

# Calcolo della matrice associata alla mappa duale

Davide Borra

## 1 Richiami sugli spazi duali

Sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  e sia  $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$  una sua base. Allora, detti  $\forall i = 1, \dots, n$ ,

$$u_i^\vee : V \rightarrow \mathbb{K} \quad u_i^\vee(u_j) = \delta_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

essi costituiscono una base  $\beta^\vee = \{u_1^\vee, \dots, u_n^\vee\}$  di  $V^\vee$ . In particolare, dato un qualunque vettore  $v \in V$ , se indichiamo

$$\begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_\beta \iff v = \sum_{j=1}^n v_j u_j,$$

allora  $u_i^\vee$  non fa altro che “selezionare” la riga  $i$ -esima di  $(v)_\beta$ :

$$u_i^\vee(v) = u_i^\vee \left( \sum_{i=1}^n v_i u_i \right) = \sum_{j=1}^n v_j u_i^\vee(u_j) = v_i. \quad (1)$$

Inoltre, per un qualsiasi elemento  $h \in V^\vee$ , possiamo scriverlo in componenti rispetto alla base duale come

$$h = \sum_{i=1}^n h(u_i) u_i^\vee \iff \begin{pmatrix} h \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}_{\beta^\vee} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}_{\beta^\vee} \quad (2)$$

dove  $h_i := h(u_i)$  (la verifica è un facile esercizio che credo sia stato svolto in classe). In questo modo abbiamo scritto  $h$  in coordinate rispetto a  $\beta^\vee$ . Ora, se calcoliamo  $h(v)$ ,

$$h(v) = \sum_{i=1}^n h(u_i) u_i^\vee \left( \sum_{j=1}^n v_j u_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h(u_i) v_j u_i^\vee(u_j) = \sum_{i=1}^n h(u_i) v_i = \sum_{i=1}^n h_i v_i$$

Questo ci permette anche di vedere  $h$  come matrice con una riga e  $n$  colonne

$$h = (h_1 \quad \cdots \quad h_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

in quanto

$$h(v) = (h_1 \quad \cdots \quad h_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = h_1 v_1 + \cdots + h_n v_n.$$

Scrivendo  $h$  come matrice riga, non lo interpretiamo più come elemento di  $V^\vee$  scritto in coordinate rispetto a  $\beta^\vee$  ma come matrice rappresentativa di  $h$  rispetto alla base  $\beta$  di  $V$ .

## 2 Calcolo della matrice associata

Siano  $V$  e  $W$  due  $\mathbb{K}$ -spazi vettoriali di dimensione finita  $n$  e  $m$  rispettivamente. Siano  $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base di  $V$  e  $\gamma = \{e_1, \dots, e_m\}$  una base di  $W$ . Indichiamo con  $\beta^\vee$  e  $\gamma^\vee$  le corrispondenti basi duali. Sia inoltre dato un omomorfismo  $f : V \rightarrow W$ : allora esso induce un omomorfismo  $f^\vee : W^\vee \rightarrow V^\vee$  dato da  $h \mapsto h \circ f$ . Siamo interessati a determinare la matrice rappresentativa di  $f^\vee$  rispetto alle basi  $\beta^\vee$  e  $\gamma^\vee$ .

Osserviamo innanzitutto che per definizione di matrice rappresentativa,

$$\begin{aligned} M_{\gamma\beta}f &= \left( \begin{array}{c|c} \left(f(u_1)\right)_\gamma & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \left(f(u_n)\right)_\gamma \end{array} \right) = \begin{pmatrix} e_1^\vee(f(u_1)) & \cdots & e_1^\vee(f(u_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_m^\vee(f(u_1)) & \cdots & e_m^\vee(f(u_n)) \end{pmatrix} \\ &= \left( e_i^\vee(f(u_j)) \right)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

dato che, per (1),  $e_i^\vee$  non fa altro che selezionare l' $i$ -esima riga del vettore cui è applicata. Allo stesso modo, la matrice associata a  $f^\vee$  è data da

$$\begin{aligned} M_{\beta^\vee\gamma^\vee}f^\vee &= \left( \begin{array}{c|c} \left(f^\vee(e_1^\vee)\right)_\gamma & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \left(f^\vee(e_m^\vee)\right)_\gamma \end{array} \right) = \begin{pmatrix} f^\vee(e_1^\vee)(u_1) & \cdots & f^\vee(e_m^\vee)(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^\vee(e_1^\vee)(u_n) & \cdots & e_m^\vee(f(u_n)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1^\vee(f(u_1)) & \cdots & e_m^\vee(f(u_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^\vee(f(u_n)) & \cdots & e_m^\vee(f(u_n)) \end{pmatrix} = \left( e_j^\vee(f(u_i)) \right)_{ij} \in M_{n \times m}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

in quanto per (2) l' $i$ -esima riga della scrittura in coordinare di  $f^\vee(e_j^\vee) : V \rightarrow \mathbb{K}$  si ottiene calcolandolo in  $u_i$  e ricordando che per definizione

$$f^\vee(e_j^\vee) = e_j^\vee \circ f,$$

ovvero

$$f^\vee(e_j^\vee)(u_i) = (e_j^\vee \circ f)(u_i) = e_j^\vee(f(u_i)).$$

In particolare, se confrontiamo le due matrici,

$$M_{\gamma\beta}f = \left( e_i^\vee(f(u_j)) \right)_{ij} \quad M_{\beta^\vee\gamma^\vee}f^\vee = \left( e_j^\vee(f(u_i)) \right)_{ij}$$

è immediato come l'unica differenza sia data dal fatto che i pedici  $i$  (su cui sono indicizzate le *righe* in entrambe le matrici) e  $j$  (su cui sono indicizzate le *colonne* in entrambe le matrici) sono scambiati, ovvero

$$M_{\beta^\vee\gamma^\vee}f^\vee = \left( e_j^\vee(f(u_i)) \right)_{ij} = \left( e_i^\vee(f(u_j)) \right)_{ij}^\top = (M_{\gamma\beta}f)^\top.$$