



# Varietà Razionali Omogenee e Mappe di Nesting

Prova Finale

Corso di Laurea in Matematica

**Davide Borra (234561)**

21 Luglio 2025



UNIVERSITÀ  
DI TRENTO



# Indice

1 Gruppi algebrici affini

- ▶ Gruppi algebrici affini
- ▶ Varietà Razionali Omogenee
- ▶ Mappe di *nesting*



# Gruppi algebrici e azioni

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.



# Gruppi algebrici e azioni

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.
  - I gruppi di matrici sono gruppi algebrici affini:  $GL$ ,  $SL$ ,  $SO$ ,  $Sp$ .



# Gruppi algebrici e azioni

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.
  - I gruppi di matrici sono gruppi algebrici affini:  $GL$ ,  $SL$ ,  $SO$ ,  $Sp$ .
- **Azione algebrica** Un gruppo  $G$  agisce algebricamente su una varietà  $X$  se l'azione  $G \times X \rightarrow G$  è un morfismo di varietà.



# Gruppi algebrici e azioni

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Gruppo algebrico:** un gruppo algebrico è una varietà algebrica dotata di una struttura di gruppo, per cui prodotto e inversione sono morfismi di varietà algebriche.
  - I gruppi di matrici sono gruppi algebrici affini:  $GL$ ,  $SL$ ,  $SO$ ,  $Sp$ .
- **Azione algebrica** Un gruppo  $G$  agisce algebricamente su una varietà  $X$  se l'azione  $G \times X \rightarrow G$  è un morfismo di varietà.
- **Varietà omogenea:** varietà su cui agisce transitivamente il gruppo dei suoi automorfismi.



# Sottogruppi parabolici e di Borel

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.



# Sottogruppi parabolici e di Borel

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.
  - In  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo di Borel.



# Sottogruppi parabolici e di Borel

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.
  - In  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo di Borel.
- **Sottogruppo Parabolico:** sottogruppo contenente un sottogruppo di Borel.



# Sottogruppi parabolici e di Borel

## 1 Gruppi algebrici affini

- **Sottogruppo di Borel:** sottogruppo connesso, risolubile, chiuso e massimale rispetto a queste proprietà.
  - In  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  le matrici triangolari superiori sono un sottogruppo di Borel.
- **Sottogruppo Parabolico:** sottogruppo contenente un sottogruppo di Borel.
  - In  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  le matrici triangolari superiori a blocchi sono un sottogruppo parabolico.



# Indice

## 2 Varietà Razionali Omogenee

- ▶ Gruppi algebrici affini
- ▶ Varietà Razionali Omogenee
- ▶ Mappe di *nesting*



# Varietà Razionali Omogenee

## 2 Varietà Razionali Omogenee

- Una varietà proiettiva liscia si dice *razionale omogenea* se è il quoziente di un gruppo algebrico affine connesso (ovvero, se ammette un'azione algebrica transitiva da parte di un gruppo algebrico affine connesso).
- Il quoziente di un gruppo algebrico affine rispetto ad un suo sottogruppo è una varietà proiettiva se e solo se il sottogruppo è parabolico.



# Flag /1

## 2 Varietà Razionali Omogenee

Dato un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita  $n + 1$ , per ogni successione crescente di interi positivi  $0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = \dim V - 1$  possiamo costruire la varietà dei **flag**

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(d_1, \dots, d_k; \mathbb{P}(V)) &= \{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) \mid \dim \Lambda_i = d_i \text{ e } \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1} \forall i = 1, \dots, k-1\} \\ &\subset \mathbb{G}(d_1, \mathbb{P}(V)) \times \dots \times \mathbb{G}(d_k, \mathbb{P}(V)).\end{aligned}$$



## Flag /1

### 2 Varietà Razionali Omogenee

Dato un  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita  $n + 1$ , per ogni successione crescente di interi positivi  $0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = \dim V - 1$  possiamo costruire la varietà dei flag

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(d_1, \dots, d_k; \mathbb{P}(V)) &= \{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) \mid \dim \Lambda_i = d_i \text{ e } \Lambda_i \subset \Lambda_{i+1} \forall i = 1, \dots, k-1\} \\ &\subset \mathbb{G}(d_1, \mathbb{P}(V)) \times \dots \times \mathbb{G}(d_k, \mathbb{P}(V)).\end{aligned}$$

Essi possono essere rappresentati con un diagramma di Dynkin  $A_n$





## Flag /2

### 2 Varietà Razionali Omogenee

I flag possono essere ottenuti come quozienti di  $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$  rispetto a sottogruppi di matrici triangolari (superiori) a blocchi:

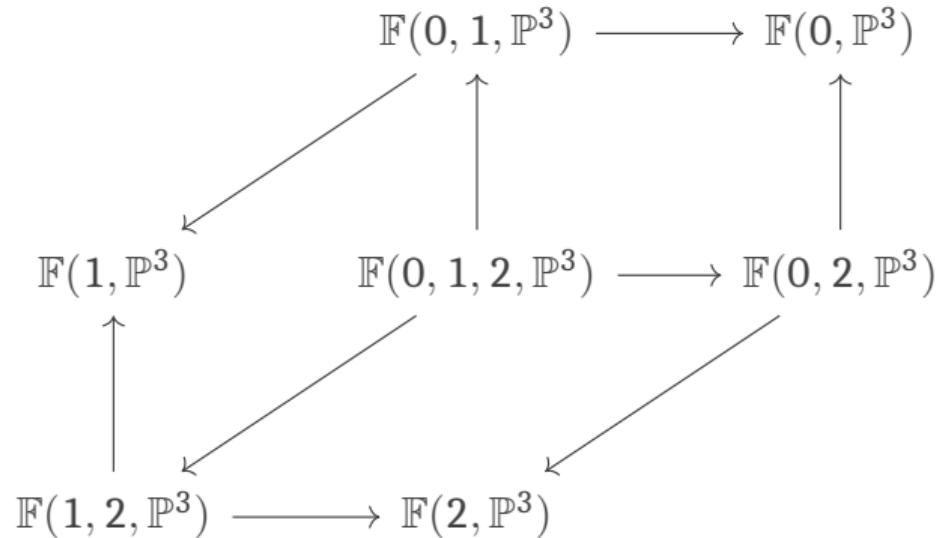
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ 0 & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$$

dove  $M_{ij} \in \mathrm{M}_{a_i \times a_j}(\mathbb{C})$  e gli  $a_i$  sono tali che  $\sum_{i=1}^j a_i = d_j + 1$ .



## Flag /3

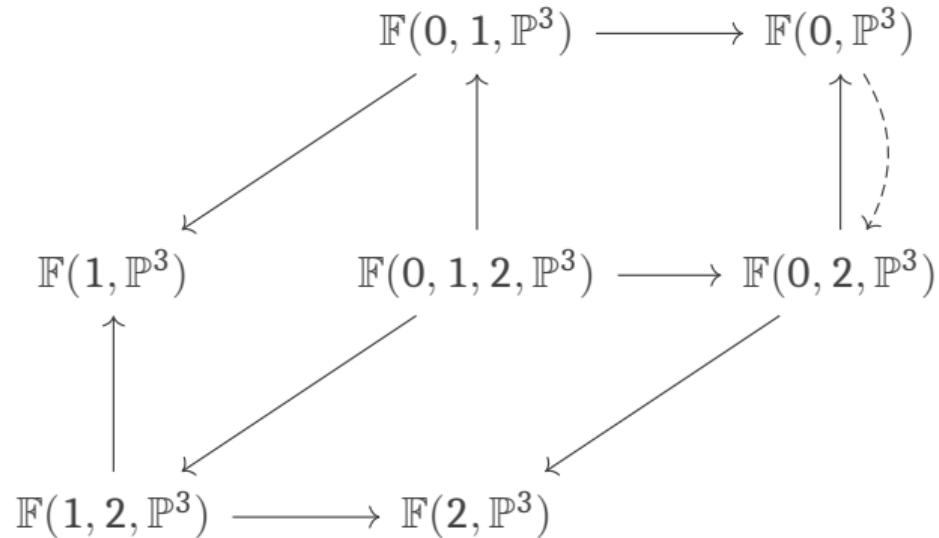
### 2 Varietà Razionali Omogenee





# Flag /3

## 2 Varietà Razionali Omogenee





# Flag isotropi

## 2 Varietà Razionali Omogenee

- Una costruzione simile può essere fatta considerando sottospazi di una quadrica: in questo caso si ottengono i Flag isotropi.



# Flag isotropi

## 2 Varietà Razionali Omogenee

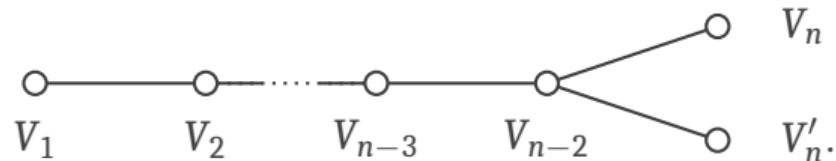
- Una costruzione simile può essere fatta considerando sottospazi di una quadrica: in questo caso si ottengono i Flag isotropi.
- Essi sono varietà razionali omogenee in quanto vi agisce transitivamente il gruppo  $O(2n, \mathbb{C})$ .



# Flag isotropi

## 2 Varietà Razionali Omogenee

- Una costruzione simile può essere fatta considerando sottospazi di una quadrica: in questo caso si ottengono i Flag isotropi.
- Essi sono varietà razionali omogenee in quanto vi agisce transitivamente il gruppo  $O(2n, \mathbb{C})$ .
- Sono descritti dal diagramma di Dynkin  $D_n$ .





# Indice

3 Mappe di *nesting*

- ▶ Gruppi algebrici affini
- ▶ Varietà Razionali Omogenee
- ▶ Mappe di *nesting*



# Definizione di *nesting* /1

## 3 Mappe di *nesting*

Il concetto di **nesting** è stato introdotto inizialmente come mappa tra Grassmaniane ( $k < r$ ) e successivamente generalizzato utilizzando il concetto di flag.

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow s & \searrow \pi_r \\ \mathbb{G}(k, \mathbb{P}^n) & \xrightarrow{n} & \mathbb{F}(k, r, \mathbb{P}^n) \\ & \nwarrow \pi_k & \end{array}$$



## Definizione di *nesting* /2

### 3 Mappe di *nesting*

Un'ulteriore generalizzazione è possibile grazie ai diagrammi di Dynkin. Dati due sottoinsiemi  $I \subsetneq I' = I \sqcup J$  dei nodi di un diagramma  $\mathcal{D}$ , un nesting di tipo  $(\mathcal{D}, I, J)$  è una sezione della proiezione

$$\mathcal{D}(I') \longrightarrow \mathcal{D}(I).$$



## Definizione di *nesting* /2

### 3 Mappe di *nesting*

Un'ulteriore generalizzazione è possibile grazie ai diagrammi di Dynkin. Dati due sottoinsiemi  $I \subsetneq I' = I \sqcup J$  dei nodi di un diagramma  $\mathcal{D}$ , un nesting di tipo  $(\mathcal{D}, I, J)$  è una sezione della proiezione

$$\mathcal{D}(I') \longrightarrow \mathcal{D}(I).$$

Ad esempio, per diagrammi di tipo  $D_4$ , la proiezione considerata è



e una sua sezione è un nesting di tipo  $(D_4, 3, 4)$ .



# Esistenza di nesting

## 3 Mappe di nesting

### Teorema

Sia  $G$  un gruppo algebrico semplice il cui diagramma di Dynkin  $\mathcal{D}$  è di tipo classico, e siano  $I, J$  due insiemi di nodi disgiunti e non vuoti tali che  $(\mathcal{D}, I, J)$  ammette un nesting. Allora  $(\mathcal{D}, I, J)$  è isomorfo ad uno dei seguenti

$$(\mathsf{A}_{2m-1}, 1, 2m-1) \quad m \geq 2, \quad (\mathsf{B}_3, 1, 3), \quad (\mathsf{D}_n, n-1, n) \quad n \geq 4.$$



## Nesting di tipo $(A_{2m-1}, 1, 2m - 1)$

### 3 Mappe di nesting

Determinati dalla scelta di una matrice antisimmetrica  $\Omega \in GL(2m, \mathbb{C})$  mediante la mappa

$$\begin{aligned}\sigma_\Omega : \quad \mathbb{F}(0, \mathbb{P}^{2m-1}) &\longrightarrow \mathbb{F}(0, 2, \mathbb{P}^{2m-1}) \\ \mathbf{p} &\longmapsto (\mathbf{p}, \mathbf{p}_\Omega^\perp)\end{aligned}$$

dove, se  $\mathbf{p} = [v]$ , definiamo

$$\mathbf{p}_\Omega^\perp := \{[w] \mid v^\top \Omega w = 0\} \in \mathbb{G}(2, \mathbb{P}^{2m-1}).$$



## Nesting di tipo $(D_n, n - 1, n)$

### 3 Mappe di nesting

Determinati dalla scelta di un punto  $\mathbf{p} = [v] \notin Q^{2n-2} = Z(x^\top \Omega x)$  mediante la mappa

$$\begin{aligned}\sigma_v : \quad D_n(n-1) \quad &\longrightarrow \quad D_n(n-1, n) \\ \Lambda^{n-1} \quad &\longmapsto \quad \Lambda^{n-1} \cap H_v,\end{aligned}$$

dove  $H_v := \{[w] \in \mathbb{P}^{2n} \mid v^\top \Omega w = 0\}$  è un iperpiano non tangente alla quadrica e  $\Omega$  è una matrice simmetrica.



# La struttura ottonionica di $\mathbb{P}^7$

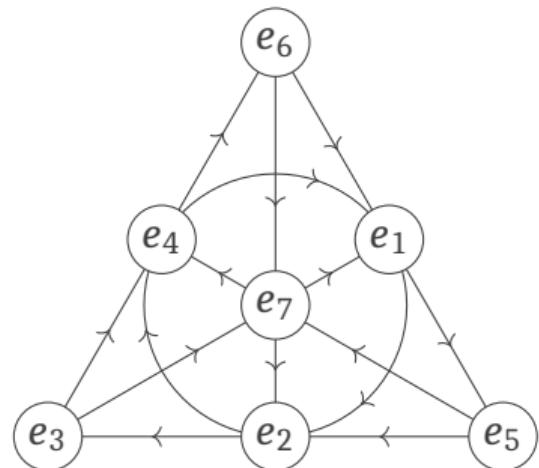
## 3 Mappe di *nesting*

Lo spazio  $\mathbb{P}^7$  può essere interpretato come lo spazio proiettivo  $\mathbb{OP}^1$ .

Possiamo pertanto definire

$$\mathcal{Q}^6 := \{[x] \mid x \in \mathbb{O}, x^*x = 0\} = \mathbb{B}_3(1)$$

$$\mathcal{Q}^5 = \mathcal{Q}^6 \cap \mathbb{P}(\text{Im}_{\mathbb{O}}) = \{[x] \mid x \in \mathbb{O}, x^2 = 0\} \simeq \mathbb{B}_3(3)$$





## Nesting di tipo $(B_3, 1, 3)$

3 Mappe di *nesting*

Determinati dalla scelta di un  $a \in \mathbb{O}$  invertibile mediante la mappa

$$\sigma_a([x]) := \Lambda_x^a \cap \mathcal{Q}^5 = \{[y] \in \mathcal{Q}^5 \mid x \circledast_a y = 0\} \quad \forall [x] \in \mathcal{Q}^6,$$

dove

$$v \circledast_a w := (v \cdot (w \cdot a)) \cdot a^{-1}.$$



# Varietà Razionali Omogenee e Mappe di Nesting

*Grazie per l'attenzione.*