Geometria B

Topologia Generale, Topologia Algebrica e Analisi Complessa

Davide Borra

v. 1.0

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Indice

Sommario

Questo documento contiene gli appunti del corso di Geometria B tenuto dal professor Riccardo Ghiloni e dal professor Alessandro Perotti nell'Anno Accademico 2023/2024 presso l'Università degli Studi di Trento, trascritti e rielaborati a cura di Davide Borra. Il corso contiene nozioni di Topologia Generale, Topologia Algebrica e Analisi Complessa, e i riferimenti principali sono i testi [Ser94] e [Occ]. In bibliografia sono inoltre specificati alcuni validi testi testi utili per approfondimenti e delucidazioni, utilizzati come confronto e da cui potrei aver tratto degli esercizi.

Parte I

Topologia Generale

Capitolo 0

Prerequisiti

0.1 Cenni di teoria degli insiemi

Inizialmente rivediamo alcuni semplici concetti di teoria degli insiemi al fine di armonizzare la notazione con quella utilizzata durante il corso: è significativo precisare che con il simbolo $\subset$ si indica la relazione di *inclusione*, mentre l'inclusione stretta è indicata con il simbolo $\subsetneq$, per cui l'affermazione $A \subset A$ è da considerarsi vera. Un'altra notazione che è bene specificare è quella dell'insieme complementare: consideriamo due insiemi A e B tali che $B \subset A$, allora $A \setminus B = \mathcal{C}_A(B)$.

0.1.1 Famiglie di sottoinsiemi

Un altro concetto che è necessario formalizzare è quello di famiglie di sottoinsiemi. Consideriamo un insieme qualsiasi X e un insieme di indici I non vuoto. Definiamo quindi un'applicazione $\varphi : I \to \mathcal{P}(X)$, allora φ si dice famiglia di sottoinsiemi. Lo stesso concetto viene usualmente indicato anche con la notazione $\{A_i\}_{i\in I}$, dove $A_i = \varphi(i)$, anche se la notazione è impropria perché indica una mappa e non un insieme in quanto i sottoinsiemi potrebbero essere ripetuti. Nel caso φ sia una mappa iniettiva, allora in generale la famiglia si identifica con la sua immagine per cui la notazione precedente assume il senso proprio:

$$\varphi(I) = \{A_i\}_{i\in I} = \{A_i \in \mathcal{P}(X) \,|\, i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$$

Unione e intersezione Siano X e I insiemi come sopra e $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora indichiamo

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \,|\, \exists i \in I : x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \,|\, \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Se la famiglia non contiene ripetizioni (sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$), allora possiamo scrivere

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A.$$

Con questa notazione possiamo quindi estendere la definizione anche al caso $\mathcal{A} = \varnothing \subset \mathcal{P}(X)$, quindi

$$\bigcup_{A\in\varnothing} A = \varnothing \qquad e \qquad \bigcap_{A\in\varnothing} A = X,$$

infatti nel primo caso si ha un insieme con tutti gli elementi della famiglia vuota, ovvero nessuno, mentre nel secondo caso abbiamo che ogni elemento di X appartiene a tutti gli insiemi della famiglia vuota perché questa non ne contiene (*ex falso...*).
In particolare utilizzeremo il simbolo $A \sqcup B$ per indicare $A \cup B$ nel caso in cui $A \cap B = \varnothing$. Analogamente il simbolo $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ verrà utilizzato per indicare l'unione di una famiglia di insiemi a due a due disgiunti.

0.1.2 Applicazioni

Indicheremo con Y^X l'insieme delle applicazioni da X in Y, ovvero il sottoinsieme di $\mathcal{P}(X\times Y)$ tale che $\forall f \in Y^X$

$$\forall x \in X, \exists! a \in Y : f \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, a)\}$$

.

Indicheremo la funzione immagine indotta da f con $f(A)$ dove $A \subset X$ e $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ e coerentemente indicheremo la controimmagine con $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$. In particolare diremo **fibra** la controimmagine di un singoletto, ovvero

$$f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

L'importanza di questo concetto sta nel fatto che la fibra formalizza il concetto di equazione, infatti se f è una funzione, allora $f^{-1}(y)$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $f(x) = y$.

È infine importante ricordare che (con $f : X \to Y$, $A \subset X$ e $B \subset Y$)

$$f^{-1}(f(A)) \supset A \quad e \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B$$

Esercizio 0.1. *Dimostrare l'enunciato precedente.* Soluzione a pag. 5

Una funzione può inoltre essere

- **Iniettiva** se
  - $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ oppure
  - $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ oppure
  - $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$ *o un singoletto*;
- **Suriettiva**
  - $f(X) = Y$ oppure
  - $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$ oppure
  - $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$;
- **Biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

Invertibilità

DEF 0.1 (Funzione inversa)**.** Sia $f : X \to Y$ un'applicazione e sia $g : Y \to X$ tale che

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y$$

Allora g si dice inversa di f e si indica con f^{-1}.

Esercizio 0.2. *Dimostrare l'unicità dell'inversa.* Soluzione a pag. 5

Esercizio 0.3. *Dimostrare che f è invertibile se e solo se è biiettiva.* Soluzione a pag. 5

Osservazione 0.2. Indichiamo con lo stesso simbolo la funzione inversa e la funzione controimmagine. Questo potrebbe dare origine ad ambiguità perché con lo stesso simbolo indichiamo la funzione controimmagine e la funzione immagine associata alla funzione inversa, tuttavia si ha che le due definizioni coincidono, per cui è lecito utilizzare lo stesso simbolo. Il problema si ha solo quando l'argomento è un singoletto, infatti con lo stesso simbolo indichiamo il valore della funzione inversa calcolata in un punto oppure la fibra:

$$f^{-1}(y) = x \in X \qquad f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$$

Generalmente con questo simbolo si intende il valore della funzione inversa e non la fibra; in ogni caso se la notazione fosse ambigua si tenderà a specificare la natura del simbolo.

Esercizio 0.4. *Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $A \in \mathcal{P}(X)$ e $B \in \mathcal{P}(Y)$, allora dimostrare che*

a) f è iniettiva se e solo se $f^{-1}(f(A)) = A$; *b) f è suriettiva se e solo se $f(f^{-1}(B)) = B$.*

Soluzione a pag. 5

Esercizio 0.5. *Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\{B_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(Y)$, allora dimostrare che*

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ *b)* $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

c) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ *d)* $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

Inoltre provare che in d) se f è iniettiva vale l'uguaglianza e fornire un controesempio nel caso generale.

Soluzione a pag. 5

Soluzione degli esercizi

Esercizio 0.1

- Sia $x \in A$, allora $f(x) \in f(A)$ per definizione di immagine. Ora siccome $f^{-1}(f(A)) = \{x \mid f(x) \in f(A)\}$, segue che $x \in f^{-1}(f(A))$. Dall'arbitrarietà di x segue la tesi.
- Segue naturalmente ricordando le definizioni $f(f^{-1}(B)) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(B)\}$ e $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$.

Esercizio 0.2

Siano g_1 e g_2 due inverse di f. Allora

$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{Id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{Id}_X \circ g_2 = g_2$$

Esercizio 0.3

"$\Leftarrow$" Sia f invertibile, allora $\exists\, g$ tale che $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Allora f è iniettiva perché se $f(x) = f(y)$ allora $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$ e suriettiva perché se $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $f(x) = y$ e tale x è proprio $g(y)$.

"$\Rightarrow$" Sia f biiettiva, allora f è iniettiva e suriettiva. Allora $\forall\, y \in Y\ \exists!\, x \in X$ tale che $f(x) = y$. Definiamo quindi g tale che associa un tale y ad un tale x, allora g è ben definita su tutto Y (ogni x è unico per definizione di biiettività). Inoltre $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \bar{x}$ tale che $f(x) = f(y)$, ma siccome f è iniettiva allora $x = y$, quindi $g(f(x)) = x = \mathrm{Id}_X(x)$ e quindi $g \circ f = \mathrm{Id}_X$. Analogamente si dimostra che $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, in quanto $g(y)$ è l'unico x tale che $f(x) = y$.

Esercizio 0.4

a)

"$\Rightarrow$" Sia f iniettiva, ovvero $y \neq x \implies f(y) \neq f(x)$. Sia $\bar{x} \notin A$, allora $\forall x \in A, x \neq \bar{x}$ per cui per l'iniettività di f segue che $f(x) \neq f(\bar{x})$, ovvero $f(\bar{x}) \notin f(A)$. Passando alla contronominale $f(x) \in f(A) \implies x \in A$, per cui $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Siccome l'altra inclusione è banale, segue la tesi.

"$\Leftarrow$" Sia f tale che $f^{-1}(f(A)) = A$. Siano $\bar{x}, \bar{y} \in X$ tali che $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Per ipotesi, $f^{-1}(f(\{\bar{x}\})) = \{\bar{x}\}$, ma $f^{-1}(f(\{\bar{x}\})) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\} = \{x \in X \mid f(x) \in \{f(\bar{x})\}\} = \{x \in X \mid f(x) = f(\bar{x})\} \ni \bar{y}$, quindi $\bar{y} = \bar{x}$ e quindi f è iniettiva.

b)

"$\Rightarrow$" Dall'esercizio 0.1 segue che $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$, ma siccome f è suriettiva $f(X) = Y \supset B$ quindi $f(X) \cap B = B$, per cui $f(f^{-1}(B)) = B$.

"$\Leftarrow$" Sia f tale che $f(f^{-1}(B)) = B$. Dimostriamo che $\forall y \in Y,\ \exists x \in X\quad y = f(x)$. Supponiamo per assurdo che esista un $y \in Y$ tale che $f(x) \neq y\ \forall x \in X$. Allora $f^{-1}(y) = \varnothing$ e quindi $f(f^{-1}(y)) = f(\varnothing) = \varnothing \neq \{y\}$, assurdo. Segue quindi che f è suriettiva.

Esercizio 0.5

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j\right\} = \bigcup_{j\in J}\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \in B_j\right\} = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j\right\} = \bigcap_{j\in J}\left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \in B_j\right\} = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

c) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right\} = \bigcup_{i\in I}\left\{f(x) \,\middle|\, x \in A_i\right\} = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

d) $[I]\ y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \iff \exists x \in X\ :\ \forall i \in I,\ x \in A_i \wedge f(x) = y$ e $[II]\ y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \iff \forall i \in I, \exists x \in A_i\ :\ f(x) = y$. Osserviamo che se vale $[I]$ allora vale anche $[II]$ in quanto l'x selezionato in $[I]$ è presente in ogni A_i $f(x) \in f(A_i) \forall i$. Non vale tuttavia il viceversa: consideriamo ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2$ e $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$, allora $f(A_1) = f(A_2) = [0, 1]$, ma $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$. Supponiamo ora che f sia iniettiva, allora sia $y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i), allora \forall i \in I,\ y \in f(A_i)$. Siccome f iniettiva, $f^{-1}(y)$ è un singoletto, quindi $\exists! x \in X\ :\ f(x) = y$. Allora $x \in A_i\ \forall i \in I$ e quindi $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ e quindi $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Capitolo 1

Spazi metrici e continuità

1.1 Continuità in $\mathbb{R}$

Ricordiamo prima di tutto la definizione di continuità vista nei corsi di Analisi.

DEF 1.1 (Continuità in $\mathbb{R}$)**.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x \in \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in x se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; |f(y) - f(x)| < \varepsilon \forall y \in \mathbb{R} \; : \; |y - x| < \delta$$

ovvero se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; f(]x - \delta, x + \delta[) \subset]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[.$$

Inoltre diciamo che f è continua se lo è in ogni punto del suo dominio.

Il nostro obiettivo sarà estendere il più possibile la definizione di continuità. Iniziamo generalizzando quindi la definiziona a spazi metrici.

1.2 Metriche

DEF 1.2 (Metrica)**.** Sia $X \neq \varnothing$ un insieme. Una metrica su X è una mappa $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che tale che $(\forall x, x', x'' \in X)$

i) $d(x, x') \geq 0$;

ii) $d(x, x') = d(x', x)$;

iii) $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ (disuguaglianza triangolare);

iv) $d(x, x') = 0$ se e solo se $x = x'$[a].

La coppia (X, d) è detta spazio metrico.

[a] A volte in topologia si può fare a meno di questa proprietà, in tal caso si parla di spazi pseudometrici

Osservazione 1.3. Volendo essere eccessivamente formali, indicare $d(x, x')$ è un abuso di notazione: bisognerebbe "raddoppiare" le parentesi, in quanto quelle esterne indicherebbero l'argomento della funzione e quelle interne la coppia ordinata: $d((x, x'))$.

Esempio 1.1.

Vediamo alcuni semplici esempi di metriche

i) Distanza euclidea n-dimensionale $d_E^n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$;

ii) (Metrica discreta) Dato un insieme X generico, definiamo $d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$;

iii) (Metrica indotta) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$. Allora $d_Y = d|_Y$ definita come $d_Y(x, y) = d(x, y)$ è una metrica su Y.

Esercizio 1.1. *[Kos88, Exc. 1.2] Si consideri la seguente definizione di metrica:*

DEF. Sia X un insieme. Si dice *metrica* su X una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $a, b, c \in X$ valgano le seguenti proprietà:

i) $d(a, b) = 0$ se e solo se $a = b$;

ii) $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c)$.

Provare che se d è una metrica su X allora per ogni $a, b \in X$ vale che $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, b) = d(b, a)$.

Soluzione a pag. 11

DEF 1.4 (Palla aperta)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Allora la palla aperta di centro x e raggio r di (X, d) è l'insieme

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Osservazione 1.5. Siccome $d(x, x) = 0 < r$, $x \in B_d(x, r)$.

DEF 1.6 (Continuità in spazi metrici)**.** Sia $f : (X, d) \to (Y, \xi)$ un'applicazione tra spazi metrici, allora si dice continua in $x \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; f(B_d(x, \delta)) \subset B_\xi(f(x), \varepsilon).$$

Inoltre f si dice continua in X se lo è in ogni punto di X.

Questa definizione però non è ancora il più astratto possibile perché presuppone ancora l'avere un'idea di *distanza*. Il nostro obiettivo è quello di raggiungere il concetto minimale per poter parlare di continuità, ovvero quello di *topologia*, che introdurremo in seguito. Ridurre le ipotesi necessare a parlare di continuità è necessario in quanto permette di applicare la definizione a spazi più generali, che a volte non sono metrizzabili.

1.3 Aperti metrici

Rimaniamo ancora brevemente sugli spazi metrici introducendo un concetto fondamentale che ci permetterà poi di introdurre la topologia.

DEF 1.7 (Aperto metrico)**.** Sia (X, d) uno spazio metrico, $Y \in \mathcal{P}(X)$, si dirà (sottoinsieme) aperto di X se può essere scritto dome unione di una certa famiglia di palle aperte dello spazio metrico, ovvero se

$$Y = \varnothing \quad \vee \quad \left(Y \neq \varnothing \; \wedge \; \exists \{B_d(x_i, r_i)\}_{i \in I} \; : \; Y = \bigcup_{i \in I} \{B_d(x_i, r_i)\} \right)$$

Osservazione 1.8. Ogni palla aperta è un aperto metrico, basta infatti prendere come famiglia l'insieme costituito dalla palla stessa.

Lemma 1.9 (Caratterizzazione aperti metrici)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico, $Y \in \mathcal{P}(X)$, Y è un aperto metrico di (X, d) se e solo se $\forall y \in Y \; \exists r > 0 \; : \; B_d(y, r) \subset Y$.*

Dimostrazione.

"$\Leftarrow$" Osserviamo che

$$Y = \bigcup_{y \in Y} y \subset \bigcup_{y \in Y} B(y, r_y) \subset \bigcup_{y \in Y} Y = Y$$

quindi tutti gli elementi di questa catena di inclusioni sono uguali, in particolare Y può essere scritto come unione di palle, quindi è un aperto metrico per definizione.

"⇒" Supponiamo di avere un aperto Y. Se $Y = \varnothing$ non contiene elementi e quindi la tesi è banale. Altrimenti sia $y \neq \varnothing$, allora deve potersi esprimere come unione di una famiglia palle aperte $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i\in I}$, in particolare per ogni $y \in Y$ deve esistere almeno una palla $j \in I$ tale che $y \in B_d(x_j, r_j)$. Poniamo quindi $r_y = r_j - d(x_j, y)$, allora $B_d(y, r_y) \subset B_d(x_j, r_j) \subset Y$. Infatti sia x' in $B_d(y, r_y)$, allora dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$d(x', x_i) \leq d(x', y) + d(y, x_i) < r_y + d(y, x_i) = r_i - \cancel{d(y, x_i)} + \cancel{d(y, x_i)}.$$

QED

Teorema 1.10 (Caratterizzazione funzioni continue - [Ser94] Teorema 1.1)**.** *Sia $f : (X, d) \to (Y, \xi)$ un'applicazione tra spazi metrici, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) f è continua

ii) per ogni aperto A di (Y, ξ), $f^{-1}(A)$ è un aperto di (X, d).

Osservazione 1.11. Questo teorema ci premette di compiere un passo ulteriore verso l'eliminazione del concetto di distanza dalla definizione di continuità, infatti nella (ii) compare esclusivamente il concetto di aperto metrico. Il prossimo passo sarà quindi generalizzare l'idea di aperto in spazi più generali.

Dimostrazione.

"⇒" Supponiamo f continua, sia A un aperto di (Y, ξ). Sia $x \in f^{-1}(A)$, ovvero $f(x) \in A$. Per il Lemma 1.9 $\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, B_\xi(f(x), \varepsilon) \subset A$. Poiché f è contunia in x, $\exists\, \delta > 0 \,:\, f(B_d(x, \delta)) \subset B_\xi(f(x), \varepsilon) \subset A$, ovvero $f(B_d(x, \delta)) \subset A$, quindi per l'esercizio 0.1

$$B_d(x, \delta) \subset f^{-1}(f(B_d(x, \delta))) \subset f^{-1}(A)$$

quindi $\forall\, x \in f^{-1}(A),\ \exists\, \delta > 0 \,:\, B_d(x, \delta) \subset f^{-1}(A)$, quindi per il Lemma 1.9, $f^{-1}(A)$ è un aperto.

"⇐" Supponiamo che per ogni A aperto in (Y, ξ), $f^{-1}(A)$ sia un aperto di (X, d). Siano $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Poiché $B_\xi(f(x), \varepsilon)$ è un aperto di (Y, ξ), $f^{-1}(B_\xi(f(x), \varepsilon))$ è un aperto di (X, d), di conseguenza per il Lemma 1.9

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, B_d(x, \delta) \subset f^{-1}(B_\xi(f(x), \varepsilon))$$

quindi per l'esercizio 0.1

$$f(B_d(x, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_\xi(f(x), \varepsilon))) \subset B_\xi(f(x), \varepsilon)$$

ovvero la definizione di continuità.

QED

Adesso vogliamo generalizzare la definizione di continuità indipendentemente dal concetto di distanza. Per fare ciò studieremo le proprietà fondamentali e caratterizzanti (non dipendenti dalla distanza) della famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ degli aperti metrici, che ci permetteranno di definire la nozione di topologia.

Lemma 1.12. *Sia (X, d) uno spazio metrico, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ la famiglia di tutti gli aperti di (X, d). Allora*

i) $\varnothing \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$;

ii) (stabilità per unione arbitraria) $\forall \beta \subset \mathcal{A}$, $\bigcup_{B\in\beta} B \in \mathcal{A}$
(equiv. $\forall\, \{A_i\}_{i\in I}$ famiglia di aperti di (X, d), ovvero $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in I$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$);

iii) (stabilità per intersezione finita) $\forall \beta \subset A$ finito, $\bigcap_{B\in\beta} B \in \mathcal{A}$
(equiv. $\forall\, \{A_i\}_{i\in I}$ famiglia finita di aperti di (X, d), $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$).

Osservazione 1.13. In (ii) le due definizioni sono equivalenti, perché nonostante la prima sia più generale e includa anche la famiglia vuota, l'appartenenza del vuoto a $\mathcal{A}$ è già garantita dalla (i). Analogamente per la (iii) e X (intersezione della famiglia vuota).

Dimostrazione.

i) • $\varnothing \in \mathcal{A}$ in quanto unione della famiglia vuota di aperti in (X, d)

- $X = \bigcup_{x\in X}\{x\} \subset \bigcup_{x\in X} B_d(x,1) \subset X \implies X = \bigcup_{x\in X} B_d(x,1)$, quindi $X \in \mathcal{A}$.

ii) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti in (X,d). È lecito supporre $A_i \neq \varnothing\ \forall i \in I$. Poiché $A_i \in A\ \forall I$, si ha

$$A_i = \bigcup_{k\in K_i} B_d(x_{ik}, r_{ik})$$

per qualche famiglia $\{B_d(x_{ik}, r_{ik})\}_{k\in K_i}$ di palle aperte di (X,d). Possiamo supporre $K_i \cap K_j = \varnothing\ \forall i \neq j$ (evitiamo di chiamare due palle con lo stesso *nome*). Allora

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{k\in K} B_d(x_{ik}, r_{ik})\right) = \bigcup_{(i,k)\in J} B_d(x_{ik}, r_{ik}) \qquad \text{dove } J = \bigsqcup_{i\in I}(i \times K_i)$$

iii) Procedendo per induzione sul numero di aperti considerati, è sufficiente provare il caso per due aperti. Siano A_1, A_2 aperti di (X,d). Se $A_1 \cap A_2 = 0$, allora $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ per (i). Altrimenti, sia $x \in A_1 \cap A_2$, allora poiché $x \in A_1 \in \mathcal{A}$, $\exists r_1 > 0 \ :\ B_d(x, r_1) \subset A_1$. Analogamente $x \in A_2 \in \mathcal{A}$, $\exists r_2 > 0 \ :\ B_d(x, r_2) \subset A_2$. Poniamo $r = \min\{r_1, r_2\}$, allora $B_d(x,r) \subset B_d(x,r_1) \cap B_d(x,r_2) \subset A_1 \cap A_2$. Di conseguenza per l'arbitrarietà di x e la caratterizzazione di aperto (Lemma 1.9) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

QED

Osservazione 1.14. In generale la famiglia degli aperti non è stabile per intersezione arbitraria. Consideriamo ad esempio $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea, allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_d\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ che non è un aperto.

Soluzione degli esercizi

Esercizio 1.1

- Per (ii), $d(a,b)+d(a,b) \geq d(b,b) = 0$ per (i), quindi $2d(a,b) \geq 0$. Poiché $\operatorname{char} \mathbb{R} \neq 2$ segue che $d(a,b) \geq 0$.
- Per (ii), $d(a,b) + \cancel{d(a,a)} \geq d(b,a)$ e $d(b,a) + \cancel{d(b,b)} \geq d(a,b)$ quindi $d(a,b) = d(b,a)$.

Bibliografia

[Kos88] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*. ita. Testi e manuali universitari. Bologna: Zanichelli, 1988. ISBN: 8808064409.

[Man14] Marco Manetti. *Topologia*. ita. 2. ed. Unitext. La matematica per il 3+2, 78. Milano: Springer, 2014. ISBN: 9788847056619.

[Occ] Gianluca Occhetta. *Note di Topologia Algebrica e Analisi Complessa*. ita. Trento.

[Ser94] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. ita. Programma di matematica, fisica, elettronica. Torino: Bollati Boringhieri, 1994. ISBN: 9788833955483.

Cronologia delle versioni

Ultimo aggiornamento: 2 gennaio 2024

v. 0.0 Inizio del corso.

- **v. 0.1** Lezione del 12/09/2023: presentazione del corso e cenni di teoria degli insiemi.
- **v. 0.2** Lezione del 15/09/2023: applicazioni (iniettività, suriettività, biiettività, invertibilità), spazi metrici, continuità, aperti metrici.
- **v. 0.3** Lezione del 19/09/2023: caratterizzazione delle funzioni continue, proprietà degli aperti metrici, definizioni di topologia.
- **v. 0.4** Lezione del 22/09/2023: spazi topologici metrizzabili, finezza, basi.
- **v. 0.5** Lezione del 26/09/2023: topologia generata da basi, sottobasi, topologia generata da una sottobase, intorni. Aggiunti esercizi e soluzioni.
- **v. 0.6** Lezione del 29/09/2023: sistemi fondamentali di intorni.
- **v. 0.7** Lezione del 03/10/2023: assiomi di numerabilità, successioni, parte interna, parte esterna, frontiera.
- **v. 0.8** Lezione del 06/10/2023: chiusura, punti di accumulazione, punti isolati, punti aderenti.
- **v. 0.9** Lezione del 10/10/2023: chiusura e successioni, chiusura sequenziale, densità topologica.
- **v. 0.10** Lezione del 13/10/2023: spazi topologici separabili, applicazioni continue (definizione).
- **v. 0.11** Lezione del 17/10/2023: applicazioni continue (caratterizzazione), applicazioni aperte e chiuse, omeomorfismi (definizione).
- **v. 0.12** Lezione del 18/10/2023: omeomorfismi (proprietà), sottospazi topologici.
- **v. 0.13** Lezione del 24/10/2023: sottospazi topologici (proprietà), topologia prodotto.
- **v. 0.14** Lezione del 27/10/2023: proprietà di struttura della topologia prodotto.
- **v. 0.15** Lezione del 03/01/2023: topologia prodotto di famiglie finite, topologia quoziente (definizione e saturazione).
- **v. 0.16** Lezione del 07/11/2023: relazioni di equivalenza, topologia quoziente modulo una relazione di equivalenza.
- **v. 0.17** Lezione del 10/11/2023: propriet`o delle topologie quozienti modulo relazioni di equivalenza, assioma di Hausdorff.
- **v. 0.18** Lezione del 14/11/2023: spazi T_1, compattezza (definizione ed esempi).
- **v. 0.19** Lezione del 17/11/2023: caratterizzazione dei compatti della retta reale.
- **v. 0.20** Lezione del 21/11/2023: caratterizzazione dei compatti dello spazio euclideo, Teorema di Tychonoff.
- **v. 0.21** Lezione del 24/11/2023: connessione (definizione e caratterizzazione nella retta reale).
- **v. 0.22** Esercitazioni della settimana 28/11/2023 - 01/12/2023: proprietà della connessione, componenti connesse, approfondimenti su compattezza e T_2.
- **v. 0.23** Esercitazione del 5/12/2023: connessione per archi.
- **v. 0.24** Lezione del 15/12/23: introduzione alla topologia algebrica.

v. 1.0 Conclusione del primo semestre.