



Varietà Razionali Omogenee e Mappe di Nesting

Prova Finale

Corso di Laurea in Matematica

Davide Borra (234561)

21 Luglio 2025



UNIVERSITÀ
DI TRENTO



Indice

1 Gruppi algebrici affini

- ▶ Gruppi algebrici affini
- ▶ Varietà Razionali Omogenee
- ▶ Mappe di *nesting*



Gruppi algebrici e azioni

1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.



Gruppi algebrici e azioni

1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.
 - I gruppi di matrici sono gruppi algebrici affini: GL , SL , SO , Sp .



Gruppi algebrici e azioni

1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.
 - I gruppi di matrici sono gruppi algebrici affini: GL, SL, SO, Sp.
- **Azione algebrica** Un gruppo G agisce algebricamente su una varietà X se l'azione $G \times X \rightarrow X$ è un morfismo di varietà.



Gruppi algebrici e azioni

1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.
 - I gruppi di matrici sono gruppi algebrici affini: GL , SL , SO , Sp .
- **Azione algebrica** Un gruppo G agisce algebricamente su una varietà X se l'azione $G \times X \rightarrow X$ è un morfismo di varietà.
- **Varietà omogenea:** varietà su cui agisce transitivamente il gruppo dei suoi automorfismi.



Sottogruppi parabolici e di Borel

1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.



Sottogruppi parabolici e di Borel

1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.
 - In $GL(n, \mathbb{C})$ le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo di Borel.



Sottogruppi parabolici e di Borel

1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.
 - In $GL(n, \mathbb{C})$ le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo di Borel.
- **Sottogruppo Parabolico:** sottogruppo contenente un sottogruppo di Borel.



Sottogruppi parabolici e di Borel

1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.
 - In $GL(n, \mathbb{C})$ le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo di Borel.
- **Sottogruppo Parabolico:** sottogruppo contenente un sottogruppo di Borel.
 - In $GL(n, \mathbb{C})$ le matrici triangolari superiori a blocchi sono un sottogruppo parabolico.



Indice

2 Varietà Razionali Omogenee

- ▶ Gruppi algebrici affini
- ▶ Varietà Razionali Omogenee
- ▶ Mappe di *nesting*



Varietà Razionali Omogenee

2 Varietà Razionali Omogenee

- Una varietà proiettiva liscia si dice *razionale omogenea* se è il quoziente di un gruppo algebrico affine connesso (ovvero, se ammette un'azione algebrica transitiva da parte di un gruppo algebrico affine connesso).
- Il quoziente di un gruppo algebrico affine rispetto ad un suo sottogruppo è una varietà proiettiva se e solo se il sottogruppo è parabolico.



Flag /1

2 Varietà Razionali Omogenee

Dato un \mathbb{C} -spazio vettoriale V di dimensione finita $n + 1$, per ogni successione crescente di interi positivi $0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = \dim V - 1$ possiamo costruire la varietà dei **flag**

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(d_1, \dots, d_k; \mathbb{P}(V)) &= \{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) \mid \dim \Lambda_i = d_i \text{ e } \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1} \ \forall i = 1, \dots, k-1\} \\ &\subset \mathbb{G}(d_1, \mathbb{P}(V)) \times \dots \times \mathbb{G}(d_k, \mathbb{P}(V)). \end{aligned}$$



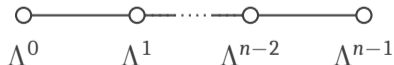
Flag /1

2 Varietà Razionali Omogenee

Dato un \mathbb{C} -spazio vettoriale V di dimensione finita $n + 1$, per ogni successione crescente di interi positivi $0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = \dim V - 1$ possiamo costruire la varietà dei **flag**

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(d_1, \dots, d_k; \mathbb{P}(V)) &= \{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) \mid \dim \Lambda_i = d_i \text{ e } \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1} \ \forall i = 1, \dots, k-1\} \\ &\subset \mathbb{G}(d_1, \mathbb{P}(V)) \times \dots \times \mathbb{G}(d_k, \mathbb{P}(V)). \end{aligned}$$

Essi possono essere rappresentati con un diagramma di Dynkin A_n





Flag /2

2 Varietà Razionali Omogenee

I flag possono essere ottenuti come quozienti di $\mathrm{PGL}(n + 1, \mathbb{C})$ rispetto a sottogruppi di matrici triangolari (superiori) a blocchi:

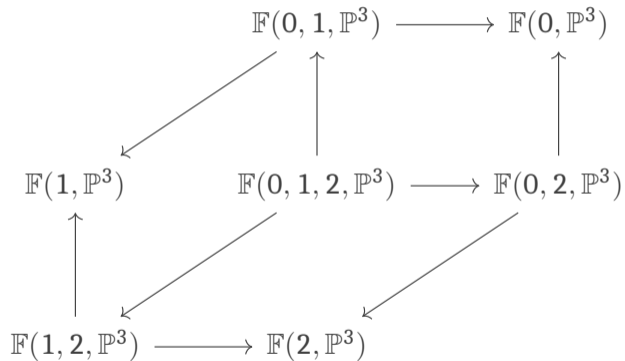
$$M = \begin{bmatrix} \boxed{M_{11}} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ 0 & \boxed{M_{22}} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boxed{M_{k+1,k+1}} \end{bmatrix}$$

dove $M_{ij} \in M_{a_i \times a_j}(\mathbb{C})$ e gli a_i sono tali che $\sum_{i=1}^j a_i = d_j + 1$.



Flag /3

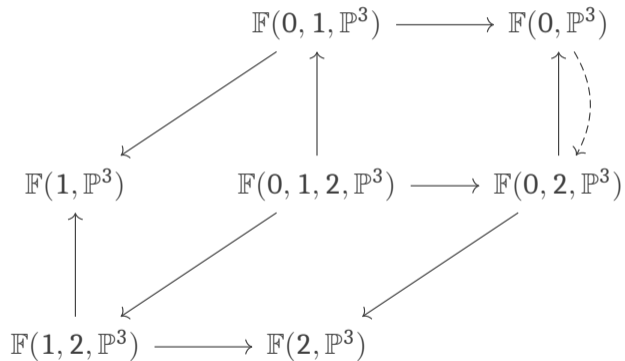
2 Varietà Razionali Omogenee





Flag /3

2 Varietà Razionali Omogenee





Flag isotropi

2 Varietà Razionali Omogenee

- Una costruzione simile può essere fatta considerando sottospazi di una quadrica: in questo caso si ottengono i Flag isotropi.



Flag isotropi

2 Varietà Razionali Omogenee

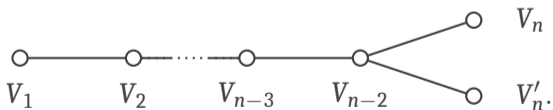
- Una costruzione simile può essere fatta considerando sottospazi di una quadrica: in questo caso si ottengono i Flag isotropi.
- Essi sono varietà razionali omogenee in quanto vi agisce transitivamente il gruppo $O(2n, \mathbb{C})$.



Flag isotropi

2 Varietà Razionali Omogenee

- Una costruzione simile può essere fatta considerando sottospazi di una quadrica: in questo caso si ottengono i Flag isotropi.
- Essi sono varietà razionali omogenee in quanto vi agisce transitivamente il gruppo $O(2n, \mathbb{C})$.
- Sono descritti dal diagramma di Dynkin D_n .





Indice

3 Mappe di *nesting*

- ▶ Gruppi algebrici affini
- ▶ Varietà Razionali Omogenee
- ▶ Mappe di *nesting*



Definizione di *nesting* /1

3 Mappe di *nesting*

Il concetto di **nesting** è stato introdotto inizialmente come mappa tra Grassmaniane ($k < r$) e successivamente generalizzato utilizzando il concetto di flag.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{s} & \mathbb{F}(k, r, \mathbb{P}^n) \\ & \swarrow \pi_k & \searrow \pi_r \\ \mathbb{G}(k, \mathbb{P}^n) & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}(r, \mathbb{P}^n) \end{array}$$



Definizione di *nesting* /2

3 Mappe di *nesting*

Un'ulteriore generalizzazione è possibile grazie ai diagrammi di Dynkin. Dati due sottoinsiemi $I \subsetneq I' = I \sqcup J$ dei nodi di un diagramma \mathcal{D} , un *nesting* di tipo (\mathcal{D}, I, J) è una sezione della proiezione

$$\mathcal{D}(I') \longrightarrow \mathcal{D}(I).$$



Definizione di *nesting* /2

3 Mappe di *nesting*

Un'ulteriore generalizzazione è possibile grazie ai diagrammi di Dynkin. Dati due sottoinsiemi $I \subsetneq I' = I \sqcup J$ dei nodi di un diagramma \mathcal{D} , un nesting di tipo (\mathcal{D}, I, J) è una sezione della proiezione

$$\mathcal{D}(I') \longrightarrow \mathcal{D}(I).$$

Ad esempio, per diagrammi di tipo D_4 , la proiezione considerata è



e una sua sezione è un nesting di tipo $(D_4, 3, 4)$.



Esistenza di nesting

3 Mappe di *nesting*

Teorema

Sia G un gruppo algebrico semplice il cui diagramma di Dynkin \mathcal{D} è di tipo classico, e siano I, J due insiemi di nodi disgiunti e non vuoti tali che (\mathcal{D}, I, J) ammette un nesting. Allora (\mathcal{D}, I, J) è isomorfo ad uno dei seguenti

$$(A_{2m-1}, 1, 2m-1) \quad m \geq 2, \quad (B_3, 1, 3), \quad (D_n, n-1, n) \quad n \geq 4.$$



Nesting di tipo $(A_{2m-1}, 1, 2m - 1)$

3 Mappe di *nesting*

Determinati dalla scelta di una matrice antisimmetrica $\Omega \in GL(2m, \mathbb{C})$ mediante la mappa

$$\begin{aligned} \sigma_{\Omega} : \mathbb{F}(0, \mathbb{P}^{2m-1}) &\longrightarrow \mathbb{F}(0, 2, \mathbb{P}^{2m-1}) \\ \mathbf{p} &\longmapsto (\mathbf{p}, \mathbf{p}_{\Omega}^{\perp}) \end{aligned}$$

dove, se $\mathbf{p} = [v]$, definiamo

$$\mathbf{p}_{\Omega}^{\perp} := \{[w] \mid v^{\top} \Omega w = 0\} \in \mathbb{G}(2, \mathbb{P}^{2m-1}).$$



Nesting di tipo $(D_n, n - 1, n)$

3 Mappe di *nesting*

Determinati dalla scelta di un punto $\mathbf{p} = [v] \notin Q^{2n-2} = Z(x^\top \Omega x)$ mediante la mappa

$$\begin{aligned} \sigma_v : D_n(n-1) &\longrightarrow D_n(n-1, n) \\ \Lambda^{n-1} &\longmapsto \Lambda^{n-1} \cap H_v, \end{aligned}$$

dove $H_v := \{[w] \in \mathbb{P}^{2n} \mid v^\top \Omega w = 0\}$ è un iperpiano non tangente alla quadrica e Ω è una matrice simmetrica.



La struttura ottonionica di \mathbb{P}^7

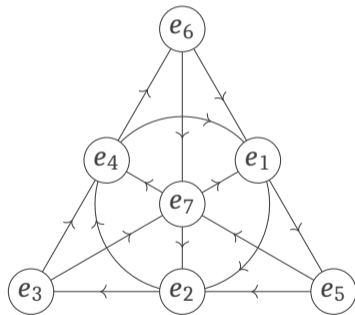
3 Mappe di *nesting*

Lo spazio \mathbb{P}^7 può essere interpretato come lo spazio proiettivo $\mathbb{O}\mathbb{P}^1$.

Possiamo pertanto definire

$$Q^6 := \{[x] \mid x \in \mathbb{O}, x^*x = 0\} = B_3(1)$$

$$Q^5 = Q^6 \cap \mathbb{P}(\text{Im}_{\mathbb{O}}) = \{[x] \mid x \in \mathbb{O}, x^2 = 0\} \simeq B_3(3)$$





Nesting di tipo $(B_3, 1, 3)$

3 Mappe di *nesting*

Determinati dalla scelta di un $a \in \mathbb{O}$ invertibile mediante la mappa

$$\sigma_a([x]) := \Lambda_x^a \cap \mathcal{Q}^5 = \{[y] \in \mathcal{Q}^5 \mid x \circledast_a y = 0\} \quad \forall [x] \in \mathcal{Q}^6,$$

dove

$$v \circledast_a w := (v \cdot (w \cdot a)) \cdot a^{-1}.$$



Varietà Razionali Omogenee e Mappe di Nesting

Grazie per l'attenzione.