Geometria A

SECONDO MODULO

Davide Borra

v. 1.0

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Sommario

Queste sono le note prodotte durante il secondo modulo del corso di Geometria A, tenuto dal prof. Marco Andreatta. Il docente del corso segue il libro “Geometria 1” di Edoardo Sernesi (Ed. Bollati Boringhieri).

Indice

1 Forme bilineari

DEF (forma bilineare)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si dice forma bilineare una mappa lineare

$$f : V \times V \to \mathbb{K}$$

lineare rispetto ad entrambi gli argomenti, ovvero $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, $\forall k \in \mathbb{K}$

- $f(v_1 + v_2, w_1) = f(v_1, w_1) + f(v_2, w_1)$
- $f(kv_1, w_1) = kf(v_1, w_1)$
- $f(v_1, w_1 + w_2) = f(v_1, w_1) + f(v_1, w_2)$
- $f(v_1, kw_1) = kf(v_1, w_1)$

Esistono inoltre alcune forme multilineari particolari:

DEF (Forme bilineari simmetriche)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice simmetrica se $\forall v, w \in V$

$$f(v, w) = f(w, v)$$

DEF (Forme bilineari antisimmetriche)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice antisimmetrica se $\forall v, w \in V$

$$f(v, w) = -f(w, v)$$

Data una matrice, ad essa è associata una forma bilineare del tipo $f_A(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$. La dimostrazione del fatto che questa mappa sia bilineare segue dalla proprietà distributiva del prodotto tra matrici.

Esercizio 1.1. *Dimostrare che f_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica, ovvero se e solo se $A = A^t$.*
Soluzione a pag. 5

Teorema (Matrice associata)**.** *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con dimensione n finita e $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Siano inoltre $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e $A = (f(e_i, e_j))_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora se $v = \sum_i a_i e_i$ e $w = \sum_j b_j e_j$, si ha*

$$f(v, w) = (a_1, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dimostrazione.

$$f(v, w) = f\left(\sum_i a_i e_i, \sum_j a_j e_j\right) = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j f(e_i, e_j)\right)$$

Osserviamo che

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \sum_j b_j f(e_1, e_j) \\ \vdots \\ \sum_j b_j f(e_n, e_j) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j f(e_i, e_j)\right)$$

da cui la tesi. QED

Osservazione. Scelta una base esiste una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari e le matrici e una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari simmetriche e le matrici simmetriche.

1.1 Matrici simili

Lemma (Matrici simili)**.** *Siano $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$ due basi di V, $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Sia $f_V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e siano $A = (f(e_i, e_j))_{ij}$ e $A = (f(u_i, u_j))_{ij}$ le matrici associate alla mappa f in β e β' rispettivamente. Allora $\exists M = M_{\beta\beta'}(id) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\ :\ B = M^t AM$*

Notazione se $v = \sum_i x_i e_i = \sum_i x'_i u_i$, allora $\underline{x} = (v)_\beta$ e $\underline{x}' = (v)'_\beta$. Analogamente per w indicando le coordinate con y.

Dimostrazione.

$$\underline{x} = M\underline{x}' \qquad \underline{y} = M\underline{y}'$$

da cui

$$f(v,w) = \underline{x}^t A\underline{y} = (M\underline{x})^t A(M\underline{y}) = (\underline{x}')^t M^t AM\underline{y} = (\underline{x}')^t B\underline{y}$$

quindi $B = M^t AM$ QED

DEF (Matrici congruenti)**.** Due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono congruenti se $\exists M \in \mathcal{Gl}_n(K)$:

$$B = M^t AM$$

DEF (Base ortogonale)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$, e β una base di V. Se $i \neq j \implies b(e_i, e_j) = 0$, la base si dice diagonalizzante o ortogonale per la forma bilineare b.

Osservazione. Se la base è ortogonale, allora la matrice associate $A = (b(e_i, e_j))_{ij}$ è diagonale.

DEF (Forma quadratica associata)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare simmetrica. Si definisce la forma quadratica associata

$$\begin{aligned} q :\ & V \longrightarrow \mathbb{K} \\ & v \longmapsto b(v,v) \end{aligned}$$

Osservazione. Non è lineare.

Ricorda. Si dice forma una mappa ad un campo, non necessariamente lineare.

Proprietà (seguono dalla linearità di b)

i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

ii) $2b(v,w) = q(w+v) - q(v) - q(w)$

La proprietà (ii)è importante perché permette di definire b usando q e viceversa.

Osservazione. Consideriamo una base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, allora un vettore generico si esprime in coordinate come

$$v = \sum_i x_i e_i$$

da cui

$$b(v,w) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(a_{ij}\right)_{ij} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

per cui in coordinate una forma quadratica è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili x_i (è importante ricordare che per ipotesi $a_{ij} = a_{ji}\ \forall ij$).

Esempio 1.1.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la base canonica e la forma quadratica

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$q(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 3x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Essa è quindi associata alla forma bilineare

$$b\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

DEF (Vettori isotropi)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V<\infty$ e $b(v,w)$ una forma bilineare simmetrica. Un vettore $v\in V$ si dice isotropo se

$$b(v,v)=q(v)=0$$

DEF (Spazio ortogonale)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $S\subseteq V$, $\dim V<\infty$ e $b(v,w)$ una forma bilineare simmetrica. Si definisce sottospazio perpendicolare a S l'insieme

$$S^\perp:=\{v\in V\,|\,b(v,w)=0\ \forall w\in S\}$$

Esercizio 1.2. *Dimostrare che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Lemma. *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $S\subseteq V$, $\dim V<\infty$. Sia inoltre $v\in V$ non isotropo. Allora*

$$\langle v\rangle\oplus v^\perp=V$$

Dimostrazione. Prendo un qualsiasi $w\in V$, allora sottraggo a w la sua componente lungo v e dimostro che appartiene a $v^\perp$, infatti

$$b\left(w-\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v,v\right)=b(w,v)-b\left(\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v,v\right)=b(w,v)-\frac{b(w,v)}{b(v,v)}b(v,v)=0$$

quindi

$$w-\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v\in v^\perp$$

Allora posso scrivere w come la somma di un vettore in $\langle v\rangle$ e un vettore in $v^\perp$:

$$w=\underbrace{\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v}_{\in\langle v\rangle}+\underbrace{\left(w-\frac{b(w,v)}{b(v,v)}v\right)}_{\in v^\perp}$$

di conseguenza $\langle v\rangle+v^\perp=V$. Inoltre osserviamo che per costruzione di $v^\perp$, $\langle v\rangle\cap v^\perp=\{0\}$, quindi la somma è diretta. QED

Teorema (Diagonalizzabilità di forme bilineari)**.** *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V<\infty$. Se b è una forma bilineare simmetrica, allora esiste una base ortogonale per b, ovvero esiste una matrice $M\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che M^tAM è diagonale.*

Dimostrazione. Se $b(v,w)$ è identicamente nulla, il teorema vale. Altrimenti possiamo supporre che $\exists v,w\in V:$ $b(v,w)\neq 0$. Esiste quindi un vettore non isotropo, infatti

- se $b(v,v)\neq 0$, è v;
- se $b(w,w)\neq 0$, è w;
- altrimenti, se $b(v,v)=b(w,w)=0$, $b(v+w,v+w)=b(v,v)+b(w,w)+2b(v,w)=2b(v,w)\neq 0$, per cui il vettore non isotropo é $v+w$.

Procediamo ora per induzione su $n=\dim V$:

$\mathbb{N}0$) Se $n=1$ il teorema è vero (una matrice 1×1 è diagonale)

$\mathbb{N}$1) Supponiamo vero il teorema per $\dim V = n$, dimostriamo che3 vale per $\dim V = n + 1$, ovvero che esiste una base diagonalizzante per ogni matrice simmetrica e per ogni spazio vettoriale di dimensione n. Prendiamo quindi un vettore e_1 non isotropo. Definiamo quindi il suo spazio perpendicolare, che (per il lemma precedente e la formula di Grassman) ha dimensione n. Per ipotesi induttiva esiste quindi una base ortogonale $\gamma = \{e_2, \ldots, e_n\}$ di $e_1^\perp$ per $b|_{e_1^\perp}$, per cui la base cercata è

$$\beta = \gamma \cup \{e_1\} = \{e_1, \ldots, e_n\}$$

QED

2 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Dimostrazione.

"$\Rightarrow$" Assumiamo che la mappa sia bilineare simmetrica e dimostriamo che $A = A^t$. In particolare si ha che $f_A(x, y) = f_A(y, x)$. Osserviamo che se $k \in \mathbb{K}$ come $\mathbb{K}$ spazio vettoriale, $k^t = k$, quindi (ricordado che la trasposizione inverte l'ordine nel prodotto tra matrici)

$$f_A(x, y) = [f_A(x, y)]^t = \left(x^t \cdot A \cdot y\right)^t = y^t \cdot A^t \cdot \left(x^t\right)^t = y^t \cdot A^t \cdot x$$

Per ipotesi si ha che $f_A(x, y) = f_A(y, x)$, quindi

$$y^t \cdot A^t \cdot x = y^t \cdot A \cdot x$$

da cui segue $A = A^t$.

"$\Leftarrow$" Assumiamo $A = A^t$ e dimostriamo che $f_A(x, y) = f_A(y, x)$. Per quanto detto prima $f_A(x, y) = y^t \cdot A^t \cdot x$. Inoltre per ipotesi $A = A^t$, quindi $f_A(x, y) = y^t \cdot A \cdot x = f_A(y, x)$.

QED

La dimostrazione è analoga per matrici e mappe antisimmetriche.