

Appunti di Fisica Generale 1

Primo modulo

Davide Borra

Indice

1	Cinematica del punto materiale	1
1.1	Definizioni preliminari	1
1.2	Grandezze fisiche per la cinematica	1
1.2.1	Velocità	1
1.2.2	Accelerazione	1
1.3	Coordinate polari	2
1.3.1	Moti circolari	2
1.4	Coordinate curvilinee	3
2	Moti relativi	3
3	Dinamica del punto materiale	4
3.1	Definizioni preliminari	4
3.2	I principi della dinamica	4
3.3	Forze notevoli	5
3.3.1	Forza peso	5
3.3.2	Forze di reazione vincolare e attriti	5
3.3.3	Forza elastica	6
3.4	Equazione del moto	6
3.5	Sistemi di riferimento non inerziali e forze fittizie	7
4	Lavoro ed energia	7
4.1	Calcolo del lavoro lungo la traiettoria	7
4.2	Forze conservative e non conservative	7
4.3	Teorema dell'energia cinetica	7
4.4	Calcolo del lavoro di forze notevoli	8
4.4.1	Forza peso	8
4.4.2	Forze costanti	8
4.4.3	Forze di attrito	8
4.4.4	Forza elastica	9
4.5	Potenziale, energia potenziale e energia meccanica	9
4.5.1	Funzione potenziale	9
4.5.2	Energia potenziale e energia meccanica	10
4.6	Impulso, quantità di moto e momenti	10
4.6.1	Quantità di moto	10
4.6.2	Impulso	11
4.6.3	Momento angolare e momento torcente	11
5	Dinamica dei sistemi di particelle	12
5.1	Equazioni cardinali della dinamica delle particelle	12
5.2	Centro di massa	14
5.2.1	Equazioni cardinali e centro di massa	14
5.3	Urti e esplosioni	15
5.3.1	Classificazione degli urti	15
5.4	Energia meccanica in un sistema di particelle	15
5.5	Il sistema di riferimento del centro di massa	16
5.5.1	Teoremi di König	16

6	Elementi di meccanica di sistemi rigidi semplici	17
6.1	Momento di inerzia	17
6.2	Intervento di impulsi esterni	18
7	Attrazione gravitazionale	18
7.1	Energia potenziale gravitazionale	18
7.1.1	Velocità di fuga	19

© 2023 - Davide Borra

1 Cinematica del punto materiale

1.1 Definizioni preliminari

DEF (Punto materiale). Corpo di dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui si muove e di altri oggetti con cui interagisce, le sue dimensioni lineari sono piccole rispetto alla precisione con cui ci interessa determinarne la posizione.

DEF (Gradi di libertà). Numero di parametri tra loro indipendenti che servono ad individuare in modo univoco la posizione di un sistema fisico.

DEF (Traiettoria). Luogo dei punti occupati successivamente dal corpo puntiforme e che danno origine ad una curva continua nello spazio.

DEF (Vettore posizione). Il vettore posizione è quel vettore applicato all'origine del sistema cartesiano scelto, e che ha come estremo libero la posizione del punto P .

1.2 Grandezze fisiche per la cinematica

Siccome la velocità cambia nel tempo si definiscono due grandezze

1.2.1 Velocità

DEF (Velocità media). Si definisce velocità media il vettore

$$\langle \vec{v}_{(t_1, t_2)} \rangle = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Essa si misura in m/s

DEF (Velocità istantanea). Si definisce velocità istantanea il vettore

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \langle \vec{v}_{(t, t')} \rangle = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Essa si misura in m/s

Siccome per $\Delta t \rightarrow 0$ la lunghezza della retta secante approssima la traiettoria sempre meglio, si può affermare che

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

1.2.2 Accelerazione

Siccome anche l'accelerazione cambia nel tempo si definiscono due grandezze

DEF (Accelerazione media). Si definisce accelerazione media il vettore

$$\langle \vec{a}_{(t_1, t_2)} \rangle = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Essa si misura in m/s^2

DEF (Accelerazione istantanea). Si definisce accelerazione istantanea il vettore

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \langle \vec{a}_{(t,t')} \rangle = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Essa si misura in m/s^2

DEF (Moto rettilineo e moto uniforme). Un moto si definisce **rettilineo** se il versore velocità \hat{v} non cambia (la traiettoria è una retta) e **uniforme** se il modulo del vettore velocità $|\vec{v}|$ non cambia.

1.3 Coordinate polari

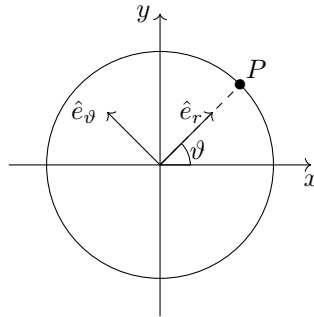


Figura 1: Coordinate polari

Introduciamo due versori \hat{e}_r diretto sempre in direzione del punto P e \hat{e}_ϑ diretto sempre perpendicolarmente ad \hat{e}_r . Questi versori cambiano nel tempo, quindi è importante ricordarsi che le loro derivate non sono 0 vanno calcolate come

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \cos \vartheta \hat{x} + \sin \vartheta \hat{y} \\ \hat{e}_\vartheta = -\sin \vartheta \hat{x} + \cos \vartheta \hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos \vartheta \hat{x} + \sin \vartheta \hat{y}) = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta \hat{x} + \dot{\vartheta} \cos \vartheta \hat{y} = \dot{\vartheta} \hat{e}_\vartheta \\ \frac{d\vec{e}_\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin \vartheta \hat{x} + \cos \vartheta \hat{y}) = -\dot{\vartheta} \cos \vartheta \hat{x} - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \hat{y} = -\dot{\vartheta} \hat{e}_r \end{cases}$$

1.3.1 Moti circolari

Definiamo (supponendo R costante)

$$\vec{r} = R\hat{e}_r$$

allora ricaviamo che

$$\vec{v}(t) = R \frac{d\hat{e}_r}{dt} = R\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta = \omega R\hat{e}_\vartheta$$

$$\vec{a}(t) = R \frac{d}{dt}(\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta) = R\ddot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta - R\dot{\vartheta}^2\hat{e}_r = \underbrace{\alpha R\hat{e}_\vartheta}_{\vec{a}_t} - \underbrace{\omega^2 R\hat{e}_r}_{\vec{a}_c}$$

dove $\omega := \dot{\vartheta}$ è la velocità angolare e $\alpha := \ddot{\vartheta}$ è l'accelerazione angolare. Inoltre \vec{a}_t si dice accelerazione tangenziale e \vec{a}_c si dice accelerazione centripeta.

Vettori velocità e accelerazione angolare Definiamo i Vettori

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \omega \hat{z} \\ \vec{\alpha} = \alpha \hat{z} \end{cases}$$

In modo che \hat{e}_r , \hat{e}_ϑ e \hat{z} siano una terna destrorsa di versori. Si ottengono quindi le formule di Poisson

Teorema. (*Formule di Poisson*)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta = \vec{\omega} \times \hat{e}_r \\ \frac{d\vec{e}_\vartheta}{dt} = -\dot{\vartheta}\hat{e}_r = \vec{\omega} \times \hat{e}_\vartheta \end{cases}$$

Esse valgono in generale per i versori che non cambiano il modulo ma possono solo ruotare.

1.4 Coordinate curvilinee

Analogamente a quanto fatto precedentemente, consideriamo un versore generico \hat{u}_t punto per punto tangente alla traiettoria e supponiamo che in un intervallo di tempo Δt ruoti di $\Delta\vartheta$. Definiamo un secondo versore \hat{u}_n perpendicolare a \hat{u}_t nel verso crescente di ϑ in modo che \hat{u}_t , \hat{u}_n e \hat{z} siano una terna destrorsa. Ricordiamo che anche in questo sistema valgono le formule di Poisson.

Velocità e accelerazione in coordinate curvilinee Osserviamo che per $\Delta t \rightarrow 0$ si ha $d\vec{r} \sim ds$ (dove ds è lo spostamento misurato lungo la traiettoria). Di conseguenza

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t$$

Inoltre

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt} = \dot{v}\hat{u}_t + v \vec{\omega} \times \hat{u}_t = \dot{v}\hat{u}_t + v\dot{\vartheta}\hat{u}_n$$

Cerchio osculatore Il procedimento utilizzato per definire le coordinate curvilinee è molto simile a quello utilizzato per le coordinate circolari, a parte per il fatto che non abbiamo un vero e proprio cerchio su cui il punto materiale si muove. Tuttavia possiamo definirne uno: il **cerchio osculatore**, ovvero il cerchio tangente alla traiettoria in ogni suo punto. Il suo raggio ρ è detto raggio di curvatura della traiettoria.

$$\begin{aligned} \rho d\vartheta &= ds \\ \rho \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{ds}{dt} = v \\ \frac{v}{\rho} &= \frac{d\vartheta}{dt} = \omega \end{aligned}$$

Da cui

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + v\dot{\vartheta}\hat{u}_n = \boxed{\dot{v}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n}$$

2 Moti relativi

Consideriamo due sistemi di riferimento: $Oxyz$ e $O'x'y'z'$. Consideriamo le grandezze in Figura 2, allora proiettando lungo gli assi otteniamo che

$$\vec{R} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$$

e

$$\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$$

Inoltre

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

Indichiamo con \vec{v} la velocità di P rispetto a O , con \vec{v}' la velocità di P rispetto a O' e con $\vec{v}_{O'}$ la velocità di O' rispetto a O . Derivando l'equazione precedente otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{R} + \vec{r}') = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}}_{\text{i versori sono costanti}} + \underbrace{x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'}_{\text{i versori ruotano}} \right) \\ &= \underbrace{\dot{X}\hat{x} + \dot{Y}\hat{y} + \dot{Z}\hat{z}}_{\vec{v}_{O'}} + \underbrace{\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}'}_{\vec{v}'} + \underbrace{x' \frac{d\hat{x}'}{dt} + y' \frac{d\hat{y}'}{dt} + z' \frac{d\hat{z}'}{dt}}_{\vec{\omega} \times (x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}')} = \\ &= \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times (x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}') = v' + \underbrace{v_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\vec{v}} \end{aligned}$$

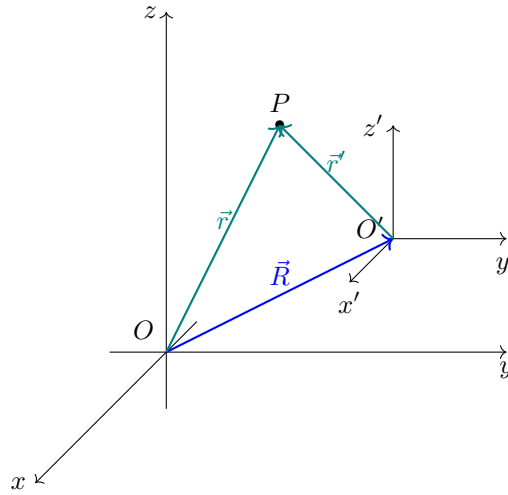


Figura 2: Due sistemi di riferimento in moto uno rispetto all'altro

dove il termine evidenziato si chiama **velocità di trascinamento**.

Analogamente si ricava per le accelerazioni:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Calcoliamo separatamente le tre derivate.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} (\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}') = \underbrace{\ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}' + \ddot{z}'\hat{z}'}_{\vec{a}'} + \underbrace{\dot{x}' \cdot \vec{\omega} \times \hat{x}' + \dot{y}' \cdot \vec{\omega} \times \hat{y}' + \dot{z}' \cdot \vec{\omega} \times \hat{z}'}_{\vec{\omega} \times \vec{v}'} \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}') = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') &= \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \vec{a}' \end{aligned}$$

Da cui

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\alpha}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{trascinamento}} + \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Coriolis}} \quad (1)$$

3 Dinamica del punto materiale

3.1 Definizioni preliminari

DEF (Forze reali). Si dicono reali le forze che sono dovute all'interazione con altri corpi.

DEF (Sistemi di riferimento inerziali). Sistemi di riferimento privilegiati in cui non sono presenti forze fittizie. Un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme o in quiete rispetto ad un sistema inerziale è a sua volta inerziale.

3.2 I principi della dinamica

Principio (Relatività). Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme non esiste esperimento che dia risultati diversi nell'uno o nell'altro laboratorio.

Principio (Dinamica I). In un **sistema di riferimento inerziale**, un corpo puntiforme **libero** (ovvero in assenza di forze agenti su di esso), resta in quiete o continua a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Principio (Dinamica II). In un **sistema di riferimento inerziale**, la risultante delle forze **reali** applicate al corpo puntiforme è uguale al prodotto della sua massa per la sua accelerazione.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

DEF (Massa inerziale). Si definisce la massa inerziale la resistenza di un corpo a cambiare la propria velocità.

Principio (Dinamica III). Se una particella A esercita una forza \vec{F}_{AB} su una particella B , allora la particella B “reagisce” esercitando su A una forza \vec{F}_{BA} uguale ed opposta e diretta lungo la congiungente delle due particelle.

3.3 Forze notevoli

3.3.1 Forza peso

È un caso particolare della forza di attrazione gravitazionale quando il grave si trova nella prossimità della superficie terrestre. Infatti

$$F_G = G \frac{mM_T}{R_T^2} \approx mg$$

Per cui definiamo

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

3.3.2 Forze di reazione vincolare e attriti

DEF (Vincolo). Corpo che si oppone con una forza ad ogni tentativo di modificarne le caratteristiche geometriche. Agisce per contatto attraverso le cosiddette forze vincolari.

Attrito statico Si manifesta se il corpo è fermo rispetto al vincolo. Si è osservato empiricamente che è uguale e opposto alla componente parallela alla superficie del vincolo fino a quando questa non supera una certa soglia, detta forza di attrito statico massimo:

$$\vec{f}_s^{max} = -\mu_s |\vec{F}_\perp| \hat{F}_\parallel$$

dove μ_s è detto coefficiente di attrito dinamico e F_\perp e F_\parallel sono rispettivamente le componenti perpendicolare e parallela al vincolo della risultante delle forze agenti sul corpo, esclusa la forza di attrito.

Questa legge è valida solo sotto certe condizioni:

- non vale se la superficie di contatto è confrontabile con le dimensioni delle asperità della superficie
- non vale se la superficie di contatto è molto piccola (e.g. una lama, una punta,...)
- non vale quando le superfici sono molto levigate

Attrito dinamico Si manifesta se il corpo è in moto rispetto al vincolo. Sperimentalmente si è scoperto che

$$\vec{f}_d = -\mu_d |\vec{N}| \hat{v}$$

dove μ_d si dice coefficiente di attrito dinamico e v è la velocità relativa tra il corpo e il vincolo. Si ha sempre che (fissati gli oggetti) $\mu_s > \mu_d$. Inoltre la forza di attrito dinamico si oppone sempre al moto relativo.

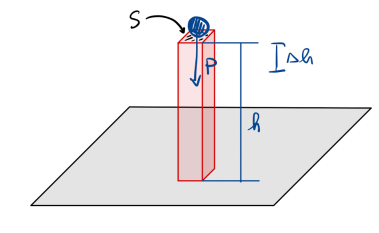


Figura 3: La situazione descritta

3.3.3 Forza elastica

Supponiamo di avere un parallelepipedo deformabile di altezza h e sezione S su cui viene posto un grave di massa m .

Se il peso del grave e la deformazione sono molto piccoli e la deformazione è reversibile, la deformazione è elastica ed è descritta dalla legge

$$\Delta h = \frac{h}{E} \frac{P}{S}$$

dove E è il coefficiente di elasticità (modulo di Young) e si misura in N/m^2 .

Se definiamo

$$k := \frac{ES}{h} \quad [k] = \frac{N}{m}$$

otteniamo la legge di Hooke

Legge (Hooke). *La deformazione di una molla (o di un qualsiasi corpo che si deforma come una molla) è legata alla forza applicata ad essa nella direzione della deformazione dalla relazione*

$$f_e = -k\Delta l$$

Validità della legge di Hooke

- funziona se la deformazione è elastica, ovvero reversibile. La forza deve essere molto minore del carico di rottura.
- la deformazione è solo in una direzione.

3.4 Equazione del moto

Si definisce equazione del moto un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo

$$g(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{a}$$

le cui soluzioni sono leggi orarie $\vec{r}(t)$.

Fondamentale per lo svolgimento degli esercizi è l'integrale generale dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_M)$$

che (dove ω e x_M sono valori noti)

$$x = x_M + A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{oppure} \quad x = x_M + A \sin(\omega t + \varphi)$$

dove A e φ sono costanti arbitrarie da determinare imponendo le condizioni iniziali. L'equazione trovata descrive un moto armonico attorno alla posizione di equilibrio x_0 .

DEF (Posizione di equilibrio). Punto in cui se viene posto un corpo con velocità nulla, esso rimane fermo.

3.5 Sistemi di riferimento non inerziali e forze fittizie

Riprendiamo la situazione della Figura 2 supponendo il sistema $Oxyz$ inerziale. Se il sistema $O'x'y'z'$ si muove rispetto al sistema $Oxyz$ di moto rettilineo uniforme sarebbe anch'esso inerziale e perciò i due sistemi misurerebbero la stessa accelerazione per il punto P . Se invece $O'x'y'z'$ stesse accelerando e/o ruotando esso non sarebbe inerziale e misurerebbe quindi un'accelerazione diversa. Riprendendo la (1) e ricordando che nel sistema inerziale $Oxyz$ vale il secondo principio otteniamo

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m(\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\alpha} \times \vec{r}') - m(2\vec{\omega} \times \vec{v}') \quad (2)$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reali} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c$$

dove $m\vec{a}_t$ è la forza di trascinamento e $m\vec{a}_c$ è la forza di Coriolis.

4 Lavoro ed energia

Osserviamo una particella P che si muove lungo una certa traiettoria ed è sottoposta ad una forza F .

DEF (Lavoro elementare). Si definisce lavoro elementare compiuto dalla forza F quando la particella compie uno spostamento $d\vec{s}$

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Esso è una quantità scalare e si misura in $J = N \cdot m$

Si utilizza il simbolo δL perché non si tratta necessariamente di un differenziale esatto.

Osserviamo che solo la componente di F parallela allo spostamento compie lavoro, per cui

$$\delta L = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \vartheta$$

dove ϑ è l'angolo tra la forza e lo spostamento. Di conseguenza, ricordando le coordinate intrinseche, la forza compie lavoro solo se contribuisce ad aumentare o a diminuire il modulo della velocità.

4.1 Calcolo del lavoro lungo la traiettoria

Possiamo suddividere la traiettoria in tanti spostamenti elementari successivi. Il lavoro totale compiuto dalla forza F da A a B lungo quella traiettoria sarà la somma dei lavori elementari, ovvero l'integrale di linea lungo la traiettoria:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_{//} ds$$

4.2 Forze conservative e non conservative

DEF (Forza conservativa). Una forza si dice conservativa se il suo lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dalle posizioni di partenza e di arrivo.

Lemma. F è una forza conservativa se e solo se $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

Dimostrazione. Consideriamo due traiettorie I e II che collegano i punti A e B . Allora

$$L_{AB}^I = L_{AB}^{II} \Leftrightarrow \int_I \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{II} \vec{F} \cdot d\vec{s} \Leftrightarrow \int_I \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{II} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

QED

4.3 Teorema dell'energia cinetica

DEF (Energia Cinetica). Si definisce energia cinetica l'energia associata alla velocità di un corpo

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Il seguente teorema vale nei sistemi inerziali se considero le forze reali e nei sistemi non inerziali se considero anche le forze fittizie.

Teorema (Energia cinetica). *Quando un punto materiale si muove lungo una certa traiettoria dalla posizione A alla posizione B , il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti sul punto è pari alla variazione di energia cinetica del punto stesso.*

$$L_{AB} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L_{A,B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \left(\frac{dv}{dt} \hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_n \right) \cdot d\vec{s} \hat{u}_t = \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds = \\ &= \int_A^B mv dv = \left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned}$$

QED

4.4 Calcolo del lavoro di forze notevoli

4.4.1 Forza peso

Supponiamo un grave che si muove lungo una qualsiasi traiettoria da un punto A a un punto B soggetto ad una forza peso $P = -mg\hat{y} = m\vec{g}$

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N m\vec{g} \cdot \Delta\vec{s}_i = m\vec{g} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \Delta\vec{s}_i = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB} = \\ &= -mg\hat{y} \cdot [(x_B - x_A)\hat{x} + (y_B - y_A)\hat{y} + (z_B - z_A)\hat{z}] = -mg(y_B - y_A) = \boxed{-mg\Delta y} \end{aligned}$$

Si ricava inoltre che la forza peso è una forza conservativa, in quanto il lavoro non dipende dalla traiettoria.

4.4.2 Forze costanti

Analogamente si procede per una qualsiasi forza \vec{F} costante in modulo, direzione e verso, dimostrando che

$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{r}_{AB}$$

Si conclude quindi che tutte le forze costanti sono conservative.

4.4.3 Forze di attrito

Forza di attrito statico

N.B. La forza di attrito statico non compie lavoro perché non c'è spostamento.

Forza di attrito dinamico Separiamo due casi: quando il movimento è concorde alla coordinata curvilinea (3) e quando è discorde (4). Osserviamo che nel primo caso $\hat{v} = d\hat{s}$, mentre nel secondo $\hat{v} = -d\hat{s}$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_d \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d |\vec{N}| \hat{v} \cdot d\vec{s} \hat{u}_t = \int_A^B -\mu_d |\vec{N}| \hat{u}_t \cdot d\vec{s} \hat{u}_t = \int_A^B -\mu_d |\vec{N}| ds < 0 \quad (3)$$

$$L_{BA} = \int_B^A \vec{F}_d \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d |\vec{N}| \hat{v} \cdot d\vec{s} \hat{u}_t = \int_A^B -\mu_d |\vec{N}| (-\hat{u}_t) \cdot d\vec{s} \hat{u}_t = \int_A^B \mu_d |\vec{N}| \underbrace{ds}_{<0} < 0 \quad (4)$$

Quindi il lavoro dell'attrito dinamico è sempre negativo.

Dimostriamo ora che il lavoro fatto dall'attrito dinamico dipende dalla traiettoria:

Dimostrazione. Consideriamo due traiettorie differenti che collegano i punti A e B , ognuna con la propria coordinata curvilinea. Supponiamo μ_d e $|\vec{N}|$ costanti. Ricordiamo che nella (3) con ds si intende la coordinata curvilinea e non il vettore spostamento, di conseguenza

$$\begin{aligned} L_s &= \mu_d |\vec{N}| \int_A^B ds = \mu_d |\vec{N}| (s_B - s_A) \\ L_{s'} &= \mu_d |\vec{N}| \int_A^B ds' = \mu_d |\vec{N}| (s'_B - s'_A) \end{aligned}$$

Per cui i due lavori sono diversi.

QED

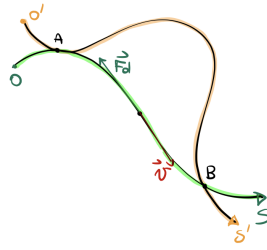


Figura 4: La situazione della dimostrazione

4.4.4 Forza elastica

Consideriamo il sistema in Figura 5 con l'origine nella posizione di equilibrio della molla. Allora, per definizione

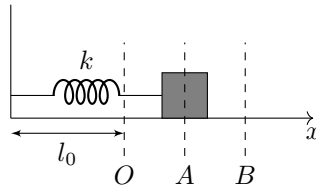


Figura 5: La molla analizzata

di lavoro

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -kx \hat{x} \cdot dx \hat{x} = \int_A^B -kx dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_A^B = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

4.5 Potenziale, energia potenziale e energia meccanica

4.5.1 Funzione potenziale

Una forza è conservativa se il suo lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalla posizione iniziale e finale, quindi esiste una funzione scalare $V(\vec{r})$ tale che

$$L_{AB} = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$$

Per trovarle è necessario fissare un origine O , un punto a potenziale 0. Siccome la forza considerata è conservativa

$$L_{OB} = L_{OA} + L_{AB}$$

Da cui

$$L_{AB} = L_{OB} - L_{OA} = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$$

Scegliendo un altro origine O' si ha

$$L_{O'A} = L_{O'O} + L_{OA} = L_{O'O} + V(\vec{r}_A)$$

$$L_{O'B} = L_{O'O} + L_{OB} = L_{O'O} + V(\vec{r}_B)$$

da cui

$$V'(\vec{r}) = L_{O'O} + V(\vec{r})$$

La funzione potenziale è quindi definita a meno di una costante additiva. Di conseguenza

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ L_{AB} &= \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = \int_A^B dV \end{aligned}$$

che è un differenziale esatto solo per le forze conservative.

Lemma (Condizione necessaria per le forze conservative). *Se una forza è conservativa, allora è indipendente dal tempo.*

Lemma (Definizione equivalente di forze conservative). *Una forza è conservativa se e solo se*

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

4.5.2 Energia potenziale e energia meccanica

Abbiamo visto che se un punto materiale è soggetto ad una forza conservativa esiste la funzione potenziale ad essa associata. Supponiamo ora che sul corpo agisca solo questa forza. Allora per il teorema dell'energia cinetica

$$L_{AB} = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = E_{c,B} - E_{c,A}$$

da cui

$$E_{c,B} - V(\vec{r}_B) = E_{c,A} - V(\vec{r}_A)$$

Introduciamo quindi una nuova quantità, l'energia potenziale associata alla forza conservativa.

DEF (Energia potenziale). Definiamo **energia potenziale** l'opposto della funzione potenziale.

$$U(\vec{r}) = -V(\vec{r})$$

In modo che

$$E_{c,B} + U(\vec{r}_B) = E_{c,A} + U(\vec{r}_A)$$

ovvero che la somma di energia potenziale e energia cinetica si conservi. Definiamo quindi

DEF (Energia meccanica). Definiamo **energia meccanica** la somma dell'energia cinetica e di tutte le energie potenziali.

Teorema (Conservazione dell'energia meccanica). *Quando su un punto materiale agiscono solo forze conservative l'energia meccanica si conserva. Quando sono presenti forze non conservative, il lavoro totale delle forze non conservative è uguale alla variazione di energia meccanica.*

Dimostrazione. Dal teorema dell'energia cinetica

$$L_{AB} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

separando il lavoro delle forze conservative da quello delle forze non conservative abbiamo che

$$L_{AB}^c + L_{AB}^{nc} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

ma per definizione di energia potenziale

$$U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) + L_{AB}^{nc} = E_{c,B} - E_{c,A}$$

ovvero

$$L_{AB}^{nc} = [E_{c,B} + U(\vec{r}_B)] - [E_{c,A} + U(\vec{r}_A)] = E_{M,B} - E_{M,A}$$

QED

4.6 Impulso, quantità di moto e momenti

4.6.1 Quantità di moto

DEF (Quantità di moto). Per una particella di massa m e velocità \vec{v} si definisce **quantità di moto** il vettore

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Essa si misura in $kg \cdot m/s$

Osserviamo che se siamo in un sistema inerziale e la massa è costante

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Abbiamo quindi una formulazione equivalente dei principi della dinamica:

Principio (Conservazione della quantità di moto (Dinamica I)). *In un sistema di riferimento inerziale la quantità di moto di una particella libera si conserva.*

Principio (Dinamica II - equivalente). *In un sistema di riferimento inerziale, la risultante delle forze reali applicate al corpo puntiforme è uguale alla derivata temporale della sua quantità di moto.*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4.6.2 Impulso

DEF (Impulso di una forza). Definiamo impulso di una forza \vec{F} nell'intervallo di tempo t_1, t_2 il vettore

$$\vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

esso si misura in $N \cdot s$

Teorema (Impulso e quantità di moto). *In un sistema di riferimento inerziale, l'impulso della forza agente su un punto materiale fra gli istanti t_1 e t_2 è pari alla variazione che la quantità di moto del punto subisce nello stesso intervallo di tempo.*

$$\vec{J}_{1,2} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

Dimostrazione. Per definizione di impulso

$$\vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Ma per la formulazione equivalente del secondo principio della dinamica

$$\vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

QED

Approssimazione di impulso Se agiscono più forze contemporaneamente, può succedere che una di esse diventi particolarmente grande nell'intervallo t_1, t_2 . In questo caso è quindi possibile approssimare l'impulso totale a quello della singola forza impulsiva. Questa approssimazione si applica quando agiscono forze molto intense in intervalli molto brevi, ad esempio negli urti.

4.6.3 Momento angolare e momento torcente

DEF (Momento angolare o momento della quantità di moto). Una particella P con quantità di moto \vec{p} avrà momento angolare \vec{L}_Ω rispetto ad un punto Ω detto “polo” definito come

$$\vec{L}_\Omega = \vec{\Omega P} \times \vec{p}$$

DEF (Momento torcente o momento di una forza). Se su una particella P agisce una forza \vec{F} , si dice che \vec{F} avrà un momento $\vec{\tau}_\Omega$ rispetto ad un punto Ω detto “polo” definito come

$$\vec{\tau}_\Omega = \vec{\Omega P} \times \vec{F}$$

Teorema (Momento angolare). *In un sistema di riferimento inerziale, se si sceglie come polo un punto Ω fisso, la risultante dei momenti delle forze agenti su una particella P è pari alla derivata temporale del momento angolare della particella stessa.*

Dimostrazione. Consideriamo il sistema di riferimento ortonormale $Oxyz$. Per semplicità indichiamo $\vec{r} := \vec{\Omega P}$, $\vec{r}_\Omega := \vec{O\Omega}$ e $\vec{r}_P := \vec{OP}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_P - \vec{r}_\Omega)}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \\ &= \frac{d\vec{r}_P}{dt} \times m\vec{v} - \frac{d\vec{r}_\Omega}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_0 - \vec{v}_\Omega \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \\ &= \boxed{\vec{\tau}_\Omega - \vec{v}_\Omega \times \vec{p}} \end{aligned}$$

In particolare se il polo è fisso $\vec{v}_\Omega = 0$, quindi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_\Omega$$

QED

Corollario (Conservazione del momento angolare). *In un sistema di riferimento inerziale, se si sceglie come polo un punto fisso, il momento angolare di una particella si conserva se e solo se la risultante dei momenti torcenti delle forze agenti su di essa è nullo.*

Teorema (Momento dell'impulso). *In un sistema di riferimento inerziale, la variazione del momento angolare rispetto ad un polo Ω fisso di una particella in un intervallo di tempo molto breve è uguale al momento dell'impulso applicato alla particella nello stesso intervallo.*

$$\vec{L}_\Omega(t_2) - \vec{L}_\Omega(t_1) = \vec{r} \times \vec{J}_{1,2}$$

Dimostrazione. Si utilizza la notazione della dimostrazione precedente. Dal teorema del momento angolare

$$\vec{\tau}_\Omega = \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}$$

Integrando nel tempo entrambi i membri, per il teorema fondamentale del Calcolo

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_\Omega dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} dt = \vec{L}_\Omega(t_2) - \vec{L}_\Omega(t_1)$$

Se l'intervallo di tempo è molto piccolo possiamo considerare la particella ferma, quindi \vec{r} può essere considerato costante.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}_\Omega dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F}_{tot} dt = \vec{r} \times \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{tot} dt = \vec{r} \times \vec{J}_{1,2}$$

Da cui

$$\vec{L}_\Omega(t_2) - \vec{L}_\Omega(t_1) = \vec{r} \times \vec{J}_{1,2}$$

QED

5 Dinamica dei sistemi di particelle

5.1 Equazioni cardinali della dinamica delle particelle

Consideriamo un insieme di n particelle di dimensione trascurabile. È fondamentale scegliere cosa considerare interno al sistema e cosa esterno.

DEF (Forze interne e esterne). Si dicono **forze interne** le forze generate da corpi interni al sistema e **forze esterne** le forze generate da oggetti esterni al sistema.

Descrizione	Relativo alla singola particella	Totale del sistema
Risultante delle forze esterne	f_i^e	$F^e = \sum_i f_i^e$
Risultante delle forze interne	f_i^i	$F^i = \sum_i f_i^i$
Quantità di moto	p_i	$P = \sum_i p_i$
Momento torcente (forze interne)	τ_i^i	$M^i = \sum_i \tau_i^i$
Momento torcente (forze esterne)	τ_i^e	$M^e = \sum_i \tau_i^e$
Momento angolare	L_i	$\mathcal{L} = \sum_i L_i$
Lavoro (forze interne)	W_i^i	$\mathcal{W}^i = \sum_i W_i^i$
Lavoro (forze esterne)	W_i^e	$\mathcal{W}^e = \sum_i W_i^e$
Energia cinetica	$\frac{1}{2} m v_i^2$	$K = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$

Tabella 1: Notazione

per semplicità si omettono i simboli di vettore e la specifica del polo a pedice dei momenti (si sottintende che il polo sia Ω). Dalla dinamica delle singole particelle ricaviamo che

$$\begin{cases} F = ma \\ E_{CF} - E_{CI} = W \\ L_{NC} = \Delta E_M \\ \tau = \frac{dL}{dt} + v_\Omega \times p \end{cases}$$

Per ogni particella abbiamo che

$$f_i = f_i^e + f_i^i = ma = \frac{dp_i}{dt} \quad (i)$$

$$\tau_i = \tau_i^i + \tau_i^e = \frac{dL}{dt} + v_\Omega \times p_i \quad (ii)$$

$$W = W_i^i + W_i^e = \frac{1}{2} m_i v_{i,f}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{i,i}^2 \quad (iii)$$

Adesso sommiamo su tutte le particelle

- forze

$$\begin{aligned} \sum_i f_i &= \sum_i f_i^e + \sum_i f_i^i = \sum_i \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \right) \\ F^e + F^i &= \frac{dP}{dt} \end{aligned} \quad (I)$$

- momenti

$$\begin{aligned} \sum_i \tau_i &= \sum_i \tau_i^i + \sum_i \tau_i^e = \sum_i \frac{dL}{dt} + \sum_i v_\Omega \times p_i = \frac{dL_i}{dt} + v_\Omega \times \sum_i p_i \\ M^i + M^e &= \frac{d\mathcal{L}}{dt} + v_\Omega \times P \end{aligned} \quad (II)$$

- lavori

$$\begin{aligned} \sum_i W &= \sum_i W_i^i + \sum_i W_i^e = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,f}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,i}^2 \\ \mathcal{W}^i + \mathcal{W}^e &= K_f - K_i \end{aligned} \quad (III)$$

Principio (Dinamica III - sistemi). *In un sistema di riferimento inerziale la quantità di moto totale e il momento angolare totale rispetto ad un polo fisso di un sistema libero si conservano.*

Per le ipotesi del terzo principio supponiamo $F^e = 0$ e $v_\Omega = 0$. Allora

$$\begin{cases} \cancel{P^e} + F^i = \cancel{\frac{dP}{dt}} \\ M^i + \cancel{M^e} = \cancel{\frac{d\mathcal{L}}{dt}} + v_\Omega \times \cancel{P} \\ \mathcal{W}^i + \cancel{\mathcal{W}^e} = K_f - K_i \end{cases} \implies \begin{cases} F^i = 0 \\ M^i = 0 \\ \mathcal{W}^i = K_f - K_i \end{cases} \quad (5)$$

Inoltre si ricava che anche se cade l'ipotesi per cui il sistema deve essere libero, si ha comunque il sistema (5). Questo porta quindi ad una semplificazione delle equazioni I, II e III, ovvero alle **equazioni cardinali della dinamica delle particelle**:

$$\begin{cases} F^e = \frac{dP}{dt} \\ M^e = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \end{cases} \quad \text{con } \Omega \text{ fisso} \quad (6)$$

Si dimostra inoltre che il terzo principio della dinamica dei sistemi è equivalente al principio di azione e reazione:

Dimostrazione. Siano P_1 e P_2 due particelle. Per il principio di azione e reazione $f_{12} = -f_{21}$ sono dirette lungo la congiungente. Dalle equazioni (5)

- $F_i = 0$, quindi $f_{12} + f_{21} = 0$, per cui $f_{12} = -f_{21}$

- $M^i = 0$, quindi scegliamo un polo Ω qualsiasi e chiamiamo $\vec{r}_1 = \overrightarrow{\Omega P_1}$ e $\vec{r}_2 = \overrightarrow{\Omega P_2}$. Segue che

$$\tau_1 + \tau_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 \times f_{21} + r_2 \times f_{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r_1 - r_2) \times f_{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{12} \times f_{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{12} // r_{12}$$

QED

5.2 Centro di massa

DEF (Centro di massa). Dote n particelle di cui conosciamo la massa m_i e la posizione \vec{r}_i si definisce centro di massa del sistema il punto $C_M = O + \vec{r}_{CM}$ tale che

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

5.2.1 Equazioni cardinali e centro di massa

Teorema (Centro di massa). *Il centro di massa di un sistema con massa \mathcal{M} costante si muove come una particella in cui è concentrata tutta la massa del sistema e è applicata una forza pari alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema stesso.*

Dimostrazione. Consideriamo la definizione di centro di massa. Osserviamo che a denominatore compare la massa totale del sistema $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i$. Moltiplicando ad entrambi i membro per \mathcal{M} otteniamo

$$\mathcal{M} \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

Derivando nel tempo

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{M} \vec{r}_{CM}) = \mathcal{M} \vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = P$$

Osserviamo quindi che la quantità di moto totale del sistema P è quella che avrebbe una particella di massa pari alla massa totale del sistema che si muove con la velocità del centro di massa.

Derivando ancora rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathcal{M} \vec{v}_{CM}) &= \frac{dP}{dt} = F^e \\ F^e &= \mathcal{M} \vec{a}_{CM} \end{aligned} \quad (7)$$

ovvero l'equazione del moto del centro di massa.

QED

Riprendiamo l'equazione (II). Abbiamo quindi che

$$M^e = \frac{d\mathcal{L}}{dt} + v_\Omega \times P$$

poniamo ora $\Omega \equiv C_M$, allora siccome $P = \mathcal{M}v_{CM}$, si ricava

$$v_{CM} \times P = v_{CM} \times \mathcal{M}v_{CM} = 0$$

Da cui abbiamo la formulazione completa delle equazioni cardinali della dinamica dei sistemi:

$$\begin{cases} F^e = \frac{dP}{dt} \\ M^e = \frac{d\mathcal{L}}{dt} \end{cases} \quad \text{con } \Omega \text{ fisso o } \Omega \equiv C_M \quad (8)$$

5.3 Urti e esplosioni

Si dice urto un'interazione molto breve e molto intensa tra due particelle in cui si sviluppano forze impulsive. Possiamo quindi assumere che durante l'urto le posizioni rimangano invariate, per cui le energie potenziali non cambiano subito prima e subito dopo l'urto. Se all'istante $t = 0$ avviene l'urto e le particelle sono libere $J_{imp}^e = 0$, per cui

$$J_{imp}^e = \int_{0^-}^{0^+} F^e dt = \int_{0^-}^{0^+} \frac{dP}{dt} dt = P(0^+) - P(0^-) = 0$$

la quantità di moto totale del sistema si conserva. Se invece il sistema non è libero

$$J_{imp}^e = \Delta P$$

Analogamente, se il sistema è libero da forze impulsive esterne il momento angolare si conserva, mentre se sono presenti forze impulsive esterne, il momento dell'impulso totale è uguale alla variazione del momento angolare

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{j}_i = \Delta \mathcal{L}$$

Se il sistema è vincolato, è possibile che i vincoli possano dare luogo a forze impulsive esterne: la quantità di moto si conserva solo nelle direzioni in cui la risultante delle forze impulsive esterne è nulla.

5.3.1 Classificazione degli urti

Proponiamo ora una breve classificazione degli urti in base alla variazione di energia durante l'urto.

- **Urti perfettamente elastici:** durante l'urto si conserva l'energia cinetica totale

$$\Delta E_c = 0$$

- **Urti perfettamente anelastici:** al termine dell'urto le particelle che si sono scontrate rimangono unite. Non si conserva l'energia cinetica.

$$\Delta E_c < 0$$

- **Esplosione:** un corpo si separa in più pezzi (un urto anelastico ma con il tempo al contrario). C'è un aumento di energia cinetica totale.

$$\Delta E_c > 0$$

5.4 Energia meccanica in un sistema di particelle

Abbiamo dimostrato precedentemente che

$$K_f - K_i = \mathcal{W}^e + \mathcal{W}^i$$

Se tutte le forze interne ed esterne sono conservative, per ogni particella si ha

$$W_i^e + W_i^i = -\Delta U_i^i - \Delta U_i^e$$

dove ΔU_i è la variazione di energia potenziale sulla singola particella i -esima. Sommando su tutte le particelle (definiamo $\Delta \mathcal{U} = \sum_i \Delta U_i = \mathcal{U}_f - \mathcal{U}_i$)

$$\begin{aligned}\sum_i W_i^i + \sum_i W_i^e &= \sum_i (-\Delta U_i^i) + \sum_i (-\Delta U_i^e) \\ K_f - K_i &= \mathcal{W}^i + \mathcal{W}^e = -\Delta \mathcal{U}^i - \Delta \mathcal{U}^e = \mathcal{U}_i^e + \mathcal{U}_i^i - \mathcal{U}_f^e - \mathcal{U}_f^i \\ \mathcal{E}_M &:= K_f + \mathcal{U}_f^e + \mathcal{U}_f^i = K_i + \mathcal{U}_i^e + \mathcal{U}_i^i\end{aligned}$$

Teorema (Conservazione energia meccanica). *Se su un sistema agiscono solo forze conservative (interne ed esterne), allora l'energia meccanica si conserva.*

Analogamente, se compaiono forze non conservative

$$K_f - K_i = \mathcal{W}_C^e + \mathcal{W}_C^i + \mathcal{W}_{NC}^e + \mathcal{W}_{NC}^i$$

Per le forze conservative vale ancora

$$\mathcal{W}_C^i + \mathcal{W}_C^e = -\Delta \mathcal{U}^i - \Delta \mathcal{U}^e = \mathcal{U}_i^e + \mathcal{U}_i^i - \mathcal{U}_f^e - \mathcal{U}_f^i$$

Quindi

$$\mathcal{E}_{M,f} - \mathcal{E}_{M,i} = \underbrace{K_f + \mathcal{U}_f^i + \mathcal{U}_f^e}_{\mathcal{E}_M} - \left(\underbrace{K_i + \mathcal{U}_i^i + \mathcal{U}_i^e}_{\mathcal{E}_M} \right) = \mathcal{W}_{NC}^e + \mathcal{W}_{NC}^i$$

5.5 Il sistema di riferimento del centro di massa

Consideriamo un sistema di riferimento in cui l'origine coincide con il centro di massa e i cui assi hanno un'orientazione costante rispetto al sistema di riferimento inerziale $Oxyz$. Indichiamo con un apice le grandezze relative al sistema di riferimento $C_M x' y' z'$ del centro di massa.

Osserviamo la quantità di moto dal sistema $C_M x' y' z'$. Abbiamo ricavato precedentemente che $v_i = v_{CM} + v'_i$. Di conseguenza, moltiplicando per le masse e sommando su tutte le particelle ricaviamo che

$$P' = \sum_i m_i v'_i = \sum_i m_i v_i - \mathcal{M} v_{CM} = 0$$

per quanto discusso al punto 5.2.1. Di conseguenza la quantità di moto totale del sistema rispetto al sistema di riferimento del centro di massa è sempre nulla.

5.5.1 Teoremi di König

Teorema (König - energia cinetica di un sistema di particelle). *In un sistema di riferimento inerziale l'energia cinetica di un sistema materiale può essere espressa come la somma dell'energia cinetica che il sistema avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa con velocità pari a quella del centro di massa stesso, più l'energia cinetica del sistema nel sistema di riferimento del centro di massa.*

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_{CM}^2 + K'$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{CM} + v'_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i m_i v_{CM} \cdot v'_i = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{M} v_{CM}^2 + K' + v_{CM} \cdot \underbrace{\sum_i m_i v'_i}_{=P'=0} = \boxed{\frac{1}{2} \mathcal{M} v_{CM}^2 + K}\end{aligned}$$

QED

Teorema (König - momento angolare di un sistema di particelle). *In un sistema di riferimento inerziale il momento angolare di un sistema materiale può essere espresso come la somma del momento angolare che il sistema avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro di massa con velocità pari a quella del centro di massa stesso, più il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa usato come polo.*

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times \mathcal{M}\vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$

Dimostrazione. Scegliamo come polo l'origine O del sistema di riferimento inerziale.

$$\begin{aligned} L_O &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = \\ &= \vec{r}_{CM} \times \underbrace{\sum_i m_i}_{\mathcal{M}} \vec{v}_{CM} + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}_i}_{=P=0} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_{CM}}_{=\vec{r}'_{CM}=0} + \underbrace{\sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i}_{L_{CM}} = \\ &= \boxed{\vec{r}_{CM} \times \mathcal{M}\vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM}} \end{aligned}$$

QED

6 Elementi di meccanica di sistemi rigidi semplici

DEF (Corpo rigido). Un corpo rigido è un sistema materiale indeformabile. Può essere schematizzato da un sistema di punti materiali a distanza fissata.

Un corpo rigido non vincolato è un sistema a sei gradi di libertà, ovvero la sua posizione tridimensionale è univocamente determinata da 6 coordinate.

Preso un punto P qualsiasi (spesso conviene scegliere il centro di massa) e un asse qualsiasi solidale al corpo rigido

- 3 coordinate cartesiane indicano la posizione di P
- 2 angoli specificano l'orientazione dell'asse
- 1 angolo specifica la rotazione del corpo rigido attorno all'asse.

Se in un certo istante il corpo rigido sta ruotando con velocità angolare $\vec{\omega}$ la velocità di un generico punto P può essere espressa nella forma

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P$$

Osserviamo quindi che un corpo rigido è un sistema che rototrasla, tuttavia il sistema di riferimento del centro di massa trasla solamente, mentre nel sistema di riferimento del centro di massa il corpo ruota solamente.

Condizioni di equilibrio Un corpo rigido è in equilibrio se la risultante delle forze esterne è nulla e il momento risultante dei momenti esterni è nullo (relativamente ad un polo fisso o al centro di massa).

6.1 Momento di inerzia

Supponiamo un manubrio che ruota nel piano yz con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$ perpendicolare al manubrio. Indichiamo con d_1 la distanza della particella di massa m_1 dal centro di massa e con d_2 la distanza della particella di massa m_2 dal centro di massa. Allora

$$\vec{v}'_1 = \vec{\omega} \times \vec{d}_1 \quad \vec{v}'_2 = \vec{\omega} \times \vec{d}_2$$

Inoltre, per il teorema di König (II)

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times \mathcal{M}\vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$

Di conseguenza

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = d_1 m_1 \omega d_1 \hat{x} + d_2 m_2 \omega d_2 \hat{x} = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \omega \hat{x} = I \vec{\omega}$$

Definiamo quindi il momento di inerzia

DEF (Momento di inerzia). Definiamo momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al manubrio e passante per il centro di massa la quantità

$$I_{CM} = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$

Inoltre, se deriviamo l'equazione precedente nel tempo

$$\vec{M}_{CM}^e \frac{dL_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (I_{CM} \vec{\omega}) = I_{CM} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_{CM} \vec{\alpha}$$

Analogamente per l'energia ricaviamo che

$$K' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 = \frac{1}{2} m_1 (\omega d_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\omega d_2)^2 = \frac{1}{2} (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

6.2 Intervento di impulsi esterni

L'intervento di forze impulsive esterne modifica la quantità di moto totale del corpo rigido (quindi quella del centro di massa). Per il teorema dell'impulso e della quantità di moto, infatti

$$\vec{J}^e = \vec{P}(0^+) - \vec{P}(0^-)$$

. Inoltre può produrre anche variazioni del momento angolare, infatti dal teorema del momento dell'Impulso

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{j}_i^e = \vec{L}(0^+) - \vec{L}(0^-)$$

7 Attrazione gravitazionale

Nel 1686 Isaac Newton osservando il moto della Luna e dei gravi posti in prossimità della superficie terrestre elaborò la legge di gravitazione universale:

Legge (Gravitazione universale). Due corpi di masse m_1 e m_2 posti rispettivamente nelle posizioni \vec{r}_1 e \vec{r}_2 esercitano l'uno sull'altro delle forze attrattive del tipo

$$\vec{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

Dove $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ è la costante di gravitazione universale.

Tutte le prove sperimentali compiute finora hanno mostrato come la massa inerziale che compare nel secondo principio della dinamica e la massa gravitazionale che compare nella legge di gravitazione universale coincidono con un errore di 10^{-15} .

7.1 Energia potenziale gravitazionale

Consideriamo un sistema di riferimento in coordinate polari in cui la massa M si trova nell'origine.

$$L_{AB} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r_{12}^2} \hat{e}_r \cdot d\vec{s} = \int_A^B -G \frac{Mm}{r_{12}^2} dr = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Abbiamo dimostrato che il lavoro non dipende dalla traiettoria, per cui la forza è conservativa. Di conseguenza è possibile definire un'energia potenziale:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

In questo modo non esiste un punto in cui l'energia potenziale sia nulla, scegliamo di fare in modo che sia nulla quando le masse si trovano ad una distanza infinita.

Osserviamo inoltre che la forza gravitazionale ha momento torcente nullo perché è sempre parallela al raggio, per cui il momento angolare si conserva sempre. Di conseguenza essa dà origine ad un moto piano.

7.1.1 Velocità di fuga

Dire che un oggetto sfugge all'attrazione gravitazionale terrestre significa affermare che arrivi così lontano che l'energia potenziale gravitazionale si annulli con velocità nulla (caso minimo)

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$
$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Che per un oggetto che parte dalla superficie terrestre è di circa $11,2 \text{ km/s}$