Meccanica Analitica

Davide Borra

v. 1.0

davide.borra@studenti.unitn.it - davideborra.github.io

Sommario

Riassunto delle note del corso di Fondamenti di Fisica Matematica (modulo I) tenuto dal prof. Valter Moretti. Il corso è basato sulla seconda edizione (non ancora pubblicata) del libro [Mor20], scritto dallo stesso docente.

Indice

1 La struttura matematica della meccanica classica

1.1 Varietà differenziabili

“ Controvoglia Riemann ha inventato la geometria moderna. ”

- Valter Moretti

Consideriamo uno spazio topologico M localmente euclideo, e consideriamo un sistema di carte locali, ovvero di coppie (U, ψ) con $U \subset M$ e $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ tale che $\psi(U)$ sia aperto in $\mathbb{R}^n$, $\psi|^{\psi(U)}$ sia un omeomorfismo e gli U ricoprano completamente M. Tuttavia questa struttura non è sufficiente, per cui imponiamo che le carte soddisfino una condizione ulteriore: la compatibilità.

DEF 1.1 (Compatibilità)**.** Due carte (U, φ) e (V, ψ) su M si dicono k-compatibili ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) se $U \cap V = \varnothing$ oppure se le funzioni di trasferimento

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \qquad \text{e} \qquad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

sono di classe $\mathcal{C}^k(U \cap V)$.

È inoltre conveniente che i domini delle carte siano aperti in M, ma possiamo scegliere di indurre la topologia su M da $\mathbb{R}^n$ per controimmagine, anche se è preferibile il primo caso. In particolare richiediamo che M sia uno spazio topologico T_2 e a base numerabile.

Definiamo quindi la struttura di varietà differenziabile, che useremo durante il corso.

DEF 1.2 (Varietà differenziabile)**.** Una varietà differenziabile di dimensione n e classe k con $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ è uno spazio topologico M localmente euclideo, T_2 e a base numerabile dotato di una struttura differenziabile di classe k e dimensione n ovvero una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tale che

i) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$;

ii) le carte locali in $\mathcal{A}$ siano k compatibili a due a due;

iii) $\mathcal{A}$ sia massimale rispetto a (*ii*), ovvero se una carta locale (V, ψ) soddisfa (*ii*), allora $(V, \psi) \in \mathcal{A}$.

Una carta locale che ricopre tutto M si dice *carta globale* o *sistema di coordinate globale*, ma in generale non è possibile trovarla, perciò si utilizza un sistema di carte locali. In particolare per lavorare è sufficiente considerare un atlante, ovvero una struttura differenziabile che non soddisfi (*iii*), in quanto si prova che ogni atlante induce un'unica struttura differenziabile massimale.

Questa struttura ci permette quindi di parlare di funzioni differenziabili su M.

DEF 1.3 (Rappresentazione in coordinate)**.** Sia $f : M \to N$ una funzione tra varietà differenziabili e (U, φ) e (V, ψ) due carte locali di M e N rispettivamente. Allora la funzione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ si dice rappresentazione in coordinate di f rispetto alle carte (U, φ) e (V, ψ).

DEF 1.4. Se M è una varietà differenziabile di classe k e N è una varietà differenziabile di classe h, una funzione $f : M \to N$ si dice differenziabile di classe r se per ogni coppia di carte locali (U, φ) e (V, ψ) di M e N rispettivamente, la rappresentazione in coordinate $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^r$ con $0 \leq r \leq \min\{h, k\}$.

In particolare due varietà differenziabili si dicono diffeomorfe se esiste una funzione differenziabile biunivoca tra esse, con inversa differenziabile. Si parla invece di diffeomorfismo locale se ciò vale solo per una coppia di carte locali con la struttura ereditata dalle varietà.

1.2 Lo spaziotempo della fisica classica

Per modellizzare la realtà fisica permettendoci di trattare in modo formale la pluralità di osservatori, ognuno con il proprio spazio di quiete indistinguibile dagli altri, è necessario introdurre il concetto di spaziotempo: un sistema assoluto in cui si trovano i sistemi di quiete relativi. Questo concetto nasce per la formulazione relativistica della fisica, ma può essere adattato per fornire una descrizione matematica formale della meccanica classica.

DEF 1.5 (Spaziotempo della fisica classica)**.** Lo spaziotempo della fisica classica è una varietà differenziabile quadridimensionale $\mathbb{V}^4$, i cui punti sono detti **eventi**.

$\mathbb{V}^4$ è dotato di una funzione privilegiata definita a meno di un'arbitraria costante additiva $T : \mathbb{V}^4 \to \mathbb{R}$, detta **tempo assoluto**, differenziabile, suriettiva e non singolare[a].

Si suppone inoltre che:

1. ciascuno dei sottoinsiemi a due a due disgiunti $\Sigma_t = \{p \in \mathbb{V}^4 : T(p) = t\} = T^{-1}(t)$, detto **spazio assoluto al tempo** $t \in \mathbb{R}$ sia dotato di una struttura di spazio euclideo tridimensionale (con giacitura V_t e prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$);
2. le strutture geometriche sugli spazi Σ_t devono essere compatibili con la struttura differenziabile di $\mathbb{V}^4$ nel senso che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, in un intorno O_e di ogni evento $e \in \Sigma_t$ esiste un sistema di coordinate quadridimensionale x^0, x^1, x^2, x^3 su $\mathbb{V}^4$ la cui restrizione a $O_e \cap \Sigma_t$ è un sistema di coordinate cartesiane tridimensionali ortonormali x^1, x^2, x^3 quando $x^0 = 0$.

Richiederemo che $\mathbb{V}^4$ sia una varietà differenziabile di classe ∞.

[a] ovvero che la matrice jacobiana della sua rappresentazione in coordinate non è singolare

“ Hawking diceva che neanche $\mathcal{C}^2$ andava bene, si doveva andare più in basso, ma tanto è morto, quindi facciamo come vogliamo. ”

- Valter Moretti

Osservazione 1.6. $\mathbb{V}^4 = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$ e $\Sigma_t \neq \varnothing \ \forall t \in \mathbb{R}$.

DEF 1.7 (Linea di universo o storia)**.** Una **storia**, o **linea di universo** (di un punto materiale) è una curva differenziabile $\gamma : I \to \mathbb{V}^4$ di classe ∞ con $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo diverso da un punto e tale che $T(\gamma(t)) = t + c_\gamma$, dove γ è una costante che dipende solo da γ.

Osservazione 1.8. L'ultima richiesta serve a impedire il verificarsi di paradossi temporali, in quanto imponiamo che la storia di un punto materiale sia univocamente determinata dal tempo assoluto.

L'ultimo passo che ci serve per arrivare alla descrizione matematica della meccanica classica è l'introduzione di un sistema di riferimento e di un sistema di coordinate. In particolare ci interessa scrivere $\mathbb{V}^4$ come prodotto cartesiano.

DEF 1.9 (Sistema di riferimento)**.** Un sistema di riferimento (o semplicemente *riferimento*) $\mathcal{R}$ è una coppia $(\pi_\mathcal{R}, \mathbb{E}_\mathcal{R})$, dove $\pi_\mathcal{R}$ è un'applicazione differenziabile e suriettiva

$$\pi_R : \mathbb{V}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{E}_\mathcal{R}$$

tale che $\pi_\mathcal{R}\big|_{\Sigma_t}$ sia un'isometria di spazi euclidei e $\mathbb{E}_\mathcal{R}$ è uno spazio euclideo tridimensionale detto spazio di quiete di $\mathcal{R}$ con giacitura $V_\mathcal{R}$.

Proposizione 1.10. *Sia $\mathcal{R} = (\pi_\mathcal{R}, \mathbb{E}_\mathcal{R})$ un sistema di riferimento. Allora l'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} S_\mathcal{R} : & \mathbb{V}^4 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R} \times \mathbb{E}_\mathcal{R} \\ & e & \longmapsto & (T(e), \pi_\mathcal{R}(e)) \end{array}$$

è biiettiva.

Osservazione 1.11. Questa proposizione afferma che la scelta di un sistema di riferimento permette di identificare $\mathbb{V}^4$ con $\mathbb{R} \times \mathbb{E}_\mathcal{R}$.

Dimostrazione.
- Iniettività: consideriamo due eventi e_1 ed e_2 distinti, si hanno quindi due possibilità:
  - $T(e_1) \neq T(e_2)$, per cui $e_1 \in \Sigma_{T(e_1)}$ e $e_2 \in \Sigma_{T(e_2)}$, ovvero $S_\mathcal{R}(e_1) \neq S_\mathcal{R}(e_2)$;
  - $T(e_1) = T(e_2) = t$, $e_1, e_2 \in \Sigma_t$ per cui vi individuano due punti distinti. Di conseguenza, $\pi_\mathcal{R}(e_1) \neq \pi_\mathcal{R}(e_2)$, in quanto $\pi_\mathcal{R}\big|_{\Sigma_t}$ è un'isometria.