Geometria A

SECONDO MODULO

Davide Borra

v. 1.2.2

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Sommario

Queste sono le note prodotte durante il secondo modulo del corso di Geometria A, tenuto dal prof. Marco Andreatta. Il docente del corso segue il libro "Geometria 1" di Edoardo Sernesi (Ed. Bollati Boringhieri)[Ser00].

Indice

1 Forme bilineari

DEF 1.1 (forma bilineare)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si dice forma bilineare una mappa

$$f : V \times V \to \mathbb{K}$$

lineare rispetto ad entrambi gli argomenti, ovvero $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$, $\forall k \in \mathbb{K}$

- $f(v_1 + v_2, w_1) = f(v_1, w_1) + f(v_2, w_1)$
- $f(kv_1, w_1) = kf(v_1, w_1)$
- $f(v_1, w_1 + w_2) = f(v_1, w_1) + f(v_1, w_2)$
- $f(v_1, kw_1) = kf(v_1, w_1)$

Esistono inoltre alcune forme multilineari particolari:

DEF 1.2 (Forme bilineari simmetriche)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice simmetrica se $\forall v, w \in V$

$$f(v, w) = f(w, v)$$

DEF 1.3 (Forme bilineari antisimmetriche)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una forma bilineare $f : V \times V \to \mathbb{K}$ si dice antisimmetrica se $\forall v, w \in V$

$$f(v, w) = -f(w, v)$$

Data una matrice, ad essa è associata una forma bilineare del tipo $f_A(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$. La dimostrazione del fatto che questa mappa sia bilineare segue dalla proprietà distributiva del prodotto tra matrici.

Esercizio 1.1. *Dimostrare che f_A è simmetrica se e solo se A è simmetrica, ovvero se e solo se $A = A^t$.* *Soluzione a pag. 45*

Teorema 1.4 (Matrice associata)**.** *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con dimensione n finita e $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Siano inoltre $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare e $A = (f(e_i, e_j))_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora se $v = \sum_i a_i e_i$ e $w = \sum_j b_j e_j$, si ha*

$$f(v, w) = (a_1, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dimostrazione.

$$f(v, w) = f\left(\sum_i a_i e_i, \sum_j a_j e_j\right) = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j f(e_i, e_j)\right)$$

Osserviamo che

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \sum_j b_j f(e_1, e_j) \\ \vdots \\ \sum_j b_j f(e_n, e_j) \end{pmatrix} = \sum_i a_i \left(\sum_j b_j f(e_i, e_j)\right)$$

da cui la tesi. QED

Osservazione 1.5. Scelta una base esiste una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari e le matrici e una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari simmetriche e le matrici simmetriche.

1.1 Matrici congruenti

Lemma 1.6 (Matrici congruenti)**.** *Siano* $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ *e* $\beta' = \{u_1, \dots, u_n\}$ *due basi di* V*,* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale. Sia* $f : V \times V \to \mathbb{K}$ *una forma bilineare e siano* $A = (f(e_i, e_j))_{ij}$ *e* $B = (f(u_i, u_j))_{ij}$ *le matrici associate alla mappa* f *in* β *e* β' *rispettivamente. Allora* $\exists M = M_{\beta\beta'}(id) \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K}) \ : \ B = M^t AM$

Notazione se $v = \sum_i x_i e_i = \sum_i x_i' u_i$, allora $\underline{x} = (v)_\beta$ e $\underline{x}' = (v)_{\beta'}$. Analogamente per w indicando le coordinate con y.

Dimostrazione.

$$\underline{x} = M\underline{x}' \qquad \underline{y} = M\underline{y}'$$

da cui

$$f(v,w) = \underline{x}^t A\underline{y} = (M\underline{x})^t A(M\underline{y}) = (\underline{x}')^t M^t AM\underline{y} = (\underline{x}')^t B\underline{y}$$

quindi $B = M^t AM$ QED

DEF 1.7 (Matrici congruenti)**.** Due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono simili se $\exists M \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$B = {}^t MAM$$

Ricorda. Due matrici A e B si dicono congruenti se esiste una matrice $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = P^{-1}AP$.

DEF 1.8 (Base ortogonale)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$, e β una base di V. Se $i \neq j \implies b(e_i, e_j) = 0$, la base si dice diagonalizzante o ortogonale per la forma bilineare b.

Osservazione 1.9. Se la base è ortogonale, allora la matrice associate $A = (b(e_i, e_j))_{ij}$ è diagonale.

DEF 1.10 (Forma quadratica associata)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineare simmetrica. Si definisce la forma quadratica associata

$$\begin{aligned} q: \ & V \longrightarrow \mathbb{K} \\ & v \longmapsto b(v,v) \end{aligned}$$

Osservazione 1.11. Non è lineare.

Ricorda. Si dice forma una mappa ad un campo, non necessariamente lineare.

Proprietà (seguono dalla linearità di b)

i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$

ii) $2b(v,w) = q(w+v) - q(v) - q(w)$

La proprietà (ii)è importante perché permette di definire b usando q e viceversa.

Osservazione 1.12. Consideriamo una base $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, allora un vettore generico si esprime in coordinate come

$$v = \sum_i x_i e_i$$

da cui

$$b(v,v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \left(a_{ij}\right)_{ij} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

per cui in coordinate una forma quadratica è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili x_i (è importante ricordare che per ipotesi $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall ij$).

Esempio 1.1.

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la base canonica e la forma quadratica

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 = 3x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Essa è quindi associata alla forma bilineare

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

DEF 1.13 (Vettori isotropi)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$ e $b(v, w)$ una forma bilineare simmetrica. Un vettore $v \in V$ si dice isotropo se

$$b(v, v) = q(v) = 0$$

DEF 1.14 (Spazio ortogonale)**.** Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $S \subseteq V$, $\dim V < \infty$ e $b(v, w)$ una forma bilineare simmetrica. Si definisce sottospazio perpendicolare a S l'insieme

$$S^\perp := \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall w \in S\}$$

Esercizio 1.2. *Dimostrare che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.* *Soluzione a pag. 45*

Lemma 1.15. *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $S \subseteq V$, $\dim V < \infty$. Sia inoltre $v \in V$ non isotropo. Allora*

$$\langle v \rangle \oplus v^\perp = V$$

Dimostrazione. Prendo un qualsiasi $w \in V$, allora sottraggo a w la sua componente lungo v e dimostro che appartiene a $v^\perp$, infatti

$$b\left(w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}v, v\right) = b(w, v) - b\left(\frac{b(w, v)}{b(v, v)}v, v\right) = b(w, v) - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}b(v, v) = 0$$

quindi

$$w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}v \in v^\perp$$

Allora posso scrivere w come la somma di un vettore in $\langle v \rangle$ e un vettore in $v^\perp$:

$$w = \underbrace{\frac{b(w, v)}{b(v, v)}v}_{\in \langle v \rangle} + \underbrace{\left(w - \frac{b(w, v)}{b(v, v)}v\right)}_{\in v^\perp}$$

di conseguenza $\langle v \rangle + v^\perp = V$. Inoltre osserviamo che per costruzione di $v^\perp$, $\langle v \rangle \cap v^\perp = \{0\}$, quindi la somma è diretta. QED

1.2 Diagonalizzazione di forme bilineari e forme quadratiche

Teorema 1.16 (Diagonalizzabilità di forme bilineari)**.** *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V < \infty$. Se b è una forma bilineare simmetrica, allora esiste una base ortogonale per b, ovvero esiste una matrice $M \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che M^tAM è diagonale.*

Dimostrazione. Se $b(v, w)$ è identicamente nulla, il teorema vale. Altrimenti possiamo supporre che $\exists v, w \in V :$ $b(v, w) \neq 0$. Esiste quindi un vettore non isotropo, infatti

- se $b(v, v) \neq 0$, è v;
- se $b(w, w) \neq 0$, è w;

- altrimenti, se $b(v,v) = b(w,w) = 0$, $b(v+w, v+w) = b(v,v) + b(w,w) + 2b(v,w) = 2b(v,w) \neq 0$, per cui il vettore non isotropo é $v+w$.

Procediamo ora per induzione su $n = \dim V$:

$\mathbb{N}0)$ Se $n = 1$ il teorema è vero (una matrice 1×1 è diagonale)

$\mathbb{N}1)$ Supponiamo vero il teorema per $\dim V = n$, dimostriamo che vale per $\dim V = n+1$, ovvero che esiste una base diagonalizzante per ogni matrice simmetrica e per ogni spazio vettoriale di dimensione n. Prendiamo quindi un vettore e_1 non isotropo. Definiamo quindi il suo spazio perpendicolare, che (per il lemma precedente e la formula di Grassman) ha dimensione n. Per ipotesi induttiva esiste quindi una base ortogonale $\gamma = \{e_2, \dots, e_n\}$ di $e_1^\perp$ per $b|_{e_1^\perp}$, per cui la base cercata è

$$\beta = \gamma \cup \{e_1\} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

QED

Esempio 1.2.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di V. In questa base sia $q(x,y,z) = xy + xz + yz$ una forma quadratica: diagonalizzarla.

Non è presente il termine x^2 per cui dobbiamo fare in modo di ricavarlo. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + x \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' - x' \\ z = z' \end{cases}$$

Sostituiamo e completiamo il quadrato

$$q(x',y',z') = x'(y'-x') + x'z' + (y'-x')z' = -x'^2 + x'y' + y'z' = -\left(x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \frac{1}{4}y'^2 + y'z'$$

Cambiamo coordinate

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{2}y' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'' + \frac{1}{2}y'' \\ y' = y'' \\ z' = z'' \end{cases}$$

$$q(x'',y'',z'') = -x''^2 + \frac{1}{4}y''^2 + y''z'' = -x''^2 + \left(\frac{1}{2}y'' + z''\right)^2 - z''^2$$

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = \frac{1}{2}y'' + z'' \\ z''' = z'' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = 2y''' - 2z''' \\ z'' = z''' \end{cases}$$

$$q(x''',y''',z''') = -x'''^2 + y'''^2 - z'''^2$$

Ricaviamo ora le matrici di cambio di base:

$$[I] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$[II] \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$[III] \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

quindi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

da cui

$$M^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.17 (Sylvester I)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con* $\dim V = n \geq 1$. *Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base*

$$\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$$

tale che

$$\begin{aligned} i \neq j \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq r \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 1; \\ r < i \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente la forma quadratica rispetto a β è

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente, esiste una base ortogonale $\gamma = \{e_i\}_i$. Riordinando possiamo supporre che

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq r \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(e_i, e_i) \neq 0; \\ r < i \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(e_i, e_i) = 0. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{cases} u_i := \dfrac{e_i}{\sqrt{b(e_i, e_i)}} & i = 1, \dots, r \\ u_i := e_i & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

Otteniamo che $\beta = \{u_i\}_i$ è la base cercata. QED

Teorema 1.18 (Sylvester II)**.** *Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base*

$$\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$$

tale che

$$\begin{aligned} i \neq j \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq r \leq t \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 1; \\ 1 \leq r < i \leq t \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = -1; \\ t < i \leq n \quad &\Longrightarrow \quad b(u_i, u_i) = 0. \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga al teorema precedente ponendo

$$\begin{cases} u_i := \dfrac{e_i}{\sqrt{|b(e_i, e_i)|}} & i = 1, \dots, r \\ u_i := e_i & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

e riordinando opportunamente.

Un'osservazione interessante è che il numero di 0, di 1 e di -1 non dipende dalla scelta di una base ortogonale.

Teorema 1.19 (Rango)**.** *(V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale,* $\dim V = n$*) Data una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{K}$ e una sua base diagonalizzante $\beta = \{e_i\}_i$, il numero di vettori e_i tali che $b(e_i, e_i) \neq 0$ non dipende dalla scelta della base diagonalizzante. Esso è uguale al rango di ogni matrice associata. Inoltre se $\mathbb{K}$ non è algebricamente chiuso, il numero di 1 e di -1 non dipende dalla scelta della base diagonalizzante.*

Dimostrazione. Ricordiamo il seguente lemma:

Lemma 1.20. *Siano $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$, $N \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ e $M \in \mathsf{GL}_m(\mathbb{K})$, allora* $\operatorname{rk}(NAM) = \operatorname{rk} A$.

Siano β e β' due basi, $M = M_{\beta\beta'}(Id)$, $A = M_\beta(b)$ e $B = M_{\beta'}(b)$. Allora per dimostrazione precedente si ha $B = M^t AM$. Per il lemma appena enunciato segue che, siccome $M \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A$. Supponiamo che esistano due basi $\beta = \{e_i\}_i$ e $\beta' = \{u_i\}_i$ diverse tali che (numeri di 1 e -1 diversi).

- $$\begin{array}{rcl} i \neq j & \Longrightarrow & b(e_i, e_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq t \leq r \leq n & \Longrightarrow & b(e_i, e_i) = 1; \\ 1 \leq t < i \leq r \leq n & \Longrightarrow & b(e_i, e_i) = -1; \\ r < i \leq n & \Longrightarrow & b(e_i, e_i) = 0. \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcl} i \neq j & \Longrightarrow & b(u_i, u_j) = 0; \\ 1 \leq i \leq s \leq r \leq n & \Longrightarrow & b(u_i, u_i) = 1; \\ 1 \leq s < i \leq r \leq n & \Longrightarrow & b(u_i, u_i) = -1; \\ r < i \leq n & \Longrightarrow & b(u_i, u_i) = 0. \end{array}$$

con $s \neq t$. È lecito supporre che $t > s$ (altrimenti scegliamo al posto di U e W i rispettivi complementi diretti a V). Siano $U = \langle e_1, \ldots, e_t \rangle$ e $W = \langle u_{s+1}, \ldots, u_n \rangle$. Segue quindi che $\dim U = t$ e $\dim W = n - s$, da cui

$$\dim U + \dim W = n - s + t > n,$$

quindi per la formula di Grassman segue che $\dim U \cap V > 0$. Prendiamo quindi un vettore non nullo $v \in U \cap V$.

$$v = \sum_{i=1}^{t} a_i e_i = \sum_{i=s+1}^{n} b_i u_i$$

per cui

$$\begin{aligned} b(v,v) &= \sum_{i=1}^{t} \underbrace{b(e_i, e_i)}_{1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{t} a_i^2 > 0 \\ &= \sum_{i=s+1}^{n} \underbrace{b(u_i, u_i)}_{-1} b_i^2 = -\sum_{i=s+1}^{n} b_i^2 < 0 \end{aligned}.$$

Si presenta quindi un assurdo, per cui deve essere che $s = t$. QED

1.3 Classificazione delle forme quadratiche

DEF 1.21 (Rango)**.** (V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$) Si definisce rango di una forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{K}$ il numero di vettori e_i di una base diagonalizzante tali che $b(e_i, e_i) \neq 0$. Esso si indica $\operatorname{rk} b$. Se $\operatorname{rk} b = \dim V$, allora la forma si dice non degenere.

DEF 1.22 (Segnatura)**.** Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e $\beta = \{e_i\}_i$ una base diagonalizzante normalizzata. Allora si definiscono

- **indice di positività:** $t = \#\{e \in \beta \mid b(e, e) = 1\}$
- **indice di negatività:** $s = \#\{e \in \beta \mid b(e, e) = -1\}$

La coppia (t, s) è detta segnatura di b.

DEF 1.23 (Forme definite positive/negative)**.** (V $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\dim V = n$) Una forma quadratica q su V si dice:

- **definita positiva** se $q(v) > 0 \ \ \forall\, v \in V \setminus \{0\}$;
- **definita negativa** se $q(v) < 0 \ \ \forall\, v \in V \setminus \{0\}$;
- **semidefinita positiva** se $q(v) \geq 0 \ \ \forall\, v \in V$ e $\exists w \in V \setminus \{0\} \, : \, q(w) = 0$;
- **semidefinita negativa** se $q(v) \leq 0 \ \ \forall\, v \in V$ e $\exists w \in V \setminus \{0\} \, : \, q(w) = 0$;
- **indefinita** se $\exists v, w \in V \setminus \{0\} \, : \, q(v) > 0$ e $q(w) < 0$.

In particolare lo è se lo è su una base.

1.3.1 Caratterizzazioni della classificazione delle forme quadratiche [Def23]

Teorema 1.24 (Caratterizzazione delle forme quadratiche definite).

i) *Una forma quadratica è* ***definita positiva*** *se e solo se* $\exists m > 0 : q(v) \geq m\|v\|^2 \quad \forall v \in V$.

ii) *Una forma quadratica è* ***definita negativa*** *se e solo se* $\exists m > 0 : q(v) \leq -m\|v\|^2 \quad \forall v \in V$.

Dimostrazione (i).

($\Leftarrow$) Se vale la disuguaglianza, q è definita positiva, infatti la norma è sempre maggiore di 0.

($\Rightarrow$) Sia $q(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_iv_j$ definita positiva. Sia inoltre $K = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1\}$, allora esso è sequenzialmente compatto. Di conseguenza, essendo q continua su K, per il teorema di Weierstrass assume minimo (e massimo) su K. Quindi $\exists h_0 \in K$ t.c. $q(h) \geq q(h_0) =: m \quad \forall h \in K$. Infine, $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$q(v) = \|v\|^2 \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\frac{v_i}{\|v\|}\frac{v_j}{\|v\|} = \|v\|^2 Q\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \geq m\|v\|^2$$

Ovviamente se $v = 0$, la condizione è verificata.

QED

La dimostrazione di (ii) è analoga.

Proposizione 1.25 (Criterio di Sylvester (n=2)). *La forma quadratica* $q(v) = av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2$ *(con matrice associata A) è*

i) ***definita positiva (negativa)*** *se e solo se* $\det A > 0$ *e* $a > 0$ $(a < 0)$

ii) ***semidefinita positiva (negativa)*** *se e solo se* $\det A = 0$ *e* $a > 0$ $(a < 0)$

iii) ***indefinita*** *se e solo se* $\det A < 0$

Dimostrazione. Se $a = c = 0$, la forma quadratica è indefinita. Altrimenti supponiamo $a = 0$ e completiamo i quadrati

$$q(v) = a\left(v_1 + \frac{b}{a}v_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}v_2^2$$

allora i coefficienti dei quadrati sono a e $\dfrac{ac - b^2}{a} = \dfrac{\det A}{a}$, allora

- $\det A > 0$: allora $q(v)$ è strettamente positiva se $v \neq 0$ e $a > 0$, strettamente negativa se $v \neq 0$ e $a < 0$;
- $\det A = 0$: $q(v) = a\left(v_1 + \frac{b}{a}v_2\right)^2 \geq 0$ se $a > 0$ (≤ 0 se $a < 0$). Si annulla se v è tale che $v_1 + \frac{b}{a}v_2 = 0$;
- $\det A < 0$: vi sono direzioni in cui q è positiva e direzioni in cui è negativa.

QED

Osservazione 1.26. Il test fa intervenire non solo la matrice A ma anche il minore principale 1×1. La naturale generalizzazione è il **criterio di Sylvester**, in cui intervengono tutti i minori principali $k \times k$ di A.

Lemma 1.27 (Criterio di Sylvester per le forme definite). *La forma quadratica* $q(v) = {}^t vAv, v \in \mathbb{R}^n$ *è*

i) ***definita positiva*** *se e solo se* $\det A_k > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$;

ii) ***definita negativa*** *se e solo se* $(-1)^k \det A_k > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$.

Osservazione 1.28. Non è necessario partire in alto a destra ma basta una qualsiasi catena di sottomatrici, partendo da un elemento della diagonale principale e orlandolo ogni passaggio.

Per ottenere un test simile per le forme quadratiche semidefinite occorre considerare tutte le sottomatrici principali di A e non solo una particolare sequenza.

Lemma 1.29 (Critero di Sylvester per le forme semidefinite). *La forma quadratica $q(v) = {}^t vAv, v \in \mathbb{R}^n$ è*

i) ***semidefinita positiva*** *se e solo se* $\det A = 0$ *e ogni sottomatrice principale ha determinante maggiore o uguale a 0;*

ii) ***semidefinita negativa*** *se e solo se* $\det A = 0$ *e ogni sottomatrice principale di ordine k ha determinante maggiore o uguale a 0 se k è pari e determinante minore o uguale a 0 se k è dispari;*

Teorema 1.30 (Caratterizzazione delle forme quadratiche (semi)definite e indefinite). *La forma quadratica $q(v) = {}^t vAv$ è*

i) ***definita positiva (negativa)*** *se e solo se tutti gli autovalori sono positivi (negativi);*

ii) ***semidefinita positiva (negativa)*** *se e solo se tutti gli autovalori sono ≥ 0 (≤ 0) ed almeno uno di essi è nullo.*

iii) ***indefinita*** *se e solo se esistono autovalori positivi e negativi.*

1.4 Forme bilineari e spazi duali

Lemma 1.31 (Finestra sul mondo duale). *Siano V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica non degenere, allora esiste un isomorfismo*

$$\begin{array}{cccccc} \psi: & V & \xrightarrow{\sim} & V^\vee & & \\ & v & \longmapsto & \psi(v): & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & w & \longmapsto & \psi(v)(w) := b(v,w) \end{array}$$

Esercizio 1.3. *La dimostrazione del lemma precedente è lasciata per esercizio.* *Soluzione a pag. 45*

2 Strumenti per la Geometria Euclidea

2.1 Prodotto scalare

DEF 2.1 (Prodotto scalare). Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Una forma $b : V \times V \to \mathbb{R}$

i) bilineare

ii) simmetrica

iii) definita positiva, ovvero
$$b(v,v) \geq 0 \qquad \wedge \qquad b(v,v) = 0 \iff v = 0$$

si dice prodotto scalare su V, e si indica $\langle v, w\rangle$ o $v \cdot w$

Per il teorema di Sylvester e per il fatto che il prodotto scalare è una forma definita positiva, segue che esiste una base $\beta = \{e_i\}_i$ di V tale che
$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$
ovvero una base ortonormale (ortogonale e normalizzata). Inoltre siccome la mappa è definita positiva, non esistono vettori isotropi.

Lemma 2.2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). *Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su V ($\mathbb{R}$-spazio vettoriale). Allora $\forall v, w \in V$, vale*
$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle$$

Dimostrazione. [1] Se $x = 0 \vee y = 0$ è ovvio. Supponiamo quindi $x \neq 0 \wedge y \neq 0$. Allora per linearità del prodotto scalare
$$\langle \lambda x - y, \lambda x - y\rangle = \lambda^2 \langle x, x\rangle - 2\lambda \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle .$$

[1] Analisi A - 2Lez(2) 02/03/2023 [Def23]

Osserviamo che a primo membro per definizione di prodotto scalare abbiamo una quantità positiva, di conseguenza anche a secondo membro. In particolare un polinomio in λ è positivo $\forall\lambda$ se e solo se ha discriminante negativo, di conseguenza

$$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

QED

DEF 2.3 (Spazio vettoriale euclideo o pre-hilbertiano)**.** Uno $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V con un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si dice spazio vettoriale euclideo (o pre-hilbertiano) e si indica $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Un prodotto scalare induce anche una norma, per cui uno spazio euclideo è automaticamente uno spazio normato definendo

DEF 2.4 (Norma)**.** Uno spazio euclideo è uno spazio normato definendo la norma di un vettore come

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \in [0;+\infty[$$

Proprietà

i) $\|v\| \geq 0 \forall v \in V \quad \wedge \quad \|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$

ii) (omogeneità) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

iii) (disuguaglianza triangolare) $\|v\| + \|w\| \geq \|v+w\|$

Osserviamo inoltre che nel punto (*iii*) i due membri sono uguali solo se i due vettori sono multipli l'uno dell'altro.

Il prodotto scalare permette inoltre di definire il concetto di angolo compreso tra due vettori. La definizione è corretta in quanto la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz garantisce che il secondo membro sia in valore assoluto sempre minore di 1.

DEF 2.5 (Angolo compreso tra due vettori)**.** Siano $v,w \in (V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Si definisce allora l'angolo convesso non orientato compreso tra v e w l'angolo $\vartheta \in [0;\pi]$ tale che

$$\cos\vartheta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

Osservazione 2.6. $\langle v,w\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \widehat{vw} = \vartheta = \frac{\pi}{2}$, ovvero la definizione usuale di perpendicolarità coincide con quella derivante dal prodotto scalare.

2.2 Teorema di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Teorema 2.7 (Ortogonalizzazione - Gram-Schmidt)**.** *Sia $(v_i)_{i\in I}$ una successione (finita o infinita) di vettori nello spazio vettoriale euclideo V e I un insieme di indici. Allora esiste una successione $(w_i)_{i\in I}$ di vettori di V unica a meno di multipli scalari tale che:*

i) $\forall k \geq 1$, $\langle v_1,\ldots,v_k\rangle = \langle w_1,\ldots,w_k\rangle$

ii) $w_1,\ldots,w_k$ *sono a due a due ortogonali.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k

$\mathbb{N}0)$ Se $k=1$ non c'è niente da dimostrare.

$\mathbb{N}1)$ Supponiamo che il teorema valga per $k-1$, ovvero che $\exists w_1,\ldots,w_{k-1}$ che soddisfano (*i*) e (*ii*). Definiamo

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle v_k,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$$

sommando solo sugli i tali che $w_i \neq 0$. Stiamo rimuovendo a v le sue proiezioni su tutti gli altri vettori w_i.
Osserviamo ora che $\forall j < k$ (ricordando che per (ii), $\forall i < k, i \neq j \implies \langle w_i, w_j \rangle = 0$)

$$\langle w_k, w_j \rangle = \left\langle v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i, w_j \right\rangle = \langle v_k, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_j \rangle = \langle v_k, w_j \rangle - \frac{\cancel{\langle w_j, w_j \rangle}}{\cancel{\langle w_j, w_j \rangle}} \langle v_k, w_j \rangle = 0,$$

il che dimostra che vale (ii). Osserviamo ora che per costruzione

$$w_k \in \langle w_1, \dots, w_{k-1}, v_k \rangle$$

in quanto ne è combinazione lineare. Inoltre per ipotesi induttiva

$$\langle w_1, \dots, w_{k-1}, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

di conseguenza per il teorema di Steinitz posso scambiare v_k con w_k ed ottenere comunque un insieme di generatori, quindi

$$\langle w_1, \dots, w_{k-1}, \underline{w_k} \rangle = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

L'unicità segue del fatto che ad ogni passaggio per costruzione w_k appartiene al complemento diretto di $\langle w_1, \dots, w_{k-1} \rangle$ a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, che ha dimensione 1. QED

DEF 2.8 (Insiemi ortogonali e ortonormali)**.** Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo. Un insieme $\{v_i\}_i \subset V$ si dice ortogonale se

i) $v_i \neq 0 \ \forall i$

ii) $i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = 0$

si dice inoltre ortonormale se

iii) $\langle v_i, v_i \rangle = 1 \ \forall i$

Proposizione 2.9. *Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio euclideo. Un insieme ortogonale $\{v_i\}_{1 \leq i \leq r} \subset V$ con $r \leq \dim V$ è linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Prendiamo una combinazione lineare nulla $\sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0$. Osserviamo che $\forall j$

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle v_i, v_j \rangle = a_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0} = 0$$

per cui, per la legge di annullamento del prodotto, $a_j = 0$. QED

Esempio 2.1.

Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con la base canonica e il prodotto scalare standard. Siano $v_1 = (0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ e $v_4 = (0, 0, 1, 0)$. Ortogonalizzare questo insieme di vettori

Iniziamo ponendo $w_1 := v_1 = (0, 1, 0, 1)$. Ora ricaviamo di conseguenza gli altri vettori:

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3\rangle}{\langle w_3, w_3\rangle} w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione 2.10. *Siano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e $W \lhd V$. Allora $V = W \oplus W^\perp$.*

Dimostrazione. Prendiamo una base ortonormale di V $\{e_1, \dots, e_n\}$ tale che $W = \langle e_1, \dots, e_r\rangle$. Allora

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} a_i e_i}_{\in W} + \sum_{i=r+1}^{n} a_i e_i.$$

Osserviamo che $\forall 1 \le j \le r$,

$$\left\langle \sum_{i=r+1}^{n} a_i e_i, e_j \right\rangle = 0$$

per ipotesi, di conseguenza $\displaystyle\sum_{i=r+1}^{n} a_i e_i \in W^\perp$. Da ciò segue che $V = W + W^\perp$. Siccome non esistono vettori isotropi, $W \cap W^\perp = \{0\}$. La somma è quindi diretta. QED

2.3 Prodotto esterno

DEF 2.11 (Prodotto esterno)**.** Consideriamo un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V di dimensione 3. Si definisce prodotto esterno la mappa

$$\begin{array}{cccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Proprietà

i) $v \wedge w = 0 \iff \exists k : v = kw$

ii) $\langle v \wedge w, v\rangle = \langle v \wedge w, w\rangle = 0$

iii) $v \wedge w = -w \wedge v$

iv) $\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$

v) $(\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w) = \lambda(v \wedge w)$

vi) $v \wedge (w \wedge u) = (v \wedge w) \wedge u$

Dimostrazione. Dimostriamo solo (ii). Osserviamo che

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - y_2x_1) = \langle v, v \wedge w\rangle$$

QED

3 Spazi affini

DEF 3.1 (Spazio Affine)**.** $\mathbb{K}$ campo, V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Uno spazio affine con giacitura V è un insieme $\mathbb{A}$ munito di una mappa

$$\begin{array}{cccc} \overline{\cdot\,\cdot} : & \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \longrightarrow & V \\ & (P, Q) & \longmapsto & \overline{PQ} \end{array}$$

tale che

i) $\forall P \in \mathbb{A}, \forall v \in V, \exists! Q \in \mathbb{A} : \overline{PQ} = v$;

ii) $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}, \overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$.

Gli elementi di $\mathbb{A}$ si dicono punti.

Uno spazio vettoriale è uno spazio affine su sé stesso definendo

$$\begin{array}{cccc} \overline{\cdot\,\cdot}: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (v, w) & \longmapsto & w - v \end{array}$$

Esercizio 3.1. *Dimostrare che con questa definizione uno spazio vettoriale è uno spazio affine su sé stesso, ovvero che soddisfa (i) e (ii).* *Soluzione a pag. 46*

Osservazione 3.2. $\overline{PP} = \underline{0}$, infatti da (ii) segue che $\overline{PP} + \overline{PP} = \overline{PP}$.

DEF 3.3 (Dimensione di uno spazio affine)**.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con giacitura V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale). Si definisce la dimensione di $\mathbb{A}$ come la dimensione di V.

$$\dim \mathbb{A} := \dim V$$

DEF 3.4 (Traslazione)**.** Si definisce traslazione una mappa

$$\begin{array}{cccc} t: & \mathbb{A} \times V & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & (P, v) & \longmapsto & Q = t(P, v) =: P + v \end{array}$$

dove $P + v$ si chiama traslato di P per v tale per cui $\overline{PQ} = v$

Proprietà Segue direttamente dagli assiomi dello spazio affine che

i) $t(P, \underline{0}) = P$

ii) $t(t(P, u), v) = t(P, u + v)$

iii) $\forall P, Q \in \mathbb{A} \quad \exists! v : Q = t(P, v)$

3.1 Sistemi di riferimento affini

DEF 3.5 (Sistema di riferimento affine)**.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con giacitura V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale) con $\dim \mathbb{A} = n < \infty$. Un sistema di riferimento affine è dato da un punto O detto origine e una base β di V.

Grazie ad un sistema di riferimento è possibile esprimere i punti attraverso coordinate, come avevamo precedentemente fatto per i vettori. La differenza sta nel fatto che di per sé uno spazio affine non presenti un punto privilegiato, come può essere lo 0 nello spazio vettoriale, per cui per poter esprimere i punti come coordinate bisogna sceglierne uno.

3.2 Sottospazi affini

DEF 3.6. Siano $\mathbb{A}$ spazio affine con giacitura V, $P \in \mathbb{A}$ un punto e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora si dice sottospazio affine di $\mathbb{A}$ l'insieme

$$S = P + W = \{Q \in \mathbb{A} \mid \overline{PQ} \in W\}$$

Lemma 3.7. *Con la notazione precedente, $P + W$ è uno spazio affine con giacitura W*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che presi qualsiasi $A, B \in S$, allora $\overline{AB} \in W$. Per (ii) si ha che $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} \in W$ per definizione di S. QED

Vediamo ora una serie di esempi di sottospazi affini:

Esempio 3.1.

Sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$ con il sistema di riferimento canonico. Trovare la equazioni parametriche e cartesiane della retta S passante per $P = (-1, 2)$ con direzione (giacitura) $w = (1, 3)$.

Il fatto che un punto appartenga a S significa che è della forma $P + kw$. Di conseguenza

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x - y = +50$$

Per ottenere la forma cartesiana (a destra) si può anche procedere applicando la definizione: i vettori PQ e w devono essere linearmente dipendenti, ovvero la matrice seguente deve avere rango 2, quindi

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Esempio 3.2.

Generalizziamo l'esempio precedente considerando lo spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n con il sistema di riferimento canonico e scriviamo le equazioni del sottospazio affine S passante per $P = (p_1, \ldots, p_n)$ con giacitura $W = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle$, dove $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$ e i w_i sono linearmente indipendenti.

Equazioni cartesiane Per determinare l'equazione cartesiana abbiamo bisogno che un vettore generico $\overline{PQ}$ sia linearmente dipendente dagli altri, per cui che il rango della matrice seguente sia pari a r

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \ldots & x_n - p_n \\ w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & w_{r2} & \ldots & w_{rn} \end{pmatrix} = r$$

Siccome i vettori sono linearmente indipendenti, deve esistere un minore di ordine r non nullo. Per avere che la matrice ha rango r bisogna quindi imporre che tutti i minori orlati abbiano determinante nullo. Otteniamo quindi $n - r$ equazioni.

Equazioni parametriche Per determinare le equazioni parametriche basta semplicemente procedere come prima, ricordando che $Q \in S \Leftrightarrow Q = P + v$ con $v \in W$, ovvero $v = \sum_i t_i w_i$. Segue quindi che (separando nelle componenti):

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{21} + \cdots + t_r w_{r1} \\ x_2 = p_1 + t_1 w_{12} + t_2 w_{22} + \cdots + t_r w_{r2} \\ \vdots \\ x_n = p_1 + t_1 w_{1n} + t_2 w_{2n} + \cdots + t_r w_{rn} \end{cases}$$

DEF 3.8 (Sottospazi paralleli)**.** Siano $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale), S e T due sottospazi affini con giacitura rispettivamente U e W. Essi si dicono paralleli se $U \lhd W$ o $W \lhd U$.

3.3 Posizioni reciproche di sottospazi affini

Situazione 1. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale) con il sistema di riferimento canonico $(O, \{e_1, \ldots, e_n\})$ e siano $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $R = (r_1, \ldots, r_n)$ due punti di $\mathbb{A}$. Siano inoltre S il sottospazio affine per P con giacitura $W = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle$ e T il sottospazio affine per R con giacitura $U = \langle u_1, \ldots, u_t \rangle$*

Osserviamo che l'intersezione tra due sottospazi affini è un sottospazio affine tale che

$$S \cap T = \{Q \in \mathbb{A} \mid Q \in S \land Q \in T\}$$

ovvero $Q = (x_1, \ldots, x_n)$ soddisfa sia le equazioni che definiscono S che le equazioni che definiscono T. Otteniamo in questo modo un sistema lineare in $r + t$ equazioni che può essere

- incompatibile, quindi $S \cap T = \varnothing$
- compatibile con rango ρ tale che $\max\{n-r, n-t\} \leq \rho \leq (n-r) + (n-t)$.

Lemma 3.9 (Dimensione dell'intersezione)**.** *Nella situazione 1, si hanno due possibilità:*

- $S \cap T = \varnothing$
- $\dim S + \dim T - \dim \mathbb{A} \leq \dim S \cap T \leq \min\{\dim S, \dim T\}$

Dimostrazione. Da quanto detto prima segue che $\dim S \cap T = n - \rho = n - (n-r) - (n-t) = r + t - n$. QED

Osservazione 3.10. Nella situazione 1, ad S è associato un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{(n-r),1}x_1 + a_{(n-r),2}x_2 + \cdots + a_{(n-r),n}x_n + b_{(n-r)} = 0, \end{cases}$$

allora la giacitura W di S è determinata il sistema omogeneo associato, ovvero

$$S: \ \operatorname{rk} \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & \cdots & x_n - p_n \\ w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \cdots & w_{rn} \end{vmatrix} = r \qquad W: \ \operatorname{rk} \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r1} & \cdots & w_{rn} \end{vmatrix} = r$$

Un caso particolare: due rette in $\mathbb{A}^3$ Siano r e s due rette generiche nello spazio affine definite come segue:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

possono verificarsi quattro casi:

- le due rette sono coincidenti (i.e. si intersecano in infiniti punti);
- le due rette sono incidenti (i.e. si intersecano in un punto);
- le due rette sono parallele (i.e. non si intersecano e hanno la stessa giacitura);
- le due rette sono sghembe (i.e. non si intersecano e hanno giaciture diverse).

DEF 3.11 (Rette complanari e sghembe)**.** Siano r e s due rette nello spazio $\mathbb{A}^3$, esse si dicono

- **complanari** se $r \cap s \neq \varnothing$ o $r // s$
- **sghembe** se non sono complanari, ovvero se non si intersecano e non sono parallele.

Proposizione 3.12. *r e s come definite precedentemente sono complanari se e solo se*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Chiamiamo C la matrice dei coefficienti e D la matrice dei termini noti. Sia inoltre A la matrice $(C|D)$ che si ottiene orlando C con D.

"$\Rightarrow$" Se le due rette si intersecano significa che il sistema è compatibile, ovvero (Rouché-Capelli)

$$3 \geq \operatorname{rk} C = \operatorname{rk} A \implies \det A = 0;$$

se sono parallele, allora hanno giacitura uguale, per cui

$$\operatorname{rk} C = 2 \implies \operatorname{rk} A \leq 3 \implies \det A = 0$$

"$\Leftarrow$" Se il determinante della matrice è 0, il rango è 2 o 3. Non può essere 1 perché almeno 2 equazioni sono indipendenti per ipotesi (r e s sono rette). Di conseguenza

- se $\operatorname{rk} A = 2$ significa che le due rette sono coincidenti;
- se $\operatorname{rk} A = 3$ può essere:
  * $\operatorname{rk} C = 3$, allora le rette si intersecano in un punto;
  * $\operatorname{rk} C = 2$, le rette hanno la stesa giacitura ma non si intersecano, per cui sono parallele.

QED

4 Geometria Euclidea

Definiamo ora uno spazio euclideo come uno spazio affine con giacitura uno spazio vettoriale euclideo.

DEF 4.1 (Spazio euclideo)**.** Uno spazio affine $\mathbb{A}^n$ di giacitura V ($\mathbb{R}$-spazio vettoriale) con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si dice spazio euclideo e si indica $\mathbb{E}^n := (\mathbb{A}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Un **sistema di riferimento cartesiano** o **euclideo** è un sistema di riferimento affine formato da vettori ortonormali, ovvero tale che $\forall i, j, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

4.1 Metriche in $\mathbb{E}^n$

DEF 4.2 (Metrica euclidea o pitagorica)**.** In uno spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ definiamo la metrica euclidea come

$$\forall P, Q \in \mathbb{E}^n, \qquad d(P, Q) = \|\overline{PQ}\| = \sqrt{\langle \overline{PQ}, \overline{PQ} \rangle}$$

Ricordiamo che (in coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano) se $P = (p_1, \ldots, p_n)$ e $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, allora

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}$$

Inoltre, in uno spazio euclideo, possiamo definire quando due suoi sottospazi H_1 e H_2 sono ortogonali, ovvero quando presi due qualsiasi vettori appartenenti alle loro giaciture W_1 e W_2 (risp.), essi sono ortogonali:

$$H_1 \perp H_2 \Leftrightarrow [\forall w_1 \in W_1, \forall w_2 \in W_2,\ \langle w_1, w_2 \rangle = 0]$$

Situazione 2. *Sia $\mathbb{E}^n$ uno spazio euclideo e $Oe_1 \ldots e_n$ un sistema di riferimento cartesiano.*

4.1.1 Vettori ortogonali agli iperpiani

Nella situazione 2, sia H l'iperpiano identificato dall'equazione

$$H: \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0$$

allora lo spazio ortogonale ha giacitura $\langle v \rangle$, dove v è il vettore dei coefficienti dell'iperpiano $v = (a_1, \ldots, a_n)$. Osserviamo infatti che la giacitura di H è la soluzione del sistema omogeneo, ovvero l'insieme $\{w \in V \mid \langle v, w \rangle = 0\}$.

4.1.2 Distanza punto-iperpiano

DEF 4.3. Si dice distanza tra un punto P e un iperpiano H l'inf delle distanze tra P e un punto Q dell'iperpiano.

$$d(P, H) := \inf_{Q \in H} d(P, Q)$$

Nella situazione 2, sia H l'iperpiano identificato dall'equazione

$$H: \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0,$$

osserviamo che la distanza minima è quella del segmento PN perpendicolare al piano, infatti per il Teorema di Pitagora

$$\|\overline{PQ}\| = \|PN\|^2 + \|QN\|^2 \geq \|PN\|^2$$

di conseguenza otteniamo che la distanza tra il punto e l'iperpiano è la proiezione di $\overline{PQ}$ lungo la direzione di $\overline{PN}$, ovvero di un vettore v ortogonale al piano e normalizzato. Otteniamo quindi che

$$v = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}(a_1, \ldots, a_n),$$

da cui $\overline{PN} = \langle \overline{PQ}, v \rangle v$, da cui per omogeneità della norma $\|\overline{PN}\| = |\langle \overline{PQ}, v \rangle| \cdot \|v\| = |\langle \overline{PQ}, v \rangle|$. Abbiamo quindi

$$d(P, H) = |\langle \overline{PQ}, v \rangle| = \frac{|(p_1 - q_1)a_1 + \cdots + (p_n - q_n)a_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} = \frac{|a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

infatti siccome $Q \in H$, allora $a_1 q_1 + \cdots + a_n q_n = -b$.

Esempio 4.1.

In $\mathbb{E}^3$ siano $P = (-1, 0, -2)$ e $H: \ 3x - 2y + z + 1 = 0$. Trovare la retta passante per P e perpendicolare ad H e calcolare la distanza tra P e H.

Dobbiamo calcolare la retta per P e di giacitura il vettore $v = (3, -2, 1)$ perpendicolare da H, quindi imponiamo

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x+1 & y & z+2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

da cui

$$\begin{cases} -2(x+1) + 3y = 0 \\ x + 1 - 3(z+2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ x - 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Per la distanza applichiamo la formula ricavata precedentemente

$$d(P, H) = \frac{|-3 + 0 - 2 + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

4.1.3 Distanza punto-retta in $\mathbb{E}^3$

Per determinare la distanza tra un punto P e una retta r bisogna determinare l'equazione del piano H perpendicolare a r e passante per P. A questo punto determiniamo le coordinate del punto $Q : H \cap r$, e otteniamo che la distanza tra P e r è la distanza tra P e Q.

4.1.4 Distanza retta-piano in $\mathbb{E}^3$

La distanza tra una retta e un piano è nulla se essi si intersecano, altrimenti è uguale alla distanza tra un qualsiasi punto della retta e il piano se sono paralleli.

4.1.5 Distanza tra due piani in $\mathbb{E}^3$

La distanza tra due piani è nulla se essi si intersecano, altrimenti i due piani sono paralleli per cui la loo distanza è quella tra uno e un qualsiasi punto dell'altro.

4.1.6 Distanza tra due rette in $\mathbb{E}^3$

La distanza tra due rette è nulla se esse si intersecano e è la distanza tra una e un punto qualsiasi dell'altra se esse sono parallele. Se le rette sono sghembe la situazione è più complicata. Si ha infatti (lo dimostreremo a breve) che esiste ed è unica la retta perpendicolare a due rette sghembe. Siano r_1 e r_2 le rette, allora la retta si trova intersecando il piano H_1 contentente r_2 e perpendicolare a r_1 con il piano H_2 contenente r_1 e perpendicolare a r_2.

Lemma 4.4. *Prese due rette $r_1, r_2 \subset \mathbb{E}^3$ sghembe, allora esiste un'unica retta $s \subset \mathbb{E}^3$ perpendicolare ad r_1 e r_2.*

Dimostrazione. Ogni retta è identificata univocamente da un punto e da una direzione. Siano quindi r_1 la retta per P_1 con direzione v_1 e r_2 la retta per P_2 con direzione v_2. Siano inoltre $N_1 \in r_1$ e $N_2 \in r_2$, si ha quindi che esistono t_1 e t_2 tali che

$$\overline{ON_1} = \overline{OP_1} + t_1 v_1 \qquad \overline{ON_2} = \overline{OP_2} + t_2 v_2$$

da cui

$$\overline{N_1N_2} = \overline{ON_2} - \overline{ON_1} = \overline{OP_2} + t_2v_2 - \overline{OP_1} - t_1v_1 = \overline{P_1P_2} + t_2v_2 - t_1v_1.$$

Vogliamo che N_1N_2 sia perpendicolare ad entrambe le rette. Imponiamo quindi

$$\begin{cases} \left\langle \overline{N_1N_2}, v_1 \right\rangle = 0 \\ \left\langle \overline{N_1N_2}, v_2 \right\rangle = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left\langle \overline{P_1P_2}, v_1 \right\rangle + t_2 \langle v_2, v_1\rangle - t_1 \langle v_1, v_1\rangle = 0 \\ \left\langle \overline{P_1P_2}, v_2 \right\rangle + t_2 \langle v_2, v_2\rangle - t_1 \langle v_1, v_2\rangle = 0 \end{cases}$$

Otteniamo quindi un sistema lineare con matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} \langle v_2, v_1\rangle & -\langle v_1, v_1\rangle \\ \langle v_2, v_2\rangle & -\langle v_1, v_2\rangle \end{vmatrix} = \|v_1 \wedge v_2\|^2$$

Osserviamo che se le rette sono sghembe non sono parallele, quindi $v_1 \wedge v_2 \neq \underline{0}$. Di conseguenza il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione. QED

In pratica, è importante ricordare che il prodotto esterno di due vettori restituisce sempre un vettore perpendicolare ai due di partenza. Di conseguenza, mantenendo la notazione della dimostrazione, definiamo un versore w perpendicolare ad entrambe le rette

$$w := \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

e proiettiamo sulla sua direzione un qualsiasi vettore che collega le due rette, ad esempio $\overline{P_1P_2}$. Allora

$$d(r_1, r_2) = \|\overline{N_1N_2}\| = \left|\left\langle w, \overline{P_1P_2}\right\rangle\right|.$$

Infatti, osserviamo che, siccome $\overline{N_1N_2}$ e w sono paralleli, $\left\langle \overline{N_1N_2}, w\right\rangle = \|\overline{N_1N_2}\| \cdot \|w\| = \|\overline{N_1N_2}\|$ e,

$$\left\langle \overline{P_1P_2}, w\right\rangle = \left\langle \overline{N_1N_2} + t_1v_1 - t_2v_2, w\right\rangle = \left\langle \overline{N_1N_2}, w\right\rangle + t_1\langle v_1, w\rangle - t_2 \langle v_2, w\rangle$$

Ma, per la proprietà (*ii*) del prodotto esterno, $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle = 0$, quindi

$$\left\langle \overline{P_1P_2}, w\right\rangle = \left\langle \overline{N_1N_2}, w\right\rangle = \|\overline{N_1N_2}\|$$

□

Esempio 4.2.

Calcolare la distanza tra le rette sghembe r e s:

$$r : \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Determiniamo le giaciture delle rette risolvendo i sistemi lineari omogenei associati

$$v : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad v = (1, 1, 1)$$

$$w : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \qquad w = (2, -3, 1)$$

e calcoliamo dei punti generici $P = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ e $Q = (0, -1, 1)$ appartenenti rispettivamente a r e s. Prendiamo ora il versore u perpendicolare sia a v che a w

$$u = \frac{v \wedge w}{\|v \wedge w\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(4, 1, -5)$$

e proiettiamo il segmento $\overline{PQ}$ lungo u, ottenendo la distanza tra r e s.

$$d(r, s) = |\left\langle \overline{P_1P_2}\right\rangle| = \left|\left\langle \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right), \frac{1}{\sqrt{42}}(4, 1, -5)\right\rangle\right| = \frac{1}{\sqrt{42}}\left|-\frac{16}{3} - \frac{5}{3}\right| = \frac{7}{\sqrt{42}}.$$

4.1.7 Sfera

Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ si può definire la sfera $n-1$-dimensionale di centro P e raggio r come il luogo geometrico dei punti che distano r da P. Fissato un sistema di riferimento cartesiano si ha $P = (p_1, \dots, p_n)$ e l'equazione della sfera è

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{X \in \mathbb{E}^n \,|\, d(X,P) = r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, (x_1 - p_1)^2 + \dots + (x_n - p_n)^2 = r^2\} =$$
$$= \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2p_1x_1 - \dots - 2p_nx_n + c = 0\}$$

dove $c = (\sum_i p_i^2) - r^2$.

4.2 Volumi

Nella situazione 2, prendiamo un insieme di $n+1$ punti $Q_0, \dots, Q_n$ dove $Q_i = (q_1^i \dots, q_n^i)$. allora il volume dell'$n$-parallelepipedo determinato da $\overline{Q_0Q_1}, \dots, \overline{Q_0Q_n}$ è dato dal valore assoluto del determinante della matrice

$$V = \left|\begin{vmatrix} q_1^1 - q_1^0 & \cdots & q_n^1 - q_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ q_1^n - q_1^0 & \cdots & q_n^n - q_n^0 \end{vmatrix}\right|$$

Osserviamo che sembra dipendere dalla scelta della base, in quanto le coordinate dipendono dalla stessa. In realtà se scegliamo delle basi ortonormali, essa è una buona definizione in quanto per il lemma 5.5 seguente si ha che il determinante della matrice non dipende dalla scelta della base.

4.3 Poliedri

DEF 4.5 (Semispazio)**.** Si dice semispazio un $T \subset \mathbb{E}^n$ tale che

$$T = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \leq 0\}$$

DEF 4.6 (Poliedro convesso)**.** Un poliedro convesso Π è un sottoinsieme di $\mathbb{E}^n$ tale che

i) è limitato, ovvero $\exists r > 0, \exists P \in \mathbb{E}^n \,:\, \Pi \subset B_r(P)$;

ii) non è contenuto in un iperpiano;

iii) è intersezione di un numero finito di semispazi.

Ad esempio, in $\mathbb{E}^1$ un poliedro è un segmento, in $\mathbb{E}^2$ è un poligono e $\mathbb{E}^3$ è un solido convesso.

4.3.1 Formula di Eulero

Teorema 4.7 (Eulero)**.** *Si consideri un solido $\Pi \subset \mathbb{E}^3$, e siano v il numero dei suoi vertici, f il numero delle sue facce e s il numero dei suoi spigoli, allora è verificata l'identità*

$$f + v - s = 2.$$

Dimostrazione. Supponiamo che il solido possa essere costruito interamente partendo da una faccia e aggiungendone altre lungo spigoli consecutivi. Diamo questo risultato per dimostrato.

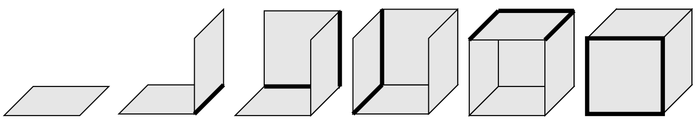


Figura 4.1: Il procedimento descritto applicato ad un cubo

Consideriamo ora la quantità $\varphi := f + v - s - 1$ e dimostriamo che ogni volta che viene aggiunta una faccia essa rimane costante. Al primo passo viene aggiunta una faccia con k_1 lati e k_1 spigoli. Otteniamo quindi $\varphi = 1 + k_1 - k_1 - 1 = 0$. Al passaggio i-esimo aggiungiamo una faccia con k_i spigoli e $k_i - 1$ vertici, infatti siccome gli spigoli devono essere adiacenti, i vertici già presenti sono 1 in più degli spigoli. Di conseguenza otteniamo

$$\varphi = i + \sum_j^i k_j - \sum_j^i (k_j - 1) = i + \sum_j^i k_j - \sum_j^i k_j - i = 0.$$

Quando aggiungiamo l'ultima faccia e "chiudiamo" il solido, i vertici e gli spigoli sono già tutti presenti, per cui otteniamo $\varphi_{fin} = 1$, da cui

$$f + v - s = 2$$

QED

4.3.2 Solidi platonici

Teorema 4.8 (Platone)**.** *Ci sono solo 5 solidi platonici in* $\mathbb{E}^3$*, ovvero solidi con tutte le facce poligoni regolari e congruenti.*

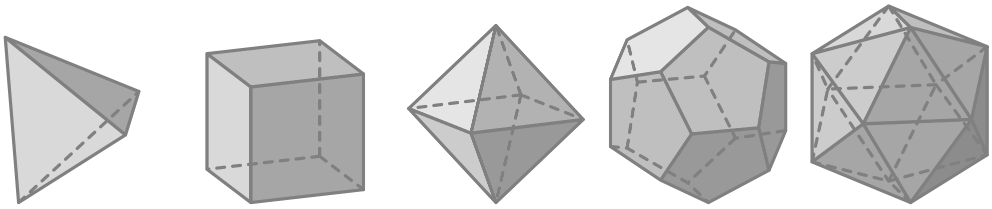


Figura 4.2: I solidi platonici

Dimostrazione. Supponiamo che le facce siano triangoli equilateri. Allora in un vertice possiamo "metterne" tra tre (con meno non si può avere un vertice) e 5 (se ne mettiamo 6 otteniamo un piano). Analogamente con i quadrati e i pentagoni possiamo metterne solo 3. Se usiamo invece degli esagoni con 3 abbiamo già un piano, per cui non è possibile ottenere un solido solo con esagoni. Di conseguenza i solidi possono essere solo quelli che abbiamo classificato nella figura 4.2. QED

Consideriamo ad esempio il caso di triangoli equilateri con 5 lati per vertice. Abbiamo quindi che ogni faccia ha tre spigoli, ognuno dei quali condiviso tra due facce, e 3 vertici, ognuno dei quali condiviso tra 5 facce, ovvero

$$s = \frac{3}{2}f \qquad v = \frac{3}{5}f$$

per cui dal teorema di Eulero (4.7) segue che $f = 20$.

5 Proprietà degli operatori simmetrici e unitari

DEF 5.1 (Mappe simmetriche e unitarie)**.** Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo con un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T \in \mathrm{End}(V)$. La mappa T si dice

- **simmetrica** se $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$;
- **unitaria** se $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

Osservazione 5.2. Sia $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortornormale e sia $M = M_\beta(T)$. Allora

i) T è simmetrica se e solo se M è simmetrica;

ii) T è unitaria se e solo se M è ortogonale, ovvero ${}^tM = M^{-1}$.

Dimostrazione.

i) "$\Rightarrow$" Sia $M = (a_{ij})_{ij}$. Allora si ha che $\forall i, T(e_i) = \sum_j a_{ji} e_j$. Segue quindi che

$$a_{ij} = \langle T(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, T(e_j) \rangle = a_{ji}.$$

"$\Leftarrow$" $\langle T(v), w\rangle = {}^t(Mv)w = {}^tv(Mw) = \langle v, T(w)\rangle$.

ii) "$\Rightarrow$" Supponiamo che $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, allora

$$\langle T(v), T(w)\rangle = {}^t(Mv)(Mw) = {}^tv\,{}^tMMw$$
$$\langle v, w\rangle = {}^tvw$$

quindi
$$ {}^tv\,{}^tMMw = {}^tvw \qquad \Longrightarrow \qquad {}^tMM = I, \text{ ovvero } M \text{ è ortogonale.}$$

"$\Leftarrow$" Supponiamo M ortogonale, allora

$$\langle T(v), T(w)\rangle = {}^t(Mv)(Mw) = {}^tv\,{}^tMMw = {}^tvw = \langle v, w\rangle .$$

QED

Situazione 3. *Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo con $\dim V = n < \infty$ e $T \in \mathrm{End}(V)$ simmetrica.*

Lemma 5.3. *Nella situazione 3, sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore.*

Dimostrazione. Consideriamo A come matrice a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora per il teorema fondamentale dell'algebra ammette almeno un autovalore λ. Dimostriamo ora che $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$. Siccome λ è un autovalore, deve esistere un $x \in \mathbb{C}^n$ tale che $Ax = \lambda x$. Passando al coniugato osserviamo che (siccome A è una matrice a coefficienti reali)

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} \implies A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

Osserviamo ora che
$$ {}^t\bar{x}Ax = {}^t\bar{x}(Ax) = {}^t(\bar{x})\lambda x = \lambda\,{}^t\bar{x}x$$
$$ {}^t\bar{x}Ax = ({}^t\bar{x}A)x = {}^t(A\bar{x})x = \bar{\lambda}\,{}^t\bar{x}x$$

Da cui, siccome $\bar{x}x \neq 0$ perchè $x \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$, da cui $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$, ovvero $\lambda \in \mathbb{R}$. QED

Teorema 5.4 (Spettrale). *Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo con $\dim V = n < \infty$ e $T \in \mathrm{End}(V)$ simmetrica (situazione 3). Allora esiste una base $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di autovettori ortonormali.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sulla dimensione dello spazio vettoriale. Per $\dim V = 1$ il teorema è ovvio. Supponiamo ora il teorema valido per $\dim V = n-1$ e proviamo che vale per $\dim V = n$.

Per il lemma precedente, sappiamo che esiste il almeno un λ autovalore di T (con autovettore associato e_1, che supponiamo di norma unitaria). Consideriamo ora $W = e_1^{\perp}$, allora $\dim W = n-1$. Restringiamo ora T a

$$T\big|_W : \quad W \quad \longrightarrow \quad W$$

e dimostriamo che l'immagine sia effettivamente W (ovvero che W è T-invariante).

$$\forall w \in W, \qquad \langle T(w), e_1\rangle \underset{\text{simm.}}{=} \langle w, T(e_1)\rangle = \langle w, \lambda e_1\rangle = \lambda\langle w, e_1\rangle = 0 \implies T(w) \in W$$

Per ipotesi induttiva, esiste una base $\{e_2, \ldots, e_n\} \subset W \subset V$ di autovettori ortonormali per $T\big|_W$. Segue quindi che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base cercata. QED

Lemma 5.5. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\dim V < \infty$. Siano $\beta = \{e_i\}_i$ e $\gamma = \{u_i\}_i$ due basi ortonormali. Allora $M := M_{\beta\gamma}(Id)$ è ortogonale, ovvero ${}^tM = M^{-1}$.*

Dimostrazione. Osserviamo ha come colonne i vettori di γ rispetto a β, mentre ${}^tM$ ha come righe gli stessi vettori, per definizione di prodotto tra matrici si ha che ${}^tMM = (\langle u_i, u_j\rangle)_{ij} = (\delta_{ij})_{ij} = I$, in quanto le matrici sono ortogonali. QED

Da questo segue inoltre che $\det M = \pm 1$, infatti per la formula di Cuchy-Binet e per costruzione del determinante, si ha
$$1 = \det I = \det({}^tMM) = (\det M)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \det M = \pm 1$$

Di conseguenza esiste una matrice $N = (\det M) \cdot M \in SO(n)$.

Proposizione 5.6. *Nella situazione 3, siano v_1, v_2 autovettori associati agli autovalori λ_1, λ_2. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. In altri termini, gli autospazi associati ad autovalori diversi sono perpendicolari.*

Esercizio 5.1. *La dimostrazione della proposizione precedente è lasciata per esercizio.* *Soluzione a pag. 46*

La ricerca degli autovettori avviene esattamente come studiato nel Primo Modulo. L'unica differenza si ha quando la molteplicità geometrica di un autovalore è diversa da 1. In tal caso gli autovettori ad esso associati saranno perpendicolari agli altri autospazi ma non necessariamente tra di loro. Bisognerà applicare quindi l'algoritmo di Gram-Schmidt per renderli ortogonali.

Proposizione 5.7 (Caratterizzazione operatori unitari)**.** *Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $T \in \operatorname{End} V$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) T *è lineare e unitaria*

ii) T *è lineare e* $\|T(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$

iii) $T(0) = 0$ *e* $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$

Dimostrazione.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Ovvia per definizione di mappa unitaria e linearità;

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ovvia per definizione di mappa unitaria e linearità;

$(iii) \Rightarrow (i)$ Assumiamo che valga (iii) e osserviamo che $\forall v \in V$,

$$\|T(v)\| = \|T(v) - 0\| = \|T(v) - T(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$$

Esplicitando $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ attraverso la definizione di norma, otteniamo

$$\cancel{\|T(v)\|^2} - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \cancel{\|T(w)\|^2} = \cancel{\|v\|^2} - 2\langle v, w \rangle + \cancel{\|w\|^2}$$

quindi

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \tag{$*$}$$

Sia $\{e_1, \ldots, e_n\} := \beta$ una base ortonormale per $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, allora per $(*)$ $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\} := \gamma$ è una base ortonormale, infatti $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Sia ora $v \in V$, allora può essere espresso come $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$. Allora scrivo $T(v)$ in coordinate rispetto a γ.

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v), T(e_i) \rangle T(e_i) \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle T(e_i)$$

Abbiamo quindi provato che $v = \sum_i x_i e_i \implies T(v) = \sum_i x_i T(e_i)$, ovvero che T è lineare.

QED

6 Affinità

DEF 6.1 (Affinità)**.** Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con giacitura V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale), si dice affinità con isomorfismo associato $\varphi : V \to V$ una mappa

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$

tale che

i) è biiettiva;

ii) $\forall P, Q \quad \overline{f(P)f(Q)} = \varphi(\overline{PQ})$

Da questa definizione possiamo ricavare quindi quelle di alcune affinità prescindendo dalla necessità di avere un sistema di riferimento.

Traslazione di vettore v Si tratta di una mappa

$$\begin{array}{rccc} t_v: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & P & \longmapsto & t_v(P) \end{array}$$

tale che $\overline{Pt_v(P)} = v$.

Riflessione rispetto ad un punto C Si tratta di una mappa

$$\begin{array}{rccc} r_C: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & P & \longmapsto & r_C(P) \end{array}$$

tale che $\overline{r_C(P)C} = \overline{CP}$.

Riflessione rispetto ad un iperpiano H Si tratta di una mappa

$$\begin{array}{rccc} r_H(P): & \mathbb{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{E}^n \\ & P & \longmapsto & r_H(P) \end{array}$$

tale che $\overline{Nr_H(P)} = -\overline{NP}$, dove N è l'intersezione della retta perpendicolare ad H passante per P con H.

Esercizio 6.1. *Dimostrare che traslazione, riflessione rispetto ad un punto e riflessione rispetto ad un iperpiano sono affinità. In particolare provare che l'isomorfismo associato alla traslazione è l'identità mentre l'isomorfismo associato alla riflessione è* $-\mathrm{Id}$. *Soluzione a pag. 46*

Osservazione 6.2. Un'affinità $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ è completamente determinata da φ e dall'immagine di un punto. Infatti, fissati O e $O' = f(O)$,

$$\overline{f(P)O'} = \overline{f(P)f(O)} = \varphi(\overline{PO})$$

Di conseguenza la mappa può essere espressa come

$$f(P) = \varphi(\overline{OP}) + f(O)$$

passando in coordinate rispetto a $Oe_1 \dots e_n$ (siano $A = M(\varphi)$ e $\underline{c} = [f(O)]_{Oe_1\dots e_n}$)

$$f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{c}$$

6.1 Isometrie

DEF 6.3 (Isometria)**.** Sia $\mathbb{E}^n$ uno spazio euclideo, un'affinità $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ si dice isometria se ha isomorfismo associato unitario.

Proposizione 6.4 (Caratterizzazione isometrie)**.** *Siano $\mathbb{E}^n$ uno spazio euclideo e $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti*

i) *f è un'isometria;*

ii) $\forall P, Q \in \mathbb{E}^n, \quad d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se f è un isometria, l'isomorfismo associato φ è unitario. Di conseguenza

$$d(f(P), f(Q)) = \|\overline{f(P)f(Q)}\| = \|\varphi(\overline{PQ})\| = \|\overline{PQ}\| = d(P, Q)$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fissato un $O \in \mathbb{E}^n, \forall v \in V$ sia $P \in \mathbb{E}^n$ tale che $\overline{OP} = v$. Definiamo quindi

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & v & \longmapsto & \varphi(v) := \overline{f(O)f(P)}. \end{array}$$

Osserviamo che per definizione di spazio affine P unico, per cui φ è ben definita. Inoltre segue che $\varphi(O) = \overline{f(O)f(O)} = 0$. Siano quindi $P, Q \in \mathbb{E}^n$ tal che $v = \overline{OP}$ e $w = \overline{OQ}$, allora

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\| &= \|\varphi(\overline{OP}) - \varphi(\overline{OP})\| = \|\overline{f(O)f(P)} - \overline{f(O)f(Q)}\| = \\ &= \|\overline{f(Q)f(P)}\| = d(f(Q), f(P)) = d(Q, P) = \|v - w\| \end{aligned}$$

da cui per la caratterizzazione degli operatori lineari unitari (Proposizione 5.7), φ è lineare unitaria.

Supponiamo per assurdo che f non sia biiettiva, allora devono esistere due P, Q distinti tali che $f(P) = f(Q)$. Di conseguenza $d(f(P), f(Q)) = 0 \neq d(P, Q)$. Assurdo.

Dimostriamo ora che φ è biiettiva:

$$\|\varphi(\overline{PQ})\| = \|\overline{f(P)f(Q)}\| = d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \Leftrightarrow \overline{PQ} = 0$$

ovvero $\ker\varphi = 0$, quindi è iniettiva. Dal teorema Nullità + Rango segue che è anche suriettiva.

QED

Osserviamo che la matrice associata ad un'isometria ha determinante e autovalori uguali a ± 1, infatti il determinante segue dal Lemma 5.5 (la dimostrazione è riportata di seguito al lemma) e (sia v autovettore associato a λ)

$$\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \implies \lambda = \pm 1$$

DEF 6.5 (Isometrie dirette e indirette)**.** Un'isometria f si dice diretta se ha $\det f = 1$ o indiretta se $\det f = -1$.

Esempio in $\mathbb{E}^2$ non trascritto.

Proposizione 6.6. *Un'isometria di $\mathbb{R}^2$ può essere espressa come la composizione di una rotazione (diretta) o una riflessione rispetto ad una retta (inversa) e una traslazione.*

Dove la matrice A è associata ad una rotazione di angolo ϑ e la matrice B è associata ad una riflessione rispetto alla retta vettoriale di pendenza $\vartheta/2$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

DEF 6.7 (Gruppo ortogonale)**.** Si definiscono i gruppi $O(n), SO(n) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^tA\}$$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

Lemma 6.8. *Sia $A \in SO(3), A \neq I_3$, allora A ha un autovalore 1 con molteplicità geometrica 1. Equivalentemente l'isometria associata ad A ha una retta puntualmente unita.*

Per la dimostrazione si rimanda il lettore a pag. 285 di [Ser00].

Teorema 6.9 (Chasles)**.** *Un'isometria di $\mathbb{E}^2$ che fissa un punto è una rotazione (se è diretta) o una riflessione (se è inversa).*

Osservazione 6.10. Gli Insiemi $\{f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n \mid f \text{ affinità}\}$ e $\{f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \mid f \text{ isometria}\}$ sono dei gruppi.

Proposizione 6.11. *Sia $\mathbb{A}^n$ uno spazio affine e S un suo sottospazio con giacitura W. Sia inoltre f un affinità. Allora*

$$\operatorname{Im}_S f = \{R \in \mathbb{A}^n \mid \exists P \in S : R = f(P)\}$$

è un sottospazio affine con dimensione $\dim S$.

7 Geometria Proiettiva

DEF 7.1 (Spazio proiettivo)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim V = n + 1$. Definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ su V:

$$\forall v, w \in W \quad v \sim w \;:\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \,:\, v = \lambda w$$

Si definisce **spazio proiettivo** di dimensione n l'insieme

$$\mathbb{P}(V) = V/_{\sim} = \{[v] \mid v \in V \wedge v \neq 0\}$$

Si dimostra che $\mathbb{P}(V)$ ha effettivamente dimensione $\dim V - 1$. Esso è infatti l'insieme dei sottospazi di dimensione 1. In particolare se $V = \{0\}$, $\mathbb{P}(V) = \varnothing$ e $\dim \mathbb{P}(V) = -1$.

DEF 7.2 (Sistema di riferimento proiettivo)**.** Un sistema di riferimento proiettivo di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è una base di V.

Notazione Sia $V = \mathbb{K}^{n+1}$, allora lo spazio proiettivo su V si indica $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{P}^n$. In particolare

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \big\{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \in \mathbb{K} \wedge \underline{x} \neq 0\big\}.$$

Se consideriamo un $[v] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, le sue coordinaterispetto ad un sistema di riferimento proiettivo sono quelle di un qualsiasi $u \in [v] = \langle v \rangle$, infatti le coordinate proiettive sono definite a meno di multipli scalari. Fissato un sistema di riferimento è quindi possibile definire un isomorfismo (mappa a coordinate) da $\mathbb{P}(V)$ a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

DEF 7.3 (Sottospazio proiettivo)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $W \lhd V$. Dato uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, si dice sottospazio proiettivo un insieme

$$\mathbb{P}(W) = \big\{[w] \,:\, w \in W \wedge w \neq 0\big\}$$

Analogamente si ha che $\dim \mathbb{P}(W) = \dim W - 1$.

Ricorda. Se V è uno spazio vettoriale con base $\beta = \{e_0, \dots, e_n\}$, e $W \lhd V$ tale che $W = \langle w_0, \dots, w_m \rangle$ linearmente indipendenti. Allora W può essere descritto come l'insieme dei vettori di V che si annullano per ogni mappa di $W^{\perp} \lhd V^{\vee}$, ovvero tali che

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \underline{x} & \underline{w_0} & \dots & \underline{w_m} \end{pmatrix} = \dim W$$

Le equazioni che identificano il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ associato ad un sottospazio W sono le stesse che identificano W. Analogamente le equazioni parametriche che identificano $\mathbb{P}(W)$ sono le stesse che identificano W.

Esempio 7.1.

Determinare le equazioni cartesiane descriventi gli spazi proiettivi associati ai sottospazi vettoriali seguenti

a) $W = \langle (1,1,0), (0,1,2) \rangle \lhd \mathbb{R}^3$

b) $W = \langle (1,0,1,0), (2,2,0,1), (0,0,1,2) \rangle \lhd \mathbb{R}^4$

c) $W = \langle (2,1,1,0), (0,1,-1,2) \rangle \lhd \mathbb{R}^4$

a) Osserviamo che siccome W ha dimensione 2, $\mathbb{P}(W)$ avrà dimensione 1 e sarà quindi una retta nel piano proiettivo, con equazione cartesiana rispetto alla base canonica data da

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$$

b) Analogamente $P(W)$ è un piano nello spazio proiettivo con equazione cartesiana data da

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

c) Osserviamo che si tratta di una retta nello spazio, per cui deve essere determinata da 2 equazioni, quindi

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 - 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Proposizione 7.4. *Siano $U, W \lhd V$, Allora $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W)$.*

Dimostrazione.

"$\subseteq$" Considero un $[v] \in \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)$, allora $v = \lambda u = \mu w \implies [v] \in \mathbb{P}(U \cap W)$.

"$\supseteq$" Considero un $[v] \in \mathbb{P}(U \cap W)$, allora $v = \lambda u = \mu w$ con $u \in U, w \in W$. Allora $[v] \in \mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)$.

QED

DEF 7.5 (Spazio proiettivo generato da un insieme)**.** Dato $S \subset \mathbb{P}(V)$, sia $L(S)$ lo spazio generato da S, ovvero il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene S. Vale inoltre la seguente caratterizzazione ($Z \lhd V$):

$$L(S) = \bigcap \{\mathbb{P}(W) \,|\, S \subset \mathbb{P}(W) \wedge W \lhd V\} = \mathbb{P}(Z)$$

Ciò segue dal lemma del minimo, che garantisce che se il minimo della famiglia $(\{\mathbb{P}(W) \,|\, S \subset \mathbb{P}(W) \wedge W \lhd V\}, \subseteq)$ esiste, esso è la sua intersezione. In particolare si ha banalmente ([Ser00] pag. 307-8) che $(U, W \lhd V)$ $L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(U + W)$.

Teorema 7.6 (Formula di Grassmann proiettiva)**.** *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $U, W \lhd V$. Allora*

$$\dim \mathbb{P}(U) + \dim \mathbb{P}(W) = \dim (\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W)) + \dim L (\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W))$$

Dimostrazione. Segue dalla formula di Grassmann con

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(U \cap W) \text{ e } L(\mathbb{P}(U) \cup \mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(U + W).$$

QED

Situazione 4. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $U, W \lhd V$. Sia $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo su V.*

DEF 7.7 (Sottospazi sghembi)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $U, W \lhd V$. Sia $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo su V. Se $\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(W) = \varnothing$ (equivalentemente se $W \cap U = \{0\}$) allora $\mathbb{P}(U)$ e $\mathbb{P}(W)$ si dicono sghembi.

Dalla formula di Grassmann segue che $(W, U \lhd V)$, se $\dim \mathbb{P}(W) + \dim \mathbb{P}(U) \geq \dim \mathbb{P}(V)$, allora $\mathbb{P}(W)$ e $\mathbb{P}(U)$ non sono sghembi.
Osserviamo inoltre che $P_1 = [v_1], \dots, P_n = [v_n]$, allora $L(P_1, \dots, P_n) := L(\{P_1, \dots, P_n\}) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_n \rangle)$.

DEF 7.8. $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono linearmente indipendenti se $\dim L(P_1, \dots, P_r) = r - 1$.

La definizione è equivalente alla caratterizzazione di vettori linearmente indipendenti in V vista al primo modulo: i vettori $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\dim\langle v_1, \dots, v_r \rangle = r$, quindi $\dim \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_r \rangle) = r - 1$.

DEF 7.9 (Posizione generale)**.** $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ si dicono in posizione generale se

- $r \leq n + 1$ e $P_1, \dots, P_r$ sono linearmente indipendenti
- $r > n + 1$ e ogni sottoinsieme di $n + 1$ di loro è linearmente indipendente.

La posizione generale è sostanzialmente una generalizzazione dei punti non allineati in $\mathbb{R}^2$ e dei punti non complanari in $\mathbb{R}^3$.

7.1 Proiezioni in spazi proiettivi

DEF 7.10 (Proiezione /1)**.** Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di $\dim V = n+1$, sia $H \subset \mathbb{P}(V)$ iperpiano. e sia $P \in \mathbb{P}(V) \setminus \{H\}$. Definiamo la mappa proiezione

$$\begin{array}{cccc} \pi_{P,H}: & \mathbb{P}(V)\setminus\{P\} & \longrightarrow & H \\ & Q & \longmapsto & \pi_{P,H}(Q) := L(P,Q)\cap H \end{array}$$

Osserviamo che il punto $\pi_{P,H}(Q)$ è l'intersezione della retta per P e Q con l'iperpiano H. La definizione può essere generalizzata a due sottospazi qualsiasi:

DEF 7.11 (Proiezione /2)**.** Siano H e K due sottospazi di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale tali che $\dim H + \dim K = \dim V - 1$. Definiamo la mappa proiezione

$$\begin{array}{cccc} \pi_{H,K}: & \mathbb{P}(V)\setminus H & \longrightarrow & K \\ & Q & \longmapsto & \pi_{H,K}(Q) := L(H\cup\{Q\})\cap K \end{array}$$

7.2 Spazi proiettivi e spazi affini

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione n. Definiamo una mappa

$$\begin{array}{cccc} j_0: & V & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & [1,x_1,\dots,x_n] \end{array}$$

allora

1. j_0 è ben definita;
2. j_0 è iniettiva;
3. $U_0 := \operatorname{Im} j_0 = \{[1,x_1,\dots,x_n] \mid x_0 \neq 0\} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus H_0$ dove H_0 è l'iperpiano $H_0 := \{[x_0,\dots,x_n] \mid x_0 \neq 0\}$ e si dice aperto affine di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$.

Restringendo il codominio all'immagine otteniamo che la mappa è anche suriettiva, per cui è biiettiva. Possiamo quindi invertirla

$$\begin{array}{cccc} j_0^{-1}: & \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}\setminus H_0 & \longrightarrow & V \\ & [1,x_1,\dots,x_n] & \longmapsto & (x_1,\dots,x_n) \end{array}$$

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus H_0$ e V, quindi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = j_0(V) \cup H_0 \simeq V \cup H_0$.

DEF 7.12 (Omogeneizzazione)**.** Sia $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$ una equazione lineare in $x_1,\dots,x_n$. Allora l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + bx_0 = 0$$

si dice omogenea associata (omogeneizzazione).

Ad esempio in $\mathbb{A}^2$ consideriamo la retta $r: \ 3x_1 - 2x_2 + 1 = 0$. Allora l'omogenea associata in $\mathbb{P}^2$ è $\bar{r}: \ 3x_1 - 2x_2 + x_0 = 0$. Osserviamo quindi che

$$R = r \cup \left\{ [x_0,x_1,x_2] \in \mathbb{P}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Il punto $[0,2,3]$ si dice **punto all'infinito**, mentre $\bar{r}$ si dice **chiusura proiettiva** di r, ed è data dall'unione di r con il suo punto all'infinito.

Osservazione 7.13. Se prendiamo due rette parallele le loro chiusure proiettive hanno lo stesso punto all'infinito. Di conseguenza due rette si intersecano sempre in uno spazio proiettivo.

Analogamente in $\mathbb{P}^3$ una retta avrà ancora un punto all'infinito, mentre un piano avrà una retta all'infinito.

Consideriamo la retta r in $\mathbb{A}^3$ per $P = (p_1,p_2,p_3)$ e di direzione $v = (v_1,v_2,v_3)$, allora essa avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t\cdot v_1 \\ x_2 = p_2 + t\cdot v_2 \\ x_3 = p_3 + t\cdot v_3 \end{cases}$$

ed equazioni cartesiane
$$\begin{cases} v_2x_1 - v_1x_2 + (v_1p_2 - v_2p_1) = 0 \\ v_3x_2 - v_2x_3 + (v_2p_3 - v_3p_2) = 0 \end{cases}$$
che omogeneizzate diventano
$$\begin{cases} v_2x_1 - v_1x_2 + (v_1p_2 - v_2p_1)x_0 = 0 \\ v_3x_2 - v_2x_3 + (v_2p_3 - v_3p_2)x_0 = 0. \end{cases}$$
Per cui otteniamo i punti all'infinito imponendo $x_0 = 0$ e otteniamo:
$$\begin{cases} v_2x_1 - v_1x_2 + (v_1p_2 - v_2p_1)x_0 = 0 \\ v_3x_2 - v_2x_3 + (v_2p_3 - v_3p_2)x_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2x_1 - v_1x_2 = 0 \\ v_3x_2 - v_2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
Scegliamo $x_1 = v_1$ e otteniamo
$$\begin{cases} v_2x_1 - v_1x_2 = 0 \\ v_3x_2 - v_2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = v_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2v_1 - v_1x_2 = 0 \\ v_3x_2 - v_2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = v_1 \end{cases} \quad \begin{cases} v_3v_2 - v_2x_3 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_1 = v_1 \\ x_2 = v_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = v_1 \\ x_2 = v_2 x_3 = v_3 \end{cases} \qquad r_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$
a meno di multipli scalari perchè appartiene allo spazio proiettivo.

Osservazione 7.14. Analogamente all'omogeneizzazione esiste il processo inverso, la disomogeneizzazione, che consiste nell'imporre a 1 un'indeterminata nell'equazione. In questo modo si ottiene un'equazione lineare in n variabili.

Teorema 7.15. *Sia $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ uno spazio proiettivo e $H \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ un iperipano. Allora $\mathbb{P}^n_K \setminus H$ è uno spazio affine di dimensione n.*

7.3 Proiettività

DEF 7.16. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ si dice **proiettività** se

i) f è biiettiva;

ii) esiste un isomorfismo $\varphi : V \to V$ tale che $f([v]) = [\varphi(v)]$.

Osservazione 7.17. L'insieme delle proiettività ha la struttura di gruppo con la composizione

Noi non classificheremo le proiettività, ma ci limiteremo a studiare la relazione tra proiettività e affinità.

Teorema 7.18. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale com $\dim V = n + 1$. Dati due insiemi di $n + 2$ punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale*
$$\{P_0, \dots, P_{n+1}\} \qquad e \qquad \{Q_0, \dots, Q_{n+1}\},$$
allora esiste un'unica proiettività f tale che $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 0, \dots, n + 1$.

Esempio simil-dimostrazione.
Determinare la proiettività $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ tale che $f([1, 1]) = [1, -1]$, $f([2, 0]) = [1, 1]$ e $f([1, -1]) = [2, 1]$.

Osserviamo che i punti dati sono in posizione generale, ovvero sono linearmente indipendenti a due a due. Esprimiamo ora uno come combinazione lineare degli altri due, e troviamo α, β e γ tali per cui $\alpha f(1, 1) + \beta f(2, 1) = \gamma f(2, 0)$.
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Quindi imponiamo che $\varphi(1, 1) = (-1, 1)$, $\varphi(1, -1) = (2, 1)$ e $\varphi(2, 0) = (3, 3)$. Si tratta quindi di una mappa lineare per cui conosciamo l'immagine su una base. La conclusione dell'esercizio è quindi banale. □

Osserviamo quindi che il punto in più serve per capire i coefficienti della combinazione lineare e determinare perciò in modo unico l'isomorfismo associato. Inoltre, segue direttamente dal teorema precedente il seguenbte risultato.

Teorema 7.19. *Data una proiettività $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ e S un sottospazio proiettivo di dimensione s,. allora $f(S)$ è un sottospazio proiettivo di dimensione s. Dato un altro sottospazio proiettivo S' di dimensione s, allora esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ tale che $f(S) = S'$.*

7.4 Omogeneizzazione di mappe affini

Abbiamo visto che possiamo immergere $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ definendo una mappa

$$j_0 : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \setminus H_0.$$

Siano ora $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ una mappa affine e B un sistema di riferimento di $\mathbb{A}^n$. Abbiamo visto in precedenza che $(f(P))_B = A\underline{x} + \underline{c}$, con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\underline{c} \in \mathbb{K}^n$ e $x_0 = (P)_B$.

Possiamo quindi associare una matrice $\tilde{A}$ a f il $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ rendendo la mappa affine una mappa proiettiva lineare.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \underline{c} & A \end{array}\right)$$

otteniamo quindi

$$j_0(A\underline{x}) = \tilde{A}j_0(\underline{x}) = [1, \dots A\underline{x} + \underline{c} \dots]$$

8 Classificazione di curve algebriche

8.1 Algebra commutativa e omogeneizzazione

Teorema 8.1. *Se D è U.F.D., allora $D[x]$ è un U.F.D.*

Ricordando che $D[x_1, \dots, x_n] := D[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$, segue naturalmente che ogni $D[x_1, \dots, x_n]$ è un U.F.D..

DEF 8.2 (Polinomio omogeneo)**.** Sia $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $\deg F = m$. Diciamo che F è **omogeneo** se

i) F è somma di monomi di grado m;

o, equivalentemente se

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, F(\lambda x_i, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m F(x_1, \dots, x_n)$;

o, equivalentemente se

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = m \cdot F(\underline{x})$ (formula di Eulero).

DEF 8.3 (Omogeneizzato)**.** Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $\deg f = m$. L'omogeneizzato di f è il polinomio $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ definito come

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^m f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Esso è a sua volta un polinomio di grado m.

DEF 8.4 (Disomogeneizzata)**.** Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo di grado m. Il suo disomogeneizzato è un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ definito come $f(x_1, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$.

Teorema 8.5 (Fondamentale dell'algebra)**.** *Sia $f \in \mathbb{C}[x]$, allora esiste un $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$.*

Da questo risultato e dal teorema di Ruffini (si vedano le note del corso di Algebra A) segue che

Corollario 8.6. Sia $f \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado n. Allora esistono un $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ non necessariamente distinti tali che $f = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$.

Proposizione 8.7. *Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo, tale che esistono $G, H \in \mathbb{K}[x]$ tali che $F = G \cdot H$. Allora G e H sono omogenei.*

8.2 Proprietà elementari di curve algebriche e proiettive

Definiamo prima una relazione di equivalenza tra i polinomi: $\sim \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]^2$:

$$f \sim g \ :\Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ : \ f = \lambda g$$

ovvero se f e g sono associati in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

DEF 8.8 (Curva)**.** Una curva algebrica piana $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è una classe di equivalenza $[f]$, con $f \in \mathbb{K}[x, y]$.
Definiamo inoltre

- supporto di $\mathcal{C}$: $\operatorname{supp}(\mathcal{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \ : \ f(x, y) = 0\}$;
- gradi di $\mathcal{C}$: $\deg(\mathcal{C}) = \deg f$;

Osservazione 8.9. Supporto e grado sono buone definizioni, ovvero non dipendono dalla scelta del rappresentante.

Le curve di grado 1 sono le rette, le curve di grado 2 sono le coniche (teorema di Cartesio). Delle curve di grado 3 studieremo la classificazione di Newton.

Osservazione 8.10 (1). Due curve diverse possono avere lo stesso supporto, ad esempio le curve $[x]$ e la $[x^2]$ hanno lo stesso supporto.

Osservazione 8.11 (2). In $\mathbb{R}$ una curva può avere supporto vuoto (ad esempio $[x^2 + y^2 + 1]$), ma in $\mathbb{C}$ no.

Descrivere il supporto di una curva è un problema difficile, e dipende dalla scelta del campo.

Esempio 8.1 (Metodo delle corde di Diofanto)**.**

Determinare il supporto di $\left[x^2 + y^2 - 1\right]$ in $\mathbb{Q}$.

Osserviamo che $(1, 0) \in \operatorname{supp} \mathcal{C}$. Prendiamo il fascio di rette per $(1, 0)$.

$$y = t(x - 1)$$

Intersechiamo ora il fascio di rette con la circonferenza.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + t^2(x - 1)^2 = 1 \\ y = t(x - 1) \end{cases} \qquad (1 + t^2)x^2 - 2t^2 x + (t^2 - 1) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{t^2 \pm \sqrt{t^4 - (t^4 - 1)}}{1 + t^4} = \left\langle \begin{array}{c} \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ \\ 1 \end{array} \right\rangle$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \qquad y = t\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - 1\right) = -\frac{2t}{t^2 + 1}$$

(osserviamo che queste formule sono esattamente le formule parametriche per seno e coseno, a meno di un cambiamento di angolo) Inoltre, se poniamo $t = \dfrac{p}{q}$, ricaviamo

$$x = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \qquad y = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

e quindi la formula generale delle terne pitagoriche

$$a = r(p^2 + q^2) \qquad b = 2pqr \qquad c = r(p^2 + q^2)$$

DEF 8.12 (Curva proiettiva)**.** Una curva algebrica piana proiettiva $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è una classe di equivalenza $[F]$, con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo.

Definiamo inoltre

- supporto di $\mathcal{C}$: $\text{supp}(\mathcal{C}) = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \ : \ F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$;
- gradi di $\mathcal{C}$: $\deg(\mathcal{C}) = \deg F$;

Osservazione 8.13. Supporto e grado sono buone definizioni, ovvero non dipendono dalla scelta del rappresentante.

DEF 8.14 (Chiusura proiettiva e traccia affine)**.** Sia $\mathcal{C} = [f]$ una curva piana affine di $\mathbb{A}^2$. Definiamo la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ come una curva piana proiettiva $\bar{\mathcal{C}} = [F]$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ l'omogeneizzato di f. Viceversa si dice traccia affine di $\bar{\mathcal{C}}$ la curva $\mathcal{C}$.

In particolare osserviamo che $\deg \mathcal{C} = \deg \bar{\mathcal{C}}$ e $\text{supp}\, \bar{\mathcal{C}} = \text{supp}\, \mathcal{C} \cup \{\text{punti all'infinito}\}$.

DEF 8.15 (Curve affinemente equivalenti)**.** Due curve $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{D} = [g]$ di $\mathbb{A}^2$ si dicono affinemente equivalenti se esiste un'affinità $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $g = f \circ T$. Si indica anche $T(\mathcal{D}) = \mathcal{C}$.

DEF 8.16 (Curve proiettivamente equivalenti)**.** Due curve $\bar{\mathcal{C}} = [F]$ e $\bar{\mathcal{D}} = [G]$ di $\mathbb{P}^2$ si dicono proiettivamente equivalenti se esiste una proiettività $P : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $G = F \circ P$. Si indica anche $P(\bar{\mathcal{D}}) = \bar{\mathcal{C}}$.

Osservazione 8.17. Due curve affinemente (proiettivamente) equivalenti hanno lo stesso grado, infatti T (P) è biiettiva. Inoltre i supporti sono legati dalla legge $\text{supp}\, \mathcal{C} = T(\text{supp}\, \mathcal{D})$.

Ha quindi senso fissare il grado e classificare tutte le curve con dato grado a meno di affinità/proiettività o isometria.

8.3 Classificazione delle curve algebriche proiettive

8.3.1 Curve di grado 1

Proposizione 8.18. *Ogni retta affine (proiettiva) è affinemente (proiettivamente) equivalente alla retta* $r :\ [x]$ *(*$R :\ [x_0]$*).*

Dimostrazione.

- Sia s una retta affine qualsiasi data da $[ax + by + c]$. Consideriamo $T(x, y) = (ax + by + c, y)$. Allora $s = T(r) = [ax + by + c]$, quindi s è affinemente equivalente a r.
- Sia S una retta proiettive qualsiasi data da $[ax_0 + bx_1 + cx_2]$. Consideriamo $T(x_0, x_1, x_2) = (ax_0 + bx_1 + cx_2, x_1, x_2)$. Allora $S = T(R) = [ax_0 + bx_1 + cx_2]$, quindi S è affinemente equivalente a R.

QED

8.3.2 Curve di grado 2

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. allora una quadrica qualunque è nella forma

$$F(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Osserviamo quindi che una quadrica è associata ad una forma quadratica. Se applichiamo una proiettività T con $M = M_{\mathcal{C}}(T)$, otteniamo che (dove $A = [a_{ij}]_{ij}$ è la matrice associata alla forma quadratica)

$$(F \circ T)(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} {}^tMAM \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Teorema 8.19 (Forme canoniche su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$)**.** *Una quadrica F di $\mathbb{P}^2$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti quadriche:*

- *se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
  - *i)* $[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ *(non degenere)*
  - *ii)* $[x_0^2 + x_1^2]$ *(degenere)*
  - *iii)* $[x_0^2]$ *(doppiamente degenere)*
- *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
  - *i)* $[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ *(non degenere a punti non reali)*
  - *ii)* $[x_0^2 + x_1^2 - x_2^2]$ *(non degenere a punti reali)*
  - *iii)* $[x_0^2 + x_1^2]$ *(degenere con supporto un punto)*
  - *iv)* $[x_0^2 - x_1^2]$ *(degenere con supporto due rette)*
  - *v)* $[x_0^2]$ *(doppiamente degenere)*

Dimostrazione. Con la notazione precedente, per il teoremea di diagonalizzazione di forme bilineari e il teorema di Sylvester, ad ogni quadrica associo tramite una proiettività una quadrica in forma canonica. Dal teorema di Sylvester segue che le forme canoniche possibili sono quelle elencate. QED

Osserviamo inoltre che se $M \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{K})$, allora $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} {}^tMAM$, quindi possiamo definire il rango di una quadrica come il rango della matrice associata, ottenendo un invariante proiettivo.

Esempio 8.2.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sia $\mathcal{C} = [x_0^2 - x_1^2 + x_1x_2] = [F]$. Classificare la quadrica, determinandone il rango e la forma canonica $\mathcal{D}$. Trovare inoltre una proiettività tale che $T(\mathcal{C}) = D$.

$$A = M(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \det A = -\frac{1}{4} \neq 0$$

quindi la quadrica non è degenere. Per determinare la forma canonica completiamo il quadrato

$$F[x_0, x_1, x_2] = x_0^2 - x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2^2 = x_0^2 - \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{4}x_2^2$$

Definiamo quindi $T[x_0, x_1, x_2] = \left[x_0, \frac{1}{2}x_2, x_1 - \frac{1}{2}x_2\right]$. In questo modo abbiamo che $T^{-1}[x_0, x_1, x_2] = [x_0, x_1 + x_2, 2x_1]$ e quindi $G[x_0, x_1, x_2] = F \circ T^{-1}[x_0, x_1, x_2] = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$, quindi la curva è di classe *(ii)*.

8.3.3 Generalizzazione a n dimensioni

Generalizziamo ora la classificazione appena vista alle ipersuperfici proiettive:

DEF 8.20 (ipersuperficie)**.** Una ipersuperficie proiettiva $\mathcal{J}$ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è data da $\mathcal{J} = [F]$ con $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo. Si definiscono inoltre $\deg \mathcal{J} := \deg F$ e $\operatorname{supp} \mathcal{J} := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\}$.

Proposizione 8.21. *Ogni iperpiano (ipersuperficie di grado 2) di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ è proiettivamente equivalente a $H_0 : [x_0]$*

Teorema 8.22. *Una ipersuperficie quadrica in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ha una delle seguenti forme canoniche*

- *se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $[x_0^2 + \cdots + x_r^2]$ $(0 \leq r \leq n)$
- *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $[x_0^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2]$ $(0 \leq p \leq r \leq n)$

8.4 Classificazione delle curve algebriche affini

Sia $\mathcal{C} = [f(x, y)]$ una quadrica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. La curva è data da una equazione di secondo grado in x e y:

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{21}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Sia inoltre $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ un'affinità tale che

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con A_0 il minore $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e M_0 il minore $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix}$, allora le matrici associate a $f \circ T$ sono

$$B = {}^t\!MAM \qquad \text{e} \qquad B_0 = {}^t\!M_0 A_0 M_0$$

Inoltre, siccome T è biiettiva per definizione, il rango delle matrici è un invariante affine.

DEF 8.23 (Coniche affini)**.** Una quadrica $\mathcal{C} = [f] = [{}^t\underline{x} A \underline{x}]$ di $\mathbb{A}^2$ si dice

- non degenere se $\operatorname{rk} A = 3$
- semplicemente degenere se $\operatorname{rk} A = 2$
- doppiamente degenere se $\operatorname{rk} A = 1$

Inoltre si dice

- a centro $\det A_0 \neq 0$
- parabola se $\det A_0 = 0$

in conclusione, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ anche il segno di $\det A_0$ è un invariante affine, per cui si dice

- ellisse se $\det A_0 > 0$
  - a punti reali se $\det A \operatorname{tr} A_0 < 0$
  - a punti non reali se $\det A \operatorname{tr} A_0 > 0$
- iperbole se $\det A_0 < 0$

Teorema 8.24 (Forme canoniche su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$)**.** *Una quadrica $\mathcal{C} = [f]$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affinemente equivalente ad una delle seguenti quadriche:*

i) $[x^2 + y^2 - 1]$ *(a centro non degenere)*

ii) $[x^2 + y^2]$ *(a centro degenere)*

iii) $[y^2 - x]$ *(parabola non degenere)*

iv) $[y^2 - 1]$ *(parabola degenere)*

v) $[y^2]$ *(doppiamente degenere)*

Teorema 8.25 (Forme canoniche su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$)**.** *Una quadrica $\mathcal{C} = [f]$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è affinemente equivalente/congruente ad una delle seguenti quadriche:*

i)	$[x^2+y^2-1]$	$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right]$	*(ellisse)*
ii)	$[x^2+y^2+1]$	$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1\right]$	*(ellisse a punti non reali)*
iii)	$[x^2+y^2]$	$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right]$	*(ellisse degenere)*
iv)	$[x^2-y^2-1]$	$\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right]$	*(iperbole)*
v)	$[x^2-y^2]$	$\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right]$	*(iperbole degenere)*
vi)	$[y^2-x]$	$[y^2-2bx]$	*(parabola)*
vii)	$[y^2-1]$	$[y^2-a^2]$	*(parabola degenere)*
viii)	$[y^2+1]$	$[y^2+b^2]$	*(parabola degenere)*
ix)	$[y^2]$	$[y^2]$	*(doppiamente degenere)*

Dimostrazione. **Dimostriamo il caso reale isometrico, poi gli altri seguono direttamente**

1. **Eliminazione del termine rettangolare**
   Le forma quadratica $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy$ può essere diagonalizzata per il teorema spettrale, ovvero esiste una matrice $M \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ tale che ${}^tMA_0M = D$ con D diagonale. Applichiando M a f si ottiene una forma quadratica
   $$g = f \circ T_M = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + b_{00}$$

2. **Eliminazione dei termini lineari**
   - Se la conica è a centro, ovvero $b_{11} \neq 0$ e $b_{22} \neq 0$, completiamo i quadrati eliminando i termini lineari
     $$T(x,y) = \left(x + \frac{b_{01}}{b_{11}}, y + \frac{b_{02}}{b_{22}}\right)$$
     e otteniamo
     $$h = g \circ T = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + c_{00}$$
     in particolare
     - se $c_{00} \neq 0$ la conica è nella forma $\left[\frac{b_{11}}{c_{00}}x^2 + \frac{b_{22}}{c_{00}}x^2 + 1\right]$ (i) (ii) (iv)
     - se $c_{00} = 0$ la conica è nella forma $[b_{11}x^2 + b_{22}y^2]$ (iii) (v)
   - Se la conica non è a centro supponiamo $b_{11} = 0$ e $b_{22} \neq 0$, altrimenti non sarebbe una quadrica. Completiamo i quadrati per eliminare il termine $2b_{02}y$
     $$T(x,y) = \left(x, y + \frac{b_{02}}{b22}\right)$$
     e otteniamo
     $$h = g \circ T = b_{22}y^2 + 2b_{01}x + d_{00}$$
     ora
     - se $b_{01} \neq 0$ eliminiamo d_{00} con una trasformazione $(x,y) \mapsto \left(x + \frac{d_{00}}{2b_{01}}, y\right)$ la conica è nella forma $\left[y^2 + 2\frac{b_{01}}{b_{22}}\right]$ (vi)
     - se $b_{01} = 0$ la conica è nella forma $[b_{22}y^2 + d_{00}]$ $d_{00} \neq 0$: (vii) $(viii)$; $d_{00} = 0$: (ix);

3. **Con omotetie ci riconduciamo al caso affine**

4. **Con omotetie complesse ci riconduciamo al caso complesso**

QED

Osservazione 8.26. Sia $\mathcal{C} = [a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{21}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}]$ una conica a centro, ovvero con $\det A_0 \neq 0$. Allora il sistema lineare seguente ha un'unica soluzione, il centro della conica.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{01} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{02} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.1. *Sia $P = (x_0, y_0)$ il centro di una conica a centro e $S(x, y) = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$ la simmetria rispetto a P. Dimostrare che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, ovvero che la conica è simmetrica rispetto a P.*

8.4.1 Generalizzazione a n dimensioni

In $\mathbb{R}^n$ sia $Q = [f(x_1, \ldots, x_n)]$ un'ipersuperficie quadrica ($n \geq 2$). Allora

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{0i}x_i + a_{00}$$

e sia A la sua matrice associata. Allora

DEF 8.27. Un'ipersuperficie quadrica di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si dice degenere se la matrice associata ha determinante nullo.

Teorema 8.28 (Classificazione ipersuperfici di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$)**.** *Ogni quadrica non degenere è congruente ad una delle seguenti ipersuperfici ($p = 0, \ldots, n$)*

- $\left[\sum_{i=1}^{p} a_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n} a_j x_j^2\right]$ $(a_1 \geq \cdots \geq a_p > 0,\ a_{p+1} \geq \cdots \geq a_n > 0)$
- $\left[\sum_{i=1}^{p} a_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n-1} a_j x_j^2 - x_n\right]$ $(a_1 \geq \cdots \geq a_p > 0,\ a_{p+1} \geq \cdots \geq a_{n-1} > 0)$

Teorema 8.29 (Forme canoniche su $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$)**.** *Una superficie quadrica di $\mathbb{R}^3$ non degenere e a punti reali è congruente ad una delle seguenti forme canoniche:*

i) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$ *ellissoide*

ii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > 0, c > 0)$ *iperboloide iperbolico (a una falda)*

iii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > 0, b > c > 0)$ *iperboloide ellittico (a due falde)*

iv) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$ $(a > b > 0)$ *paraboloide ellittico*

v) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$ $(a > 0, b > 0)$ *paraboloide iperbolico*

Osservazione 8.30. Se riscriviamo l'equazione dell'iperboloide iperbolico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{y^2}{c^2} \qquad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

Quindi un punto appartiene alla superficie se e solo se appartiene ad una delle rette ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = t\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \dfrac{1}{t}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

Segue quindi che l'iperboloide iperbolico è una superficie doppiamente rigata: per ogni punto della superficie passa una retta completamenete contenuta nella superficie. Inoltre se $a = b$ si ottiene per rotazione di un'iperbole attorno all'asse non trasverso.

Osservazione 8.31. Si ricava analogamente che anche il paraboloide iperbolico è una superficie rigata.

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = z \qquad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{t} \end{cases}$$

8.5 Polinomio risultante e Teorema di Bézout

Notazione: Siano $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{D} = [g]$ due curve. Definiamo l'unione (somma) delle due curve come $\mathcal{C} + \mathcal{D} = [fg]$.

Lemma 8.32. *Siano $f, g \in \mathbb{K}[x]$. Si dice che hanno un fattore comune se e solo se esistono $h, k \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ tali che $\deg h < \deg f$, $\deg k < \deg g$ e $kf = hg$.*

Dimostrazione.

"$\Rightarrow$" Se f, g hanno un fattore comune d, allora $f = df_1$ e $g = dg_1$ con $\deg f_1 < \deg f$ e $\deg g_1 < \deg g$. Allora $(df_1)g_1 = (dg_1)f_1$, da cui la tesi con $k = g_1$ e $h = f_1$.

"$\Leftarrow$" Supponiamo per assurdo che non abbiano fattori in comune. Allora $kf = hg \implies f|hg \implies f|h$ siccome $MCD(f, g) = 1$. Di conseguenza $h = 0$ o $\deg h \geq \deg f$ (assurdo).

QED

Siano ora $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ due polinomi in $\mathbb{K}[x]$.

Teorema 8.33 (Risultante di due polinomi)**.** *Sia $R(f, g)$ il determinante della matrice $(n + m) \times (n + m)$*

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \end{array} \end{array}$$

Allora f e g hanno un fattore in comune se e solo se $R(f, g) = 0$

Dimostrazione. f è g hanno un fattore in comune se e solo se esistono $h, k \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ tali che $kf = hg$. Supponiamo $h = \alpha_1 + \alpha_2x + \cdots + \alpha_nx^{n-1}$ e $k = \beta + \beta_2x + \cdots + \beta_nx^{n-1}$. Impostiamo ora il sistema che si ottiene imponendo l'uguaglianza dei coefficienti dei polinomi kf e hg. Si ottiene un sistema lineare di $n + m$ equazioni in $n + m$ incognite, che ha soluzione se e solo se $\det R = 0$. QED

La naturale generalizzazione di questo teorema a polinomi in più variabili si ha ottenendo il **polinomio risultante**. Esso si calcola costruendo la matrice come sopra ordinando i polinomi di partenza rispetto ad una variabile, e trattando le altre come parametri. Successivamente il procedimento è analogo.

Teorema 8.34 (Fondamentale dell'Algebra I)**.** *Sia f in $\mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $n > 0$. Allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (eventualmente ripetuti) tali che $f(x) = a_0(x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_n)$, dove a_0 è il coefficiente direttivo di f.*

Teorema 8.35 (Fondamentale dell'Algebra II)**.** *Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio omogeneo di grado n. Allora esistono n coppie $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tali che $f(x, y) = (a_1x - b_1y)\dots(a_nx - b_ny)$. Esse sono essenzialmente uniche (sono uniche in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$).*

Osservazione 8.36. I due teoremi sono legati dal processo di omogeneizzazione/disomogeneizzazione.

Le coppie (a, b) sono dette **radici** del polinomio, ed esse hanno **molteplicità** pari al numero di volte che appaiono tra le coppie.

Proposizione 8.37. *Siano $\mathcal{C} = [F]$ e $\mathcal{D} = [G]$ due curve algebriche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Allora esse hanno almeno un punto in comune.*

Dimostrazione. $[c_0, c_1, c_2] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ se e solo se $R_{F,G}(c_1, c_2) = 0$, e $R_{F,G}(x, y) = 0$ è un polinomio omogeneo in $\mathbb{C}[x, y]$, per cui ha sempre una radice non nulla per il Teorema Fondamentale dell'Algebra II (Teorema 8.35). QED

DEF 8.38 (Curve irriducibili)**.** Una curva algebrica si dice irriducibile se lo è il polinomio cui è associata. Se invece il polinomio ammette fattorizzazione, le curve associate ai fattori irriducibili del polinomio si dicono componenti irriducibili della curva e scriviamo $\mathcal{C} = [f], \mathcal{D} = [g], \mathcal{C} + \mathcal{D} = [fg]$.

8.5.1 Teorema di Bézout

Teorema 8.39 (Bézout - elementare)**.** *Siano $\mathcal{C} = [F]$ e $\mathcal{D} = [G]$ due curve algebriche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di gradi rispettivamente n e m. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si intersecano in più di nm punti, allora hanno una componente in comune (ovvero hanno infiniti punti in comune).*

Dimostrazione - mi convince poco. Supponiamo che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ abbiano $P_1, \dots, P_{n+1}$ punti in comune. Consideriamo ora tutte le possibili rette L_{ij} per due qualsiasi di questi punti e definiamo $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \{r_{ij}\}_{ij}\}$. Definiamo un sistema di riferimento proiettivo in cui $P = [0, 0, 1]$. Sia inoltre $R(x, y)$ il risultante di F e G. Per costruzione segue quindi che $R(P_1) = R(P_2) = 0$. Osserviamo che $P_1 \neq P_2$ perchè altrimenti la retta P_1P_2 passa per P. Di conseguenza R ha $nm + 1$ radici distinte, per cui è il polinomio identicamente nullo, di conseguenza F e G hanno un fattore in comune. QED

DEF 8.40 (Molteplicità)**.** Siano in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, $\mathcal{C} = [F]$ una curva algebrica proiettiva di grado n e r una retta passante per due punti P_0 e Q_0. Restringiamo la curva alla retta $r : \lambda P_0 + \mu Q_0$: $F(\lambda P_0 + \mu Q_0) =: \bar{F}(\lambda, \mu)$ ottenendo un polinomio di grado n. Definiamo $I(\mathcal{C}, r, P)$ la molteplicità di intersezione tra $\mathcal{C}$ e r in un punto $P \in r$ come il valore della molteplicità di $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ come radice di $\bar{F}$, con $\hat{\lambda}$ e $\hat{\mu}$ tali che $P = \hat{\lambda}P_0 + \hat{\mu}Q_0$.
Poniamo inoltre $P \notin \mathcal{C} \implies I(\mathcal{C}, r, P) = 0$ e $r \subset \mathcal{C} \implies I(\mathcal{C}, r, P) = \infty$.

Osservazione 8.41. Per il teorema di Bézout, $r \not\subset \mathcal{C} \implies 0 \leq I(C, r, P) \leq \deg \mathcal{C}$

Teorema 8.42 (Bézout)**.** *Siano $\bar{\mathcal{C}} = [F]$ una curva algebrica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ di grado n e r una retta. Allora se $r \not\subset \mathcal{C}$*

$$\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) = n$$

Osservazione 8.43. Questo è sostanzialmente il teorema fondamentale dell'algebra.

Risulta naturale estendere la la definizione di molteplicità e il teorema di Bézout all'intersezione di due curve senza componenti in comune. In questo caso la somma delle molteplicità vale $n \cdot m$.

Analogamente possiamo particolarizzare il teorema di Bézout al contesto affine. Consideriamo la curva $\mathcal{C} = [f(x, y)] \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e la retta r. Allora la molteplicità di intersezione tra $\mathcal{C}$ e r in un punto $P \in r$ è definita come la molteplicità di $\bar{f}(t_0)$, dove $\bar{f}(t) := f(a + tl, b + tm)$ e t_0 è tale che $P = (a + t_0 l, b + t_0 m)$.
È naturale provare che le due dimostrazioni sono equivalenti. Consideriamo infatti le curve $\mathcal{C} = [f]$ e $\bar{\mathcal{C}} = [F]$ con $f(x, y) = F(1, x, y)$ e la retta r per $[1, a, b]$ con direzione (l, m): $\bar{r} : [z, x, y] = [\lambda, \lambda c + \mu t, \lambda b + \mu m]$. Allora abbiamo definito $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}, P)$ come la molteplicità di $(1, t)$ come radica di $\bar{F}(\lambda, \mu) = F(\lambda, \lambda c + \mu l, \lambda b + \mu m)$ che è esattamente uguale alla molteplicità di t come radice di $\bar{f}(t) = f(a + tl, b + tm)$. Il punto all'infinito di r è $[0, l, m] = r_\infty$. Sia $s = I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}, P_\infty)$. Essa è la molteplicità di μ come radice di $\bar{F}(\lambda, \mu)$. Di conseguenza possiamo scrivere

$$\bar{F}(\lambda, \mu) = \lambda^s (k_{n-s}\mu^{n-s} + k_{n-s-1}\mu^{n-s-1} + \dots + k_0\lambda^{n-s}) \quad (k_{n-s} \neq 0)$$

Quindi, disomogeneizzando, otteniamo

$$\bar{f}(t) = \bar{F}(1,t) = k_{n-s}t^{n-s} + k_{n-s-1}t^{n-s-1} + \cdots + k_0$$

per cui $I(\bar{\mathcal{C}}, \bar{r}, P_\infty) = s = n - \deg \bar{f}$

Per questo possiamo enunciare il

Teorema 8.44 (Bézout - Affine)**.** *Siano $\mathcal{C} = [f]$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di grado n e r una retta. Allora se $r \not\subset \mathcal{C}$*

$$\sum_{P \in r} I(\mathcal{C}, r, P) \leq n$$

Inoltre l'uguaglianza è verificata se e solo se $r_\infty \neq \mathcal{C}_\infty$.

Osservazione 8.45. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{D}, r, P_0$ rispettivamente due curve, una retta e un punto in $\mathbb{P}^2$ o $\mathbb{A}^2$. Allora

1. Sia T una proiettività o un'affinità, allora $I(\mathcal{C}, r, P_0) = I(T(\mathcal{C}), T(r), T(P_0))$
2. $I(\mathcal{C}, r, P_0) + I(\mathcal{D}, r, P_0) = I(\mathcal{C} + \mathcal{D}, r, P_0)$

8.6 Punti singolari e molteplicità

DEF 8.46 (Molteplicità di una curva in un punto)**.** Sia $\mathcal{C} = [f]$ una curva algebrica (affine o proiettiva) e P un punto nel piano. Si dice molteplicità di $\mathcal{C}$ in P il valore

$$m_P(\mathcal{C}) = \min_{r \ni P} I(\mathcal{C}, r, P)$$

Osservazione 8.47. Esistono sempre rette passanti per P non completamente contenute nella curva, quindi il minimo esiste sempre ed è finito. Inoltre $0 \leq m_P(\mathcal{C}) \leq \deg \mathcal{C}$ e $m_P(\mathcal{C}) = 0 \iff P \notin \mathcal{C}$.

DEF 8.48 (Punti semplici e singolari)**.** Se $m_P(\mathcal{C}) = 1$ il punto P si dice semplice (o non singolare, o liscio).
Se $m_P(\mathcal{C}) = m > 1$ il punto si dice singolare o punto di molteplicità m.

Crossover analitici e dove trovarli Ora ci serve uno strumento per trovare agilmente i punti singolari di una curva. Abbiamo definito la molteplicità intersecando la curva con una retta, per cui cominciamo valutando la curva lungo la retta. Siano $\mathcal{C} = [f(x,y)] \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ e $P = (a,b) \in \mathcal{C}$ e scriviamo il fascio di rette per P al variare della direzione $(l,m) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$.

$$r : \begin{cases} x(t) = a + lt \\ y(t) = b + mt \end{cases}$$

Quindi valutiamo la curva lungo la retta

$$\bar{f}(t) = f(a + tl, b + tm)$$

in particolare osserviamo che $\bar{f}(0) = f(a,b)$. Ora sfruttiamo uno strumento che ci fornisce l'analisi: il polinomio di Taylor. Siccome $\bar{f}$ è un polinomio, è uguale al suo polinomio di Taylor centrato in $(0,0)$, infatti se $\bar{f}$ ha grado k

$$\bar{f}(t) = \bar{f}(0) + \bar{f}'(0) \cdot t + \bar{f}''(0) \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + \bar{f}^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$$

In particolare $P \in r$, quindi $f(P) = \bar{f}(0) = 0$, per cui (per la regola di derivazione delle funzioni composte)

$$\bar{f}(0) = 0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot l + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot m\right) t + \cdots + \left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y}\right)^k f\Big|_{(a,b)} \cdot \frac{t^k}{k!}$$

A questo punto osserviamo che possiamo raccogliere al meno t a fattor comune. Se possiamo raccogliere anche t^2 significa che la curva interseca tutto il fascio di rette almeno due volte, quindi P è un punto singolare. In generale, $m_P(\mathcal{C}) = m$ se e solo se possiamo raccogliere almeno t^m a fattor comune. Riassumendo

Proposizione 8.49. *Sia $\mathcal{C} = [f] \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ e $P = (a,b) \in \mathcal{C}$. Allora P è un punto semplice se e solo se $\nabla f(a,b) \neq 0$ Più in generale è un punto di molteplicità m se $\forall 0 \leq i \leq m-1$ tutte le derivate parziali i-esime sono nulle e esiste almeno una derivata parziale m-esima non nulla.*

Proposizione 8.50. *Nella situazione precedente, se P è un punto semplice $\exists(\bar{l}, \bar{m})$ unici a meno di multipli scalari tali che $\big\langle(\bar{l}, \bar{m}), \nabla f(a,b)\big\rangle = 0$ e una retta*

$$\tau : \begin{cases} x = \bar{l}t + a \\ y = \bar{m}t + b \end{cases}$$

si dice tangente alla curva, e soddisfa $I(\mathcal{C}, \tau, P) \geq 2$.

Osservazione 8.51. $(l,m) = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$

DEF 8.52 (Tangenti Principali)**.** Sia $P \in \mathcal{C} = [f]$ un punto di molteplicità ρ. Allora le rette passanti per $P(a,b)$ con direzione (l,m) tali che

$$\left(l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y}\right)^\rho f\Big|_{a,b} = 0$$

si dicono tangenti principali a $\mathcal{C}$ in P.

Osservazione 8.53. Se τ è la tangente principale a $\mathcal{C}$ in P, allora

1. $I(\mathcal{C}, \tau, P) > m_P(\mathcal{C})$
2. ci sono al più $m_P(\mathcal{C})$ tangenti principali. Se sono esattamente $m_P(\mathcal{C})$ il punto si dice *punto multiplo ordinario*.

Esempio 8.3.

Studiare la singolarità di $f = x^2 - y^3$ in $P = (0,0)$.

- Primo modo: Consideriamo il fascio di rette passanti per l'origine $r : \begin{cases} x = lt \\ y = mt \end{cases}$ e valutiamo la curva lungo la retta:
$$\bar{f}(t) = f(lt, mt) = l^2t^2 - m^3t^3$$
Siccome possiamo raccogliere t^2, la molteplicità di intersezione sarà 2, perchè a prescindere dalla scelta della direzione, la retta intersecherà la curva con una molteplicità doppia. Inoltre, se $l = 0$ otteniamo che la molteplicità di intersezione è 3, la retta $x = 0$ è l'unica tangente principale a $\mathcal{C}$ in P.
- Secondo modo: calcoliamo il gradiente di f e valutiamolo in P:
$$\nabla f(x,y) = (2x, -3y^2) \qquad \nabla f(0,0) = (0,0)$$
Di conseguenza P è effettivamente un punto singolare. Osserviamo inoltre che $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, quindi si tratta di un punto singolare di molteplicità 2. Inoltre imponiamo che il termine di ordine 2 nello sviluppo di Taylor di f sia nullo lungo r, ovvero $(l\ m)H_f(l,m) = 2l^2 = 0$, da cui otteniamo la retta $x = 0$.

Siccome P è un punto doppio non ordinario, è una cuspide.

Esempio 8.4.

Studiare la singolarità di $f = x^2 - y^2 - x^3$ in $P = (0,0)$

Calcoliamo gradiente e matrice hessiana in $(0,0)$:

$$\nabla f(x,y) = (2x - 3x^2, -2y) \rightsquigarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il punto ha quindi molteplicità 2. L'equazione che permette di determinare le tangenti principali è: $(l\ m)H_f(l,m) = 2l^2 - 2m^2 = 0$, da cui otteniamo le rette $y = \pm x$. P è quindi un punto doppio ordinario, ovvero un nodo. Se volessimo anche capire com'è orientato il nodo, possiamo calcolare un punto per cui passa la curva. Determiniamo ad esempio le intersezioni con l'asse x e osserviamo che la curva passa per $(0,0)$ e $(1,0)$. Di conseguenza il nodo è orientato verso destra.

Esercizio 8.2. *Sia $f = x^3 + y^3 - 3axy$. Studiare la singolarità in $P = (0,0)$, determinare le tangenti principali e disegnare la curva al variare di $a \in \mathbb{R}$.* *Soluzione a pag. 47*

Osservazione 8.54. Sia $\mathcal{C} = [f]$, con $\deg f = n$. Allora

1. $P \in \mathcal{C} \implies 1 \leq m_P(\mathcal{C})$
2. Le rette non possono avere punti singolari
3. Le coniche non degeneri non possono avere punti singolari
4. Le cubiche non degeneri hanno al più un punto singolare (doppio), infatti se ne avessero più di 1 la retta che le interseca in tutti i punti singolari avrebbe molteplicità di intersezione almeno 4, che è maggiore di 3, assurdo.

Spazi proiettivi Lo studio dei punti singolari di una curva è un problema locale, quindi è equivalente lavorare in uno spazio affine o in uno spazio proiettivo. Si manifestano solo due differenze:

- Non è immediato osservare che la tangente in P ad una curva passi effettivamente per P. Sia infatti $\mathcal{C} = [F]$. Allora la tangente in P avrà la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)x_2 = 0.$$

  La formula di Eulero (Sezione 8.2) ci garantisce questa proprietà: infatti abbiamo che $\frac{\partial f}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)x_2 = F(x_0, x_1, x_2)$, che nel caso di P vale effettivamente 0.

- Sempre la formula di Eulero ci permette di richiedere una proprietà più debole di quella della Proposizione 8.49. Infatti affinché un punto di una curva proiettiva sia singolare con molteplicità m **è sufficiente che le sole derivate parziali** $(m-1)$**-esime siano nulle** e che esista una derivata parziale m-esima non nulla. Dalla formula di Eulero segue infatti che per un polinomio omogeneo le derivate parziali $i-1$ esime sono nulle se tutte le derivate parziali i-esime sono nulle.

Un caso specifico abbastanza utile Classificare l'origine come punto singolare di una curva algebrica $\mathcal{C} = [f]$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ con $f(0,0) = 0$ e $\deg f = n$ è particolarmente facile perché ogni polinomio corrisponde al proprio polinomio di Tayor centrato nell'origine. Di conseguenza un metodo rapido per classificare un qualsiasi punto singolare potrebbe essere traslare la curva in modo che esso corrisponda all'origine.

Scriviamo f come somma di polinomi omogenei $F_i(x,y)$ di grado i. Allora

$$f(x,y) = F_0(x,y) + F_1(x,y) + \cdots + f_n(x,y)$$

e valutiamo f lungo la retta $r : \begin{cases} x = lt \\ y = mt \end{cases}$ ($F_0(x,y) = 0$ perchè la curva passa per l'origine per ipotesi):

$$\bar{f}(t) = f(kl, tm) = F_1(l,m)t + F_2(l,m)t^2 + \cdots + F_n(l,m)t^n$$

Infatti siccome ogni F_i è un polinomio omogeneo, posso raccogliere t. Di conseguenza $P = (0,0)$ è un punto di molteplicità ρ se e solo se $F_1 = F_2 = \cdots = F_{\rho-1} = 0$ e $F_\rho \neq 0$. Inoltre le equazioni delle tangenti principali si ricavano imponendo $F_\rho(x,y) = 0$.

Osservazione 8.55. Sia $\mathcal{C} = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ irriducibile. Allora ha un numero finito di punti singolari.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{D} = \left[\dfrac{\partial F}{\partial x_0}\right]$, allora le singolarità di $\mathcal{C}$ sono contenute in $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Se fossero infinite, allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ avrebbero una componente in comune. Assurdo. QED

Proposizione 8.56. *Sia $\mathcal{C} = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $\deg \mathcal{C} = n$. Se $P \in \mathcal{C}$ ha molteplicità n uguale al grado della curva, allora $\mathcal{C}$ è unione di n rette passanti per P (eventualmente ripetute).*

Dimostrazione. Siano $Q \in \mathcal{C} \setminus \{P\}$ e r la retta per P e Q. Allora per il teorema di Bézout, se non hanno una componente in comune, $\sum_{R \in r} I(\mathcal{C}, r, R) = n$. Ma $I(\mathcal{C}, r, P) = n$ e $I(\mathcal{C}, r, Q) \geq 1$, per cui $\sum_{R \in r} I(\mathcal{C}, r, R) > n$, quindi r è una componente di $\mathcal{C}$. QED

DEF 8.57 (Asintoto)**.** Si dice **asintoto** per $\mathcal{C} = [f]$ una retta tangente a $\bar{\mathcal{C}} = [F]$ in un punto P all'infinito diversa dalla retta all'infinito.

Teorema 8.58 (Dini)**.** *Sia $\mathcal{C} = [f] \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$ allora la curva si può scrivere in un intorno di P come grafico di una funzione $y = r_1(x)$. Analogamente se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0$ allora la curva si può scrivere in un intorno di P come grafico di una funzione $x = r_x(y)$.*

Osservazione 8.59. Il teorema del Dini esprime una condizione sufficiente, ma non necessaria. Di conseguenza a volte è possibile scrivere la curva come grafico di una funzione anche se non si verifica la condizione.

8.6.1 Punti di flesso e hessiana

DEF 8.60. Sia $\mathcal{C} = [f]$ una curva affine (proiettiva) e $P \in \mathcal{C}$. Allora P si dice punto di flesso di ordine k se P è un punto liscio e $2 + k = I(\mathcal{C}, \tau, P) \geq 3$, dove τ è la tangente in P.

Ad esempio $y = x^k$ $(k > 2)$ha un punto di flesso di ordine k in $P = (0, 0)$. Consideriamo nello specifico $y = x^3$: questa curva ha gradiente $(0, 1)$ quindi la retta tangente alla curva è $y = 0$, che ha molteplicità di intersezione 3 con la curva. Di conseguenza P è un punto di flesso di ordine 3.

Criteri per trovare i punti di flesso Vediamo ora il caso proiettivo, per studiare il caso affine basta omogeneizzare. Consideriamo la curva $\mathcal{C} = [F] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con $\deg \mathcal{C} = n \geq 3$.

DEF 8.61 (Hessiana)**.** L'hessiana di $\mathcal{C}$ è la curva $\mathcal{H} = [H]$ dove H è il determinante della matrice hessiana di F.

$$H(x_0, x_1, x_2) = \det H_F(x_0, x_1, x_2) = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{ij}$$

essa è un polinomio omogeneo di grado $3(n - 2)$.

Teorema 8.62. *Sia $\mathcal{C} = [F] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con $\deg \mathcal{C} = n \geq 3$. Allora $P \in \mathcal{C}$ è un punto di flesso se e solo se è un punto liscio e appartiene all'hessiana di $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto brutta e non è richiesta per l'esame, pertanto si preferisce ometterla. Il lettore curioso la può trovare su [Ser00]. QED

Corollario 8.63. Se $\mathcal{C}$ è una curva liscia con $\deg \mathcal{C} = n \geq 3$, allora ha almeno un flesso.

Dimostrazione. L'hessiano avrà grado $3(n - 2) \geq 3$, quindi le due curve per la Proposizione 8.37 si intersecano almeno in un punto. Siccome quel punto è liscio per ipotesi, si tratta di un flesso. QED

8.7 Classificazione delle curve algebriche di grado 3

Riportiamo ora la classificazione delle curve ricavata per primo da Isaac Newton.

Teorema 8.64 (Classificazione cubiche non singolari). *Sia $\mathcal{C} = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica irriducibile non singolare con $\deg \mathcal{C} = 3$. Allora $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente ad una cubica con traccia affine:*

$$y^2 = x(x-1)(x-c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

Dimostrazione. Sia P un punto di flesso di $\mathcal{C}$ e τ la tangente in P. Segliamo quindi coordinate proiettive in modo che $P = [0,0,1] \ni \tau : x_0 = 0$. Scriviamo quindi F in queste coordinate:

$$\begin{aligned} F(x_0,x_1,x_2) = {} & a_{000}x_0^3 + a_{111}x_1^3 + a_{222}x_2^3 + a_{011}x_0x_1^2 + a_{022}x_0x_2^2 + \\ & + a_{122}x_1x_2^2 + a_{112}x_1^2x_2 + a_{001}x_0^2x_1 + a_{002}x_0^2x_2 + a_{012}x_0x_1x_2 \end{aligned}$$

Per ipotesi sappiamo che $F(0,0,1) = 0$, da cui $a_{222} = 0$. Inoltre sappiamo che la tangente in P è $\tau : x_0 = 0$, quindi $\nabla F \partial x_0(0,0,1) = (1,0,0)$, da cui $a_{022} = 1$, $a_{122} = 0$ e $a_{222} = 0$. Inoltre, siccome P è un flesso, la molteplicità di intersezione di τ con $\mathcal{C}$ è almeno 3. Valuto quindi F lungo τ

$$F(0,x_1,x_2) = a_{111}x_1^3 + a_{112}x_1^2x_2$$

per cui la molteplicità di intersezione in P è maggiore di 2 se e solo se $a_{112} = 0$. Di conseguenza F ha la forma

$$F(x_0,x_1,x_2) = a_{000}x_0^3 + a_{111}x_1^3 + a_{011}x_0x_1^2 + x_0x_2^2 + a_{001}x_0^2x_1 + a_{002}x_0^2x_2 + a_{012}x_0x_1x_2$$

Di conseguenza, disomogeneizzando $(x_0,x_1,x_2) \mapsto (1,x,y)$ e ponendo $a_{012} = b$ e $a_{002} = c$ otteniamo

$$y^2 + bxy + cy = \underbrace{-(a_{000}x_0^3 + a_{111}x_1^3 + a_{011}x_0x_1^2 + a_{001}x_0^2x_1)}_{\tilde{g}(x)}$$

Sostituendo $(x,y) \mapsto \left(X, Y - \frac{b}{2}X - \frac{c}{2}\right)$, otteniamo

$$Y^2 = g(X)$$

Lemma 8.65. *Nelle ipotesi del Teorema, se la curva $y^2 = g(x)$ è liscia, allora g ha tre radici distinte.*

Dimostrazione. Sia $f(x,y) = y^2 - g(x)$. Se α fosse una radice con molteplicità doppia, allora $f(\alpha,0) = 0$ e $\nabla f(\alpha,0) = (g'(x), 2y)\Big|_{(\alpha,0)} = (0,0)$, per cui $(\alpha,0)$ sarebbe un punto singolare. Assurdo. QED

Per il Lemma possiamo quindi riscrivere $g(X) = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$ con α_1, α_1 e α_1 distinti. L'affinità $(X,Y) \mapsto \left((\alpha_2-\alpha_2)x' + \alpha, Y = \sqrt{a(\alpha_2-\alpha_1)^3}\right)$ trasforma la curva in forma canonica:

$$y^2 = x(x-1)(x-c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

QED

Proposizione 8.66 (Invariante di Weierstrass). *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due cubiche non singolari con forma canonica $F(x_0,x_1,x_2) \propto c$ e $G(x_0,x_1,x_2) \propto c'$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se $j(\mathcal{C}) = j(\mathcal{C}')$, dove*

$$j(\mathcal{C}) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}$$

si dice invariante di Weierstrass della curva $\mathcal{C}$.

Corollario 8.67. Ci sono infinite cubiche piane liscie non proiettivamente equivalenti tra di loro.

Esercizio 8.3. *Provare che ogni curva irriducibile liscia di grado 3 ha 9 flessi distinti che e sono allineati tre a tre.*

Teorema 8.68 (Classificazione cubiche singolari). *Sia $\mathcal{C} = [F] \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica irriducibile singolare con $\deg \mathcal{C} = 3$. Allora $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente ad una cubica con traccia affine:*

- $y^2 = x^2(x-1)$ *nel caso presenti un nodo*
- $y^2 = x^3$ *nel caso presenti una cuspide*

Corollario 8.69. Ogni cubica ha almeno un flesso.

Dimostrazione. Separiamo i due casi del teorema precedente, e supponiamo che la cubica sia in forma canonica:

- $f(x,y) = y^2 - x^2(x-1) \rightsquigarrow F(x,y,z) = y^2z - x^2(x-z)$
  Calcoliamo gradiende ed hessiana:

$$\nabla F(x,y,z) = (-3x^2 + 2xz, 2yz, y^2 + x^2)$$

$$H_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -6x+2z & 0 & 2x \\ 0 & 2z & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

  e calcoliamo la curva hessiana

$$H(x,y,z) = \det H_F(x,y,z) = -8x^2z - 4y^2(-6x+2z)$$

  In particolare $H(0,1,0) = 0$, $\nabla f(0,1,0) = (0,0,1)$ e $F(0,1,0) = 0$, quindi il punto $(0,1,0)$ è un punto di flesso.

- $f(x,y) = y^2 - x^3 \rightsquigarrow F(x,y,z) = y^2z - x^3$
  Calcoliamo gradiende ed hessiana:

$$\nabla F(x,y,z) = (-3x^2, 2yz, y^2)$$

$$H_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -6x & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

  e calcoliamo la curva hessiana

$$H(x,y,z) = \det H_F(x,y,z) = -4y^2(-6x)$$

  In particolare $H(0,1,0) = 0$, $\nabla f(0,1,1) = (0,0,1)$ e $F(0,1,0) = 0$, quindi il punto $(0,1,0)$ è un punto di flesso.
  QED

9 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.1

Dimostrazione.

"$\Rightarrow$" Assumiamo che la mappa sia bilineare simmetrica e dimostriamo che $A = A^t$. In particolare si ha che $f_A(x, y) = f_A(y, x)$. Osserviamo che se $k \in \mathbb{K}$ come $\mathbb{K}$ spazio vettoriale, $k^t = k$, quindi (ricordado che la trasposizione inverte l'ordine nel prodotto tra matrici)

$$f_A(x, y) = [f_A(x, y)]^t = \left(x^t \cdot A \cdot y\right)^t = y^t \cdot A^t \cdot \left(x^t\right)^t = y^t \cdot A^t \cdot x$$

Per ipotesi si ha che $f_A(x, y) = f_A(y, x)$, quindi

$$y^t \cdot A^t \cdot x = y^t \cdot A \cdot x$$

da cui segue $A = A^t$.

"$\Leftarrow$" Assumiamo $A = A^t$ e dimostriamo che $f_A(x, y) = f_A(y, x)$. Per quanto detto prima $f_A(x, y) = y^t \cdot A^t \cdot x$. Inoltre per ipotesi $A = A^t$, quindi $f_A(x, y) = y^t \cdot A \cdot x = f_A(y, x)$.

QED

La dimostrazione è analoga per matrici e mappe antisimmetriche.

Esercizio 1.2

Dimostrazione. Per definizione di sottospazio vettoriale, $S^\perp$ deve essere

- non vuoto:
$$0 \in S^\perp, \text{ infatti } b(0, w) = b(0 \cdot 0, w) = 0 \cdot b(0, w) = 0$$
- chiuso rispetto a somma e prodotto per scalari ($\forall v_1, v_2 \in S^\perp \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$):
Equivalentemente $b(v_1, w) = b(v_2, w) = 0 \ \ \forall w \in S \implies$
$$b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \underbrace{b(v_1, w)}_{0} + \lambda_2 \underbrace{b(v_2, w)}_{0} = 0$$

QED

Esercizio 1.3

Dimostrazione. Le proprietà di ψ seguono direttamente dalle proprietà di b:

- $\psi(v)$ è lineare $\forall v$
$$\psi(v)(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = b(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 b(v, w_1) + \lambda_2 b(v, w_2) = \lambda_1 \psi(v)(w_1) + \lambda_2 \psi(v)(w_2)$$
- ψ è lineare
$$\psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \psi(v_1) + \lambda_2 \psi(v_2)$$
Si tratta di un'uguaglianza tra mappe, per cui è verificata se e solo se è verificata $\forall w$:
$$\psi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(w) = b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 b(v_1, w) + \lambda_2 b(v_2, w) = \lambda_1 \psi(v_1)(w) + \lambda_2 \psi(v_2)(w)$$
- ψ è iniettiva, equivalentemente $\ker \psi = \{0\}$
Se $\psi(v)$ è la mappa nulla, allora $v = 0$, ovvero se $\forall w, \psi(v)(w) = 0$, allora $v = 0$. Prendiamo un qualsiasi $v, w \in W$. Sia $\beta = \{e_i\}_i$ una base di V che diagonalizza b (esiste perchè b è simmetrica per ipotesi), allora
$$v = \sum_i x_i e_i \qquad w = \sum_j y_j e_j.$$
Per linearità segue che
$$\psi(v)(w) = b\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j b(e_i, e_j).$$

Siccome la base β diagonalizza b, segue che $i \neq j \implies b(e_i, e_j) = 0$, quindi

$$\psi(v)(w) = \sum_i x_i y_i b(e_i, e_i).$$

Inoltre, siccome la mappa b è non degenere, per la legge di annullamento del prodotto, segue che $a_i = 0 \forall i$, quindi $v = 0$. Per l'arbitrarietà di w, la mappa è iniettiva.

- ψ è suriettiva: segue dal teorema Nullità + Rango.

QED

Esercizio 3.1

Dimostrazione.

i) $\forall v, w \in V, \exists! u \in V : \overline{vu} = w$. Osserviamo che basta definire $u := v + w$ e segue che $\overline{vu} = u - v = (v + w) - v = w$.

ii) $\forall u, v, w \in V, \overline{uv} + \overline{vw} = \overline{uw}$. Applicando la definizione segue infatti che

$$\overline{uv} + \overline{vw} = (v - u) + (w - v) = w - u = \overline{uw}.$$

QED

Esercizio 5.1

Dimostrazione. Per simmetria e bilinearità del prodotto scalare si ha

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$
$$\implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \implies \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

QED

Esercizio 6.1

Dimostrazione.

- **Traslazione:**

$$\overline{t_v(P)t_v(Q)} = \overline{t_v(P)P} + \overline{Pt_v(Q)} = \overline{t_v(P)P} + \overline{PQ} + \overline{Qt_v(Q)} = -v + \overline{PQ} + v = \mathrm{Id}(\overline{PQ}).$$

- **Riflessione rispetto ad un punto:**

$$\overline{r_C(P)r_C(Q)} = \overline{r_C(P)C} + \overline{Cr_C(Q)} = \overline{CP} + \overline{QC} = \overline{QP} = -\mathrm{Id}(PQ)$$

- **Riflessione rispetto ad un iperpiano:** Scegliamo un sistema di riferimento ortonormale tale che e_1 sia perpendicolare ad H ed $\langle e_2, \dots, e_n \rangle$ sia la giacitura di H. Definiamo quindi

$$\begin{array}{rccll} \varphi: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n & \\ & e_1 & \longmapsto & -e_1 & \\ & e_i & \longmapsto & e_i & i > 1 \end{array}$$

Osserviamo quindi che per costruzione $\overline{PN} = \langle \overline{PN}, e_1 \rangle e_1$, $\overline{QM} = \langle \overline{QM}, e_1 \rangle e_1$, e $\langle NM, e_1 \rangle = 0$. Di conseguenza

$$\varphi(\overline{PQ}) = \varphi(\overline{PN} + \overline{NM} + \overline{MQ}) = \varphi(\overline{PN}) + \varphi(\overline{NM}) + \varphi(\overline{MQ}) = \overline{NP} + \overline{NM} + \overline{QM}$$

Osserviamo ora che

$$\overline{r_H(P)r_H(Q)} = \overline{r_H(P)N} + \overline{NM} + \overline{MR_H(Q)} = \overline{NP} + \overline{NM} + \overline{QM} = \varphi(\overline{PQ})$$

QED

Esercizio 8.2

Cominciamo calcolando il gradiente di f per verificare che P sia effettivamente un punto singolare:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3ay, 3y^2) \rightsquigarrow \nabla f(0,0) = (0,0).$$

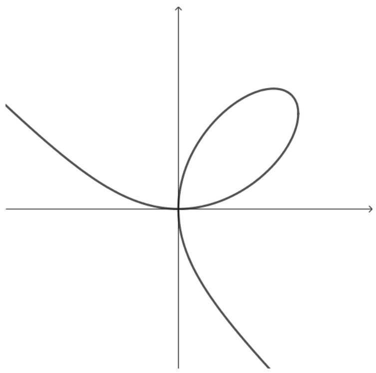
Ora studiamo la natura di P.

- $a = 0$:
  In questo caso P è un punto singolare triplo. Il termine omogeneo di grado 3 si scompone come $(x+y)(x^2+y^2-xy)$, in cui il secondo fattore non ha radici reali fatta eccezione per P, per cui il supporto della curva in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ è la bisettrice secondo-quarto quadrante.

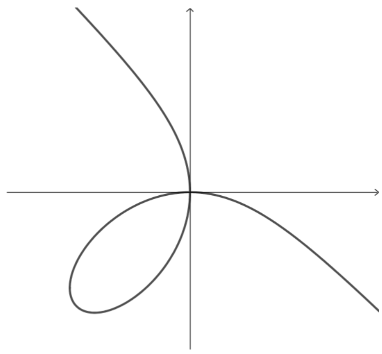
- $a \neq 0$:
  In questo caos 0 è un punto singolare doppio e le tangenti principali sono date da $-3axy = 0$, ovvero $x = 0$ o $y = 0$. L'origine è quindi un punto doppio e la curva ha quindi un nodo. Cerchiamo di capire quindi come è orientata la curva. Calcoliamo l'intersezione con la bisettrice primo-terzo quadrante:

$$\begin{cases} y = x \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^3 - 3ax^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow (0,0) \ e \ \left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$$

  Di conseguenza la curva ha i seguenti grafici:



$a > 0$



$a < 0$

10 Situazioni

Situazione 1. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V ($\mathbb{K}$-spazio vettoriale) con il sistema di riferimento canonico $(O, \{e_1, \dots, e_n\})$ e siano $P = (p_1, \dots, p_n)$ e $R = (r_1, \dots, r_n)$ due punti di $\mathbb{A}$. Siano inoltre S il sottospazio affine per P con giacitura $W = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ e T il sottospazio affine per R con giacitura $U = \langle u_1, \dots, u_t \rangle$*

Situazione 2. *Sia $\mathbb{E}^n$ uno spazio euclideo e $Oe_1 \dots e_n$ un sistema di riferimento cartesiano.*

Situazione 3. *Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo con $\dim V = n < \infty$ e $T \in \mathrm{End}(V)$ simmetrica.*

Situazione 4. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $U, W \lhd V$. Sia $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo su V.*

Riferimenti bibliografici

[Def23] Anneliese Defranceschi. 2023. URL: https://latemar.science.unitn.it/MiniCMS/ControllerServlet?action=showPage&ID=665768665344811.

[Ser00] Edoardo. Sernesi. *Geometria 1*. ita. 2. ed. riv. e ampl. Programma di matematica, fisica, elettronica. Torino: Bollati Boringhieri, 2000. ISBN: 9788833954479.

Changelog

v. 1.0 Conclusione del corso.

- **v. 1.1** Correzione di errori di battitura.
- **v. 1.2** Aggiunta di dettagli e chiarimenti ad alcune dimostrazioni.
  - **v. 1.2.1** Correzione typo
  - **v. 1.2.2** Correzione di numerosi typo ed errori nei calcoli, si ringrazia Jessica Brusco per le segnalazioni.