Analisi Matematica B

Prof. Silvano Delladio

Davide Borra, Filippo Troncana, Filippo Sarzi Puttini

v. 0.0

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Indice

Sommario

Questo documento consiste in un ampliamento delle note del prof. Delladio con le dimostrazioni svolte a lezione e richieste per l'esame. La versione originale delle note è disponibile al moodle del corso.

Ultimo aggiornamento: 5 settembre 2024

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Misure esterne, definizione e prime proprietà

DEF 1.1 (Misura esterna)**.** Una "misura esterna" sull'insieme X è una mappa $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che

i) $\varphi(\varnothing) = 0$;

ii) $\varphi(E) \leq \varphi(F)$, se $E \subset F \subset X$;

iii) $\varphi(\cup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$, se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X.

Esempio 1.1.
$X \neq \varnothing$ e

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } E = \varnothing \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che se X contiene almeno due elementi a, b, allora

$$\varphi(\{a\} \cup \{b\}) = \varphi(\{a\}) = \varphi(\{b\}) = 1$$

In particolare φ non è additiva (vale $\varphi(\{a\} \cup \{b\}) < \varphi(\{a\}) + \varphi(\{b\})$).

Esempio 1.2 (Misura esterna di Dirac)**.**
$X \neq \varnothing$ e $(x_0 \in X)$

$$\varphi(E) := \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 \notin E \\ 1 & \text{se } x_0 \in E \end{cases}$$

Esempio 1.3 (Misura esterna del conteggio)**.**
$X \neq \varnothing$ e $\varphi(E) := \#(E)$.

Osservazione 1.1. La "misura superiore di Peano-Jordan", la "misura inferiore di Peano-Jordan" e la "misura di Peano-Jordan" non sono misure esterne.

Dimostrazione. Prima di procedere avremo bisogno di un po' di notazione: diciamo intervallo in $\mathbb{R}^2$ un sottoinsieme della forma

$$I = [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[$$

che avrà misura elementare $m(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Definiamo inoltre la somma delle misure

$$S(\{I_j\}_{j=1}^n) := \sum_{j=1}^n m(I_j).$$

Consideriamo un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$.

- **Misura inferiore di Peano-Jordan:** Definiamo innanzitutto l'insieme

$$\mathcal{I}_-(A) := \left\{ \{I_j\}_{j=1}^n \;\middle|\; \substack{n\in\mathbb{N}^*,\quad I_j \text{ intervalli} \\ \bigcup_{j=1}^n I_j \subset A,\quad I_i\cap I_j=\varnothing \forall i,j} \right\};$$

allora la misura inferiore di Peano-Jordan di A è data da

$$J_-(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{I}_-(A) = \varnothing \\ \sup_{\mathcal{I}_-(A)} S & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che la richiesta $I_i \cap I_j = \varnothing \forall i,j$ serve a fare in modo che la misura non esploda sempre a $+\infty$. Verifichiamo ora gli assiomi di misura esterna:

i) $\mathcal{I}_-(\varnothing) = \varnothing \implies J_-(\varnothing) = 0$;

ii) Siano $E \subset F \subset \mathbb{R}^2$, allora si hanno due casi:
  - Se $\mathcal{I}_-(E) = \varnothing$, la tesi è banale.
  - Se $\mathcal{I}_-(E) \neq \varnothing$, allora $\mathcal{I}_-(E) \subset \mathcal{I}_-(F)$, quindi l'estremo superiore calcolato su un insieme più grande è necessariamente maggiore o uguale.

iii) **Controesempio:** Consideriamo $E_1 = \mathbb{Q}^2\cap]0,1[^2$ e $E_1 =]0,1[^2\backslash E_1$. Allora banalmente $J_-(E_1) = J_-(E_2) = 0$ ma $J_-(E_1 \cup E_2) = J_-(]0,1[^2) > 0$ in quanto, ad esempio, $[1/2,1[^2\subset]0,1[$ e $S(\{[1/2,1[^2\}) = 1/4$.

- **Misura superiore di Peano-Jordan:** Definiamo innanzitutto l'insieme

$$\mathcal{I}_+(A) := \left\{ \{I_j\}_{j=1}^n \;\middle|\; \substack{n\in\mathbb{N}^*,\quad I_j \text{ intervalli} \\ \bigcup_{j=1}^n I_j \supset A} \right\};$$

osserviamo che tale insieme è non vuoto per ogni A limitato, infatti per un insieme illimitato non esiste un unione finita di intervalli in grado di contenerlo. Per un insieme **limitato** definiamo quindi

$$J_+^*(A) := \inf_{\mathcal{I}_+(A)} S.$$

Possiamo quindi generalizzare la misura al caso illimitato ponendo

$$J_+(A) := \begin{cases} J_+^*(A) & A \text{ limitato,} \\ \lim_{\rho\to+\infty} J_+^*(A \cap B_\rho(0)) & A \text{ illimitato.} \end{cases}$$

Rimane da verificare l'esistenza del limite: per il teorema di esistenza del limite per funzioni monotone, è sufficiente provare che $\rho \mapsto J_+^*(A\cap B_\rho(0))$ è crescente. Siano $0 < \rho_1 < \rho_2$, allora $B_{\rho_1}(0) \subset B_{\rho_2}(0)$, da cui $A\cap B_{\rho_1}(0) \subset A\cap B_{\rho_2}(0)$. Da questo possiamo affermare che $\mathcal{I}_+(A\cap B_{\rho_1}(0)) \supset \mathcal{I}_+(A\cap B_{\rho_2}(0))$ in quanto se un'unione di intervalli ricopre $A\cap B_{\rho_2}(0)$, essa ricoprirà anche $A\cap B_{\rho_1}(0)$. Ora, passando agli estremi inferiori, poiché stiamo calcolando l'estremo su un insieme più grosso, il segno della disuguaglianza si inverte, e otteniamo la tesi.

Occupiamoci infine degli assiomi di misura esterna:

i) $J_+(\varnothing) = 0$ in quanto $\varnothing \in \mathcal{I}_+(\varnothing)$.

ii) Siano $E \subset F \subset \mathbb{R}^2$. Fissato $\rho > 0$, $E\cap B_\rho(0) \subset F\cap B_\rho(0)$, quindi $\mathcal{I}_+(E\cap B_\rho(0)) \supset \mathcal{I}_+(F\cap B_\rho(0))$ e, passando agli estremi inferiori, $\inf_{\mathcal{I}_+(E\cap B_\rho(0))} S \leq \inf_{\mathcal{I}_+(F\cap B_\rho(0))} S$. Dall'arbitrarietà di $\rho > 0$, segue la tesi.

iii) **Controesempio:** Osserviamo che $J_+(\mathbb{Q}\cap]0,1[) > 0$, mentre (identificando $\mathbb{Q}\cap]0,1[= \{q_j\}_{j=0}^{+\infty}$) $\sum_j J_+(\{q_j\}) = 0$.

- **Misura di Peano-Jordan:** Definiamo innanzitutto la famiglia $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \,|\, J_-(A) = J_+(A)\} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2);$$

allora si dice misura di Peano-Jordan la mappa

$$J: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ A & \longmapsto & J_-(A) = J_+(A) \end{array}.$$

Anche in questo caso non abbiamo costruito una misura esterna in quanto il dominio di definizione non coincide con le parti: un controesempio è dato dall'insieme $\mathbb{Q}\cap]0,1[^2$. $=/=$

DEF 1.2. Un insieme $E \in \mathcal{P}(X)$ è detto "misurabile (rispetto alla misura esterna φ su X)" se

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi\left(A \cap E^c\right) \tag{1.1.1}$$

per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$. La famiglia degli insiemi misurabili rispetto a φ è indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.2. Grazie a (iii) di Definizione 1.1, la (1.1.1) si può sostituire con

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E) + \varphi\left(A \cap E^c\right)$$

Esempio 1.4.
Negli esempi 1.1, 1.2, 1.3 si ha rispettivamente

$$\mathcal{M}_\varphi = \{\varnothing, X\}, \quad \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{P}(X), \quad \mathcal{M}_\varphi = \mathcal{P}(X)$$

Teorema 1.1 ($***$| Fondamentale sui Misurabili). *Per una misura esterna φ su X valgono i seguenti fatti:*

(1) *$\mathcal{M}_\varphi$ è c-chiusa;*

(2) *se $E \in \mathcal{P}(X)$ è tale che $\varphi(E) = 0$, allora $E \in \mathcal{M}_\varphi$, in particolare $\varnothing \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $X \in \mathcal{M}_\varphi$);*

(3) *se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}_\varphi$ allora $\bigcap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$);*

(4) *se $\{E_j\}_j^{num}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, allora $S := \bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Inoltre si ha $\forall A \in \mathcal{P}(X)$*

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c); \tag{$*$}$$

(5) *(σ-additività) se $\{E_j\}_j^{num}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti, si ha $\varphi\left(\bigcup_j E_j\right) = \sum_j \varphi(E_j)$.*

Dimostrazione. (1) Sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$, allora $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ verifichiamo lo spezzamento rispetto a E^c

$$\varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap (E^c)^c) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) = \varphi(A)$$

in quanto questo è esattamente lo spezzamento rispetto ad E. Di conseguenza per definizione, $E^c \in \mathcal{M}_\varphi$.

(2) Sia $E \subset X$ tale che $\varphi(E) = 0$, allora $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ si ha $\varphi(\underbrace{A \cap E}_{\subset E}) + \varphi(A \cap E^c) \leq \varphi(E) + \varphi(A) = \varphi(A)$ di conseguenza per la σ-subadditività segue la tesi.

(3) Sia $\{E_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{M}_\varphi$ $(n \geq 2)$, allora $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ si ha

$$\varphi(A) \overset{(i)}{=} \underline{\varphi(A \cap E_1)} + \varphi(A \cap E_1^c) \overset{(ii)}{=} \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \underbrace{\varphi(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c)}_{(\dagger)}$$

Siccome $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$, spezzo prima su E_1 (i) e poi su E_2 (ii). Ora applichiamo la σ-subadditività a $(\dagger)$ e otteniamo

$$\begin{aligned}(\dagger) &\geq \varphi\left((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c)\right) = \varphi(A \cap [(E_1 \cap E_2^c) \cup E_1^c]) = \\ &= \varphi(A \cap [\underbrace{(E_1 \cup E_1^c)}_{X} \cap (E_1^c \cup E_2^c)]) = \varphi(A \cap (E_1 \cap E_2)^c)\end{aligned} .$$

Di conseguenza otteniamo che $\varphi(A) \geq \varphi(A \cap (E_1 \cap E_2)) + \varphi(A \cap (E_1 \cap E_2)^c)$ e iterando il procedimento si ottiene la tesi.

(4) Iniziamo provando $(*)$. Sia $A \in \mathcal{P}(X)$, allora

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap \underline{E_1^c \cap E_2}) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) =$$

Siccome $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_2 \subset E_1^c \implies E_1^c \cap E_2 = E_2$

$$= \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap (E_1 \cup E_2)^c).$$

Iterando questo argomento otteniamo quindi

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(A \cap E_j) + \varphi\left(A \cap \left[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right]^c\right) \overset{(\ddagger)}{\geq} \sum_{j=1}^{n} \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c).$$

($\ddagger$) in quanto $\bigcup_{j=1}^n E_j \subset S \implies \left[\bigcup_{j=1}^n E_j\right]^c \supset S^c \implies A \cap \left[\bigcup_{j=1}^n E_j\right]^c \supset A \cap S^c$ quindi per la monotonia di φ, si ha $\varphi\left(A \cap \left[\bigcup_{j=1}^n E_j\right]^c\right) \geq \varphi(A \cap S^c)$.

Poiché gli addendi della sommatoria sono non negativi, il limite delle somme parziali esiste. Passando quindi al limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c)$$

E questo conclude la dimostrazione di $(*)$. Ora proviamo che $S \in \mathcal{M}_\varphi$. Sia $A \in \mathcal{P}(X)$. Inizialmente osserviamo che $A \cap S = A \cap \left(\bigcup_j E_j\right) = \bigcup_j (A \cap E_j)$. Di conseguenza per la σ subadditività di φ

$$\varphi(A \cap S) + \varphi(A \cap S^c) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \overset{(*)}{\leq} \varphi(A)$$

(5) Usando $(*)$ con $A = S$

$$\varphi\left(\bigcup_i E_i\right) = \varphi(S) \geq \sum_j \varphi(\underbrace{S \cap E_j}_{\bigcup_i E_i \cap E_j = E_j}) + \varphi(\underbrace{S \cap S^c}_{\varnothing}) = \sum_j \varphi(E_j) \overset{(\bullet)}{\geq} \varphi\left(\bigcup_j E_j\right).$$

($\bullet$) per la σ-subadditività. Di conseguenza $\varphi\left(\bigcup_j E_j\right) = \sum_j \varphi(E_j)$.

=/=

Osservazione 1.3. Sia data una misura esterna φ su X e sia $\{E_j\}$ una famiglia numerabile di insiemi misurabili. Poniamo $E_1^* := E_1$ e

$$E_n^* := E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Allora $\{E_j^*\}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili a-due-a-due disgiunti e si ha

$$\bigcup_{j=1}^{n} E_j^* = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \quad (\text{per ogni } n), \qquad \bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j.$$

In particolare, ricordando il punto (4) di Teorema 1.1, si ha $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$.

DEF 1.3. Una famiglia non vuota $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ è detta "σ-algebra (in X)" se gode delle seguenti proprietà:

(i) Se $E \in \Sigma$, allora $E^c \in \Sigma$;

(ii) *Se* $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cup_j E_j \in \Sigma$.

Osservazione 1.4. In Definizione 1.3 l'assioma (ii) può venir sostituito da

(ii^*) Se $\{E_j\}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Σ, si ha $\cap_j E_j \in \Sigma$.

Esempio 1.5.

Sia X un qualsiasi insieme. Allora $\mathcal{P}(X)$ e $\{\varnothing, X\}$ sono entrambe σ-algebre in X. Se Σ è una qualsiasi σ-algebra in X, si ha $\{\varnothing, X\} \subset \Sigma \subset \mathcal{P}(X)$.

Esempio 1.6.
$\Sigma := \{E \in 2^{[0,1]} \mid \#(E) \leq \aleph_0 \text{ oppure } \#(E^c) \leq \aleph_0\}$ è una σ-algebra.

Esempio 1.7.
La famiglia $\Sigma := \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \#(E) < \infty \text{ oppure } \#(E^c) < \infty\}$ è c-chiusa ma non è chiusa rispetto all'unione numerabile. Quindi Σ non è una σ-algebra.

Per Teorema 1.1 e Osservazione 1.3, vale quindi il seguente risultato.

Proposizione 1.1 (○). *Se φ è una misura esterna su X, allora $\mathcal{M}_\varphi$ è una σ-algebra.*

Dimostrazione. Verifichiamo gli assiomi di σ-algebra:

- **Non vuota** in quanto per il Teorema 1.1.(2), $\varnothing, X \in \mathcal{M}_\varphi$;

i) **c-chiusa** per il Teorema 1.1.(1);

ii) **Stabile per unione numerabile**. Per il Teorema 1.1.(4), M_φ è chiusa per unione numerabile di insiemi disgiunti. Proviamo che chò vale anche se gli insiemi non sono a due a due disgiunti: Sia $\{E_j\}_j \subset M_\varphi$ una famiglia finita. Poniamo $E_1^* = E_1$ e $\forall k \geq 2$ definiamo $E_k^* := E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j = E_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right)^c$, ovvero tutti gli elementi che stanno in E_k ma non nei precedenti componenti della famiglia. Per il Teorema 1.1, si ha che $\forall k,\ E_k \in M_\varphi$, quindi possiamo affermare la seguente equivalenza, in cui il membro di destra soddisfa le ipotesi del Teorema 1.1.(4), ovvero è unione di insiemi disgiunti.

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \bigcup_{k=1}^{N} E_k^*.$$

Poiché l'uguaglianza rimane verificata anche per $N \to +\infty$ (passando all'unione arbitraria numerabile), si ha che per il Teorema 1.1.(4), $\bigcup_j E_j = \bigcup_j E_j^* \in M_\varphi$.

=/=

Teorema 1.2 (∗∗). *Se φ è una misura esterna si X, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *(Continuità dal basso) Se $\{E_j\}_j$ è una famiglia numerabile e crescente di insiemi misurabili, si ha $\varphi\left(\bigcup_j E_j\right) = \lim_j \varphi(E_j)$;*

(2) *(Continuità dall'alto) Se $\{E_j\}_j$ è una famiglia numerabile e decrescente di insiemi misurabili con $\varphi(E_1) < \infty$, si ha $\varphi\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j \varphi(E_j)$;*

Dimostrazione.

(1) (Continuità dal basso) Poniamo $E_1^* = E_1$ e $\forall j \geq 2$ definiamo $E_j^* := E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k = E_j \setminus E_{j-1} \in M_\varphi$. Osserviamo che (†) $\bigcup_{j=1}^n E_j^* = \bigcup_{j=1}^n E_j = E_n$ quindi $\bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j$.

$$\implies \varphi\left(\bigcup_j E_j\right) = \varphi\left(\bigcup_j E_j^*\right) \overset{\sigma\text{-add}}{=} \sum_j \varphi(E_j) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(E_j^*) =$$

per definizione di serie. È possibile applicare la σ-additività poiché gli insiemi E_j^* sono disgiunti.

$$= \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\bigcup_{j=1}^n E_j^*\right) \overset{(\dagger)}{=} \lim_{n\to+\infty} \varphi(E_n)$$

(2) (Continuità dall'alto) Poniamo $\forall j,\ F_j = E_1 \setminus E_j = E_1 \cap E_j^c \in \mathcal{M}\varphi$. Osserviamo inoltre che $E_j \supset E_{j+1} \implies E_j^c \subset E_{j+1}^c \implies E_1 \cap E_j^c \subset E_1 \cap E_{j+1}^c$ da cui $F_j \subset F_j + 1$, ovvero $\{F_j\}_j$ soddisfa le ipotesi di (1), per cui ($\triangle$) $\varphi\left(\bigcup_j F_j\right) = \lim_j \varphi(F_j)$. Osserviamo ora che

$$\varphi(F_j) = \varphi(E_1 \setminus E_j) = \varphi(E_1) - \varphi(E_j) \tag{$\bullet$}$$

Appendice B

Tabella dei Teoremi

Attenzione: la seguente tabella fa riferimento all'Anno Accademico 2023/2024

<table>
<tr><th></th><th>*</th><th>**</th><th>* * *</th></tr>
<tr><td>Capitolo 1</td><td>$\boxed{3}$
Proposizione 1.2
Teorema 1.8
Teorema 1.10
Proposizione 1.4
Corollario 1.2</td><td>$\boxed{2}$
Teorema 1.2
Proposizione 1.3
Teorema 1.7
Teorema 1.9</td><td>$\boxed{2}$
Teorema 1.1
Teorema 1.3
Teorema 1.6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capitolo 2</td><td>$\boxed{2}$
Proposizione 2.3
Corollario 2.1
Proposizione 2.4
Teorema 2.6</td><td>$\boxed{2}$
Proposizione 2.2
Teorema 2.1
Teorema 2.3
Teorema 2.7</td><td>$\boxed{1}$
Teorema 2.2
Teorema 2.9</td></tr>
<tr><td>$\boxed{2}$
Proposizione 2.9
Teorema 2.13</td><td>$\boxed{3}$
Proposizione 2.5
Proposizione 2.6
Proposizione 2.8
Teorema 2.12
Teorema 2.14</td><td></td></tr>
<tr><td>Capitolo 3</td><td>$\boxed{2}$
Teorema 3.1
Proposizione 3.2</td><td>$\boxed{2}$
Teorema 3.2
Teorema 3.3</td><td>$\boxed{1}$
Teorema 3.4
Teorema 3.6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capitolo 4</td><td>$\boxed{2}$
Proposizione 4.1
Proposizione 4.2
Proposizione 4.3
Proposizione 4.4</td><td>$\boxed{1}$
Teorema 4.1
Teorema 4.2</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{3}$
Proposizione 4.5
Corollario 4.1
Proposizione 4.6
Proposizione 4.7
Proposizione 4.9</td><td>$\boxed{1}$
Proposizione 4.8
Proposizione 4.10</td><td></td></tr>
<tr><td>Capitolo 5</td><td>$\boxed{1}$
Corollario 5.1
Corollario 5.2</td><td>$\boxed{2}$
Teorema 5.1
Teorema 5.2</td><td></td></tr>
</table>

Bibliografia

[1] H. Brezis: Analisi funzionale, teoria e applicazioni. Liguori Editore 1986.

[2] L. Carleson: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116, 135-157 (1966).

[3] L.C. Evans, R.F. Gariepy: Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions. (Studies in Advanced Math.) CRC Press 1992.

[4] K.J. Falconer: The geometry of fractal sets. (Cambridge Tracts in Math. 85.) Cambridge University Press 1985.

[5] R.F. Gariepy, W.P. Ziemer: Modern real analysis. PSW Publishing Company 1995.

[6] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 3; strutture lineari e metriche, continuità. Pitagora Ed. Bologna 2000.

[7] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 4; funzioni di più variabili. Pitagora Ed. Bologna 2005.

[8] M. Giaquinta, G. Modica: Analisi Matematica 5; funzioni di più variabili (ulteriori sviluppi). Pitagora Ed. Bologna 2005.

[9] E. Giusti: Analisi matematica 2. Bollati Boringhieri 2003.

[10] E. Giusti: Esercizi e complementi di analisi matematica, volume secondo. Bollati Boringhieri 2000.

[11] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J.T. Tyson: Sobolev spaces on metric measure spaces. New Math. Monogr. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[12] S.G. Krantz, H.R. Parks: The geometry of domains in space. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser 1999.

[13] P. Mattila: Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge University Press 1995.

[14] W. Rudin: Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill 1976.

[15] S.M. Srivastava: A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics 180, Springer Verlag 1998.

[16] E.M. Stein, R. Shakarchi: Real analysis (measure theory, integration and Hilbert spaces). Princeton Lectures in Analysis III, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Weierstrass