Calcolo della matrice associata alla mappa duale

Davide Borra

1 Richiami sugli spazi duali

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita n e sia $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ una sua base. Allora, detti $\forall i = 1, \dots, n$,

$$u_i^\vee : V \to \mathbb{K} \qquad u_i^\vee(u_j) = \delta_{ij} \ \forall j = 1, \dots, n,$$

essi costituiscono una base $\beta^\vee = \{u_1^\vee, \dots, u_n^\vee\}$ di $V^\vee$. In partiolare, dato un qualunque vettore $v \in V$, se indichiamo

$$\begin{pmatrix} v \end{pmatrix}_\beta = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_\beta \qquad \iff \qquad v = \sum_{j=1}^n v_j u_j,$$

allora $u_i^\vee$ non fa altro che "selezionare" la riga i-esima di $(v)_\beta$:

$$u_i^\vee(v) = u_i^\vee\left(\sum_{i=1}^n v_i u_i\right) = \sum_{j=1}^n v_j u_i^\vee(u_j) = v_i. \tag{1}$$

Inoltre, per un qualsiasi elemento $h \in V^\vee$, possiamo scriverlo in componenti rispetto alla base duale come

$$h = \sum_{i=1}^n h(u_i) u_i^\vee \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} h \end{pmatrix}_{\beta^\vee} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}_{\beta^\vee} \tag{2}$$

dove $h_i := h(u_i)$ (la verifica è un facile esercizio che credo sia stato svolto anche in classe). In questo modo abbiamo scritto h *in coordinate rispetto a* $\beta^\vee$. Ora, se calcoliamo $h(v)$,

$$h(v) = \sum_{i=1}^n h(u_i) u_i^\vee \left(\sum_{j=1}^n v_j u_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h(u_i) v_j u_i^\vee(u_j) = \sum_{i=1}^n h(u_i) v_i = \sum_{i=1}^n h_i v_i$$

Questo ci permette anche di vedere h come matrice con una riga e n colonne

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

in quanto

$$h(v) = \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = h_1 v_1 + \cdots + h_n v_n.$$

Scrivendo h come matrice riga, non lo interpretiamo più come elemento di $V^\vee$ scritto in coordinate rispetto a $\beta^\vee$ ma come matrice rappresentativa di h rispetto alla base β di V.

2 Calcolo della matrice associata

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita n e m rispettivamente. Siano $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di V e $\gamma = \{e_1, \ldots, e_m\}$ una base di W. Indichiamo con $\beta^\vee$ e $\gamma^\vee$ le corrispondenti basi duali. Sia inoltre dato un omomorfismo $f : V \to W$: allora esso induce un omomorfismo $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ dato da $h \mapsto h \circ f$. Siamo interessati a determinare la matrice rappresentativa di $f^\vee$ rispetto alle basi $\beta^\vee$ e $\gamma^\vee$.

Osserviamo innanzitutto che per definizione di matrice rappresentativa,

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_{\gamma\beta} f &= \left(\begin{array}{c|c|c} \Big(f(u_1)\Big)_\gamma & \cdots & \Big(f(u_n)\Big)_\gamma \end{array} \right) = \begin{pmatrix} e_1^\vee(f(u_1)) & \cdots & e_1^\vee(f(u_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_m^\vee(f(u_1)) & \cdots & e_m^\vee(f(u_n)) \end{pmatrix} \\ &= \Big(e_i^\vee\big(f(u_j)\big)\Big)_{ij} \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})\end{aligned}$$

dato che, per (1), $e_i^\vee$ non fa altro che selezionare l'i-esima riga del vettore cui è applicata. Allo stesso modo, la matrice associata a $f^\vee$ è data da

$$\begin{aligned}\mathsf{M}_{\beta^\vee\gamma^\vee} f^\vee &= \left(\begin{array}{c|c|c} \Big(f^\vee(e_1^\vee)\Big)_\gamma & \cdots & \Big(f^\vee(e_m^\vee)\Big)_\gamma \end{array} \right) = \begin{pmatrix} f^\vee(e_1^\vee)(u_1) & \cdots & f^\vee(e_m^\vee)(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^\vee(e_1^\vee)(u_n) & \cdots & e_m^\vee(f(u_n)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1^\vee(f(u_1)) & \cdots & e_m^\vee(f(u_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^\vee(f(u_n)) & \cdots & e_m^\vee(f(u_n)) \end{pmatrix} = \Big(e_j^\vee\big(f(u_i)\big)\Big)_{ij} \in \mathsf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})\end{aligned}$$

in quanto per (2) l'i-esima riga della scrittura in coordinare di $f^\vee(e_j^\vee) : V \to \mathbb{K}$ si ottiene calcolandolo in u_i e ricordando che per definizione

$$f^\vee(e_j^\vee) = e_j^\vee \circ f,$$

ovvero

$$f^\vee(e_j^\vee)(u_i) = (e_j^\vee \circ f)(u_i) = e_j^\vee(f(u_i)).$$

In particolare, se confrontiamo le due matrici,

$$\mathsf{M}_{\gamma\beta} f = \Big(e_i^\vee\big(f(u_j)\big)\Big)_{ij} \qquad \mathsf{M}_{\beta^\vee\gamma^\vee} f^\vee = \Big(e_j^\vee\big(f(u_i)\big)\Big)_{ij}$$

è immediato come l'unica differenza sia data dal fatto che i pedici i (su cui sono indicizzate le *righe* in entrambe le matrici) e j (su cui sono indicizzate le *colonne* in entrambe le matrici) sono scambiati, ovvero

$$\mathsf{M}_{\beta^\vee\gamma^\vee} f^\vee = \Big(e_j^\vee\big(f(u_i)\big)\Big)_{ij} = \Big(e_i^\vee\big(f(u_j)\big)\Big)_{ij}^\top = (\mathsf{M}_{\gamma\beta} f)^\top .$$