrice ha rango r bisogna quindi imporre che tutti i minori orlati abbiano determinante nullo. Otteniamo quindi $n - r$ equazioni.
Equazioni parametriche Per determinare le equazioni parametriche basta semplicemente procedere come prima, ricordando che $Q \in S \Leftrightarrow Q = P + v$ con $v \in W$, ovvero $v = \sum_i t_i w_i$. Segue quindi che (separando nelle componenti):

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{21} + \dots + t_r w_{r1} \\ x_2 = p_1 + t_1 w_{12} + t_2 w_{22} + \dots + t_r w_{r2} \\ \vdots \\ x_n = p_1 + t_1 w_{1n} + t_2 w_{2n} + \dots + t_r w_{rn} \end{cases}$$

DEF (Sottospazi paralleli)**.** Siano $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale), S e T due sottospazi affini con giacitura rispettivamente U e W. Essi si dicono paralleli se $U \lhd W$ o $W \lhd U$.

2.7 Posizioni reciproche di di sottospazi affini

Situazione 1. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale) con il sistema di riferimento canonico $(O, \{e_1, \dots, e_n\})$ e siano $P = (p_1, \dots, p_n)$ e $R = (r_1, \dots, r_n)$ due punti di $\mathbb{A}$. Siano inoltre S il sottospazio affine per P con giacitura $W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ e T il sottospazio affine per R con giacitura $U = \langle w_1, \dots, u_t \rangle$*

Osserviamo che l'intersezione tra due sottospazi affini è un sottospazio affine tale che

$$S \cap T = \{Q \in \mathbb{A} \mid Q \in S \wedge Q \in T\}$$

ovvero $Q = (x_1, \dots, x_n)$ soddisfa sia le equazioni che definiscono S che le equazioni che definiscono T. Otteniamo in questo modo un sistema lineare in $r + t$ equazioni che può essere

- incompatibile, quindi $S \cap T = \varnothing$
- compatibile con rango ρ tale che $\max\{n - r, n - t\} \leq \rho \leq (n - r) + (n - t)$.

Lemma (Dimensione dell'intersezione)**.** *Nella situazione 1, si hanno due possibilità:*

- $S \cap T = \varnothing$
- $\dim S + \dim T - \dim \mathbb{A} \leq \dim S \cap T \leq \min\{\dim S, \dim T\}$

Dimostrazione. Da quanto detto prima segue che $\dim S \cap T = n - \rho = n - (n - r) - (n - t) = r + t - n$. QED

Osservazione. Nella situazione 1, ad S è associato un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{(n-r),1}x_1 + a_{(n-r),2}x_2 + \dots + a_{(n-r),n}x_n + b_{(n-r)} = 0, \end{cases}$$

allora la giacitura W di S è determinata il sistema omogeneo associato, ovvero

$$S: \operatorname{rk}\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & \cdots & x_n - p_n \\ w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \cdots & w_{rn} \end{vmatrix} = r \qquad W: \operatorname{rk}\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \cdots & w_{rn} \end{vmatrix} = r$$

Un caso particolare: due rette in $\mathbb{A}^3$ Siano r e s due rette generiche nello spazio affine definite come segue:

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

possono verificarsi quattro casi:

- le due rette sono coincidenti (i.e. si intersecano in infiniti punti);
- le due rette sono incidenti (i.e. si intersecano in un punto);
- le due rette sono parallele (i.e. non si intersecano e hanno la stessa giacitura);
- le due rette sono sghembe (i.e. non si intersecano e hanno giaciture diverse).

DEF (Rette complanari e sghembe)**.** Siano r e s due rette nello spazio $\mathbb{A}^3$, esse si dicono

- **complanari** se $r \cap s \neq \varnothing$ o $r // s$
- **sghembe** se non sono complanari, ovvero se non si intersecano e non sono parallele.

Proposizione 2.3. *r e s come definite precedentemente sono complanari se e solo se*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Chiamiamo C la matrice dei coefficienti e D la matrice dei termini noti. Sia inoltre A la matrice $(C|D)$ che si ottiene orlando C con D.

"$\Rightarrow$" Se le due rette si intersecano significa che il sistema è compatibile, ovvero (Rouché-Capelli)

$$3 \geq \operatorname{rk} C = \operatorname{rk} A \implies \det A = 0;$$

se sono parallele, allora hanno giacitura uguale, per cui

$$\operatorname{rk} C = 2 \implies \operatorname{rk} A \leq 3 \implies \det A = 0$$

"$\Leftarrow$" Se il determinante della matrice è 0, il rango è 2 o 3. Non può essere 1 perché almeno 2 equazioni sono indipendenti per ipotesi (r e s sono rette). Di conseguenza

- se $\operatorname{rk} A = 2$ significa che le due rette sono coincidenti;
- se $\operatorname{rk} A = 3$ può essere:
  - $\operatorname{rk} C = 3$, allora le rette si intersecano in un punto;
  - $\operatorname{rk} C = 2$, le rette hanno la stesa giacitura ma non si intersecano, per cui sono parallele.

QED

3 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Dimostrazione.

"$\Rightarrow$" Assumiamo che la mappa sia bilineare simmetrica e dimostriamo che $A = A^t$. In particolare si ha che $f_A(x,y) = f_A(y,x)$. Osserviamo che se $k \in \mathbb{K}$ come $\mathbb{K}$ spazio vettoriale, $k^t = k$, quindi (ricordado che la trasposizione inverte l'ordine nel prodotto tra matrici)

$$f_A(x,y) = [f_A(x,y)]^t = \left(x^t \cdot A \cdot y\right)^t = y^t \cdot A^t \cdot \left(x^t\right)^t = y^t \cdot A^t \cdot x$$

Per ipotesi si ha che $f_A(x,y) = f_A(y,x)$, quindi

$$y^t \cdot A^t \cdot x = y^t \cdot A \cdot x$$

da cui segue $A = A^t$.

"$\Leftarrow$" Assumiamo $A = A^t$ e dimostriamo che $f_A(x,y) = f_A(y,x)$. Per quanto detto prima $f_A(x,y) = y^t \cdot A^t \cdot x$. Inoltre per ipotesi $A = A^t$, quindi $f_A(x,y) = y^t \cdot A \cdot x = f_A(y,x)$.

QED

La dimostrazione è analoga per matrici e mappe antisimmetriche.

Esercizio 1.2

Dimostrazione. Per definizione di sottospazio vettoriale, $S^\perp$ deve essere

- non vuoto:
$$0 \in S^\perp, \text{ infatti } b(0,w) = b(0 \cdot 0, w) = 0 \cdot b(0,w) = 0$$
- chiuso rispetto a somma e prodotto per scalari ($\forall v_1, v_2 \in S^\perp \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$):
Equivalentemente $b(v_1,w) = b(v_2,w) = 0 \ \ \forall w \in S \implies$
$$b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \underbrace{b(v_1,w)}_{0} + \lambda_2 \underbrace{b(v_2,w)}_{0} = 0$$

QED

Esercizio 1.3

Dimostrazione. Le proprietà di ψ seguono direttamente dalle proprietà di b:

- $\psi(v)$ è lineare $\forall v$
$$\psi(v)(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = b(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 b(v,w_1) + \lambda_2 b(v,w_2) = \lambda_1 \psi(v)(w_1) + \lambda_2 \psi(v)(w_2)$$
- ψ è lineare
$$\psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \psi(v_1) + \lambda_2 \psi(v_2)$$
Si tratta di un'uguaglianza tra mappe, per cui è verificata se e solo se è verificata $\forall w$:
$$\psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(w) = b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 b(v_1,w) + \lambda_2 b(v_2,w) = \lambda_1 \psi(v_1)(w) + \lambda_2 \psi(v_2)(w)$$
- ψ è iniettiva, equivalentemente $\ker \psi = \{0\}$
Se $\psi(v)$ è la mappa nulla, allora $v = 0$, ovvero se $\forall w, \psi(v)(w) = 0$, allora $v = 0$. Prendiamo un qualsiasi $v, w \in W$. Sia $\beta = \{e_i\}_i$ una base di V che diagonalizza b (esiste perchè b è simmetrica per ipotesi), allora
$$v = \sum_i x_i e_i \qquad\qquad w = \sum_j y_j e_j.$$
Per linearità segue che
$$\psi(v)(w) = b\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j b(e_i, e_j).$$

Siccome la base β diagonalizza b, segue che $i \neq j \implies b(e_i, e_j) = 0$, quindi

$$\psi(v)(w) = \sum_i x_i y_i b(e_i, e_i).$$

Inoltre, siccome la mappa b è non degenere, per la legge di annullamento del prodotto, segue che $a_i = 0 \forall i$, quindi $v = 0$. Per l'arbitrarietà di w, la mappa è iniettiva.

- ψ è suriettiva: segue dal teorema Nullità + Rango.

QED

Esercizio 2.1

Dimostrazione.

i) $\forall v, w \in V, \exists! u \in V : \overline{vu} = w$. Osserviamo che basta definire $u := v + w$ e segue che $\overline{vu} = u - v = (v + w) - v = w$.

ii) $\forall u, v, w \in V, \overline{uv} + \overline{vw} = \overline{uw}$. Applicando la definizione segue infatti che

$$\overline{uv} + \overline{vw} = (v - u) + (w - v) = w - u = \overline{uw}.$$

QED

4 Situazioni

Situazione 1. *Sia* $\mathbb{A}$ *uno spazio affine su* V *(*$\mathbb{K}$*-spazio vettoriale) con il sistema di riferimento canonico* $(O, \{e_1, \dots, e_n\})$ *e siano* $P = (p_1, \dots, p_n)$ *e* $R = (r_1, \dots, r_n)$ *due punti di* $\mathbb{A}$*. Siano inoltre* S *il sottospazio affine per* P *con giacitura* $W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ *e* T *il sottospazio affine per* R *con giacitura* $U = \langle w_1, \dots, u_t \rangle$