Analisi Numerica I

FORMULARIO

Ordine di convergenza $\exists k_0 > 0, C > 0$:

$$\frac{|x^{k+1} - \alpha|}{|x^k - \alpha|^p} \le C \quad \forall k \ge k_0$$

allora $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \to \alpha$ con ordine p. Il più piccolo C si dice fattore di convergenza, $\log C$ velocità di convergenza.

Approssimazione di radici

Metodo di bisezione Posti $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ con $f(a^0)\cdot f(b^0) < 0$ e $x^0 = \frac{a^0+b^0}{2}$, si itera:

$$\text{se } f(a^k)f(x^k) \begin{cases} = 0 & \alpha = x^k \quad \text{STOP} \\ < 0 & a^{k+1} = a^k \quad b^{k+1} = x^k \\ > 0 & a^{k+1} = x^k \quad b^{k+1} = b^k \end{cases}$$

$$x^{k+1} = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}$$

Errore: $|e^k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}$

Converge sempre ma lentamente e non con monotonia, non su può definire ordine.

Metodo di Newton Posti $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $x^0 \in [a,b]$, si itera:

$$x^{k+1} = x^k - (m)\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

Ordine: 2 per radici semplici ($m = 1$), 1 per radici multiple se m ignoto (lo poniamo 1). Se è nota la molteplicità si può rendere di ordine 2 sempre: ponendo m la molteplicità della radice.

Metodo delle corde parallele Posti $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ e $x^0 \in [a,b]$, fissato m si itera:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{m} \quad \left(e.g.\ m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right)$$

CN convergenza (radici semplici): $0 < \frac{f'(\alpha)}{m} < 2$
Ordine: 1 in generale, 2 se $m = f'(\alpha)$
Non sempre converge per radici multiple.

Metodo delle secanti Come metodo corde ma

$$m_k = \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}}$$

Converge localmente con ordine $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, servono due punti iniziali, non è di punto fisso.

Metodi di punto fisso Data Φ, trovare α t.c $\alpha = \Phi(\alpha)$
Teorema punto fisso: $\Phi \in \mathcal{C}^0([a,b])$ e $\Phi([a,b]) \subseteq [a,b]$ lipschitziana con $L < 1$, allora $\exists! \alpha \in [a,b]$ t.c $\alpha = \Phi(\alpha)$ e $\forall x^0 \in [a,b], \{\Phi(x^{k-1})\}_k \to \alpha$.
Teorema Ostrowski: α punto fisso di $\Phi \in \mathcal{C}^1(U)$ ($U \in \mathcal{N}(\alpha)$) t.c. $|\Phi'(\alpha)| < 1$. Esiste $V \in \mathcal{N}(\alpha)$ t.c. $\forall x^0 \in V, \{\Phi(x^k)\}_k \to \alpha$ e

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{k+1} - \alpha}{x^k - \alpha} = \Phi(\alpha)$$

Teorema ordine convergenza: α punto fisso di $\Phi \in \mathcal{C}^p(U)$ ($U \in \mathcal{N}(\alpha)$) con $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$ $(1 \le i < p)$ e $\Phi^{(p)}(\alpha) \ne 0$, allora il metodo ha ordine p e

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{k+1} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^p} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{p!}$$

Fattore di convergenza $C = \frac{|\Phi^{(p+1)}(\alpha)|}{p!}$.

Sistemi lineari

Preliminari
Dominanza diagonale (stretta se $>$):
- righe: $|a_{ii}| \ge \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$ e almeno una vale $>$
- colonne: $|a_{ii}| \ge \sum_{j\ne i} |a_{ij}|$ e almeno una vale $>$

stretta $\implies$ non singolare, minori principali dominanti non singolari, se è simmetrica e $a_i i > 0$ allora è definita positiva.
Raggio spettrale: $\rho(A) = \max_{\sigma(A)} |\cdot| = \inf_{\|\cdot\|_m} \|A\|_m$
Norma energia (A msdp): $\|v\|_A = \sqrt{v^t A v}$
Norma matriciale: $\|A\|_m = \sup_{v\ne 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ $(\|\cdot\| \in (\mathbb{R}^n)^\vee)$
vec: $\|\cdot\|_1 = \sum_i |v_i|$, $\|\cdot\|_\infty = \max_i |v_i|$, $\|\cdot\|_2 \sqrt{\sum_i |v_i|^2}$
mat: $\|\cdot\|_1$: col. max, $\|\cdot\|_\infty$: riga max, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
Frobenius (mat): $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$
Teorema norme matriciali indotte

$$\|A\|_m = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_v} \implies$$

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_m \|x\|_v \quad ; \quad \|I_n\|_m = 1 \quad ; \quad \|AB\|_m \le \|A\|_m \|B\|_m$$

Prodotto tra matrici triangolari

Triangolari uguali

$$c_{ij} = \sum_{k=\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}} a_{ik} b_{kj} \quad \text{se nella parte interessante altrimenti } c_{ij}=0$$

$LU = A$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} u_{kj}$$

Fsub e Bsub $Ax = b$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangolare

$$Fsub\ ({}_{*}\!\diagdown^{0}) : \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j\right) \end{cases}$$

$$Bsub\ ({}_{0}\!\diagdown^{*}) : \begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right) \end{cases}$$

Entrambi $O(n^2)$

Stabilità num cond: $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \ge 1$
Priori: $\frac{1}{C}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right) \le \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le C\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$
dove $C = \left(\frac{1 - K(A)\|\delta A\|/\|A\|}{K(A)}\right)^{-1}$
$K(A) \gtrsim 1 \Rightarrow$ ben condizionata; $K(A) \gg 1 \Rightarrow$ mal condizionata

Posteriori: x sol corretta, y sol calcolata Errore: $e = x - y$, Residuo: $r = b - Ay = Ae$ (non è un buon indicatore, bisogna guardare anche $K(A)$) $\frac{1}{K(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le K(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$

ElMetodo (aka MEG)

$$m_i^k = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \qquad \begin{aligned} a_{ij}^{k+1} &= a_{ij}^k - m_i^k \cdot a_{kj}^k \\ b_i^{k+1} &= b_i^k - m_i^k \cdot b_k^k \end{aligned}$$

Operazioni: $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Fattorizzazione LU $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

Doolittle
$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj} \\ l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk}\right) \end{cases} \qquad u_{kk} \ne 0$$

Crout
$$\begin{cases} l_{ik} = a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} u_{pk} \\ u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} u_{pj}\right) \end{cases} \qquad l_{kk} \ne 0$$

Cholesky A msdp
$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{kj} = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{kj} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{kp} l_{jp}\right) \qquad U = L^t \\ l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}^2} \end{cases}$$

Thomas A tridiag
$$\begin{cases} \alpha_1 = a_{11} \\ \beta_k = a_{k,k-1}/\alpha_{k-1} \quad \alpha_{k-1} \neq 0 \\ \alpha_k = a_{kk} - \beta_k a_{k-1,k} \end{cases} \qquad \text{tempo lineare } 8n-7 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \beta_2 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Pivoting MEG: righe o colonne, Doolittle: righe, Crout: colonne, Cholesky: righe o colonne.
Si scambia in modo da avere come nuovo pivot quello di modulo massimo.
Matrici di permutazione: se moltiplico prima scambio righe, se moltiplico dopo scambio colonne.

Righe: scompongo $PA = (PM^{-1})A^{(n)} = LU \Rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$

colonne: $Ly = b$; $Uz = y$; $Qx = z$

Metodi Iterativi (pt. fisso)

$$x^{k+1} = Bx^k + f$$
$$B = I - MA \quad ; \quad f = Mb$$
$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \alpha_k^{\nabla} = \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle r^k, Ar^k \rangle}$$
$$r^k = b - Ax^k$$
$$x^{k+1} = x^k + Mr^k$$

Metodo	M
Jacobi ®	D^{-1}
Gauss-Seidel ®	$(D-E)^{-1}$
JOR ®	ωD^{-1}
SOR	$\frac{D}{\omega} - E^{-1}$
Ⓡichardson	$\alpha_k P^{-1}$
Gradiente ®	$\alpha_k^{\nabla} I$

Convergenza $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$; Consistenza: $[Ax = b \Leftrightarrow x = Bx + f]$
Fattore di convergenza: $\rho(B)$
velocità di convergenza: $-\log \rho(B)$
GS converge $\Leftarrow$ • A msdp, *oppure*
• Adom diag stretta (righe o colonne)
J converge $\Leftarrow$ • A e $2D - A$ msdp, *oppure*
• A dom diag stretta (righe o colonne)
A tridiagonale $\Rightarrow \rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^2 \Rightarrow$ [GS conv $\Leftrightarrow$ J conv]
$\begin{cases} \text{[GS,J] Operazioni: } 2n^2 + O(n) \\ \text{J vettoriale, GS sequenziale.} \end{cases}$
J converge $\Rightarrow$ JOR converge per $0 < \omega < 1$
Se A simm def pos, [JOR converge $\iff 0 < \omega < \frac{2}{\rho(D^{-1}A)}$]
SOR converge $\implies 0 < \omega < 2$ in quanto $\rho(B_{GS}) \geq |1 - \omega|$
A msdp tridiagonale $\omega_{opt}^{SOR} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(D^{-1}A)^2}}$

Ⓡichardson stazionari
Consistenti $\iff \det P \neq 0 \wedge \alpha_{(k)} \neq 0$ almeno fino a convergenza. SOTTO QUESTE IPOTESI, LE SEGUENTI PROPRIETÀ:
- Convergente $\iff \forall \lambda \in \sigma(P^{-1}A),\ 0 < \frac{\alpha|\lambda|^2}{2\,\mathrm{Re}(\lambda)} < 1$
- $\sigma(P^{-1}A) \subset \mathbb{R}_{>0}$, converge $\iff 0 < \alpha < 2/\lambda_{max}$ e

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \; ; \; \rho(B_{\alpha_{opt}}) = \min_\alpha \rho(B_\alpha) = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

inoltre, se $P^{-1}A$ msdp,

$$\rho(B_{\alpha_{opt}}) = \frac{K_2(P^{-1}A) - 1}{K_2(P^{-1}A) - 1} \; ; \; \|e^{k+1}\|_A \leq \rho(B_\alpha)\|e^k\|_A$$

∇ richiede A msdp

∇ coniugato A msdp
$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{(p^k)^t r^k}{(p^k)^t A p^k} & x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k \\ r^{k+1} = r^k - \alpha_k A p^k & \beta_k = \frac{(Ap^k)^t r^{k+1}}{(p^k)^t A p^k} \\ p^{k+1} = r^{k+1} - \beta_k p^k & \end{cases}$$

Prop. ortogonalità:
$\langle r^k, p^{k+1} \rangle = 0 \qquad \langle p^{k+1}, Ap^k \rangle = 0 \qquad \langle r^k, r^{k+1} \rangle = 0$
$\langle r^i, r^j \rangle = 0 \qquad \langle p^i, Ap^j \rangle = 0$ se
A msdp, $\overline{\nabla}$ converge in al più n passi e $\langle e^k, p^j \rangle = 0$ $(j < k)$,

$$\|e\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2}k}\|e^0\|_A \qquad \text{dove } c = \frac{\sqrt{K_2(A)} - 1}{\sqrt{K_2(A)} + 1}$$

Interpolazione polinomiale

Interpolazione di Lagrange

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$ con $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$; $\left(\sum_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1\right)$

Nodi equispaziati $R_{n+1} = \{x_i = a + ih \in [a,b] \mid i = 0, \ldots, n\}$
dove $h = \frac{b-a}{n} \implies \ell_{n,i}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t-j}{i-j}$ con $x = a + th$

Nodi di Chebyshev
$R_{n+1} = \left\{ x_i = a + \frac{b-a}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}(n-i)\right)\right] \mid i = 0, \ldots, n \right\}$
anche qui i i polinomi di Lagrange non dipendono dall'intervallo ma dai nodi.
Entrambi i nodi sono simmetrici rispetto al centro dell'intervallo.

Matrice di interpolazione e costante di Lebesgue

$$X = \begin{pmatrix} R_1| & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & R_2| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & R_3| & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad \Lambda_n(X) = \left\| \sum_{i=0}^{n} |\ell_{n,i}(x)| \right\|_\infty$$

$\forall X, \exists C > 0: \; \Lambda_n(X) \geq \frac{2}{n}\log(n+1) - C$ $(\lim_{n \to +\infty} \Lambda_n(X) = +\infty)$
equispaziati: $\Lambda_n(X) \approx \frac{2^{n+1}}{en(\log n + \gamma)}$;
Chebyshev: $\Lambda_n(X) \leq \frac{2}{\pi}\left[\log\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \gamma\right] + \frac{\pi}{72n^2}$
Teorema errore puntiale posto $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$,
$Ef_n(x) = f(x) - Pf_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+i)!}\omega_{n+1}(x)$
Teorema stima errore
$Ef_{n,\infty}(x) = \|f - Pf_n\|_\infty \leq [1 + \Lambda_n(X)]Ef_n^{min}$
Teorema convergenza Chebyshev Se f è lipschitziana su $[a,b]$, la successione dei polinomi interpolatori con nodi di Chebyshev converge uniformemente a f su $[a,b]$. Teorema convergenza Se $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$, se $\lim_{k \to +\infty} \frac{(b-a)^k}{k!}\|f^{(k)}\|_\infty = 0$ la successione dei polinomi interpolatori converge a f su $[a,b]$ a prescindere dalla scelta dei nodi.

Interpolazione di Lagrange composita

Soddividiamo in M sottoreticoli con $k+1$ nodi ciascuno (conto due volte i nodi agli estremi), e interpolo su ogni sottoreticolo con un polinomio di grado k.
È stabile: $\|P_{M,k}(x) - \bar{P}_{M,k}(x)\|_\infty \leq \Lambda_k(X)\max_i |\delta y_i|$
Errore: (posta h l'ampiezza dei sottointervalli)
$\|Ef_{M,k}(x)\|_\infty = \|f(x) - Pf_{M,k}(x)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(k+1)}(\xi)\|_\infty}{(k+1)!}(hk)^{k+1}$
$\lim_{M \to +\infty} \|Ef_{m,k}(x)\|_\infty = 0$

Splines cubiche

$$S_{i+1}(x) = \frac{M_{i+1}}{6h_{i+1}}(x - x_i)^3 - \left(\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}\right)(x - x_i) + \\ -\frac{M_i}{6h_{i+1}}(x - x_{i+1})^3 + \left(\frac{h_{i+1}}{6}M_i - \frac{y_i}{h_{i+1}}\right)(x - x_{i+1})$$

dove gli M_i sono l'unica soluzione del sistema tridiagonale simmetrico ($M_0 = M_{n+1} = 0$ imposti)

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

che, se i nodi sono equispaziati diventa

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

Errore: Se $M_0 = f''(a)$ e $M_{n+1} = f''(b)$, x $\|f^{(r)} - S^{(r)}\|_\infty \leq C_r h_{max}^{4-r}\|f^{(4)}\|_\infty$ con C_0, C_1, C_2 costanti, C_3 dipende dai nodi.

Integrazione numerica

Formule di quadratura: $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$. Consistenza: integra esattamente costanti
Grado di esattezza r: integra esatta/. i polinomi di grado $\leq r$
Formule interpolatorie: $\alpha_i = \int_a^b \ell_{n,i}(x)dx$
Le formule interpolatorie sono consistenti. Una formila è interpolatoria se e solo se ha grado di esattezza $r \geq n$.

Formule di Newton-Cotes (i.e. interpolatorie, nodi equispaziati)
Chiuse $R_{n+1} = \{x_i = a + ih \in [a,b] \,|\, i = 0,\dots,n;\ h = \frac{b-a}{n}\}$
$\alpha_i = hw_i \quad w_i = \int_0^n \ell_{n,i}(t)dt;$ consistenti $\iff \sum_i w_i = n$.
Aperte $R_{n+1} = \{x_i = a + (i+1)h \in [a,b] \,|\, {\scriptstyle i=0,\dots,n};\ h = \frac{b-a}{n+2}\}$
$\alpha_i = hw_i \quad w_i = \int_{-1}^{n+1} \ell_{n,i}(t)dt;$ consistenti $\Leftrightarrow \sum_i w_i = n+2$.
I pesi non dipendono da $[a,b]$ ma solo da h e n; w_i e α_i sono simmetrici rispetto al centro dell'intervallo.

Nome	Metodo	GE
Rettangolo (a)	$I_0(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	1
Trapezi (c)	$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$	1
Simpson (c)	$I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$	3

Grado di esattezza $r = n$ se n dispari, $r = n+1$ se n pari.
Teorema valor medio discreto $u \in \mathcal{C}^0$, φ_i costanti concordi in segno. Allora $\exists \xi \in]a,b[$ t.c. $\sum_{i=0}^{n} \varphi_i u(x_i) = u(\xi)\sum_{i=0}^{n}\varphi_i$
Errore R $\frac{1}{3}h^3 f^{(2)}(\xi)$, T $-\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$, CS $-\frac{1}{90}h^4 f^{(4)}(\xi)$

Formule di N-C composite Reticolo con $M+1$ nodi, sottoreticoli con $k+1$ nodi.
Grado di esattezza k se k dispari, $k+1$ se k pari. Convergono con ordine $k+1$ se k dispari, $k+2$ se k pari.
$\Longrightarrow$ OC composite: Rettangolo 2, Trapezi 2, Simpson 4.
Errore Rettangoli $\frac{b-a}{6} f^{(2)}(\xi)(\frac{H}{2})^2 = \frac{b-a}{6} f^{(2)}(\xi)h^2$
Trapezi $\frac{b-a}{12} f^{(2)}(\xi)H^2$
Cavalieri-Simpson $\frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)(\frac{H}{2})^4 = \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\xi)h^4$
h ampiezza sottointervalli piccoli, H ampiezza intervalli grandi.

Derivazione numeriche

Diff. finite	Formula ($h>0$)	Errore
Avanti	$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$-\frac{h}{2}f''(\xi)$
Indietro	$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$	$\frac{h}{2}f''(\xi)$
Centrale	$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$	$-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$

Problemi di Cauchy

Dati $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f(t,y(t)) \in \mathcal{C}^0(I \times \mathbb{R})$, cerchiamo $y \in \mathcal{C}^1(I)$ t.c. $y'(t) = f(t,y(t))$ e $y(t_0) = y_0$, o, equiv. $y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$.
Teorema esistenza unicità locale se f localmente lipschitziana rispetto a y, $\exists! y$ soluzione locale.
Teorema esistenza unicità globale se f uniformemente lipschitziana rispetto a y, $\exists! y$ soluzione globale.

Stabilità PDC consideriamo il sistema perturbato $z'(t) = f(t,z(t)) + \delta(t)$ e $z(t_0) = y_0 + \delta_0$ t.c. $\exists! z$ soluzione.
DEF Stabilità Lyapunov Se I limitato, δ tale che $|\delta_0| < \delta$ e $|\delta(t)| < \delta \forall t \in I$. Il PDC so dice stabile secondo L. se $\exists C\ :\ \forall t \in I, |z(t) - y(t)| \leq C\delta$.
Teorema stab. Lyapunov Se f è uniformementeo lipschitziana rispetto a y, il PDC è stabile secondo Lyapunov.
DEF asintotica Stabilità Se I illimitato, il PDC si dice asintoticamente stabile se è Lyapunov-stabile su ogni sottointervallo limitato contenente t_0 e $\lim\limits_{t\to+\infty} |\delta(t)| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} |y(t) - z(t)| = 0$.

Nome	Metodo
E. avanti	$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i)$
E. indietro	$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1})$
D.centrate	$u_{i+1} = u_{i-1} + 2hf(t_i, u_i)$
C-N	$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i,u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})\right]$
Heun	$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i,u_i) + f(t_{i+1}, u_i + hf(t_i,u_i))\right]$

Nome	esplicito implicito	Passi $(p+1)$	Lin	OCons	Oconv
E. avanti	E	$1 = 0 + 1$	L	1	1
E. indietro	I	$1 = 0 + 1$	L	1	
D. centrate	E	$2 = 1 + 1$	L	2	
C-N	I	$1 = 0 + 1$	L	2	
Heun	E	$1 = 0 + 1$	NL	2	2

u^*_{i+1} calcolata usanto nel metodo y al posto di u.
Errore di troncamento locale: $\tau_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - u^*_{i+1}}{h}$
Errore di troncamento globale: $\tau(h) = \max_i |\tau_{i+1}(h)|$
Consistenza $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = 0$ - Ordine cons q se $\tau(h) = O(h^q)$

Stabilità metodi
(zero) $\exists h_0 > 0, C > 0$ t.c. $\forall h \in]0, h_0[$ e $\forall i$ si ha $|u_i - z_i| \leq C\delta$
δ perturbazione massima, C costante, z soluzione calcolata del sistema perturbato.
Teorema zero-stab. metodi espliciti a un passo. Riscrivendo il metodo come $u_{i+1} = u_i + h\Phi(t_i, u_i; h)$ se Φ è lipschitziana rispetto a u con $t \in [t_0, t_0 + T]$ (Λ), il metodo è zero stabile con $C = \left(1 + \frac{1}{\Lambda}\right) e^{T\lambda}$
(assoluta) applicando il metodo al problema modello $y' = \lambda y, y(0) = 1$ $(t < 0, \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda < 0)$ la cui soluzione esatta è $y(t) = e^{\lambda t}$, il metodo si dice assolutamente stabile se $\exists h_0 > 0\ :\ \lim_{t_i \to +\infty} |u_i| = 0\ \forall h \in]0, h_0[$
Regione di assoluta stabilità:
$\{h\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \text{il metodo è assolutamente stabile}\}$

Metodo	Regione di assoluta-stabilità
E. avanti	$\{h\lambda \in \mathbb{C}^- \,\vert\, 0 < h < -\frac{2\operatorname{Re}\lambda}{\Vert\lambda\Vert^2}\}$
E. indietro	$\{h\lambda \in \mathbb{C} \,\vert\, \vert 1 - h\lambda\vert > 1\}$
C-N	$\mathbb{C}^- = \{h\lambda \in \mathbb{C} \,\vert\, \operatorname{Re}(h\lambda) < 0\}$
Heun	$\{h\lambda \in \mathbb{C} \,\vert\, \vert 1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2\vert \leq 1\}$

Errore metodi espliciti ad un passo, Φ lipschitziana rispetto a u con $t \in [t_0, t_0 + T]$ (Λ), allora $|e_i| = |y_i - u_i| \leq \left(|e_0| + \frac{\tau(h)}{\Lambda}\right) e^{ih\Lambda}$

Metodi di Runge-Kutta un passo, espliciti, non lineari, s stadi. Consideriamo solo quelli in cui K_j dipende solo da quelli già calcolati (in generale $\Diamond = s$, qui $\Diamond = j - 1$).

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1} = u_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j K_j \\ K_j = f(t_i + c_j h, u_i + h\sum_{l=1}^{\Diamond} a_{jl} K_l) \\ c_j = \sum_{l=1}^{\Diamond} a_{jl} \in [0,1] \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline 0 & b \end{array}\right)$$

Completamente caratterizzato dalla matrice di Butcher $\uparrow$.
Consistenza $\iff \sum_j b_j = 1$ **Ordine** $q \leq s$ ($q < s$ se $s > 4$)
Ordine 2 $\iff b_1 + b_2 = 1$ e $b_2 c_2 = \frac{1}{2}$
Convergenza con ordine q se $\tau(h)$ e $|e_0|$ vanno a 0 come h^q.
Regione di assoluta stabilità $\left\{h\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|1 + \sum_{k=1}^{s} \frac{(h\lambda)^k}{k!}\right| < 1\right\}$

Equazioni alle differenze lineari (di ordine k) $u_{i+k} + \alpha_{k-1}u_{i+k-1} + \cdots + \alpha_0 u_i = \varphi_{i+k}$ (omogenea $\varphi_{i+k} = 0$)
Polinomio caratteristico $\Pi(r) = r^k + \alpha_{k-1}r^{k-1} + \cdots + \alpha_0$
Soluzioni fondamentali $\{r_i^j\}_j$, k' radici distinte con molteplicità m_j. Tutte le soluzioni: $u_i = \sum_{j=1}^{k'} \left(\sum_{s=1}^{m_j - 1} \gamma_{sj} i^s\right) r_j^i$ (γ determinati imponendo condizioni iniziali.)

Metodi multistep

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \quad u_1, \dots, u_p \text{da assegnare} \\ u_{i+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j u_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{i-j}, u_{i-j}) \end{cases}$$

$b_{-1} = 0$ esplicito; $b_{-1} \neq 0$ implicito.
Consistenza $\iff$ $\sum_{j=-1}^{p} a_j = 1$ e $-\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$
Ordine q se consistente e $\forall k \leq q$,

$$\sum_{j=0}^{p} (-j)^k a_j + k \sum_{j=-1}^{p} (-j)^{k-1} b_j = 1$$

Adams-Bashforth (esplicito) Interpolo con un polinomio di grado p passante per i punti (t_{i-j}, u_{i-j}) con $j = 0, \dots, p$ e integro tra t_i e t_{i+1}.

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1} = u_i + h \sum_{j=0}^{p} b_j f(t_{i-j}, u_{i-j}) = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P f_p^{(i)}(t) dt \end{cases}$$

Adams-Moulton (implicito) Interpolo con un polinomio di grado $p+1$ passante per i punti (t_{i-j}, u_{i-j}) con $j = -1, \dots, p$ e integro tra t_i e t_{i+1}.

$$\begin{cases} u_0 = y_0 \\ u_{i+1} = u_i + h \sum_{j=-1}^{p} b_j f(t_{i-j}, u_{i-j}) = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P f_{p+1}^{(i)}(t) dt \end{cases}$$

Tutti i metodi di Adams hanno ordine $p+1$ se sono espliciti, p se sono impliciti. Per verificarlo

Consistenza	Ordine
$\sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$	$k \sum_{j=-1}^{p} (-j)^{k-1} b_j = 1 \quad \forall k \leq q$

Polinomio caratteristico di un metodo multistep
Applicando un metodo multistep lineare al problema modello $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}^-$, si ottiene un'equazione alle differenze il cui polinomio caratteristico è

$$\Pi(r) = \rho(r) - h\lambda\sigma(r)$$

$$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{j=0}^{p} a_j r^{p-j} \qquad \sigma(r) = b_{-1} r^[p+1] + \sum_{j=0}^{p} r^{p-j}$$

Consistenza metodi multistep
Se un metodo multistep è consistente, allora $\rho(1) = 0$
Condizione delle radici
Siano r_j le radici di $\boldsymbol{\rho}$, il metodo la soddisfa se
- $|r_j| \leq 1 \forall j$
- $|r_j| = 1 \implies r_j$ è una radice semplice

Teorema zero stabilità un metodo consistente è zero stabile se e solo se soddisfa la condizione delle radici.

Condizione assoluta delle radici Siano $r_j(h)$ le radici di $\boldsymbol{\Pi}$. Il metodo la soddisfa se $\exists h_0 > 0$ t.c. $\forall h \in]0, h_0[$, $|r_j(h)| \leq 1 \forall j$ (i.e. per h suff. piccoli le radici sono in modulo minori di 1)

Teorema assoluta stabilità un metodo consistente è assolutamente stabile se e solo se soddisfa la condizione assoluta delle radici.

Convergenza un metodo multistep consistente
- converge se e solo se soddisfa la condizione delle radici e $|e_j| = O(h)$
- converge con ordine q se e solo se soddisfa la condizione delle radici e $|e_j| = O(h^q)$ e $\tau(h) = O(h^q)$

I barriera di Dahlquist se un metodo multistep lineare consistente e zero-stabile ha $p+1$ passi, allora ha ordine $q \leq p+2$ se $p+1$ è dispari; $q \leq p+3$ se $p+1$ è pari.

II barriera di Dahlquist
- non esistono metodi multistep lineari espliciti consistenti assolutamente stabili senza condizioni su h
- non esistono metodi multistep lineari di ordine $q < 2$ (impliciti) consistenti assolutamente stabili senza condizioni su h

Metodi predictor-corrector Idea: predico $u_{i+1}^{(0)}$ con un metodo lineare esplicito, correggo iterando il metodo implicito (pt. fisso) m volte $(u_{i+1}^{(k+1)} = \Phi(u_{i+1}^{(k)}))$.

Teorema ordine q_P ordine predictor, q_C ordine corrector, q ordine complessivo

- $q_P \geq q_C \implies q = q_C$
- $q_P < q_C$ e $m \geq q_C - q_P \implies q = q_C$
- $q_P < q_C$ e $m < q_C - q_P \implies q = q_P + m < q_C$

Iterazioni corrector minime per avere ordine q

- $q_P \geq q_C \implies m \geq 1$
- $q_P < q_C \implies m \geq q_C - q_P$

Metodi di ABM (predictor-corrector)
Predictor: Adams- Bashforth esplicito a $p+1$ passi
Corrector: Adams-Moulton implicito a $p+1$ passi
$\implies q_P = p + q,\ q_C = p + 2 \implies q_C - q_P = 1 \leq m$ basta un'iterazione del metodo corrector per avere ordine $q_C = p + 2$

PDC del secondo ordine

$$\begin{cases} y''(t) = -k^2 y(t) \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y'(t) = v(t) \\ v'(t) = -k^2 y(t) \\ y(0) = \alpha \\ v(0) = \beta \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Sigle
ms: matrice simmetrica
msdp: matrice simmetrica definita positiva
PDC: problema di Cauchy