La sezione aurea

come la matematica e l'arte collaborano per la bellezza

Matematica - UniTrento

24 novembre 2022

Davide Borra

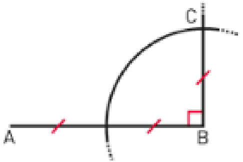
Università di Trento

La definizione geometrica

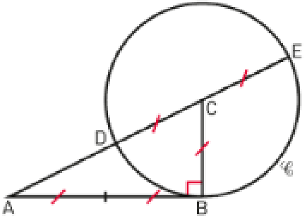
Definizione

La sezione aurea di un segmento è il punto appartenente al segmento che lo divide in due parti in cui il rapporto tra la maggiore e la minore è uguale a quello tra la lunghezza totale del segmento e la parte maggiore.

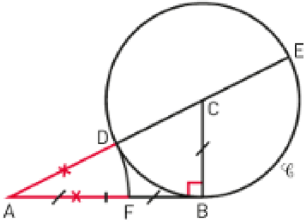
Costruzione con riga e compasso



a. Da B tracciamo la perpendicolare ad AB e su di essa prendiamo C in modo che $CB \cong \frac{1}{2} AB$.



b. Congiungiamo A con C. Con centro C, tracciamo la circonferenza $\mathscr{C}$ di raggio CB, che interseca AC in D e il suo prolungamento in E: $DC \cong CB \cong CE$.



c. Segniamo su AB un punto F tale che $AF \cong AD$.
AF è la sezione aurea di AB.

Nell'espressione "riga e compasso" con riga si intende un elemento rettilineo non graduato, ad esempio un righello cui si sono cancellati i numeri e le tacchette.

La definizione algebrica

Dalla definizione geometrica si ricava la definizione algebrica (siano a la parte maggiore e b la parte minore)

$$\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \varphi$$

Da cui si ricava che

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

Da cui, moltiplicando entrambi i membri per φ si ottiene

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Quindi, applicando la risolvente di secondo grado si ricava che

$$\varphi_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 \pm 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La definizione algebrica /2

Siccome φ è definito come rapporto tra quantità positive se considera solo la soluzione positiva, ma è importante ricordare che anche la soluzione negativa (indicata con Φ) gode di molte delle stesse proprietà, ad esempio quella sopra citata. Si ottiene quindi che

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398875\ldots$$

$$\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61803398875\ldots$$

Le proprietà di φ

- $\varphi^2 = \varphi + 1$
  L'abbiamo visto prima con la definizione algebrica. Vale per entrambi φ e Φ.
- $\Phi = -\varphi^{-1}$

Dimostrazione.

$$\varphi^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi$$

QED

- φ è l'unico numero reale il cui reciproco e quadrato mantengono invariata la propria parte decimale:

$$\varphi \approx 1,61803398875\dots \qquad \frac{1}{\varphi} \approx 0,61803398875\dots \qquad \varphi \approx -0,61803398875\dots$$

φ e le successioni

Focus (Leonardo Pisano (Pisa 1170-?))

Detto Fibonacci dal nome del padre, Bonaccio, è stato un importante matematico del medioevo italiano. Nella sua vita fece lunghi viaggi nel corso dei quali studiò la matematica araba che ripropose in occidente insieme alle conoscenze classiche in forma dimostrativa. A lui si deve l'introduzione in occidente del sistema di numerazione posizionale (numeri arabi) che mostrò essere più efficiente del vecchio sistema additivo-sottrattivo romano. È ricordato inoltre per la sua successione nata per descrivere lo sviluppo attraverso i mesi del numero di coppie di conigli. Essa è definita per ricorsione secondo la regola:

$$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

I primi numeri di Fibonacci sono i seguenti: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

φ e le successioni /2

I numeri di Fibonacci godono di una proprietà particolare: il rapporto tra un numero di Fibonacci e il suo precedente tende φ, in simboli ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \varphi$$

Essi, oltre ad essere uno dei modi più comuni in cui la sezione aurea si presenta in natura, sono il modo più semplice per ottenere figure geometriche basate su φ, ricordando che maggiori sono i numeri più il rapporto si avvicina a φ.

φ e le successioni /3

Focus (Édouard Lucas (Amiens 1842 – Parigi 1891))

È stato un importante matematico per i propri studi sulla teoria dei numeri, in particolare per quanto riguarda le equazioni diofantee e la ricerca dei numeri primi. A lui si deve la dimostrazione, intrapresa a 15 anni e conclusa dopo 19, della primalità del numero $2^{127}-1$, conclusa interamente a mano. Esso è il più grande numero primo mai individuato a mano.
Morì in circostanze insolite: si trovava al banchetto del congresso annuale dell'Association française pour l'avancement des sciences e, quando un cameriere fece cadere alcune stoviglie un pezzo di cristallo lo colpì alla guancia. La ferita fece infezione e Lucas morì di setticemia. Aveva solo 49 anni.
A lui si deve la definizione di una variante della successione di Fibonacci che porta il suo nome. Essa è definita per ricorsione secondo la regola:

$$\begin{cases} l_0 = 1 \\ l_1 = 0 \\ l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \end{cases}$$

φ e le successioni /4

I primi numeri di Lucas sono i seguenti: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... I numeri di Lucas godono della stessa proprietà dei numeri di Fibonacci: il rapporto tra un numero di Lucas e il suo precedente tende φ, in simboli ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{l_n}{l_{n-1}} = \varphi$$

Per queste proprietà entrambe le successioni sono definite successioni auree.

φ e le successioni /5

Esistono anche altre due successioni che convergono a φ

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}$$

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}$$

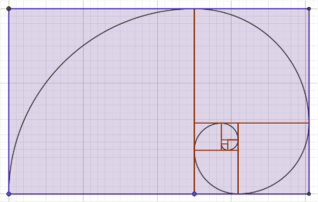
Queste formule matematicamente molto eleganti sottolineano ulteriormente l'importanza di questo numero.

La sezione aurea in geometria

La sezione aurea, soprattutto nella sua definizione geometrica, è presente in figure particolari che analizzeremo adesso da un punto di vista puramente geometrico in quanto ci permetteranno di comprendere dopo gli elementi architettonici che andremo a studiare.

Rettangolo e spirale aurea

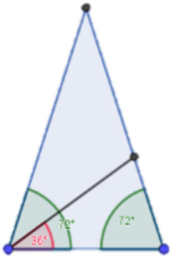
Il rettangolo aureo è un rettangolo il cui rapporto dei lati è φ e se si riporta il lato minore su quello maggiore le due parti che si ottengono sono a loro volta in rapporto con la sezione aurea. Si ottiene quindi un quadrato e un rettangolo i cui lati hanno ancora rapporto φ. Questo rettangolo può essere a sua volta diviso all'infinito. Tracciando per ogni quadrato l'arco di circonferenza che insiste su un angolo di $\frac{\pi}{2}$, raggio congruente al lato del quadrato, e centro nel vertice che seziona il segmento di base si ottiene una spirale definita aurea.



Questo schema è alla base di molti quadri ed è spesso utilizzato anche come griglia fotografica. Molti loghi commerciali sfruttano inoltre le potenzialità estetiche della spirale aurea per attirare maggiormente l'osservatore.

Triangolo aureo

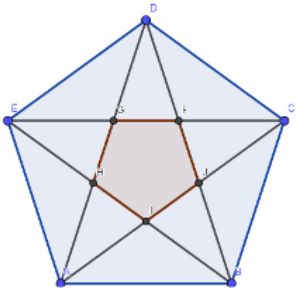
Il triangolo aureo è un triangolo isoscele in cui la base è a sezione aurea del lato obliquo. Esso ha la particolarità che le bisettrici degli angoli alla base generano ognuna un nuovo triangolo aureo.



Pentagono regolare

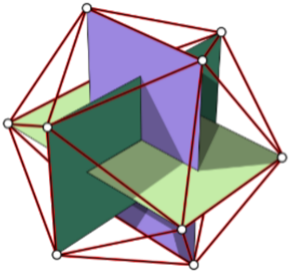
Il pentagono regolare, spesso sacralizzato nella storia per le sue particolari proprietà, ha acquisito nella storia diversi significati: dal simbolo pitagorico per la perfezione alla concezione cristiana che lo vede come riferimento satanico con il nome di pentacolo. Nell'antichità veniva considerato sacro per il fatto che se tracciate le sue diagonali esse avrebbero descritto un nuovo pentagono simile al precedente (ovvero hanno gli angoli ordinatamente congruenti e i lati ordinatamente in proporzione). Il pentagono regolare ha però altre caratteristiche degne di nota:

- Il triangolo descritto da un lato e l'angolo ad esso opposto è un triangolo aureo.
- I segmenti AD, AG, AH, GH sono proporzionali secondo la sezione aurea. Queste relazioni valgono per ogni diagonale del pentagono.
- il lato l e la diagonale d sono legati dalla relazione $d = \varphi \cdot l$



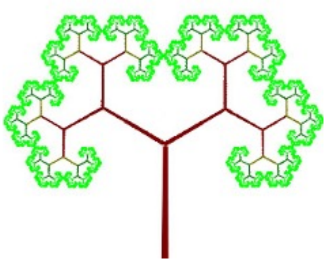
Solidi platonici

Le proporzioni auree si trovano anche in alcuni solidi platonici, come l'icosaedro regolare, poliedro composto da 20 triangoli equilateri che Luca Pacioli (un matematico del '500) riuscì a costruire attraverso l'intersezione di tre rettangoli aurei disposti secondo i tre assi. Unendo i dodici vertici dei rettangoli si ottengono le 20 facce dell'icosaedro.

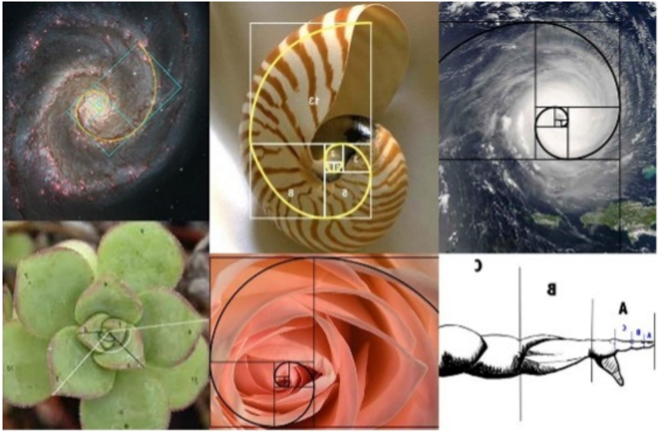


Frattali aurei

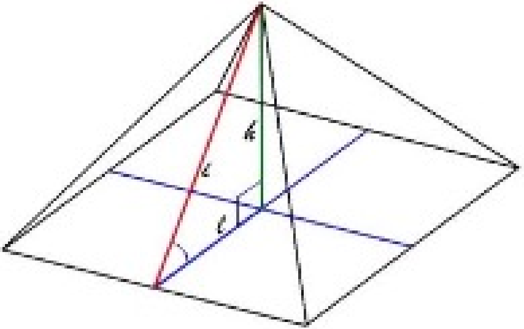
Esistono inoltre diversi frattali (un frattale è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto al variare dello zoom), ad esempio l'albero di Barnsley nel quale ogni segmento è sezione aurea di quello precedente e subisce una deviazione di 60°. In natura questo tipo di crescita è molto frequente.



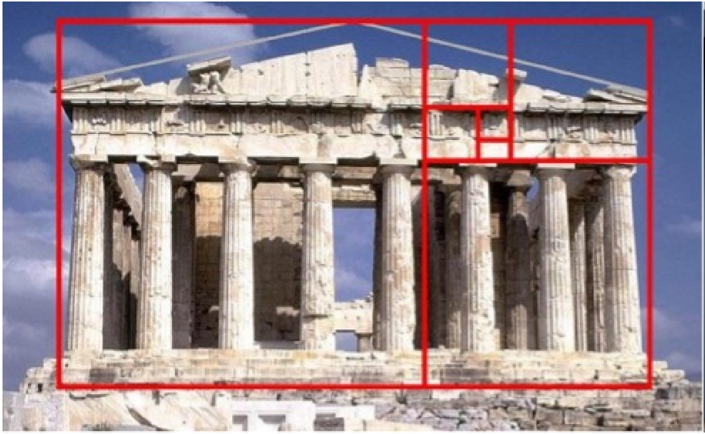
E ora un po' di esempi



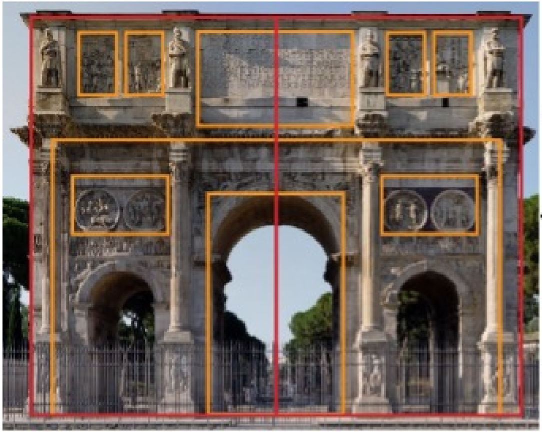
E ora un po' di esempi

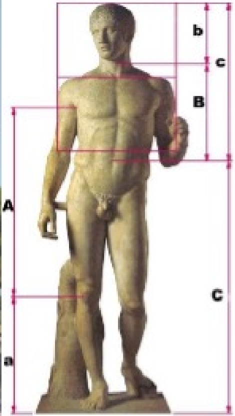


E ora un po' di esempi

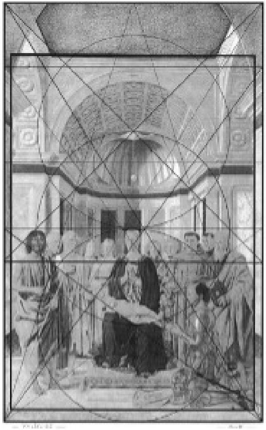


E ora un po’ di esempi

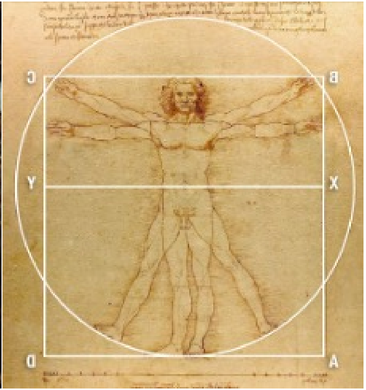




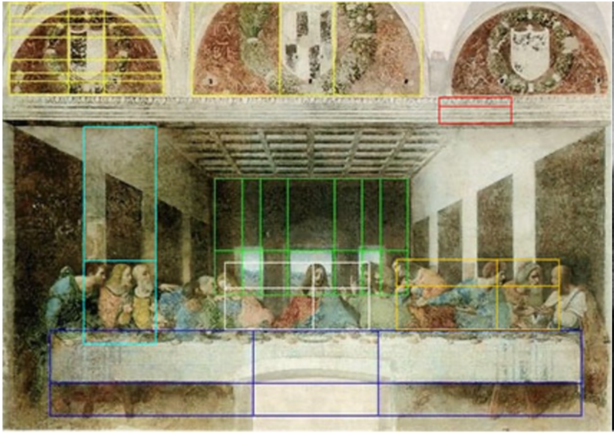
E ora un po' di esempi

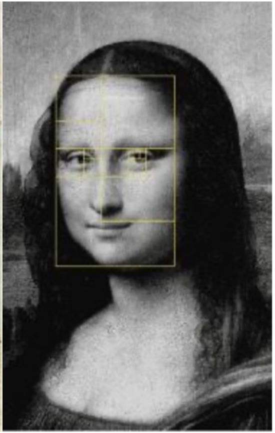


E ora un po' di esempi

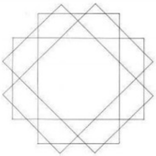
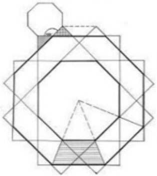
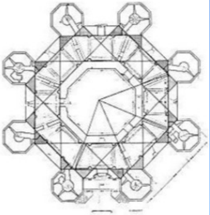
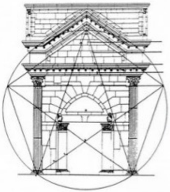


E ora un po' di esempi

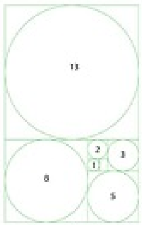


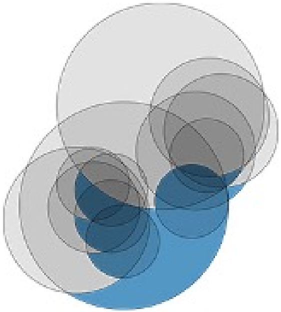


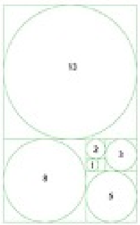
E ora un po' di esempi

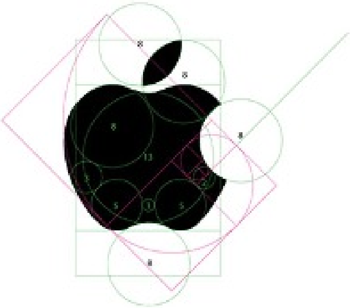






E ora un po' di esempi

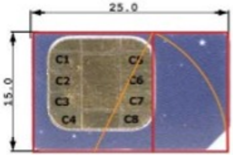








E ora un po' di esempi



E ora un po' di esempi